Geometrické místo středů podobných kuželoseček v síti kuželoseček.

Dr Alois Urban, Praha.

1. Úvod. Úkolem článku je odvodit syntheticky několik vět o středech podobných kuželoseček[1]) v síti kuželoseček o společném polárním trojúhelníku[2]) a ukázat, jak se jich dá užít k řešení některých úloh o podobných kuželosečkách. K odvození vět je použito kvadratické transformace, jež středu kuželosečky sítě přiřazuje střed kvadratické bodové involuce na libovolné pevné jednoduché kuželosečce, do níž se z libovolného vlastního bodu na této kuželosečce promítá involuce harmonických pólů na nevlastní přímce, kterou na ní indukuje zvolená kuželosečka sítě.

2. Kvadratická transformace $\{l, U\}$. Nechť je dán trojúhelník o vrcholech P, Q, R, o nichž předpokládáme, že jsou vlastní. Strany trojúhelníka označme $p = QR$, $q = RP$, $r = PQ$. Dále nechť je dána pevná jednoduchá kuželosečka l a na ní pevný vlastní bod U, kterým jsou vedeny přímky $'p \parallel p$, $'q \parallel q$, $'r \parallel r$. Jejich další průsečíky s l nechť jsou body P', Q', R'. Strany trojúhelníka $P'Q'R'$ označme $r' = Q'R'$, $q' = R'P'$, $r' = P'Q'$.

Všimneme si přiřazení bodů S a S', které je definováno tímto předpisem:

Definice přiřazení $\{l, U\}$. Nechť $S \neq P, Q, R$; pak S' nechť je průsečík P_SP' a Q_SQ', kde P_S (Q_S) je další průsečík přímky $p_S \parallel PS$ ($q_S \parallel QS$), vedené bodem U, s kuželosečkou l. Nechť $S' \neq P', Q', R'$; pak S nechť je průsečík přímek ${}_1p_S$ a ${}_1q_S$, kde ${}_1p_S \parallel P_SU$ (${}_1q_S \parallel Q_SU$) je přímka vedená bodem P (Q), při čemž P_S (Q_S) je průsečík různý od P' (Q') přímky $S'P'$ ($S'Q'$) s kuželosečkou l.

Toto přiřazení zřejmě závisí na volbě kuželosečky l a bodu U na ní a proto je označíme jako přiřazení $\{l, U\}$. V definici přiřazení jsme použili ze šesti bodů P, Q, R, P', Q', R' jen čtyř P, Q, P', Q'; zřejmě můžeme sestrojiti podobné přiřazení také pomocí bodů P, R, P', R' a Q, R, Q', R'. Dá se však ukázat, že všechna tři přiřazení jsou ekvivalentní a to v tom smyslu: Je-li S' (S'', S''') bod, který v přiřazení $\{l, U\}$, sestrojenému na základě bodů P, Q, P', Q' (P, R, P', R'; Q, R, Q', R'), odpovídá bodu S, pak $S' = S'' = S'''$. Tohoto tvrzení však nebude v dalším třeba.

---

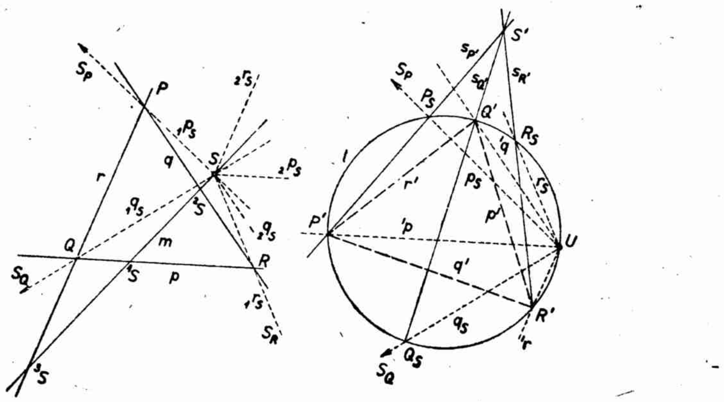
[1]) Podobnými kuželosečkami rozumíme kuželosečky, které lze převésti v sebe grupou podobnostních transformací připuštěných v euklidovské rovině. (Viz V. Hlavatý: Projektivní geometrie, II. díl, def. (1,1), str. 249 a def. (5,1), str. 271).

[2]) Omezujeme se tedy na speciální síť kuželoseček bez základních bodů; obdobným způsobem lze však uvažovati i o jiných sítích.

Všimněme si ještě, že uvedeným způsobem je každému $S \neq P, Q, R$ přiřazen jediný bod S' a obráceně každému $S' \neq P'$, Q', R' je přiřazen jediný bod S, neboť všechny uvedené konstrukce jsou určité a jednoznačné. Tedy přiřazení $\{l, U\}$ je jednojednoznačné až na určité výjimky.

2.1 Přiřazení $\{l, U\}$ je kvadratickou transformací; hlavní body jednoho pole jsou P, Q, R, hlavní body druhého pole jsou P', Q', R'.

Důkaz. Zvolme v soustavě bodů S přímku m, která neprochází body P, Q, R. Hledejme co jí odpovídá v přiřazení $\{l, U\}$. Označme



Obr. 1.

nevlastní přímku roviny u; podle definice přiřazení $\{l, U\}$ platí (viz obr. 1.)

$$m(S, \ldots) :: P({}_1p_S, \ldots) :: u(S_P, \ldots) :: U(p_S, \ldots) :::$$
$$::: l(P_S, \ldots) ::: P'(s_{P'}, \ldots).$$

Současně platí

$$m(S, \ldots) :: Q({}_1q_S, \ldots) :: u(S_Q, \ldots) :: U(q_S, \ldots) :::$$
$$::: l(Q_S, \ldots) ::: Q'(s_{Q'}, \ldots).$$

Odtud plyne

$$P'(s_{P'}, \ldots) ::: Q'(s_{Q'}, \ldots). \qquad (*)$$

Výtvorem této projektivity, t. j. geometrickým místem bodů S' odpovídajících bodům S přímky m, je kuželosečka m'. Tato kuželosečka je jednoduchá. Kdyby byla složená, pak projektivita (*) by musela býti perspektivitou (vždy je totiž $P' \neq Q'$), t. j. přímce r' ve hvězdici P' by musela odpovídati táž přímka r' ve hvězdici Q'. K přímce r' ve hvězdici P' dojdeme však, hledáme-li k průsečíku

${}^2S = qm$ odpovídající bod ${}^2S'$; k přímce r' ve hvězdici Q' dojdeme, hledáme-li k bodu ${}^1S = pm$ odpovídající ${}^1S'$; ježto dle předpokladu přímka m neprochází žádným z bodů P, Q, R, je ${}^1S \neq {}^2S$ a tedy přímka r' v projektivitě (*) není samodružnou, tedy m', nemůže býti složená.

Podobně by se dalo ukázat, že přímce n' v soustavě bodů S', která neprochází body P', Q', R', odpovídá jednoduchá kuželosečka n.

Z uvedeného již plyne, že přiřazení $\{l, U\}$ je kvadratickou transformací. Je hned zřejmé, že hlavní body pole bodů S jsou P, Q, R a hlavní body pole bodů S' jsou P', Q', R'.

Všimněme si nyní sítě kuželoseček o společném polárním trojúhelníku. Nechť trojúhelník PQR je právě tímto polárním trojúhelníkem.

2.2 Středu S jednoduché kuželosečky k [3]) dané sítě odpovídá kvadratickou transformací $\{l, U\}$ střed S' kvadratické bodové involuce na kuželosečce l; tato involuce je průmětem involuce harmonických pólů, kterou kuželosečka k indukuje na nevlastní přímce, z bodu U na kuželosečku l. Obráceně každému S' neležícímu na p', q', r' odpovídá kvadratickou transformací $\{l, U\}$ jediný bod S. Ten je středem jednoduché kuželosečky sítě, která indukuje na nevlastní přímce involuci harmonických pólů, jež se z U promítá na l do kvadratické involuce o středu S'.

Důkaz. Nechť bod S je středem jednoduché kuželosečky sítě. Zřejmě S nemůže ležet na p (q, r); kdyby S ležel na p (q, r), pak by nevlastní přímka, t. j. polára středu S, musela procházet bodem P (Q, R), což dle předpokladu o bodu P (Q, R) není možné. Nechť I_k je involuce sdružených průměrů této kuželosečky. Involuce I_k protíná nevlastní přímku v bodové involuci ${}_uI_k$, kterou promítneme z bodu U na kuželosečku l do bodové kvadratické involuce I'_k, jejíž střed je bod S', který v kvadratické transformaci $\{l, U\}$ odpovídá bodu S. Skutečně: uvažme, že do involuce I_k patří pár sdružených průměrů ${}_1p_S, {}_2p_S$ $({}_1q_S, {}_2q_S; {}_1r_S, {}_2r_S)$, kde ${}_1p_S = PS$, ${}_2p_S$ je rovnoběžné s p a prochází bodem S $({}_1q_S = QS$, ${}_2q_S \parallel q$ a jde bodem S; ${}_1r_S = RS$, ${}_2r_S \parallel r$ jde bodem $S)$. Pár involuce I'_k sestrojíme jako průsečíky rovnoběžek $p_S \parallel {}_1p_S$, $'p \parallel {}_2p_S \parallel p$ $(q_S \parallel {}_1q_S$, $'q \parallel q$; $r_S \parallel {}_1r_S$, $'r \parallel r)$, jdoucích bodem U, s kuželosečkou l. Tím dostaneme body P_S, P' $(Q_S, Q'; R_S, R')$. Střed involuce I'_k leží na spojnici P_SP' $(Q_SQ'$, $R_SR')$ a je tedy bodem S' přiřazeným transformací $\{l, U\}$ bodu S.

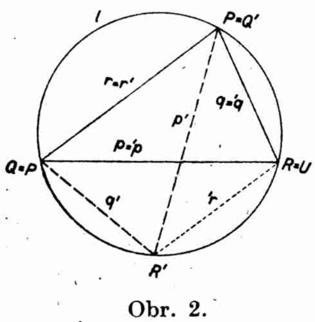
Obráceně. Zvolme bod S' a pokládejme jej za střed kvadratické bodové involuce I'_k na l. Promítněme tuto involuci z bodu U na nevlastní přímku u do bodové involuce ${}_uI_k$. Tato involuce určuje

[3]) Středem paraboly rozumíme její nevlastní bod.

v síti kuželoseček kuželosečku. Nechť S' leží na p' (q', r'), pak zmíněná kuželosečka v síti je složená. V tomto případě totiž do involuce I'_k náleží pár Q', R' (R', P'; P', Q'), tedy do involuce ${}_uI_k$ náleží pár nevlastních bodů přímek q, r (r, p; p, q). Pól nevlastní přímky je pak bod P (Q, R), příslušná kuželosečka nemůže tedy býti jednoduchá. Nechť tedy S' neleží na p', q', r'. Involuce ${}_uI_k$ neobsahuje mezi svými páry žádnou dvojici z nevlastních bodů přímek p, q, r. V síti existuje tedy jednoduchá kuželosečka k, která na nevlastní přímce indukuje involuci ${}_uI_k$. Její střed je transformací $\{l, U\}$ přiřazen bodu S'. Hledejme totiž pól nevlastní přímky. Stačí najít průsečík polár dvou jejích bodů. Polára nevlastního bodu přímky $p(q)$ je přímka ${}_1p_S \parallel p_S$ jdoucí $P({}_1q_S \parallel q_S$ jdoucí $Q)$, při čemž nevlastní body přímek p, p_S (q, q_S) jsou páry involuce ${}_uI_k$. Průsečík ${}_1p_S$ a ${}_1q_S$ je střed S zmíněné kuželosečky k a současně je bodem, který je v transformaci $\{l, U\}$ (dle definice tohoto přiřazení) přiřazen bodu S'.

Poznámka: Věta 2.2 jedná o středech jednoduchých kuželoseček sítě. V uvažované síti existují však také složené kuželosečky. Jsou to páry přímek přímkových involucí ve vrcholech společného polárního trojúhelníka; samodružné přímky těchto involucí jsou strany polárního trojúhelníka. Středy těchto složených kuželoseček, pokud jsou složeny ze dvou různých přímek, jsou právě vrcholy polárního trojúhelníka.

V dalším budeme potřebovati jen té okolnosti, že při volbě libovolné kuželosečky l a vlastního bodu U na ní, jsou body S a S', o nichž mluví věta 2.2, vázány kvadratickou transformací $\{l, U\}$. Můžeme tedy l a U voliti pokud možno výhodně. Za kuželosečku l zvolíme kružnici, jinak může býti poloha l a bodu U na ní libovolná. Abychom této možnosti využili i konstruktivně, předpokládejme v dalším: l je kružnicí opsanou polárnímu trojúhelníku PQR sítě kuželoseček a $U = R$ (obr. 2).



Obr. 2.

2.3 Geometrické místo středů všech hyperbol uvažované sítě kuželoseček, podobných dané nikoliv rovnoosé[4]) hyperbole, resp. komplementární hyperbole, je kvartika se třemi uzlovými body ve vrcholech společného polárního trojúhelníka sítě. Její reálné body leží vně tohoto trojúhelníka.

---

[4]) Případ rovnoosé hyperboly je probrán v další větě.

Důkaz. Daná hyperbola nechť má poloosy $a, b, a \neq b$. Uvažujme hyperbolu sítě, která je podobná dané hyperbole, resp. hyperbole komplementární a má poloosy a_1, b_1. Dle předpokladu $a_1 : b_1 = a : b$. Promítněme involuci harmonických pólů ${}_uI_k$, jež uvažovaná hyperbola indukuje na nevlastní přímce, z bodu U na kružnici l. Průmětem je kvadratická bodová involuce I'_k, jejíž střed S' má od středu kružnice l vzdálenost $r' = r\,(a_1^2 + b_1^2) : : |(a_1^2 - b_1^2)| = r\,(a^2 + b^2) : |(a^2 - b^2)|$, kde r je poloměr kružnice l. Nalezený vztah platí pro každou hyperbolu sítě podobnou dané hyperbole resp. hyperbole s ní komplementární. Leží tedy body S' na kružnici m' soustředné s l a poloměru r' ($> r$). Dle známé věty z theorie kvadratických transformací kružnici m' kvadratickou transformací $\{l, U\}$ odpovídá kvartika m uvedených vlastností. Dle věty 2.2 každému bodu na m', neležícímu na p', q', r', odpovídá na m bod neležící na p, q, r, jenž je středem hyperboly podobné dané, resp. s ní komplementární. Průsečíkům přímky p' (q', r') s kružnicí m' kvadratickou transformací $\{l, U\}$ odpovídá $P(Q, R)$; tento bod je středem složených kuželoseček sítě, které jsou složeny z přímek involuce v $P(Q, R)$ o samodružných přímkách q, r (p, r; p, q); mezi těmito složenými kuželosečkami existují právě dvě kuželosečky sítě složené vždy z páru přímek, svírajících úhel rovný úhlu asymptot hyperbol podobných dané hyperbole $\left(\varphi = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}\right)$. Tyto složené kuželosečky, právě vzhledem k uvedené vlastnosti, lze pokládati za podobné dané hyperbole, takže ve větě 2.3 není nutno vyjmouti uzlové body zmíněné kvartiky.

Poznámka: Je-li místo poloos $a, b, a \neq b$ dán přímo úhel asymptot φ, pro který platí $-\pi < \varphi < \pi$, $\varphi \neq 0, \pm \frac{1}{2}\pi$, pak pro r' platí

$$r' = r : \cos \varphi \quad \text{při } 0 < |\varphi| < \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$r' = r : \cos (\pi - \varphi) \text{ při } \tfrac{1}{2}\pi < |\varphi| < \pi.$$

2.4 Geometrickým místem středů rovnoosých hyperbol sítě kuželoseček o společném polárním trojúhelníku je kružnice opsaná tomuto polárnímu trojúhelníku[5]).

Důkaz. Pro každou rovnoosou hyperbolu uvažované sítě je střed S' involuce I'_k, zmíněné v důkaze předchozí věty, na nevlastní přímce v'. Přímce v' kvadratickou transformací $\{l, U\}$ odpovídá kuželosečka v, procházející hlavními body P, Q, R transformace. Snadno se ukáže, že v je kružnicí: Nechť S' je nevlastní bod. Dle definice přiřazení $\{l, U\}$ stanovíme na l body P_S, Q_S. Jelikož S' je bod nevlastní, je $P_SP' \parallel Q_SQ'$. Dále je zřejmé, že $\overline{P_SQ_S} = \overline{PQ}$

[5]) Jinak formulováno: Kružnice opsaná polárnímu trojúhelníku rovnoosé hyperboly prochází středem této hyperboly. Viz V. Jarolímek: Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru, díl IV, str. 26.

(je totiž $P' = Q$, $Q' = P$ dle volby kružnice l). Podle konstrukce bodu S je $PS \parallel P_S U$ a $QS \parallel Q_S U$, tedy $\sphericalangle P_S U Q_S = \sphericalangle PSQ$. Odtud již je patrno, že kuželosečka v je kružnicí, tedy $v = l$. Nevlastnímu bodu S', různému od nevlastních bodů přímek p', q', r', odpovídá dle věty **2.2** střed S jednoduché kuželosečky sítě. Nevlastnímu bodu přímky p' (q', r') odpovídá bod P (Q, R). Obdobným způsobem jako v důkaze předchozí věty lze ukázat, že P (Q, R) je středem jediné kuželosečky sítě složené z páru kolmic. Tedy každý bod kružnice $v = l$ je středem rovnoosé hyperboly sítě (eventuelně složené ze dvou kolmých přímek).

2.5 Geometrické místo středů elips sítě kuželoseček o společném polárním trojúhelníku podobných dané elipse (nikoliv kružnici) je kvartika se třemi body ve vrcholech společného polárního trojúhelníka, jejíž reálné body leží jak uvnitř tak vně tohoto trojúhelníka.

Důkaz. Pro každou elipsu sítě, podobnou dané elipse, je střed S' involuce I'_k, zmíněné v důkaze věty **2.3**, na kružnici m' soustředné s kružnicí l. Je-li r poloměr kružnice l, a, $b \neq a$ poloosy dané elipsy, pak poloměr kružnice m' je $r' = r\,|(a^2 - b^2)| : (a^2 + b^2) < r$. Této kružnici kvadratickou transformací $\{l, U\}$ odpovídá kvartika o vlastnostech uvedených v dokazované větě. Každému bodu S' kružnice m', neležícímu na p', q', r', odpovídá S neležící na p, q, r, který je středem jednoduché elipsy podobné dané. Průsečíku kružnice m' s $p'(q', r')$ odpovídá kvadratickou transformací $\{l, U\}$ bod $P(Q, R)$. V síti existují právě dvě kuželosečky složené z páru imaginárních přímek, které svírají úhel rovný úhlu asymptot podobných elips, jejichž střed je $P(Q, R)$. Prohlásíme-li, právě vzhledem k uvedené vlastnosti, tyto složené kuželosečky také za podobné dané elipse, pak není nutno ve znění věty **2.5** vyjmouti uzlové body kvartiky.

Poznámka. Ve větě **2.5** jsme předpokládali $a \neq b$. Je-li $a = b$, jedná se vlastně o setrojení kružnice, která má daný trojúhelník za polární. Ježto involuce sdružených průměrů kružnice je absolutní, musí střed involuce I'_k v tomto případě býti středem kružnice l. Kvadratickou transformací $\{l, U\}$ tomuto středu odpovídá průsečík výšek daného trojúhelníka, který je tedy středem hledané kružnice.

3. Konstruktivní důsledky. Užitím transformace $\{l, U\}$ lze řešit poměrně jednoduchým způsobem úlohy týkající se konstrukce kuželoseček podobných dané. Vytkneme zvláště dvě speciální úlohy.

Úloha 1. Čtyřmi danými body (lineárně nezávislými) proložiti kuželosečku podobnou dané kuželosečce.[6])

---

[6]) V případě hyperboly jedná se o úlohu sestrojiti hyperbolu podobnou dané hyperbole resp. hyperbole komplementární.

Řešení. Danými čtyřmi body je určen svazek kuželoseček; středy všech kuželoseček tohoto svazku leží na středové kuželosečce, jež prochází vrcholy společného polárního trojúhelníka svazku. Uvažujme síť kuželoseček určenou tímto polárním trojúhelníkem. Do této sítě náleží i kuželosečky uvedeného svazku. Nechť daná kuželosečka není parabola ani rovnoosá hyperbola. Pak dle věty **2.3** a **2.5** středy kuželoseček sítě, které jsou podobné dané kuželosečce, leží na kvartice, jejíž uzlové body jsou vrcholy společného polárního trojúhelníka. Kuželosečka středů a kvartika mají mimo tyto vrcholy ještě společné dva body, jež jsou středy hledaných kuželoseček. Při skutečném řešení úlohy lze s výhodou použíti kvadratické transformace $\{l, U\}$, která převádí kuželosečku středů v přímku a kvartiku v kružnici soustřednou s kružnicí l opsanou polárnímu trojúhelníku a o poloměru $r' = r\,|(a^2 - b^2)| : (a^2 + b^2)$ resp. $r' = r\,(a^2 + b^2) : |(a^2 - b^2)|$, kde r je poloměr kružnice opsané polárnímu trojúhelníku, $a, b \neq a$ jsou poloosy dané elipsy resp. hyperboly. Ve vylučovaných případech paraboly a rovnoosé hyperboly lze s výhodou použíti známých method.

Úloha 2. Sestrojiti kuželosečku tak, aby se dotýkala daných čtyř lineárně nezávislých přímek a byla podobná dané kuželosečce.[6])

Řešení. Středy kuželoseček osnovy kuželoseček, určené danými čtyřmi přímkami, leží na přímce. Uvažujme síť kuželoseček, jejíž společný polární trojúhelník je diagonální trojúhelník čtyrstranu určeného danými čtyřmi přímkami. Kuželosečky zmíněné osnovy kuželoseček patří této síti. Nechť daná kuželosečka není parabola ani rovnoosá hyperbola. Středy kuželoseček sítě, které jsou podobné dané kuželosečce, leží dle věty **2.3** a **2.5** na kvartice, která má uzlové body ve vrcholech společného polárního trojúhelníka. Průsečíky této kvartiky s přímkou středů (kuželoseček osnovy) jsou středy hledaných kuželoseček. Nechť máme sestrojit rovnoosou hyperbolu, dotýkající se daných přímek. Dle věty **2.4** středy všech rovnoosých hyperbol sítě leží na kružnici opsané společnému polárnímu trojúhelníku sítě. Středy hledaných hyperbol jsou tedy průsečíky přímky středů kuželoseček osnovy a této kružnice[7]). Při skutečném řešení této úlohy použijeme s výhodou kvadratické transformace $\{l, U\}$. Tato převádí přímku středů v kuželosečku, jež ovšem prochází vrcholy hlavního trojúhelníka transformace P', Q', R' a kvartiku převádí v kružnici, která je soustředná s kružnicí opsanou společnému polárnímu trojúhelníku sítě P, Q, R (a také opsanou trojúhelníku P', Q', R'). Její poloměr je $r' = r\,|(a^2 - b^2)| : (a^2 + b^2)$

[7]) Řešení případu rovnoosé hyperboly je v podstatě totožné s řešením uvedeným v učebnici V. Jarolímka: Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru, díl IV, str. 26.