(e). Je-li $m^2 + n^2 = r^2 = \varrho^2$, degeneruje zobecněná Bernoulliova kvartika ve dvojnásobně branou rovnoběžku s osou x o rovnici $(y - n)^2 = 0$ a elipsu

$$\frac{(x - m)^2}{r^2} + \frac{(y - n)^2}{4r^2} = 1. \tag{4,9}$$

Základní rovnice pro pohyb proměnného rovinného útvaru a její použití v theorii rovinných křivek.

Zdeněk Pírko, Praha.

V pojednání „Pohyb proměnného rovinného útvaru“*), otištěném v tomto časopise, odvodil jsem jisté velmi obecné rovnice (nazval jsem je „zobecněné rovnice Cesàrovy“) a ukázal, že vhodnou jejich specialisací lze dospět k rovnicím, které v podstatě nejsou nic jiného než „základní rovnice Mannheimovy — d'Ocagneovy“, z nichž vychází kinematická geometrie při studiu vlastností proměnného rovinného útvaru. Methoda, kterou jsem dospěl k zobecněným rovnicím Cesàrovým a odtud k základní rovnici pro pohyb proměnného rovinného útvaru, byla methoda pohyblivé soustavy souřadnic.

V tomto článku podávám jiné (dva) elementární důkazy této základní rovnice a to methodou klasické diferenciální geometrie a zároveň ukazuji na jinou možnost jejího použití, totiž v theorii rovinných křivek.

1. Budiž dána rovinná křivka Γ s obloukem σ a s parametrickými rovnicemi

$$\xi = \xi(\sigma), \quad \eta = \eta(\sigma), \tag{1}$$

kdež $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ jsou jednoznačné funkce parametru σ v jistém společném oboru, které mají první a druhou derivaci. Je-li τ úhel, který svírá kladná tečna této křivky s kladnou osou úseček soustavy, k níž je křivka Γ rovnicemi (1) vztažena, tu platí nejprve $\xi' = \cos \tau$, $\eta' = \sin \tau$ čili $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$ (jestliže jsme akcenty označili derivace podle oblouku σ) a tedy

$$\xi' \xi'' + \eta' \eta'' = 0. \tag{2_1}$$

Dále ze vztahu $\operatorname{tg} \tau = \eta' : \xi'$ plyne

$$\xi' \eta'' - \eta' \xi'' = \tau'. \tag{2_2}$$

Z obou rovnic obdržíme

$$\xi'' = -\eta' \tau', \quad \eta'' = \xi' \tau'. \tag{3}$$

*) Časopis pro pěst. mat. a fys., 71 (1946), 71—77.

Obecnému bodu (σ) křivky Γ přiřaďme nyní bod $(x; y)$ takto: na tečnu křivky Γ v bodě (σ) nanesme od bodu dotyku v kladném smyslu jejím délku $l = l(\sigma)$, kdež $l(\sigma)$ je daná jednoznačná funkce proměnné σ v jistém oboru, v němž jsou jednoznačné i funkce $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$, která má první derivaci. Krajní bod takto sestrojené úsečky (jiný než bod dotyku $(\xi; \eta)$) mějž souřadnice $(x; y)$. Nabývá-li parametr σ všech svých hodnot na křivce Γ, vytvoří body $(x; y)$ křivku C, jejíž parametrické rovnice jsou

$$x = \xi + l\xi', \; y = \eta + l\eta', \tag{4}$$

parametrem na křivce C je nyní ovšem oblouk na křivce Γ.

Z rovnic (4) vypočtěme

$$x' = (1 + l')\, \xi' + l\xi'', \;\; y' = (1 + l')\, \eta' = l\eta'', \tag{5}$$

takže platí nejprve

$$y'\xi' - x'\eta' = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')\, l$$

a tedy, vzhledem k rovnici (2_2),

$$y'\xi' - x'\eta' = l\tau'. \tag{6}$$

Z rovnic (5) vypočtěme ještě

$$x'\eta'' - y'\xi'' = (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')\,(1 + l');$$

i platí opět vzhledem k rovnici (2_2)

$$x'\eta'' - y'\xi'' = (1 + l')\, \tau'.$$

Zjednodušme ještě levou stranu této rovnice na základě vztahů (3), vylučme dále případ, že by čára Γ byla přímkou a vylučme ony body křivky Γ, v nichž má nulovou křivost; obdržíme posléze

$$x'\xi' + y'\eta' = 1 + l'. \tag{7}$$

Definujme jako kladný smysl na křivce C smysl, v němž roste její oblouk s. Označíme-li pak t úhel, který svírá kladná tečna křivky C s kladnou osou úseček soustavy, k níž je křivka C rovnicemi (4) vztažena, pak pro úhel ν, který svírají odpovídající si tečny křivek Γ, C platí

$$\nu = t - \tau$$

čili

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} \tau}{1 + \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \tau} = \frac{(y' : x') - (\eta' : \xi')}{1 + (y' : x')\,(\eta' : \xi')} = \frac{y'\xi' - x'\eta'}{x'\xi' + y'\eta'}. \tag{8_1}$$

Použijeme-li tedy rovnic (6), (7), nalezneme pro úhel ν výraz, který není závislý na soustavě souřadnic, totiž:

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{l\tau'}{1 + l'}. \tag{9}$$

Vypočtěme nyní (za předpokladu, že $1 + l' \neq 0$)

$$\sin \nu = \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \nu}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + (1 + l')^2 \tau'^{-2}}}.$$

Použijeme-li znovu rovnic (6), (7), nalezneme nejprve

$$l^2 + (1 + l')^2 \tau'^{-2} = [(y'\xi' - x'\eta')^2 + (x'\xi' + y'\eta')^2] \tau'^{-2} =$$
$$= (x'^2 + y'^2)(\xi'^2 + \eta'^2) = s'^2 \tau'^{-2} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.$$

Obdrželi jsme tedy tento výraz pro element oblouku křivky C, nezávislý na soustavě souřadnic:

$$\mathrm{d}s = \frac{l\, \mathrm{d}\tau}{\sin \nu}. \tag{10}$$

Jiný způsob, jímž můžeme odvodit vztah (9), je tento: Označíme-li $\varkappa$ křivost křivky Γ v bodě (σ), platí nejprve známý vztah

$$\varkappa = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix}; \tag{11}$$

pro křivku C platí parametrické rovnice (4) a z nich vyplývající rovnice (5); pro úhel ν pak platí vztah (8_1)

$$\operatorname{tg} \nu = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ x' & y' \end{vmatrix} : (x'\xi' + y'\eta'). \tag{8_2}$$

Používajíce rovnic (5), můžeme psát rovnici (8_2) také ve tvaru

$$\operatorname{tg} \nu = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi' + l\xi'' + l'\xi' & \eta' + l\eta'' + l'\eta' \end{vmatrix} :$$
$$: [(\xi' + l\xi'' + l'\xi')\, \xi' + (\eta' + l\eta'' + l'\eta')\, \eta'].$$

Snadnou úpravou však nalezneme

$$\operatorname{tg} \nu = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix} l : (1 + l')$$

a tedy podle (11)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\varkappa l}{1 + l'},$$

což je rovnice (9).

2. Rovnice (9) a její důsledek, rovnice (10), byly v práci, o níž se zmiňuji v úvodu, východiskem k odvození základních rovnic Mannheimových — d'Ocagneových v kinematické geometrii proměnného rovinného útvaru. Ukažme zde na možnost jiného použití rovnice (9)! Žádáme-li, aby úhel ν byl stálý, je nutno a stačí volit funkci $l(\sigma)$ tak, aby vyhovovala lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$l' - \varkappa l \operatorname{cotg} \nu + 1 = 0 \quad (\nu = \text{konst.}).$$

Bude tedy

$$l = \exp\,(\operatorname{cotg} \nu \textstyle\int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, [C - \int \exp\,(- \operatorname{cotg} \nu \int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, \mathrm{d}\sigma]$$

(C integrační konstanta)

a z rovnic (4) obdržíme

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \exp\,(\operatorname{cotg} \nu \textstyle\int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, [C - \int \exp\,(- \operatorname{cotg} \nu \int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, \mathrm{d}\sigma]\, \xi' \\ y &= \eta + \exp\,(\operatorname{cotg} \nu \textstyle\int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, [C - \int \exp\,(- \operatorname{cotg} \nu \int \varkappa\, \mathrm{d}\sigma)\, \mathrm{d}\sigma]\, \eta' \end{aligned}\right\} \tag{12_1}$$

Budiž nyní $\varkappa = \varkappa(\sigma)$ přirozená rovnice křivky Γ. Pak rovnice (12_1) vyjadřují parametricky (parametrem je oblouk σ) všechny trajektorie, které protínají tečny křivky Γ pod stálým úhlem ν, vyjadřují tudíž *isogonální trajektorie tečen křivky Γ*. Tuto okolnost je však možno vyjádřit ještě jinak. Tečna křivky Γ svírá s normálou křivky C stálý úhel $\frac{1}{2}\pi - \nu$, jinými slovy: křivka Γ je obálkou přímek, které svírají s normálami křivky C stálý úhel čili křivka Γ je *evolutoidou* křivky C. Považujeme-li nyní křivku Γ za křivku základní, jak jsme to dosud činili, je křivka C *inversní evolutoidou čili evolventoidou* křivky Γ; (12_1) jsou parametrické rovnice všech těchto evolventoid.

Ve zvláštním případě, když křivkou Γ je kružnice

$$\xi = a \cos \frac{\sigma}{a}, \quad \eta = a \sin \frac{\sigma}{a}, \quad \text{t. j. } \varkappa = \frac{1}{a}, \tag{13}$$

obdržíme z rovnic (12_1)

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \frac{\sigma}{a} - \left[a \operatorname{tg} \nu + C \exp\left(\frac{\sigma}{a} \operatorname{cotg} \nu\right)\right] \sin \frac{\sigma}{a} \\ y &= a \sin \frac{\sigma}{a} + \left[a \operatorname{tg} \nu + C \exp\left(\frac{\sigma}{a} \operatorname{cotg} \nu\right)\right] \cos \frac{\sigma}{a} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

jakožto parametrické vyjádření všech evolventoid kružnice (13).

Poznamenejme ještě, že rovnice (14) ztrácejí platnost v případě trajektorií ortogonálních, t. j. pro $\nu = \frac{1}{2}\pi$. V tomto případě je podle (9)

$$1 + l' = 0 \text{ čili } l = C - \sigma$$

(C integrační konstanta)

a rovnice (12_1) se redukují na

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + (C - \sigma)\, \xi' \\ y &= \eta + (C - \sigma)\, \eta' \end{aligned}\right\}. \tag{12_2}$$

Tak zase pro kružnici (13) a $\nu = \frac{1}{2}\pi$ nalezneme

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \frac{\sigma}{a} - (C - \sigma) \sin \frac{\sigma}{a} \\ y &= a \sin \frac{\sigma}{a} + (C - \sigma) \cos \frac{\sigma}{a} \end{aligned}\right\}.$$

Žádáme-li, aby pro $\sigma = 0$ bylo $x = a$, $y = 0$, bude i $C = 0$ a za těchto podmínek obdržíme z předcházejících rovnic (s novým parametrem $\omega = \frac{\sigma}{a}$)

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,(\cos \omega + \omega \sin \omega) \\ y &= a\,(\sin \omega - \omega \cos \omega) \end{aligned}\right\},$$

parametrické rovnice evolventy kružnice, jak jsme mohli očekávat.