LITERATURA

A. Recense vědeckých publikací.*)

Л. С. Понтрягин: Непрерывные группы (Математика в монографиях, основная серия, кн. III), Москва-Ленинград 1938, стр. 316.

Anglický překlad: **L. S. Pontrjagin:** Topological Groups. Princeton Mathematical Series, sv. 2. Princeton University Press, Princeton, 1939. IX + 299 str. $ 4,00.

Pontrjaginova monografie, věnovaná theorii spojitých čili topologických grup — první a zatím jediná ve světové literatuře — vyšla již před 9 léty, avšak dosud o ní nemohlo býti referováno. Theorie spojitých grup vznikla původně jako theorie grup spojitých transformací a to především Lieových grup, t. j. grup, v nichž lze zavést souřadnice. Lieovy grupy jsou však pouze velmi speciálním případem obecné topologické grupy, jejíž axiomatické zavedení leží nasnadě, jakmile máme pojmy topologického prostoru a abstraktní grupy. Ve své knize podává Pontrjagin jednak theorii topologických grup, při čemž se omezuje na separabilní lokálně kompaktní grupy, jednak moderní a logicky bezvadný výklad základů theorie Lieových grup.

První dvě kapitoly mají úvodní ráz a obsahují běžné definice a věty z theorie grup a topologických prostorů (u topologických prostorů se požaduje splnění axiomů $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, jakož i uzavřenost jednobodových množin).

V III. kapitole jsou vyloženy základní pojmy theorie topologických grup a některé obecné výsledky, jejichž důkaz nevyžaduje hlubších úvah. Topologickou grupou nazýváme grupu G, jež je současně topologickým prostorem, při čemž grupové operace jsou spojité (stačí požadovat, aby xy^{-1} záviselo spojitě na x i y současně). Každá topologická grupa je regulárním topologickým prostorem (dokonce úplně regulárním prostorem; tato věta, jež pochází rovněž od Pontrjagina, není v knize uvedena). Podgrupou topologické grupy nazýváme podgrupu ve smyslu theorie abstraktních grup,[1]) jež je zároveň uzavřenou množinou. Definice normální podgrupy, faktorové grupy atd. jsou pak nasnadě. Zobrazení topologické grupy G do topologické grupy H se nazývá homomorfním, je-li spojité a zároveň homomorfní ve smyslu obstraktních grup; je-li homomorforní zobrazení prosté a je-li při tom inversní zobrazení spojité, pak mluvíme o isomorfním zobrazení (isomorfismu). Na rozdíl od abstraktních grup platí zde věta o homomorfismu (která praví, že každá grupa H, která je homomorfním obrazem dané grupy G, je isomorfní s jistou faktorovou grupou grupy G) obecně pouze za předpokladu, že jde o homomorfismus otevřený, t. j. takový, že obraz otevřené množiny je vždy otevřený. Předpokládáme-li však, že obě grupy G a H jsou separabilní lokálně kompaktní, pak každý homomorfismus je otevřený a věta o homomorfismu platí v plném rozsahu.

---

[1]) Grupu, v níž není zavedena topologie, nazýváme někdy abstraktní grupou (na rozdíl od topologické grupy).

*) Z obsahu recensí odpovídají podepsaní pp. recensenti sami.

Autor přechází pak k souvislým grupám a grupám dimense 0 a zakončuje kapitolu zavedením pojmu lokální topologické grupy (jejímž speciálním případem je Lieova grupa). Nechť G je topologický prostor. Nechť pro některé dvojice prvků $a \in G$, $b \in G$ je definován součin $ab \in G$, při čemž jsou splněny tyto podmínky: (1) $(ab)c = a(bc)$, kdykoli obě strany rovnosti mají smysl; (2) je-li definován součin ab, pak součin xy je definován pro všechna x a y dostatečně blízká k a a b a závisí spojitě na x a y; (3) existuje jednotkový prvek $e \in G$ takový, že $ae = a$ pro každé $a \in G$; (4) jestliže pro některé $a \in G$ existuje prvek $a^{-1} \in G$ takový, že $aa^{-1} = e$, pak pro libovolné okolí U prvku a^{-1} platí: pro každé x dostatečně blízké k a existuje prvek $x^{-1} \in U$ takový, že $xx^{-1} = e$.

Je zřejmé, že každé otevřené okolí jednotkového prvku v topologické grupě je lokální topologickou grupou. Naproti tomu není známo, zda každá lokální topologická grupa je lokálně isomorfní s některou topologickou grupou; tento problém je rozřešen (v kladném smyslu) pouze pro Lieovy grupy.

Pro lokální topologické grupy se definují pojmy podgrupy, faktorové grupy atd. způsobem, který leží celkem nasnadě. Uvedeme pouze definici lokálního isomorfismu. Nechť G a G' jsou lokální topologické grupy. Nechť $U \subset G$, $K' \subset G'$ jsou otevřená okolí jednotek $e \in G$ a $e' \in G'$. Nechť φ je homeomorfní zobrazení U na U', které převádí e v e' a splňuje podmínku $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$, kdykoli je definován součin ab nebo $\varphi(a)\,\varphi(b)$. Pak říkáme, že φ je lokální isomorfismus lokálních grup G a G'.

Ve IV. kapitole podává autor theorii lineárních representací separabilních kompaktních topologických grup, t. j. jejich homomorfních zobrazení do grupy regulárních matic n-tého řádu. Nejdříve definuje invariantní integrál na topologické grupě G jako operaci, která přiřazuje každé spojité funkci $f(x)$ na G číslo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, splňující mimo obvyklé podmínky, jež se kladou na integrál, ještě podmínku invariantnosti: je-li $f(x)$ spojitá funkce na x a je-li $g(x) = f(x^{-1})$ nebo $g(x) = f(xa)$ nebo $g(x) = f(ax)$, kde $a \in G$, pak $\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Invariantní integrál na kompaktní grupě se nyní sestrojí jako limita (ve smyslu, jenž je v knize přesně definován) součtů $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} f(xa_i)$, $a_i \in G$; dokáže se dále, že invariantní integrál je určen jednoznačně, požadujeme-li ještě $\int 1\,\mathrm{d}x = 1$.

Jakmile máme invariantní integrál, nečiní potíží přenést na integrály na grupě některé věty z theorie integrálních rovnic. Na základě těchto vět podává pak autor důkaz (jenž je zjednodušením původního důkazu, pocházejícího od Petera a Weyla) hlavní věty theorie lineární representace kompaktních grup. Tato věta praví v podstatě, že ke každému prvku $a \neq e$ ze separabilní kompaktní topologické grupy G existuje lineární representace g taková, že $g(a)$ není jednotková matice. — Kapitola končí některými důsledky hlavní věty a její aplikací na důkaz hlavní věty theorie skoro periodických funkcí.[2])

V. kapitola obsahuje theorii komutativních separabilních lokálně kompaktních grup, již vytvořil v podstatě Pontrjagin. Označme K grupu reálných čísel mod 1 (t. j. faktorovou grupu aditivní grupy reálných čísel podle

[2]) Říkáme, že komplexní funkce $f(x)$, definovaná pro všechna reálná x, je skoro periodická, jestliže z každé posloupnosti funkcí $f(x + a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ lze vybrat posloupnost stejnoměrně konvergentní. Zmíněná hlavní věta tvrdí, že každá skoro periodická funkce je stejnoměrnou limitou součtů tvaru $\sum\limits_{n=1}^{m} e^{i\lambda_n x}$.

podgrupy čísel celých) nebo — což je až na isomorfismus totéž — grupu komplexních čísel z, $|z| = 1$, s násobením jako grupovou operací. Homomorfismus topologické grupy G do K nazveme charakterem grupy G. Předpokládejme nyní stále, že G je komutativní separabilní lokálně kompaktní topologická grupa. Z theorie lineárních representací pak plyne: pro každý prvek $x \in G$, různý od nuly,[3]) existuje charakter α takový, že $\alpha(x) \neq 0$. V množině X všech charakterů grupy G definujeme nyní sčítání zřejmým způsobem a topologii tak, že za okolí nuly prohlásíme každou množinu, která se skládá ze všech $\alpha \in X$ takových, že $\alpha(F) \subset U$, kde $F \subset G$ je kompaktní a $U \subset K$ je okolí nuly. Snadno se dokáže, že X je pak separabilní lokálně kompaktní topologická grupa — t. zv. grupa charakterů grupy G. Mnohem obtížnější je důkaz Pontrjaginovy věty o dualitě, jenž zabírá značnou část kapitoly. Je totiž zřejmé, že zvolíme-li pevně $g \in G$ a přiřadíme každému $\alpha \in X$ prvek $\alpha(g) \in K$, pak dostaneme charakter grupy X. Zmíněná věta tvrdí pak, že každý charakter grupy X se dá vyjádřit tímto způsobem a že topologie grupy G, kterou dostaneme, když ji považujeme za grupu charakterů grupy X, je totožná s její původní topologií. V podstatě tvrdí tedy tato věta, že vztah mezi G a X je symetrický.

Mezi vlastnostmi grup G a X je vzájemně jednoznačná korespondence. Tak G je kompaktní (diskretní[4]), když a jen když X je diskretní (kompaktní); G je kontinuum (t. j. souvislá kompaktní), když a jen když X je diskretní grupa bez prvků konečného řádu. Zvlášť důležité je to, že studium kompaktní grupy G lze převést na zkoumání diskretní grupy X, t. j. na otázky abstraktní theorie grup (bez topologických úvah).

Theorie charakterů a věta o dualitě je dále v V. kapitole aplikována na souvislé lokálně souvislé grupy. Jejich struktura je úplně vyšetřena a je zřejmá z následující věty: každá souvislá lokálně souvislá[5]) separabilní lokálně kompaktní komutativní grupa je — až na isomorfismus — direktním součinem konečného počtu grup isomorfních s grupou reálných čísel a nejvýše spočetného počtu grup isomorfních s grupou K.

Kapitola končí větou o topologických tělesech, jež je jednou z nejkrásnějších aplikací theorie topologických grup. Tato věta, jež pochází rovněž od Pontrjagina, praví, že každé souvislé separabilní lokálně kompaktní topologické těleso (t. j. těleso ve smyslu algebry, jež je zároveň topologickým prostorem, při čemž operace sčítání a násobení jsou spojité) je isomorfní buď s tělesem reálných čísel nebo s tělesem komplexních čísel anebo s tělesem kvaternionů.

VI. kapitola uvádí čtenáře do theorie Lieových grup. Jak praví autor, klasické podání této theorie není s hlediska logické přesnosti zcela vyhovující, neboť se v něm leckdy předpokládá na př. existence derivace některých funkcí, aniž by se tato okolnost dokázala anebo výslovně uvedla jako předpoklad. Je tedy nutné nejdříve podat logicky bezvadným způsobem základy theorie, což právě činí autor v této kapitole. Nejprve je definována lokální Lieova grupa. Nechť G je lokální topologická grupa. Nechť existuje homeomorfní zobrazení $\varphi(x) = (x^1, \dots x^r)$ jistého okolí jednotky v G na jisté otevřené okolí počátku v r-rozměrném euklidovském prostoru; čísla $x^1, \dots, x^r$ nazveme souřadnicemi prvku x (při zobrazení čili „souřadném systému" φ). Položme

[3]) Ježto G je komutativní, myslíme si ji psanou aditivně a neutrální prvek nazýváme nulou.

[4]) Připomínáme, že topologickou grupu nazýváme diskretní, když každý její bod je isolovaný; je zřejmé, že stačí studovat takovou grupu jako grupu abstraktní (bez topologie).

[5]) Topologický prostor R je souvislý, když není $R = A + B$, A, B uzavřené, $AB = \emptyset$, $A \neq \emptyset \neq B$; je lokálně souvislý, když každý jeho bod má „libovolně malá" souvislá okolí.

pro dostatečně malá x^i, y^i $f^i(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r) = z^i$, kde z^i jsou souřadnice prvku $z = xy$ a x, y jsou prvky o souřadnicích $x^1, \ldots, x^r$, resp. $y^1, \ldots, y^r$. Jestliže při vhodné volbě zobrazení φ platí (*) funkce f^i mají spojité derivace až do 3. řádu včetně; (**) funkce f^i jsou analytické, pak říkáme, že G je lokální Lieova grupa, a sice v případě (*) diferencovatelná, v případě (**) analytická. Zřejmě z (**) plyne (*); lze ukázat (důkaz je proveden v IX. kapitole), že také z (*) plyne (**), takže nemusíme rozlišovat dva druhy lokálních Lieových grup. Konečně Lieovou grupou nazveme separabilní topologickou grupu, která je zároveň lokální Lieovou grupou.

Nyní vznikají tyto otázky: (1) Mějme dva souřadné systémy $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^r)$, $'\varphi(x) = ('x^1, \ldots, 'x^r)$ v lokální Lieově grupě G. V okolí bodu $(0, \ldots, 0)$ jsou pak veličiny $'x^i$ funkcemi veličin x^i. Mají tyto funkce derivace, resp. jsou analytické? (2) Je každá podgrupa Lieovy grupy zase Lieovou grupou, t. j. dají se v ní zavést souřadnice splňující podmínky (*) resp. (**)? (3) Obdobná otázka pro faktorové grupy. Podstatný obsah VI. kapitoly spočívá nyní v kladné odpovědi na tyto otázky; tím je vyplněna mezera v klasické theorii.

VII. kapitola pojednává o vztazích mezi separabilními kompaktními topologickými grupami a kompaktními Lieovými grupami.

Hlavním výsledkem je věta: každá separabilní kompaktní topologická grupa je limitou posloupnosti kompaktních Lieových grup. Limitou je zde míněno toto: nechť je dána posloupnost topologických grup $G_1, G_2, \ldots$ a nechť pro každé n je dán homomorfismus g_n, který zobrazuje G_{n+1} na G_n. Buď H direktní součin grup G_n (t. j. množina všech posloupností $\{x_n\}$, $x_n \in G_n$, s evidentní definicí násobení a s topologií kartézského součinu). Buď G množina všech $x = \{x_n\} \in H$ takových, že $x_n = g_n(x_{n+1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ G je zřejmě podgrupa topologické grupy H. Říkáme, že topologická grupa G je limitou posloupnosti grup G_n s homomorfismy g_n. Z uvedené hlavní věty vyplývá jako důležitý důsledek kladné řešení Hilbertova problému pro kompaktní grupy, totiž věta: separabilní kompaktní topologická grupa, jež je lokálně homeomorfní s euklidovským prostorem, je Lieovou grupou.

Jsou-li dvě topologické grupy lokálně isomorfní, nemusí ještě být isomorfní; obecně je velmi nesnadné udat všechny grupy, jež jsou lokálně isomorfní s danou topologickou grupou. VIII. kapitola pojednává o speciálním případu souvislých lokálně souvislých a lokálně jednoduše souvislých topologických grup (jenž zahrnuje všechny souvislé Lieovy grupy), kdy můžeme snadno přehlédnout všechny grupy, jež jsou lokálně isomorfní s danou grupou.

Uvedeme nejdříve definici jednoduché souvislosti. Topologický prostor R se nazývá jednoduše souvislý, jestliže je souvislý a každá uzavřená křivka v R (čímž je zde míněn spojitý obraz kružnice) se dá spojitě převést v jednobodovou množinu.[6]) Vyslovíme nyní hlavní výsledek[7]) kapitoly: Nechť topologická grupa G je souvislá a má „libovolně malá" jednoduše souvislá okolí

[6]) Přesná definice: buď R topologický prostor; nazveme „cestou" v R každé spojité zobrazení f intervalu $[0, 1]$ do R; cesta f je uzavřená, když $f(0) = f(1)$. Uzavřené cesty f a g nazýváme homotopními, když existuje spojité zobrazení F čtverce $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ do R takové, že $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ a $F(t, 0) = F(t, 1)$. Prostor R je jednoduše souvislý, když (1) pro libovolné body $a \in R$, $b \in R$ existuje cesta f taková, že $f(0) = a$, $f(1) = b$; (2) každé dvě uzavřené cesty jsou navzájem homotopní.

[7]) Tento výsledek není u Pontrjagina výslovně uveden, je však bezprostředním důsledkem obou hlavních vět kapitoly VIII.