Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 72 (1947)

Mocninné spirály v p-rozměrném euklidovském prostoru R_p.

M. Sypták, Brno.

(Došlo 9. května 1947).

Úvod.

V předloženém pojednání jsou studovány jisté křivky, které možno považovati za zobecnění známých rovinných spirál, t. zv. *mocninných*. Tyto rovinné spirály jsou vyjádřeny v polárních souřadnicích rovnicí $\varrho = k \cdot \omega^m$ kde k, m jsou reálné konstanty $\neq 0$; mezi ně patří tedy spirála Archimedova ($m = 1$), hyperbolická ($m = -1$), lituus ($m = -\frac{1}{2}$), atd. Zobecnění spočívá v tom, že mocninné spirály definujeme v euklidovském prostoru R_p o libovolném počtu dimensí $p \geqq 3$. V tomto pojednání jest ukázáno, že celá řada vlastností, jež známe o mocninných spirálách, zůstává zachována i po tomto zobecnění, ovšem nahradíme-li pojmy a definice, týkající se rovinných křivek, vhodnými pojmy a definicemi platnými v prostoru R_p. Důležitou úlohou hraje *hlavní rotační dvojkužel*. Je to (dvojrozměrná) plocha, kterou při *hlavním rotačním pohybu* vytvořuje přímka, jež prochází středem rotace (je-li p sudé), resp. protíná osu rotace (je-li p liché). Při tomto pohybu opisují jednotlivé body prostoru důležité křivky, jež v literatuře jsou označeny jménem *nadkružnice* (viz (C), (D)); jsou to křivky prostoru o sudém počtu dimensí, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. Mocninné spirály v R_p definujeme jako křivky, jež leží na hlavním rotačním dvojkuželi a jejichž body mají od vrcholu dvojkužele vzdálenosti úměrné m-té mocnině oblouku nadkružnice, kterou z dvojkužele vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru. Vztah mezi nadkružnicemi a mocninnými spirálami je také předmětem studia v této práci. V dodatku je pak rozšířena definice známé rovinné křivky *kochleoidy* na prostor R_{2n}. Její základní čtyři vlastnosti zůstávají v platnosti i v tomto prostoru.

Literatura:

(A) H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, Lipsko 1908.

(B) G. Loria: Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Lipsko 1902.

(C) O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. Masarykovy univ., Brno **146** (1931). Viz též stejně nazvané pojednání od téhož autora v Comptes rendus **193** (1931).

(D) M. Sypták: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p-dimensions, Comptes rendus **195** (1932).

1. Hlavní rotační dvojkužel.

Otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ v R_{2n}, definované v pravoúhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \quad x_{2i-1} \,.\, \cos L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \sin L_i\sigma \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \,.\, \sin L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \cos L_i\sigma \end{aligned} \tag{1}$$

$(i = 1,2, \ldots, n)$ — v nichž σ je parametr a $L_i \neq 0$ konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*[1]) bodu P *okolo bodu* (zvaném *středu* otáčení) $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0$ v R_{2n}.

Podobně: Otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ v R_{2n+1}, definované v pravoúhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \quad x_{2i-1} \,.\, \cos L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \sin L_i\sigma \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \,.\, \sin L_i\sigma + x_{2i} \,.\, \cos L_i\sigma \\ X_{2n+1} &= \quad x_{2n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

$(i = 1,2, \ldots, n)$ — v nichž σ je parametr a $L_i \neq 0$ konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*[1]) bodu P *okolo přímky* (zvané *osou* otáčení) $x_1 = x_2 = \ldots x_{2n} = 0$ v R_{2n+1}.

Otáčení (1) v R_{2n} se tedy skládá z n rovinných otáčení okolo n $(2n-2)$ — rozměrných prostorů $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a jejich absolutní hodnoty různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny středem otáčení, budeme nazývati *axiálními prostory.*

Podobně: Otáčení (2) v R_{2n+1} se skládá z n rovinných otáčení okolo n $(2n-1)$ — rozměrných prostorů $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ $(i =$

---

[1]) *Obecné* otáčení bodu $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ v R_p $(p \geq 2)$ okolo $(p-m)$ — rozměrného prostoru $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ $(2 \leq m \leq p)$ — tedy také okolo bodu a přímky — je vyjádřeno v pravoúhlém systému souřadném ortogonální transformací

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i,1} \,.\, x_1 + \ldots\ldots + a_{i,m} \,.\, x_m \text{ pro } 1 \leq i \leq m, \\ X_i &= x_i \text{ pro } m + 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Poslední rovnice odpadá v případě otáčení kol bodu, t. j. pro $m = p$.

$= 1,2, \ldots, n$), při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a absolutní hodnoty jejich různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny osou otáčení, budeme nazývati *axiálními prostory*.

Jak se snadno přesvědčíme, tvoří všechna otáčení (1) nebo (2) — příslušná různým hodnotám σ — grupu. Vůči této grupě jsou invariantní všechny axiální prostory a následkem toho každý prostor, který vznikne jako průsek m ($1 \leqq m \leqq n$) axiálních prostorů. Zejména to tedy platí o středu otáčení a o ose otáčení, u níž dokonce každý její bod je invariantní vůči grupě (2).

Při hlavním otáčení prostoru R_{2n} opisuje každý bod P ($x_1, \ldots, x_{2n}$) nadkružnici, jejíž střed je ve středu otáčení a jejichž axiální prostory jsou axiálními prostory otáčení, nebo v těchto prostorech leží. Při hlavním otáčení prostoru R_{2n+1} opisuje každý jeho bod P ($x_1, \ldots, x_{2n+1}$) nadkružnici, ležící v nadrovině R^*_{2n} kolmé k ose otáčení. Její střed je v průsečíku osy otáčení s R^*_{2n} a její axiální prostory jsou průsečné prostory axiálních prostorů otáčení s R^*_{2n}, nebo v těchto prostorech leží.

Důkaz: Křivka, kterou bod P opisuje, je dána rovnicemi (1), resp. (2). Použijme transformace souřadnic

$$X'_{2i-1} = \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}}} X_{2i-1} + \frac{x_{2i}}{\sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}}} X_{2i},$$

$$X'_{2i} = \frac{x_{2i}}{\sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}}} X_{2i-1} - \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}}} X_{2i},$$

resp. $X'_{2n+1} = X_{2n+1}$

pro taková i ($1 \leqq i \leqq n$), pro která x_{2i-1} nebo x_{2i} je různé od 0 a

$$X'_{2i-1} = X_{2i-1}, \quad X'_{2i} = X_2$$

pro taková i ($1 \leqq i \leqq n$), pro která $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$. Tím dostaneme

$$X'_{2i-1} = \sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}} \,.\, \cos L_i\sigma,$$

$$X'_{2i} = \sqrt{x^2_{2i-1} + x^2_{2i}} \,.\, \sin L_i\sigma,$$

resp. $X'_{2n+1} = x_{2n+1}$

($i = 1, \ldots, n$), což je nadkružnice, mající uvedené vlastnosti.[2])

Přímka p v R_{2n}, jež prochází středem otáčení O a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytvořuje při hlavním rotačním pohybu (1) plochu (K_{2n}), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem O*. Podobně: Přímka p v R_{2n+1}, jež protíná osu otáčení o v bodě O a není k ní kolmá, a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytvořuje při hlavním rotačním pohybu (2) plochu

[2]) Viz (C), (D).

(K_{2n+1}), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem O a osou o*.

Jejich parametrická vyjádření ($\equiv$ p. v.) můžeme snadno zjistiti. Jsou-li rovnice přímky p $x_1 = \varrho\alpha_1, \ldots, x_{2n} = \varrho\alpha_{2n}$, resp. $x_{2n+1} = d + \varrho C$, kdež ϱ je parametr, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{2n}^2 +$ resp. $C^2 = 1$, $\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2 \neq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a C je různé od 0 a 1, pak tato přímka při rotaci (1), resp. (2) vytvoří plochu

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \varrho\,(\alpha_{2i-1} \cos L_i\sigma + \alpha_{2i} \sin L_i\sigma) \\ X_{2i} &= \varrho\,(-\alpha_{2i-1} \sin L_i\sigma + \alpha_{2i} \cos L_i\sigma) \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= d + \varrho C \end{aligned}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Provedeme-li transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} X'_{2i-1} &= \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i-1} + \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2i} &= \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i-1} - \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2n+1} &= X_{2n+1} - d \end{aligned}$$

$(i = 1, \ldots, n)$, kde $r_i = \sqrt{\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2}$, dostaneme $X'_{2i-1} = \varrho r_i \, . \cos L_i\sigma$, $X'_{2i} = \varrho r_i \, . \sin L_i\sigma$, resp. $X'_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \ldots, n)$. Proveďme dále transformaci parametru $s = \sigma\sqrt{r_1^2 L_1^2 + \ldots + r_n^2 L_n^2}$, označme $l_i\sqrt{r_1^2 L_1^2 + \ldots + r_n^2 L_n^2} = L_i$ a pišme x_j místo X'_j pro $j = 1, \ldots, n, n + 1$. Tím dostaneme p. v. rotačního dvojkužele (K_{2n}) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \, . \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \, . \sin l_i s \tag{3}$$

$(i = 1, \ldots, n)$, při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic, $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$ a ϱ značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu, a p. v. rotačního dvojkužele (K_{2n+1}) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \, . \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \, . \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = \varrho C \tag{4}$$

$(i = 1, \ldots, n)$, při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic, osa jeho v ose X_{2n+1}, $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$ a ϱ značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu.

Poznámka: Rovnice (3), resp. (4) pro $s = s_0$ (konstanta) představují p. v. přímky, ležící na rotač. dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a dá se snadno dokázati, že rotací (1), resp. (2) této přímky vznikne týž rotač. dvojkužel. Obzvláště to tedy platí o přímce $x_{2i-1} = \varrho r_i$, $x_{2i} = 0$, resp. $x_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \ldots n)$.

Je patrné, že rotační dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) se skládá ze dvou shodných částí, t. zv. (*hlavních*) *rotačních kuželů* (k_{2n}^1),

resp. (k^1_{2n+1}) pro $\varrho \geqq 0$ a (k^2_{2n}), resp. (k^2_{2n+1}) pro $\varrho \leqq 0$, jež jsou souměrně položeny dle společného vrcholu. Každý z nich vznikne rotací polopřímky, jejíž koncový bod je ve středu otáčení, resp. na ose otáčení.

Každá nadkoule o středu ve vrcholu rotačního dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) *protíná tuto plochu ve dvou shodných nadkružnicích,* z nichž jedna leží na (k^1_{2n}), resp. (k^1_{2n+1}) a druhá na (k^2_{2n}), resp. (k^2_{2n+1}). Nadkoule $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 +$ resp. $x_{2n+1}^2 = R^2$ $(R > 0)$ protíná totiž (3), resp. (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \pm Rr_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm Rr_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm R \,.\, C$ $(i = 1, \ldots, n)$. Současně vidíme, že nadkoule o poloměru $R = 1$ protíná (3), resp. (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \pm r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm r_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm C$, při čemž s jest jejich oblouk. Z toho je patrný geometr. význam parametru s v (3), resp. (4).

Každá nadrovina R_{2n}, *jež je kolmá na osu rotač. dvojkužele* (K_{2n+1}) *a jež neprochází jeho vrcholem, protíná tento dvojkužel v nadkružnici, mající střed v průsečíku osy a nadroviny* R_{2n}. Neboť nadrovina $x_{2n+1} = k$ $(\neq 0)$ protíná (4) v nadkružnici $x_{2i-1} = \frac{k}{C} r_i \,.$ $.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \frac{k}{C} r_i \,.\, \sin l_i s$, $x_{2n+1} = k$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Každá nadkoule se středem na ose rotač. dvojkužele (K_{2n+1}) *protíná tuto plochu ve dvou nadkružnicích, ležících v nadrovinách kolmých k ose a majících středy v průsečících nadrovin s osou.* Neboť nadkoule $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 + (x_{2n+1} - k)^2 = R^2$ protíná (4) v nadkružnicích $x_{2i-1} = \varrho r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho r_i \,.\, \sin l_i s$, $x_{2n+1} = \varrho C$ $(i = 1, \ldots, n)$, kde $\varrho = Ck \pm \sqrt{C^2k^2 - k^2 + R^2}$. Označíme-li $v^2 = k^2 - c^2k^2$, což geometricky znamená čtverec vzdálenosti středu nadkoule od povrchových přímek dvojkužele, pak platí:

a) pro $R^2 > v^2$, po př. $R^2 < v^2$ jsou průsekem dvě reálné, po př. dvě imaginární nadkružnice.

b) pro $R^2 = v^2$ jest průsekem nadkružnice dvojnásobná, podél níž se rotač. dvojkužel dotýká nadkoule.

Protněme rotační dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) dvěma nadkoulemi — o poloměrech R_1 (> 0), R_2 (> 0) a společném středu ve vrcholu dvojkužele — v nadkružnicích $\varkappa_1$, $\varkappa_2$! Buďte P_1, P_2 dva body téže povrchové přímky, z nichž P_1 leží na $\varkappa_1$ a P_2 na $\varkappa_2$! Opisuje-li P_1 na $\varkappa_1$ oblouk $\widehat{P_1Q_1}$, opisuje P_2 na $\varkappa_2$ oblouk $\widehat{P_2Q_2}$ a platí

$$\widehat{P_1Q_1} : \widehat{P_2Q_2} = R_1 : R_2. \tag{5}$$

Je-li totiž dvojkužel (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) určen rovnicemi (3), resp. (4), má $\varkappa_1$ p. v. $x_{2i-1} = \pm R_1 r_i \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = \pm R_1 r_i \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = \pm R_1C$ a $x_{2i-1} = \pm R_2r_i \,.\, \cos l_is$, $x_{2i} = \pm R_2r_i \,.$ $.\, \sin l_is$, resp. $x_{2n+1} = \pm R_2C$ $(i = 1, \ldots, n)$. Jsou-li body P_1, Q_1 určeny parametry s_1, s_2, jsou body P_2, Q_2 určeny týmiž parametry. Platí tedy $\widehat{P_1Q_1} = \int\limits_{s_1}^{s_2} R_1\, ds = R_1\,(s_2 - s_1)$, $\widehat{P_2Q_2} = \int\limits_{s_1}^{s_2} R_2\, ds = R_2 .$ $(s_2 - s_1)$, z čehož následuje úměra (5).

2. Mocninné spirály.

Jestliže mezi ϱ, s v (3), resp. (4) platí vztah $f(\varrho, s) = 0$, pak tyto rovnice představují p. v. křivky, ležící na rotač. dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}). Křivku, u níž platí

$$\varrho = k\,.\,(s - s_0)^m \tag{6}$$

— při čemž $k \neq 0$, $m \neq 0$, s_0 jsou reálné konstanty — budeme nazývati *mocninnou spirálou stupně m*. Zvláštní případy těchto křivek nazveme ve shodě s názvy v R_2 takto:

pro $m = 1$ *Archimedovou* spirálou,
pro $m = -1$ *hyperbolickou* spirálou,
pro $m = \frac{1}{2}$ *Fermatovou* spirálou,
pro $m = -\frac{1}{2}$ spirálou „*lituus*",
pro $m = \frac{p}{q}$ (p, q celá kladná čísla, $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$, 2) *parabolickou spirálou vyššího stupně*,
pro $m = -\frac{p}{q}$ (p, q celá kladná čísla, $\frac{p}{q} \neq 1$) *hyperbolickou spirálou vyššího stupně*.

Dále nazveme křivku, u níž ϱ je rovno polynomu $P(s)$ stupně n $(\neq 0)$, *polynomickou spirálou stupně n*. Sem patří ku př. *Galileiova* spirála, u níž $\varrho = as^2 + bs + c$ ($a \neq 0$, b, c jsou konstanty a $b^2 - 4ac \neq 0$). Budiž zde poznamenáno, že u této spirály lze transformací (7) pro $s_0 = -\frac{b}{2a}$ docíliti toho, že ϱ přejde do tvaru $as^2 + B$ ($B \neq 0$ konst.). Všechny uvedené křivky patří pod *algebraické* spirály, u nichž mezi ϱ a s platí algebraický vztah $f(\varrho, s) = 0$. Z *transcendentních* spirál — u nichž ϱ je rovno transcendentní funkci v s — jest nejdůležitější spirála *exponenciální* čili *logaritmická*, u níž $\varrho = k\,.\,e^{ms}$ ($k \neq 0$, $m \neq 0$ konstanty)[3]). Každá z těchto spirál má *pól* ve vrcholu dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a — v případě, že jde o R_{2n+1} — má kromě toho *osu* v ose dvojkužele (K_{2n+1}).

[3]) O jejích vlastnostech viz M. Sypták: O logaritmických spirálách v p-rozměrném euklidovském prostoru. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 70 (1940).

Z geometrického významu v (3), resp. (4) je patrné, že *konchoidy* těchto spirál, když pól konchoidy volíme v pólu spirály, dostaneme, když místo ϱ dáme $\varrho + d$, kdež d je libovolná konstanta. Jest tedy spirála, u níž $\varrho = a \, . \sqrt{s} + d$ ($a \neq 0$ konstanta) — zvaná někdy *parabolická* — konchoidou Fermatovy spirály.

Dosaďme do (3), resp. (4) $\varrho = k \, . \, (s - s_0)^m$ a proveďme transformaci systému souřadného (otočení)

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= -x_{2i-1} \, . \cos l_i s_0 + x_{2i} \, . \sin l_i s_0, \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \, . \sin l_i s_0 + x_{2i} \, . \cos l_i s_0, \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned} \tag{7}$$

($i = 1, \ldots, n$). Po malé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= r_i k \, (s - s_0)^m \, . \cos l_i \, (s - s_0), \\ X_{2i} &= r_i k \, (s - s_0)^m \, . \sin l_i (s - s_0), \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= Ck \, (s - s_0)^m \, . \end{aligned}$$

Proveďme dále transformaci parametru $s = \sigma + s_0$ a pišme s, x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2n+1} místo σ, X_{2i-1}, X_{2i}, X_{2n+1}! Tím dostaneme p. v. *mocninné spirály stupně* m, ležící na rotačním dvojkuželu (K_{2n}) vyjádřeném (3), resp. (K_{2n+1}) vyjádřeném (4), v tomto jednoduchém tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \, . \, s^m \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \, . \, s^m \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= Ck \, . \, s^m \end{aligned} \tag{8}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$); přitom $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Kromě toho její pól je v počátku souřadnic a — jde-li o R_{2n+1} — její osa je souřadnou osou X_{2n+1}.

Dle (8) jest p. v. *Archimedovy spirály* ($m = 1$)

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \, . \, s \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \, . \, s \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= Ck \, . \, s \end{aligned} \tag{9}$$

($i = 1, \ldots, n$) a p. v. *hyperbolické spirály* ($m = -1$)

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \frac{k}{s} \, . \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \frac{k}{s} \, . \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \frac{k}{s} \end{aligned} \tag{10}$$

($i = 1, \ldots, n$). Vzorec (8) doplníme následující větou, na kterou se později budeme často odvolávati:

Parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= R_i\,(aS+b)^m \,.\, \cos L_i S, \\ x_{2i} &= R_i\,(aS+b)^m \,.\, \sin L_i S, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= K\,(aS+b)^m \end{aligned} \tag{11}$$

($i = 1, \ldots n$), kde S je parametr a $R_i \neq 0$, $L_i \neq 0$, $a \neq 0$, $m \neq 0$, $K \neq 0$, b jsou konstanty a kde platí $|L_i| \neq |L_j|$ pro $i \neq j$, *lze vhodnou úpravou uvésti na tvar* (8), ve kterém $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Je tedy křivka o p. v. (11) mocninnou spirálou stupně m, ležící v R_{2n}, resp. R_{2n+1}. A z důkazu bude patrno, že *všechny spirály — odpovídající různým hodnotám konstanty* b *— jsou, až na polohu, stejné a mají společný pól v počátku souřadnic a společnou osu v souřadné ose* X_{2n+1}.

Důkaz: Otočme nejprve systém souřadný dle rovnic

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \,.\, \cos\left(L_i \frac{b}{a}\right) - x_{2i} \,.\, \sin\left(L_i \frac{b}{a}\right), \\ X_{2i} &= x_{2i-1} \,.\, \sin\left(L_i \frac{b}{a}\right) + x_{2i} \,.\, \cos\left(L_i \frac{b}{a}\right), \\ X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned}$$

($i = 1, \ldots, n$) a proveďme transformaci paramentru dle vztahu $\sigma = aS + b$! Tím dostaneme $X_{2i-1} = R_i \,.\, \sigma^m \,.\, \cos\left(\frac{L_i}{a}\sigma\right)$, $X_{2i} = R_i \,.\, \sigma^m \,.\, \sin\left(\frac{L_i}{a}\sigma\right)$, resp. $X_{2n+1} = K \,.\, \sigma^m$ ($i = 1, \ldots, n$). Označíme nyní

$$1^\circ\ r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2}}, \text{ resp. } r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2 + K^2}}$$

$$\text{a } C = \frac{K}{\sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2 + K^2}}$$

$$2^\circ\ k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2}}{\left[r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \ldots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}m}},$$

$$\text{resp. } k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \ldots + R_n^2 + K^2}}{\left[r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \ldots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}m}}$$

$$3^\circ\ l_i = \frac{L_i}{a \,.\, \sqrt{r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \ldots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2}}$$

a provedeme dále transformaci parametru

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{r_1^2\left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \ldots + r_n^2\left(\frac{L_n}{a}\right)^2}}.$$

Parametrické vyjádření (11) můžeme pak v tomto označení psát ve tvaru (8), při čemž platí $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$, resp. $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$, a $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. Poněvadž r_i, l_i, k, C nezávisí na b, nemá b vliv na tvar křivky. Má vliv pouze na její polohu, neboť se vyskytuje jen v rovnicích pro otočení systému souřadného. Z dokázané věty bezprostředně následuje:

Konchoida Archimedovy spirály — jestliže její pól je v pólu Archimedovy spirály — jest opět Archimedova spirála, shodná s původní, lišící se od ní pouze polohou. Pól, po př. osa jest však oběma spirálám společná.

Vraťme se ke vztahu (6) a všimněme si, že dle úměry (5) jsou oblouky s, S nadkružnic — které vytínají z rotač. dvojkužele (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) nadkoule, mající společný střed ve vrcholu a poloměry $R_1 = 1$, $R_2 = R$ (> 0) — mezi dvěma povrchovými přímkami, při vhodné volbě orientace, vázány vztahem $S = Rs$. Proto z $\varrho = k\,.\,(S - S_0)^m$ následuje $\varrho = kR^m\,(s - s_0)^m$. Z toho dle (3), resp. (4) a (7) plynou následující dvě věty:

Buď $\varkappa$ nadkružnice v R_{2n}, P, Q dva její body a O její střed, po př. — jde-li o R_{2n+1} — bod na kolmici o vztyčené ve středu $\varkappa$ na R_{2n}! Nanesme na spojnici $\overrightarrow{OQ}$ od O úsečku $\overrightarrow{OA}$ úměrnou m-té mocnině oblouku $\widehat{PQ}$! Jestliže bod P je pevný a Q se pohybuje na $\varkappa$, pak koncové body A leží na mocninné spirále stupně m. Všechny tyto spirály — odpovídající různým volbám bodu P na $\varkappa$ — jsou až na polohu shodné, mají však společný pól O a — v případě R_{2n+1} — společnou osu o.

Poznámka 1. Dle (11) platí pro Archimedovu spirálu obecnější věta: Naneseme-li od O úsečky rovné $k\,.\,\sigma + K$ — kdež $k \neq 0$, K jsou konstanty a $\sigma = \widehat{PQ}$ —, obzvláště tedy naneseme-li od Q úsečky rovné $k\,.\,\sigma$, pak body A leží na Archimedově spirále, jejíž tvar nezávisí na volbě P ani na konstantě K.

2. Dle (11) se snadno dokáže: Otáčí-li se rovnoměrně přímka p v R_{2n} dle (1), resp. v R_{2n+1} dle (2) — při čemž prochází středem otáčení O, resp. protíná osu otáčení o v bodě O — a současně na ní (vycházeje z určitého bodu) se pohybuje rovnoměrně bod P, pak tento bod opisuje Archimedovu spirálu, mající v O svůj pól a — v případě R_{2n+2} — v o svou osu.

Mocninná spirála (8) *stupně* $m < 0$ *má v pólu asymptotický bod a — v případě* $-1 \leqq m < 0$ — *má též asymptotu, jejíž rovnice jsou*

a) pro $m = -1$ (*hyperbolická spirála*)

$$x_{2i-1} = r_i, \; x_{2i} = r_i l_i k, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

b) pro $-1 < m < 0$

$$x_{2i-1} = \lambda r_i, \; x_{2i} = 0, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

při čemž λ *je parametr.*

Důkaz: Především je patrné, že u mocninné spirály (8) platí pro $s = 0$ $\mathrm{d}x_{2i-1} : \mathrm{d}x_{2i} :$ (resp.) $\mathrm{d}x_{2n+1} = r_i : 0 :$ (resp.) C. Dále souřadnice bodu T (viz (27)), ležícího na tečně bodu $s = 0$ jsou

a) pro $m = -1 : x_{2i-1} = 0, \; x_{2i} = r_i l_i k$, resp. $x_{2n+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

b) pro $-1 < m < 0 : x_{2i-1} = 0, \; x_{2i} = 0$, resp. $x_{2n+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Proto rovnice asymptoty, určené bodem T a poměrem směrových kosinů, jsou v prvém případě (12) a ve druhém (13).

Poznámka: Jestliže $m < -1$, pak vzdálenost $v = \left| \dfrac{s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}} \right|$ pólu od tečny mocninné spirály (8) (viz (26)) vzrůstá do ∞, když $s \to 0$. Tedy u spirály stupně $m < -1$ asymptota jako tečna v nekonečně vzdáleném bodě křivky neexistuje.

3. Polární tečna, normála, subtangenta, subnormála.

Buď P regulární bod jakékoli spirály Σ, ležící na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) a O buď její pól (vrchol dvojkužele)! Sestrojme v bodě P tečnu a protněme ji v bodě T nadrovinou, jdoucí bodem O kolmo na spojnici OP (průvodič bodu P)! Spojnici TO protněme pak v bodě N nadrovinou, jdoucí kolem P kolmo na jeho tečnu! Tím dostaneme pravoúhlý trojúhelník o vrcholech P, T, N, ve kterém ex def. $\overline{PT}$ je *délka polární tečny*, $\overline{PN}$ je *délka polární normály*, $\overline{OT}$ *délka polární subtangenty* a $\overline{ON}$ *délka polární subnormály*. Uvedené délky béřeme vždy absolutně.

P. v. spirály Σ můžeme dle (3), (4) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \varrho(s) \,.\, \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \varrho(s) \,.\, \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \varrho(s) \end{aligned} \tag{14}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Přitom r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$, $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$, $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$ (resp. $r_1^2 + \ldots + r_n^2 + C^2 = 1$), $r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2 = 1$. $\varrho(s)$ je tedy vzdálenost bodu spirály od vrcholu

dvojkužele a s je oblouk nadkružnice $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C$ $(i = 1, \ldots, n)$, kterou vytíná z dvojkužele nadkoule o středu ve vrcholu a o poloměru 1.

Bod P buď určen parametrem s! Pomocí směrových kosinů lze zjistiti, že pro úhel ϑ, sevřený tečnou a průvodičem bodu dotyku P, platí

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varrho}{\varrho'} \quad \left(\varrho = \varrho(s),\ \varrho' = \frac{d\varrho}{ds}\right), \tag{15}$$

takže délka polární tečny je

$$\tau = \left| \frac{\varrho}{\varrho'} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right|, \tag{16}$$

délka polární normály

$$\nu = \left| \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right| \tag{17}$$

délka polární subtangenty

$$s_\tau = \left| \frac{\varrho^2}{\varrho'} \right|, \tag{18}$$

délka polární subnormály

$$s_\nu = | \varrho' | \tag{19}$$

a vzdálenost pólu od tečny

$$v = \left| \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} \right|. \tag{20}$$

Jelikož dále tečna v bodě P má p. v. $x_{2i-1} = r_i \varrho \cos l_i s + \lambda r_i \cdot (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s)$, $x_{2i} = r_i \varrho \sin l_i s + \lambda r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s)$, resp. $x_{2n+1} = C\varrho + \lambda C \varrho'$ $(i = 1, \ldots n)$, kdež λ je parametr, a nadrovina, jdoucí pólem O kolmo na OP, má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} r_i (x_{2i-1} \cos l_i s + x_{2i} \sin l_i s) + [\text{resp. } C] = 0,$$

jsou souřadnice bodu T

$$x_{2i-1} = r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \sin l_i s, \quad x_{2i} = - r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \cos l_i s, \qquad \text{resp. } x_{2n+1} = 0,\ (i = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Jelikož dále nadrovina, jdoucí bodem P kolmo na jeho tečnu, má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{2i-1} - r_i \varrho \cos l_i s) \cdot r_i (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (x_{2i} - r_i \varrho \sin l_i s) \cdot r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s) + \text{resp.}$$

$(x_{2n+1} - C\varrho)\, C\varrho' = 0$ a spojnice OT má p. v. $x_{2i-1} = \lambda r_i l_i \sin l_i s$,

$x_{2i} = -\lambda r_i l_i \cos l_i s$, resp. $x_{2n+1} = 0$ (λ parametr), jsou souřadnice bodu N

$$x_{2i-1} = -r_i l_i \varrho' \sin l_i s, \quad x_{2i} = r_i l_i \varrho' \cos l_i s, \qquad \text{resp. } x_{2n+1} = 0, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Pro mocninné spirály (8) platí tedy

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s}{m}, \tag{23}$$ $$s_\tau = \frac{k}{m} \cdot s^{m+1}, \tag{24}$$

$$s_\nu = | mk \cdot s^{m-1} |, \tag{25}$$ $$v = \frac{k \cdot s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}}. \tag{26}$$

Z (24) je patrné, že *u hyperbolické spirály jest subtangenta konstantní.* Pomocí (18) a (11) se snadno dokáže, že *je to jediná křivka na rotačním dvojkuželu* (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}), *mající tuto vlastnost.*

Z (25) je dále patrné, že *u Archimedovy spirály jest subnormála konstantní.* Z (19) a (11) plyne, že je to *jediná křivka na rotačním dvojkuželu* (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) *o této vlastnosti.*

Dle (21) a (22) platí pro mocninné spirály o p. v. (8):

Body T leží na křivce

$$x_{2i-1} = \frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = -\frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \cos l_i s, \qquad \text{resp. } x_{2n+1} = 0 \ (i = 1, \ldots, n), \tag{27}$$

a body N na křivce

$$x_{2i-1} = -r_i l_i \, kms^{m-1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = r_i l_i \, kms^{m-1} \cos l_i s, \qquad \text{resp. } x_{2n+1} = 0 \ (i = 1, \ldots, n). \tag{28}$$

Z toho je patrné: *U mocninných spirál m-tého stupně leží koncové body subtangenty (subnormály) na mocninné spirále stupně* $m + 1$ *(stupně* $m - 1$*), jež má s původní spirálou společný pól a — v případě* R_{2n+1} *— leží v nadrovině* R_{2n} *jdoucí pólem kolmo na osu.* Tedy: *U hyperbolické spirály koncové body subtangenty a u Archimedovy spirály koncové body subnormály leží na nadkružnicích, majících středy v pólu spirály.* Z (22) je dále patrné, že u polynomické spirály stupně m leží koncové body subnormály na polynomické spirále stupně $m - 1$, jež má s původní spirálou společný pól a — v případě R_{2n+1} — leží v nadrovině R_{2n}, jdoucí pólem kolmo na osu. U Galileiovy spirály je to tedy Archimedova spirála.

Další dvě vlastnosti lze snadno dokázati pomocí (23), (15), resp. (24), (25), (18), (19):

Mocninné spirály na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) *jsou charakterisovány vlastností, že protínají povrchové přímky dvojkužele pod úhlem* ϑ, *jehož (trigonometrická) tangenta je lineární* *funkcí oblouku S nadkružnice, kterou z (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru.*

Mocninná spirála m-tého stupně na rotačním dvojkuželu (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) je charakterisována vlastností, že její polární subtangenta je tvaru $s_\tau = k \,.\, (S + a)^{m+1}$ a současně její polární subnormála tvaru $s_\nu = K \,.\, (S + a)^{m-1}$; přitom k, K jsou konstanty $\neq 0$ a S má týž význam jako v předchozí větě.

4. Další vlastnosti mocninných spirál.

Podáváme zde několik různorodých vlastností mocninných spirál. Především u spirály (14) uvedeme vzorec pro výpočet plochy F opsané průvodičem $\varrho(s)$, když s jde od s_1 do s_2. Na základě toho, že poloha opsaná průvodičem konstantní délky $\varrho(s) = R$ se rovná $\frac{1}{2}R^2 (s_2 - s_1)$, se snadno zjistí, že

$$F = \tfrac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} \varrho^2(s)\, \mathrm{d}s. \tag{29}$$

Pro mocninné spirály (8) jest tedy

$$F = \tfrac{1}{2}\, k^2 \frac{s_2^{2m+1} - s_1^{2m+1}}{2m + 1} \quad \text{pro } m \neq -\tfrac{1}{2}, \tag{30}$$

$$F = \tfrac{1}{2}\, k^2 \log \frac{s_2}{s_1} \qquad \text{pro } m = -\tfrac{1}{2}. \tag{31}$$

Z toho následuje: Plocha F opsaná průvodičem $\varrho(s)$, když jeho koncový bod jde *a*) od pólu $s = 0$ do bodu $P(s)$ $F = \frac{1}{2}\, k^2 \dfrac{s^{2m+1}}{2m + 1}$ pro $m > 0$, *b*) od bodu $P(s)$ do pólu $s = \infty$ (asymptotického bodu) $F = \infty$ pro $-\frac{1}{2} \leqq m < 0$, *c*) od bodu $P(s)$ do pólu $s = \infty$ (asymptotického bodu) $F = -\frac{1}{2}\, k^2 \dfrac{s^{2m+1}}{2m + 1}$ pro $m < -\frac{1}{2}$.

Poznámka: U Archimedovy spirály jest plocha F omezená jejím obloukem a průvodiči koncových bodů ϱ_1, ϱ_2 rovna dle (30) $F = \dfrac{1}{6k}\,(\varrho_2^3 - \varrho_1^3)$ a u hyperbolické spirály $F = \dfrac{1}{2k}\,(\varrho_1 - \varrho_2)$.

Vlastnost vyjádřená vzorci (30), (31) je pro mocninné spirály na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) charakteristická. Platí totiž: *Jestliže u křivky* (14) *na rotač. dvojkuželi (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) jest plocha F, opsaná průvodičem $\varrho(s)$, když jeho koncový bod jde od $P(s_1)$* do *$P(s)$, tvaru $F = a \,.\, s^m + b$ $(a, m, b$ konstanty, $a \,.\, m > 0)$ nebo tvaru $F = a \,.\, \log |b \,.\, s|$ $(a > 0$, b konstanty$)$, pak křivka* (14) *je mocninnou spirálou stupně $\dfrac{m-1}{2}$ nebo $-\frac{1}{2}$.* Dle předpokladu [jest totiž

$$F = \tfrac{1}{2}\int_{s_1}^{s} \varrho^2(s)\,\mathrm{d}s = a\,.\,s^m + b \text{ nebo } F = \tfrac{1}{2}\int_{s_1}^{s} \varrho^2(s)\,\mathrm{d}s = a\,.\,\log|b\,.\,s|.$$

Derivací dle s dostáváme v prvém případě $\varrho^2(s) = 2ams^{m-1}$, z čehož $\varrho(s) = \sqrt{2am}\,.\,s^{\frac{m-1}{2}}$ a ve druhém $\varrho^2(s) = \dfrac{2a}{s}$, z čehož $\varrho(s) = \sqrt{2a}\,.\,s^{-\frac{1}{2}}$.

V kulové inversi odpovídá mocninné spirále m-tého stupně — v případě, že střed inverse je v jejím pólu — mocninná spirála stupně — m, mající s původní spirálou společný pól a resp. osu. Archimedově spirále odpovídá tedy hyperbolická spirála a obráceně.

Jestliže střed inverse je v počátku souřadnic a poloměr nadkoule R, pak kulová inverse v p-rozměrném prostoru R_p je vyjádřena rovnicemi

$$X_j = \frac{R^2}{x_1^2 + \ldots + x_p^2}\,.\,x_j \quad (j = 1,2, \ldots, p).$$

Odpovídá tedy mocninné spirále (8) mocninná spirála

$$X_{2i-1} = r_i \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \cos l_i s, \quad X_{2i} = r_i \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \sin l_i s,$$

$$\text{resp. } X_{2n+1} = C \frac{R^2}{k\,.\,s^m} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Protneme-li rotač. dvojkužel (K_{2n}) o p. v. (3), resp. (K_{2n+1}) o p. v. (4) nadkoulemi, majícími společný střed v jeho vrcholu V, dostaneme systém nadkružnic (Σ), z nichž každá protíná přímku ξ $x_{2i-1} = r_i$, $x_{2i} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), resp. *$x_{2n+1} = C$, ležící na tomto dvojkuželi. Hyperbolická spirála (10) jest charakterisována na (K_{2n}),* resp. *na (K_{2n+1}) vlastností, že délky oblouků nadkružnic systému (Σ) od přímky ξ až k průsečíkům jejich s hyperbolickou spirálou jsou konstantní ($= k$).*

Poznámka: Přímka ξ jde vrcholem dvojkužele rovnoběžně s asymptotou hyperbolické spirály (10), jak patrno z (12).

Důkaz: Buď Q ($s_1 \neq 0$) bod na hyperbolické spirále (10)! Nadkružnice systému (Σ), jdoucí tímto bodem, má p. v. $x_{2i-1} = \dfrac{k}{s_1} r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \dfrac{k}{s_1} r_i \sin l_i s$ ($i = 1, \ldots, n$), resp. $x_{2n+1} = C\dfrac{k}{s_1}$. Její průsečík P s přímkou ξ je určen parametrem $s = 0$ na nadkružnici a parametrem $s = \dfrac{k}{s_1}$ na ξ. Je tedy oblouk $\widehat{PQ} = \int_0^{s_1} \dfrac{k}{s_1}\,\mathrm{d}s = k$.

Buď nyní obráceně h křivka na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) mající uvedenou vlastnost! Její p. v. můžeme psát ve tvaru (14). Buď dále $Q(s_1)$ bod společný této křivce a nadkružnici $x_{2i-1} = \varrho(s_1)\, r_i \cos l_i s$, $x_{2i} =$

$= \varrho(s_1)\, r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C\, \varrho(s_1)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ze systému (Σ)! Nadkružnice protíná ξ v bodě P, jenž je na ní určen parametrem $s = 0$. Je tedy oblouk $\widehat{PQ} = \int\limits_0^{s_1} \varrho(s_1)\, ds = \varrho(s_1) \,.\, s_1$ a ten dle předpokladu je konstantní $(= k)$. Z toho následuje, že $\varrho(s) = \dfrac{k}{s}$, takže h je hyperbolická spirála, j. b. d.

Podobně se dokáže, že mocninné spirály (8) stupně m jsou charakterisovány vlastností, že shora uvedené oblouky od přímky ξ až k průsečíku $Q(s)$ na mocninné spirále jsou rovny $\widehat{PQ} = k \,.\, s^{m+1}$ (k konstanta).

Spirála „lituus" o p. v. (8) pro $m = -\frac{1}{2}$ jest na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) charakterisována vlastností, že plocha, omezená obloukem $\widehat{PQ}$ nadkružnice $\varkappa$ systému (Σ) — když P, Q jsou průsečíky nadkružnice $\varkappa$ s přímkou ξ a spirálou — a spojnicemi koncových bodů P, Q s vrcholem V, má konstantní plochu $(= \frac{1}{2} k^2)$.

Poznámka: Přímka ξ jest asymptotou spirály, jak je patrno z (13).

Důkaz: Je-li Q na spirále určen parametrem $s = s_0$, jest p. v. nadkružnice $\varkappa$ $x_{2i-1} = r_i \dfrac{k}{\sqrt{s_0}} \,.\, \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \dfrac{k}{\sqrt{s_0}} \,.\, \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C \dfrac{k}{\sqrt{s_0}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, takže body P, Q jsou na ní určeny parametry $s = s_0$, $s = 0$. Má tedy plocha omezená $\widehat{PQ}$ a spojnicemi $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ dle (29) obsah $F = \frac{1}{2} \int\limits_0^{s_0} \dfrac{k^2}{s_0^2}\, ds = \frac{1}{2} k^2$. Buď nyní obráceně h křivka na (K_{2n}), resp. (K_{2n+1}) mající uvedenou vlastnost! Její p. v. lze psáti ve tvaru (14). Bod Q na ní buď určen parametrem $s = s_0$! Pak p. v. nadkružnice ze systému (Σ), jdoucí tímto bodem, jest $x_{2i-1} = \varrho(s_0)\, r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho(s_0)\, r_i \sin l_i s$, resp. $x_{2n+1} = C \varrho(s_0)$ $(i = 1, \ldots, n)$, takže P je určen parametrem $s = 0$. Dle předpokladu jest identicky vzhledem k s_0 $\frac{1}{2} \int\limits_0^{s_0} \varrho^2(s_0)\, ds = \frac{1}{2} k^2$ čili $\varrho^2(s_0) \,.\, s_0 = k^2$. Z toho plyne, že křivka h jest spirálou lituus, j. b. d.

Promítneme-li nadšroubovici v R_{2n+1} z bodu V její osy o na nadrovinu R_{2n} kolmou k této ose, dostaneme hyperbolickou spirálu, jež má asymptotický bod v průsečíku nadroviny s osou a jejíž asymptota má směr přímky, jež prochází středem promítání V, protíná nadšroubovnici a je s R_{2n} rovnoběžná.

Důkaz: Buď

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = C \,.\, s \tag{32}$$

($i = 1, \ldots, n$) p. v. uvedené nadšroubovice![4]) Přitom r_i, l_i, C jsou konstanty $\neq 0$, $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$ a souřadná osa X_{2n+1} jest osou nadšroubovice. Buď dále $(0, \ldots, 0, a)$ střed promítání V a $x_{2n+1} = d$ ($\neq a$) nadrovina R_{2n} kolmá k ose nadšroubovice X_{2n+1}! Pak p. v. kužele, jenž z bodu V promítá nadšroubovici, je

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = a + \varrho(Cs - a)$$

($i = 1, \ldots, n$), kdež ϱ je parametr. Řez tohoto kužele s $x_{2n+1} = d$ jest

$$x_{2i-1} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = d \tag{33}$$

($i = 1, \ldots, n$), což je dle (11) hyperbolická spirála, mající zřejmě v bodě $(0, \ldots, 0, d)$ asymptotický bod. Použijeme-li na (33) transformaci otočení (2), v níž $L_i = l_i$, $\sigma = \frac{a}{C}$ a pak transformaci parametru $s = \omega + \frac{a}{C}$, dostaneme

$$X_{2i-1} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \cos l_i\omega, \quad X_{2i} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \sin l_i\omega, \quad X_{2n+1} = d$$

($i = 1, \ldots, n$). To se dá psát ve tvaru (*) $X_{2i-1} = R_i \frac{k}{S} \cos L_i S$, $X_{2i} = R_i \frac{k}{S} \sin L_i S$, $X_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$), při čemž platí $R_1^2 + \ldots + R_n^2 = 1$, $R_1^2 L_1^2 + \ldots + R_n^2 L_n^2 = 1$, když označíme

$$R_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}}, \quad L_i = \frac{l_i}{\sqrt{R_1^2 l_1^2 + \ldots + R_n^2 l_n^2}},$$

$$S = \sqrt{R_1^2 l_1^2 + \ldots + R_n^2 l_n^2} \,.\, \omega \text{ a } k \,.\, C = (d-a)\sqrt{r_1^2 l_1^2 + \ldots + r_n^2 l_n^2}.$$

Proto dle (12) má asymptota hyper. spirály (*) p. v. $x_{2i-1} = \lambda R_i$, $x_{2i} = R_i L_i$, $x_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$). Otočme dále dle (2) — kde $L_i = l_i$, $\sigma = \frac{a}{C}$ — přímku $x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i \frac{a}{C}$, $x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i \frac{a}{C}$, $x_{2n+1} = a$ ($i = 1, \ldots, n$), která spojuje střed promítání V s bodem $x_{2i-1} = r_i \cos l_i \frac{a}{C}$, $x_{2i} = r_i \sin l_i \frac{a}{C}$, $x_{2n+1} = a$ ($i = 1, \ldots, n$), ve kterém nadrovina $x_{2n+1} = a$ protíná nadšroubovici! Dostáváme $X_{2i-1} = \varrho r_i$, $X_{2i} = 0$, $X_{2n+1} = a$, což je přímka rovnoběžná s uvedenou asymptotou, j. b. d.

[4]) Viz (*D*).

Přímá plocha šroubová v R_{2n+1} jest proťata souosým rotačním nadkuželem ve dvou shodných Archimedových spirálách, souměrně položených dle přímky, jež je společnou osou plochy šroubové a nadkužele. Obě spirály mají společný pól ve vrcholu a společnou osu v ose nadkužele.

Poznámka: 1° Přímá plocha šroubová (π) jest tvořena přímkami, jež jdou body nadšroubovice a protínají kolmo její osu. Osa nadšroubovice jest osou šroubové plochy. 2° Rotační nadkužel dostaneme takto: Ve středu nadkoule, ležící v nadrovině R_{d-1} prostoru R_d, vztyčíme kolmici (osu) a na ní zvolíme bod V (vrchol). Rotační nadkužel je tvořen spojnicemi vrcholu V s body nadkoule. Každá nadrovina, kolmá k jeho ose, protíná jej v nadkouli, mající střed v průsečíku této nadroviny s osou.

Důkaz: P. v. plochy (π) s osou v X_{2n+1} můžeme psát dle (32) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \lambda r_i \cos l_i s,\ x_{2i} = \lambda r_i \sin l_i s,\ x_{2n+1} = Cs + c \tag{34}$$

$(i = 1, \ldots, n)$, kde λ, s jsou parametry, $r_i \neq 0$, $l_i \neq 0$, $C \neq 0$, c jsou konstanty a kde platí $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$. Dále rovnice rotačního nadkužele s osou v X_{2n+1} a vrcholem v počátku souřadnic jest

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^2 = 0, \tag{35}$$

kde k jest konstanta $\neq 0$. Je patrné, že tento nadkužel protíná plochu (π) v křivkách

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k\,(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \cos l_i s, \quad x_{2i} = \pm \frac{k\,(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$ $(i = 1, \ldots, n)$, jež dle (11) jsou Archimedovy spirály, mající zřejmě uvedené vlastnosti.

Každou mocninnou spirálu v R_{2n} můžeme považovati za kolmý průmět křivky, v níž se protíná přímá plocha šroubová s vhodnou souosou rotační nadplochou v R_{2n+1}, na nadrovinu kolmou ke společné ose.

Protneme-li totiž rotační nadplochu v R_{2n+1} $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^{2m} = 0$, ($k$, m jsou konstanty $\neq 0$) — jejíž osou je souřadná osa X_{2n+1} — přímou plochou šroubovou (34), dostaneme dvě shodné křivky

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k\,(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \cos l_i s, \quad x_{2i} = \pm \frac{k\,(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \ldots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$ $(i = 1, \ldots, n)$. Jejich ortogonální průmět na nadrovinu $x_{2n+1} = 0$ jsou dle (11) dvě shodné mocninné spirály stupně

m, mající společný pól v průsečíku osy nadplochy s nadrovinou $x_{2n+1} = 0$.

Dodatek.

Z jiných křivek, které souvisí s projednávanými spirálami, budiž zde uvedena *kochleoida*. Je to křivka v R_{2n}, jejíž p. v. je možno uvésti do tvaru

$$x_{2i-1} = \frac{R_i}{s}(1 - \cos l_i s), \quad x_{2i} = \frac{R_i}{s} \sin l_i s \tag{36}$$

($i = 1, \ldots, n$); při tom s je parametr, R_i, l_i konstanty $\neq 0$ a $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$. Z tohoto p. v. je patrné, že kochleoida (35) je souměrná dle prostoru ($X_2, X_4, \ldots, X_{2n}$) a má v počátku souřadnic asymptotický bod.

Kochleoida má čtyři pozoruhodné vlastnosti:

1° *Promítneme-li nadšroubovici z jejího bodu A na nadrovinu kolmou k její ose, dostaneme kochleoidu, mající v kolmém průmětu bodu A asymptotický bod.*

Důkaz. Nadšroubovice měj p. v. (32) a střed promítání ať odpovídá parametru $s = s_0$! Přímka, spojující A s libovolným bodem nadšroubovice protíná nadrovinu $x_{2n+1} = d$, kolmou k ose nadšroubovice, v bodě

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0 + r_i \frac{d - Cs_0}{C(s_0 - s)} (\cos l_i s_0 - \cos l_i s), \; x_{2i} = r_i \sin l_i s_0 +$$

$$+ \frac{d - Cs_0}{C(s_0 - s)} (\sin l_i s_0 - \sin l_i s), \; x_{2n+1} = d \;\; (i = 1, \ldots, n).$$

Použijeme-li transformace

$X_{2i-1} = x_{2i-1} \cos l_i s_0 + x_{2i} \sin l_i s_0 - r_i$, $X_{2i} = -x_{2i-1} \sin l_i s_0 + x_{2i} \cos l_i s_0$, $X_{2n+1} = x_{2n+1}$ ($i = 1, \ldots, n$) a označíme-li $s_0 - s = \sigma$, dostaneme

$$X_{2i-1} = r_i \frac{d - Cs_0}{C \,.\, \sigma} (1 - \cos l_i \sigma), \; X_{2i} = r_i \frac{d - Cs_0}{C \,.\, \sigma} \sin l_i \sigma, \; X_{2n+1} = d$$

($i = 1, \ldots, n$), což je p. v. kochleoidy. Podrobíme-li dále kolmý průmět bodu A $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0$, $x_{2i} = r_i \sin l_i s_0$, $x_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$) uvedené transformaci, dostaneme $X_{2i-1} = X_{2i} = 0$, $X_{2n+1} = d$ ($i = 1, \ldots, n$), tedy asymptotický bod této kochleoidy.

2° *Buď $\widehat{AB}$ oblouk dané nadkružnice $\varkappa$ a T jeho těžiště. Je-li bod A pevný a B se pohybuje na $\varkappa$, pak T opisuje kochleoidu, mající ve středu nadkružnice asymptotický bod. Přitom všechny kochleoidy, odpovídající různým volbám bodu A na $\varkappa$, jsou až na polohu shodné.*

Důkaz: *Nadkružnice* $\varkappa$ *v* R_{2n} *měj p. v.* $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = r_i \sin l_i s$ $(i = 1, \ldots, n)$ — kdež s je oblouk; r_i, l_i konstanty $\neq 0$; $|l_i| \neq |l_j|$ pro $i \neq j$! Bodům A, B ať odpovídají po řadě parametry s_0, s! Pak pro souřadnice ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ těžiště T platí $\xi_j \,.\, \int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_{s_0}^{s} x_j ds$, z čehož dostáváme $\xi_{2i-1} = \dfrac{r_i (\sin l_i s - \sin l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$, $\xi_{2i} = - \dfrac{r_i (\cos l_i s - \cos l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$. Použijeme-li transformace $\xi'_{2i-1} = - \xi_{2i-1} \sin l_i s_0 + \xi_{2i} \cos l_i s_0$, $\xi'_{2i} = \xi_{2i-1} \cos l_i s_0 + \xi_{2i} \sin l_i s_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ a označíme-li $\sigma = s - s_0$, dostaneme $\xi'_{2i-1} = \dfrac{r_i}{l_i \,.\, \sigma} \,.\, (1 - \cos l_i \sigma)$, $\xi'_{2i} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$ $(i = 1, \ldots, n)$, což je p. v. kochleoidy.

Poznámka: *a*) Podobným způsobem bychom zjistili, že těžiště T oblouků $\widehat{AB}$ nadšroubovice (32) leží na křivce $\xi'_{2i-1} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma}(1 - \cos l_i \sigma)$, $\xi_{2i} = \dfrac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$, $\xi'_{2n+1} = \dfrac{C}{2} \sigma$ $(i = 1, \ldots, n)$.

b) Z výpočtu je patrné, že *geometrické místo těžišť* T *oblouků* $\widehat{AB}$ *na téže nadkružnici* (resp. *nadšroubovici*) *o konstantní délce* $S = s - s_0$ *leží na nadkružnici* (resp. *nadšroubovici*) $\xi_{2i-1} = \dfrac{2r_i}{l_i S} \sin \dfrac{l_i S}{2} \,.\, \cos l_i \dfrac{s + s_0}{2}$, $\xi_{2i} = \dfrac{2r_i}{l_i S} \sin \dfrac{l_i S}{2} \sin l_i \dfrac{s + s_0}{2}$ (resp. $\xi_{2n+1} = \dfrac{C}{2} \,.\, (s + s_0)$) $(i = 1, \ldots, n)$, mající s původní nadkružnicí (resp. nadšroubovicí) společný střed (osu) a všechny axiální prostory.

3° *Bodem* A *hyperbolické spirály* (10) v R_{2n} *nebo* R_{2n+1} *veďme rovnoběžku s její asymptotou* (12) *a nanesme na ni od bodu* A *úsečku* $\overline{AB}$ *rovnou vzdálenosti bodu* A *od pólu* O, *a to ve směru opačném onomu, ve kterém by se bod* A *blížil na hyper. spirále do nekonečna! Pohybuje-li se nyní* A *na hyperbolické spirále, opisuje* B *kochleoidu, mající v pólu spirály svůj asymptotický bod.*

Důkaz: Je patrné, že bod B má souřadnice

$$x_{2i-1} = r_i \frac{k}{s} \cos l_i s - r_i \frac{k}{s}, \quad x_{2i} = r_i \frac{k}{s} \sin l_i s, \text{ resp. } x_{2n+1} =$$
$$= C \frac{k}{s} - C \frac{k}{s} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

4° Systém nadkružnic v R_{2n} $x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s$, $x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s$ (ϱ parametr; $i = 1, \ldots, n$), který vytíná z rotačního dvojkužele (K_{2n}) o p. v. (3) systém nadkoulí o společném středu v jeho vrcholu,