

Werk

Label: Article

Jahr: 1947

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0072|log71

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

resp. $r' = r(a^2 + b^2) : |(a^2 - b^2)|$, kde r je poloměr kružnice l , $a, b \neq a$ jsou poloosy dané elipsy resp. hyperboly. Sestrojená kružnice a kuželosečka se protínají v bodech S' , k nimž užitím transformace $\{l, U\}$ sestrojíme body S , které jsou středy hledaných kuželoseček.

Vrchol základním bodem svazku kuželoseček.

Zdeněk Pachta, Pelhřimov.

Množství všech kuželoseček, jež mají čtyři (různé či splývající) body společné, nazýváme svazkem. Uvedené body jsou základní body svazku.

Chceme-li ve svazku určit konečný počet kuželoseček s určitými vlastnostmi, volíme si příslušnou (pátou) podmínku. Učíme tak a vytkneme pro kuželosečky, náležející svazku o základních bodech A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), podmínku vyjádřenou takto:

Úloha 1.: Sestrojit kuželosečku ve svazku o základních bodech A_i , ($i = 1, 2, 3, 4$), tak, aby bod A_1 byl jejím vrcholem.

Poznámka: 1. O základních bodech svazku učiníme následující předpoklad: alespoň dva ze základních bodů jsou reálné a v jednom z těchto bodů je vrchol.

2. O speciálních případech, kdy dva body nahradíme tečnou s bodem dotyku, je učiněna poznámka dále, kromě případu tečny ve vrcholu, který je řešitelný elementárním způsobem, odlišným od řešení dále uvedeného.

Chceme-li řešit úlohu č. 1. čistě konstruktivně, pak užijeme těchto triviálních pouček:

1. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod byl vrcholem středové kuželosečky, jest: normála kuželosečky v tomto bodě prochází jejím středem.*

2. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod byl vrcholem paraboly, jest: normála v tomto bodě je osou paraboly.*

Na těchto poučkách založíme postup našeho řešení. Určíme si: I. *Geometrické místo středů* všech kuželoseček svazku; II. *Vztah normál v bodě A_1 všech kuželoseček svazku vzhledem k jisté hvězdici jejich průměrů.*

Poznámka: 1. Libovolnou normálou v bodě A_1 je stanovena určitá kuželosečka jednoznačně a tím též její střed, který obecně neleží na zvolené normále. Přesné znění podmínky II., která je zde formulována spíše názorově, vysvětluje dále z odvození vztahu (5).

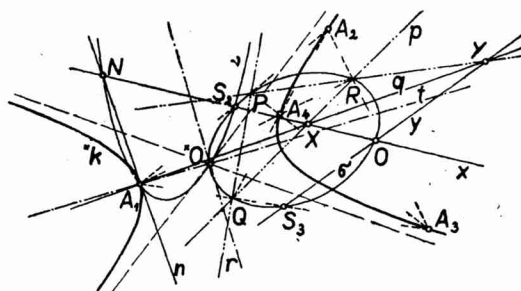
2. Většina vět při důkazech dále uvedených jsou základní poučky projektivní geometrie a základní vlastnosti kuželoseček, proto jsou použity bez důkazů.

3. Symbolika a terminologie je užita podle knihy: Dr. V. Hlavatý: Projektivní geometrie I., Praha 1944, až na označení bodů a přímek.

Poučka. Geometrickým místem středů kuželoseček svazku je kuželosečka zvaná středová.

Důkaz: Použijeme poněkud odlišného způsobu, než bývá uváděn v knihách, protože tím zkrátíme postup odvození vztahu (5).

Základní body svazku kuželoseček jsou A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Vrcholy společného polárního trojúhelníka kuželoseček svazku označíme P, Q, R a příslušné poláry p, q, r . Středů úseček $A_1 A_j$ označíme S_j ($j = 2, 3, 4$). (Viz obrázek.)



Rovinná hvězdice $A_1(t_0, t_1, \dots)$ určuje každou svou přímkou jako tečnou jednoznačně určitou kuželosečku k_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) svazku. Bod $X_r \equiv \overline{t_r p}$ je pólem přímky $\overline{A_1 A_2}$ vzhledem k příslušné kuželosečce k_r a proto $\overline{X_r S_2} \equiv x_r$ prochází středem O_r kuželosečky k_r . Podobné vztahy platí pro bod $Y_r \equiv \overline{t_r q}$ a pro $\overline{Y_r S_3} \equiv y_r$. Mezi rovinnými hvězdici platí vztahy:

$$A_1(t_0, t_1, \dots) :: S_2(x_0, x_1, \dots), \quad (1)$$

$$A_1(t_0, t_1, \dots) :: S_3(y_0, y_1, \dots) \quad (2)$$

a proto:

$$S_2(x_0, x_1, \dots) :: S_3(y_0, y_1, \dots), \quad (3)$$

z čehož plyne, že středy O_r kuželoseček svazku jsou na kuželosečce, označené σ , vytvořené průsečíky odpovídajících si přímek hvězdic uvedených ve vztahu (3).

Pro hvězdici normál $A_1(n_0, n_1, \dots)$ kuželoseček k_r , určených příslušnými tečnami t_r , ($r = 0, 1, 2, \dots$) platí vztahy:

$$A_1(n_0, n_1, \dots) :: A_1(t_0, t_1, \dots) \quad (4)$$

a použitím vztahu (1) dostáváme:

$$A_1(n_0, n_1, \dots) :: S_2(x_0, x_1, \dots), \quad (5)$$

což značí, že průsečíky $N_r \equiv \overline{n_r x_r}$ přímek uvedených hvězdic, odpovídajících si ve vztahu (5), vytvářejí kuželosečku (různou od σ) označenou ν . Vlastnost této kuželosečky ν je: každý její bod je průsečíkem normály n_r (kuželosečky k_r) s určitým průměrem x_r z hvězdice $S_2(x_0, x_1, \dots)$, kde ovšem průměr x_r přísluší téže kuželosečce svazku.

Vlastní řešení uvedeme pouze stručně. Je zřejmé, že společné průsečíky kuželoseček σ a ν , ovšem kromě náhodného bodu S_2 , jsou středy hledaných kuželoseček, vázaných podmínkou vpředu stanovenou.

Bod S_2 vyhovuje úloze jedině tehdy, platí-li $\overline{A_1 S_2} \perp p$, neboť bodem S_2 , jakožto středem, je stanovena kuželosečka svazku, která má v bodě A_1 tečnu rovnoběžnou s polárou p .

Místo hvězdice $S_2(x_0, x_1, \dots)$ mohli jsme ve vztahu (5) použít také na př. hvězdice $S_3(y_0, y_1, \dots)$. To by vedlo k jiné kuželosečce než je ν , ale výsledné tři body — středy hledaných kuželoseček — dostali bychom vždy tytéž, což lze snadno odůvodnit, uvažíme-li uvedené vytvoření kuželosečky středové použitím hvězdice tečen $A_1(t_0, t_1, \dots)$.

Speciální případy, kde dva nebo tři z daných tří bodů (kromě vrcholu) jsou nahrazeny tečnou s dotykovým bodem nebo oskulační kružnicí v příslušném bodě, řeší se stejně. Rovněž *rovnoosá hyperbola určená vrcholem a dvěma body* (nebo vrcholem a tečnou s bodem dotyku) má řešení stejné s předchozím obecným případem. Čtvrtý základní bod svazku kuželoseček je v průsečíku výšek trojúhelníka daných tří bodů. Středová kuželosečka je zde t. zv. Feuerbachova kružnice devíti bodů.

V každém z uvedených příkladů dostaneme vždy alespoň jedno řešení vedoucí k reálné kuželosečce. Jsou-li dva z daných bodů komplexně sdružené (vrchol reálný), dostaneme rovněž alespoň jednu výslednou kuželosečku reálnou. (Odůvodnění: Existuje nejméně jeden reálný bod S_i , který je průsečíkem kuželoseček ν a σ , čímž je zaručen ještě druhý reálný průsečík.)

Žádnou z uvedených úloh (vyjma případ, kdy středová kuželosečka se stává složenou) nelze řešit pouhým pravítkem a kružítkem. Upravme si proto podmínky takto:

Úloha 2.: Čtyřmi body kružnice proložit kuželosečku, mající v jednom ze zvolených bodů (reálném) vrchol.

Úloha 3.: Třemi body paraboly proložit kuželosečku, mající vrchol ve vrcholu paraboly.

Tyto úlohy 2., 3. je možno řešit kružítkem a pravítkem. Řešení přenechávám čtenáři.

Po vyřešení předešlých úloh vnučuje se nám otázka, jak řešit zdánlivě podobný případ u paraboly, totiž:

Úloha 4.: Sestrojit parabolu, danou vrcholem a dvěma body.

Poznámka: 1. Tato úloha nepatří logicky k úloze 1., neboť jsme vpředu užívali vlastností svazku kuželoseček, kdežto zde nejde o svazek. Řešení je tedy odlišné.

2. Příklad s elementy imaginárními (vrchol reálný) je výhodnější řešit postupem, odlišným od způsobu zde uvedeného, na př. způsobem užitým při řešení obecnější úlohy p. Ing. Langrem v Rozhledech roč. 23., str. 58—60.

Řešení: Dáno: vrchol V , body A, B . Spojnice $\overline{VA}$ je asymptotou hyperboly, označené h ; střed její je souměrný podle bodu A k vrcholu V ; budiž označen O . Druhá asymptota je rovnoběžná se spojnicí $\overline{AB}$. Spojnice $\overline{VB}$ je tečnou hyperboly h , bod B jejím dotykovým bodem. Tím je hyperbola h určena. Nad úsečkou $\overline{VB}$ jakožto průměrem opišeme kružnici označenou k . Bod B jsme volili pro obě křivky společný, protože kružnice k protíná hyperbolu h ve třech dalších bodech M_i , $i = 1, 2, 3$ (jeden musí býti reálný, dva mohou býti komplexně sdružené). Spojnice $\overline{VM_i}$ jsou vrcholové tečny hledaných parabol. Další postup je již snadný.

Odůvodnění řešení: Nejprve vyslovíme podmínku, která bude vedoucí pro postup řešení: k tečně paraboly v bodě V musí býti příslušný průměr kolmý (pak je ovšem osou). Zvolíme-li si libovolný směr za průměr paraboly, procházející body V, A, B , je tím jednoznačně určena parabola, a tečna k ní v bodě V svírá s příslušným průměrem úhel, obecně různý od pravého. Sestrojíme pro obecně zvolený průměr p tečnu k parabole v bodě V použitím Pascalovy poučky: označme $V \equiv 1 \equiv 2$; $A \equiv 3$, $B \equiv 4$, a směr průmětu p nám udává na nevlastní přímce splývající body: $5 \equiv 6$. Pro Pascalovu přímku dostáváme body: Předně U_∞ , t. j. průsečík tečny u_∞ (t. j. nevlastní přímky) se spojnicí $\overline{VA}$ (čili nevlastní bod této přímky). Druhý bod je P , t. j. průsečík přímky $p \equiv \overline{1\bar{Q}}$ s přímkou $\overline{3\bar{4}} \equiv \overline{AB}$. Pascalova přímka, označená $m \equiv \overline{P\bar{U}_\infty}$, protíná přímku $\overline{4\bar{5}}$, t. j. rovnoběžku s průměrem p bodem B , označenou n , v bodě H . Spojnice $\overline{VH}$ je hledaná tečna.*) Probereme-li případ celé hvězdice průměrů, dostáváme výsledky:

$$V(p, p_1, \dots) :: B(n, n_1, \dots), \quad (6)$$

$$V(p, p_1, \dots) :: U_\infty(m, m_1, \dots), \quad (7)$$

a porovnáním obou vztahů dostáváme:

$$B(n, n_1, \dots) :: U_\infty(m, m_1, \dots), \quad (8)$$

*) Provedeme-li záměnu označení pro použití Pascalovy věty ve smyslu: $B \equiv 3$, $A \equiv 4$, dostáváme při stejném postupu bod H jiný, avšak výsledná spojnice $\overline{VH}$, t. j. tečna v bodě V , je totožná s výslednou tečnou alternativy první. Tím je odůvodněna pro další postup oprávněnost užívání pouze jedné alternativy.