Sur une formule du calcul intégral.

Eugen Bunickij, Praha.

(Reçu le 25. septembre 1946.)

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans un intervalle ouvert (a, b) et soit α un nombre quelconque de cet intervalle. Alors la formule bien connue

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_\alpha^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) \, dt \tag{1}$$

(où $n > 0$ et où l'on pose, comme d'ordinaire, $0! = 1$) représente l'intégrale de l'équation différentielle

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x) \quad (\text{pour } a < x < b) \tag{2}$$

satisfaisant aux conditions initiales $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$.

2. En modifiant un peu la formule (1), nous allons représenter l'intégrale de (2) comme une somme de produits de n intégrales simples indéfinies par certaines puissances de x. Pour ce but, développons $(x - t)^{n-1}$ suivant la formule du binome; nous obtenons une série de termes contenant les produits

$$x^{n-1-\nu} \int_\alpha^x t^\nu \varphi(t) \, dt;$$

en remplaçant ici l'intégrale définie par l'intégrale indéfinie $\int x^\nu \varphi(x) \, dx$, on est conduit à considérer la fonction

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} x^{n-1-\nu} \int x^\nu \varphi(x) \, dx. \tag{3}$$

P. ex. $F_1(x) = \int \varphi(x) \, dx$, donc $F'_1(x) = \varphi(x)$. En général, on a pour $n > 1$

$$F'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} (n-1-\nu) \, x^{n-2-\nu} \int x^\nu \varphi(x) \, dx +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \varphi(x) \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu}. \tag{4}$$