

## Werk

**Label:** Other

**Jahr:** 1947

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X\\_0072|log54](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0072|log54)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## ÚLOHY

### Úlohy o jedné prostorové křivce.\*)

V pravoúhlých souřadnicích kartézských  $x, y, z$  je dána křivka v parametrickém vyjádření ( $t$  je proměnný reálný parametr):

$$(1) \quad x = t, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{t^3}{3}.$$

Dokažte následující tvrzení:

Oblouk  $s$  křivky (1) je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (1 + t^2) dt = [x + z]_{t_1}^{t_2}.$$

Směrové kosiny tečny  $\mathbf{t}$ , resp. hlavní normály  $\mathbf{n}$ , resp. binormály  $\mathbf{b}$  jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{t} & \left( \frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right) \\ \mathbf{n} & \left( \frac{-\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2} \right) \\ \mathbf{b} & \left( \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{-\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2} \right). \end{aligned}$$

Napište rovnici osculační roviny v obecném bodě křivky (1) a vypočítejte první křivost  $k_1$  (flexi) i druhou křivost  $k_2$  (torsí). Protože je  $k_1 = k_2$ , je křivka šroubovicí na obecném válci a protíná tedy pod konstantním úhlem  $\omega$  jeho povrchy, jejichž směrové kosiny označme  $a, b, c$ , takže platí

$$(1 + t^2) \cos \omega = a + \sqrt{2}tb + t^2c.$$

Derivujeme-li tuto rovnici dvakrát podle  $t$ , vypočítáme snadno

$$\omega = \frac{\pi}{4}, \quad a = c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 0,$$

\*) Tyto úlohy se hodí jako cvičení z diferenciální geometrie křivek, kde se příklady v učebnicích omezují většinou na šroubovici na rotačním válci a na konickou spirálu na rotačním kuželi.

takže zmíněný válec má toto parametrické vyjádření (v parametrech  $t, u$ ):

$$(2) \quad x = t + \frac{1}{\sqrt{2}}u, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}u.$$

Základna tohoto válce v rovině kolmé na směr jeho površek (na příklad v rovině  $x + z = 0$ ) je kubická křivka, vyjádřená v parametru  $t$  rovnicemi

$$x = \frac{t}{6}(3 - t^2), \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = -\frac{t}{6}(3 - t^2),$$

které lze transformací souřadnic

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z)$$

převést na tvar

$$\bar{x} = \frac{t}{3\sqrt{2}}(3 - t^2), \quad \bar{y} = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z} = 0.$$

Odtud zjistíme, že tato křivka má dvojnásobný bod pro  $t = \pm \sqrt{3}$  s tečnami o směrnících  $\pm \sqrt{3}$  (v soustavě  $\bar{x}, \bar{y}$ ).

Určete střed a poloměr oskulační koule v obecném bodě křivky (1) a dokažte, že tato křivka leží na hyperbolickém paraboloidu  $3z = \sqrt{2} \cdot xy$  a na kuželi  $3xz = 2y^2$ . Do roviny  $z = 0$  promítá se křivka (1) jako parabola  $x^2 = \sqrt{2} \cdot y$ , do roviny  $y = 0$  se promítá jako kubická křivka  $x^3 = 3z$  (mající v počátku inflexní bod s tečnou v ose  $X$ ) a do roviny  $x = 0$  se promítá jako Neilova (semikubická) parabola  $9z^2 = 2\sqrt{2} \cdot y^3$  (která má v počátku bod vratu s tečnou v ose  $Y$ ). Křivka (1) je souměrná podle osy  $Y$ .

Dr M. Sypták, Brno.

### Úlohy o determinantech.

1. Budiž  $D_m$  ( $m \geq 1$ ) determinant  $m$ -tého stupně, jehož  $(2i + 1)$ -ní a  $(2i + 2)$ -há řádka jsou

$$0, a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, \dots \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

$$a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, a_4^i, \dots$$

Dokažte, že

$$(1) \quad D_{2n+1} = 0, \quad D_{2n} = (-1)^n \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2.$$

2. Budiž  $D'_m$  ( $m \geq 1$ ) determinant  $m$ -tého stupně, jehož  $(2i+1)$ -ní a  $(2i+2)$ -há řádka jsou

$$\begin{array}{ccccccc} a_1^i, & 0, & a_2^i, & 0, & a_3^i, & 0, & a_4^i, \dots \\ 0, & a_1^i, & 0, & a_2^i, & 0, & a_3^i, & 0, \dots \end{array} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Dokažte, že

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= (-1)^n D_{2n}, \quad D'_{2n+1} = \\ (2) \quad &= (-1)^n \prod_{1 \leq \lambda \leq n} (a_\lambda - a_{n+1}) \cdot \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (a_\mu - a_\nu)^2. \end{aligned}$$

(T. zv. prázdné součiny značí jedničku, takže v (1), (2) je nutno čísti na př.  $D_2 = -1$ ,  $D'_1 = 1$ ,  $D'_3 = a_2 - a_1$ .)

3. Budiž  $\Delta_{2n}$  ( $n \geq 1$ ) determinant stupně  $2n$ , jehož první řádka jest

$$\sin k_1 s, \cos k_1 s, \sin k_2 s, \cos k_2 s, \dots, \sin k_n s, \cos k_n s,$$

a jehož ostatní řádky obdržíme z první postupně první, druhou, ...,  $(2n-1)$ -ní derivací podle  $s$ . Dokažte:

$\Delta_{2n}$  nezávisí na  $s$ , načež z (1) dostanete

$$\Delta_{2n} = (-1)^n k_1 k_2 \dots k_n \cdot \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} (k_\mu^2 - k_\nu^2)^2.$$

Dr M. Šypták, Brno.