

## Werk

**Label:** Periodical issue

**Jahr:** 1947

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X\\_0072|log24](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0072|log24)

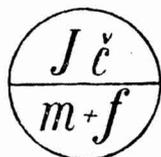
## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ  
MATEMATIKY  
A FYSIKY

ROČNÍK 72 — SEŠIT 3



PRAHA 1947

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

# ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze

*Ročník 72 • Sešit 3 • 1947*

Hlavní redaktoři

**VOJTĚCH JARNÍK** a **MILOSLAV A. VALOUCH**

Část vědecká

Redakční rada pro část matematickou

**OTAKAR BORŮVKA, BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, EDUARD ČECH,**  
**VÁCLAV HLAVATÝ, BOHUSLAV HOSTINSKÝ, VLADIMÍR KNICHAL, VLADIMÍR**  
**KOŘÍNEK, MILOŠ KÖSSLER, ŠTEFAN SCHWARZ a FRANTIŠEK VYČIHLA**

Redakční rada pro část fysikální

**JINDŘICH M. BAČKOVSKÝ, RUDOLF BRDIČKA, DIONÝS ILKOVIČ,**  
**FRANTIŠEK LINK, ZDENĚK MATYÁŠ, VIKTOR TRKAL a AUGUST ŽÁČEK**

**Vyučování — Zprávy — Literatura**

Odborní redaktoři

**KAREL HAVLIČEK, KAREL HRUŠA, EMIL KAŠPAR, MIROSLAV KATĚTOV**  
**FRANTIŠEK KŘEHLÍK, VLADIMÍR MAJER a JAN VYŠÍN**

**Ročně 4 sešity**

**Roční předplatné Kčs 120,—**

*Redakce a administrace: Praha II, Žitná 25. Telefon 29308. V pracovní dny od 8 do 12 a od 14 do 16 hodin kromě soboty. Účet poštovní spořitelny: Jednota čs. matematiků a fysiků, č.č. 13103. Kněhtiskárna Prometheus v Praze VIII, Rokoska 94. Telefon RR8139. Novinová sazba povolena ředitelstvím pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, č.č. 288250/VII. Dohlédací poštovní úřad Praha 25.  
Tento sešit vyšel 20. března 1948*

*Prof. Dr Jan Vojtěch:*

**Knihovna, sv. 2**

**Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických**

Dotisk sedmého vydání.

**Brož. Kčs 170,—**

## A note on semiregular and nearly regular spaces.

By Miroslav Katětov, Praha.

(Received February 11<sup>th</sup>, 1947.)

In the present note relations are analyzed between semi-regular<sup>1)</sup> and nearly regular<sup>2)</sup> spaces. A sufficient condition is given for a hereditarily nearly regular space to be regular and examples are constructed showing that the implications: regular  $\rightarrow$  hereditarily semiregular  $\rightarrow$  hereditarily nearly regular cannot be reversed. All spaces considered are Hausdorff spaces.

Definitions. A point  $x$  of a space  $P$  is called *semiregular*, if for any neighborhood  $G$  of  $x$  there exists a  $H$  such that  $a \in \text{Int } \overline{H} \subset G$ . If every  $x \in P$  is semiregular, the space  $P$  is said to be *semiregular*. If every subspace  $Q \subset P$  is semiregular, the space  $P$  is called *hereditarily semiregular*. A set  $Q \subset P$  is said to be *regularly imbedded*<sup>2)</sup> in  $P$  if for any closed set  $F \subset P$  and any  $a \in P - F$  there exists a set  $A \subset Q$  such that  $F \subset \overline{A} \subset P - a$  (this definition is evidently equivalent with the formally different definition given by Čech and Novák, loc. cit.). If every dense subset  $Q \subset P$  is regularly imbedded in  $P$ , the space  $P$  is called *nearly regular*. The space  $P$  is said to be *hereditarily nearly regular* if every subspace  $Q \subset P$  is nearly regular.

A regular space is obviously semiregular; since regularity is hereditary, we obtain:

*Any regular space is hereditarily semiregular.*

*Any semiregular space  $P$  is nearly regular.*

Proof. Let  $Q$  be dense in  $P$ . If  $F \subset P$  is closed,  $a \in P - F$ , there exists an open  $G \subset P$  such that  $a \in \text{Int } \overline{G} \subset P - F$ . Then  $A = \overline{Q \cap G} - \overline{G}$  is closed in  $Q$ ,  $a \in \text{Int } \overline{G} = P - \overline{P - G} \subset P - \overline{A}$ ,  $F \subset P - \overline{G} \subset \overline{A}$ , hence  $Q$  is regularly imbedded in  $P$ .

<sup>1)</sup> M. H. Stone, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937).

<sup>2)</sup> E. Čech and J. Novák, On regular and combinatorial imbedding, *Čas. mat. fys.* **72** (1947).

This theorem implies:

*Any hereditarily semiregular space is hereditarily nearly regular.*

*If  $P$  is semiregular and  $Q$  is dense in  $P$ , then  $Q$  is semiregular.*

Proof. Let  $G \subset Q$  be relatively open in  $Q$ ,  $x \in Q$ . Let  $G_0$  be open,  $G = QG_0$ . There exists an open set  $H_0$  such that  $x \in \text{Int } \overline{H_0} \subset G_0$ . Setting  $H = QH_0$  we have  $\overline{H} = \overline{H_0}$ ,  $Q - \overline{QH} = P - \overline{H} = P - \overline{H_0}$ ,  $x \in H \subset Q - Q - \overline{QH} = Q$ .  $\text{Int } \overline{H_0} \subset G$ . Hence  $Q$  is semiregular.

*Any Hausdorff space  $P$  may be imbedded in a semiregular space  $R$ .*

Proof. Let  $R$  consist of the points  $x$  and  $(x, n)$  ( $x \in P$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Let the points  $(x, n)$  be isolated and each point  $x_0$  possess fundamental neighborhoods  $U_{m,G}$  consisting of  $x$  and  $(x, n)$ ,  $n > m$ ,  $x \in G$ , where  $m = 1, 2, \dots$  and  $G$  is a neighborhood of  $x_0$ . Clearly,  $R$  is a Hausdorff space and  $P$  is imbedded in  $R$ . Every  $\overline{U}_{m,G} - U_{m,G}$  contains points  $x \in P$  only, and we have  $x = \lim (x, n)$ ,  $(x, n) \in R - U_{m,G}$ . Hence  $\text{Int } \overline{U}_{m,G} \subset U_{m,G}$ ; therefore  $R$  is semiregular.

*Let  $P$  be hereditarily semiregular. Then every point  $x \in P$  possessing a countable family  $\{G_n\}$  of fundamental neighborhoods is a regular point of  $P$ .*

Proof. Suppose, on the contrary, that  $x$  is not regular. Then there exists an open set  $H$  such that  $x \in H$  and  $\overline{G_n} - H \neq \emptyset$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Let  $a_n \in \overline{G_n} - H$  and denote by  $A$  the set of all  $a_n$ . Since  $A$  is evidently infinite, there exist disjoint open sets  $B_n$  such that  $x \in P - \overline{B_n}$  and  $B_n A \neq \emptyset$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Setting  $Q = \sum B_n G_n$ ,  $S = Q + A + x$  we have  $\overline{Q} = S$ ,  $x \in S - \overline{A}$  and, for any  $C \subset Q$  such that  $\overline{C} \subset A$ ,  $CG_n \neq \emptyset$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (since otherwise  $CG_n = \emptyset$ ,  $C \subset \sum_{k \neq n} B_k G_k \subset \sum_{k \neq n} B_k$ ,  $CB_n = \emptyset$ ,  $\overline{CB_n} = \emptyset$ ,  $AB_n = \emptyset$ ), hence  $x \in \overline{C}$ , which contradicts the regularity of the imbedding  $Q \subset S$ .

The preceding theorem implies:

*A hereditarily nearly regular space satisfying the first countability axiom is regular.*

**Example 1.**  $P_1$  is the plane with an additional point  $\omega$ . The points  $(x, y)$ ,  $x$  irrational, are isolated; the points  $(x, y)$ ,  $x$  rational, have their usual neighborhoods. The point  $\omega$  possesses the fundamental neighborhoods  $U_\varphi + \omega$ , where  $U_\varphi$  consists of the points  $(x, y)$ ,  $x$  irrational,  $|y| > \varphi(x)$ ,  $\varphi$  being an arbitrary real function. Clearly  $P_1$  is a Hausdorff  $L$ -space, i. e. for any  $M \subset P_1$  and  $x \in \overline{M}$  there exist  $x_n \in M$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) such that  $x = \lim x_n$ .

Consider a  $U_\varphi$  and denote by  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) the set of all irrational  $x$  such that  $\varphi(x) < n$ . Then some  $C_n$  is of 2. category, hence dense in an interval  $J$ ; hence for any rational  $a \in J$  the points  $(a, y)$ ,  $|y| > n$  lie in  $\overline{U_\varphi}$ . As the closure of the set  $R$  of all  $(x, y)$ ,  $x$  rational, does not contain  $\omega$ , it follows that  $\omega$  is no regular point of  $P$ .

Let  $\omega \in Q \subset P$ . It can be easily shown that there exists a countable set  $B \subset Q - R - \omega$  such that (1)  $R\overline{Q}R \subset \overline{B}$ , (2) for any real  $x$  the set of all  $y$  such that  $(x, y) \in B$  is finite or void. Choose  $\varphi$  such that  $|y| < \varphi(x)$  for every  $(x, y) \in B$ . Given a  $U_\varphi$ , set  $\varphi_1(x) = \max(\varphi(x), \varphi(x))$ ,  $G = QU_{\varphi_1} + \omega$ . Then  $G$  is a relative neighborhood of  $\omega$  in  $Q$ ,  $G \subset U_\varphi$ ,  $BG = 0$ , and, for any  $(x, y) \in Q(\overline{G} - G)$ ,  $(x, y) \in R\overline{B}$ , hence  $(x, y)$  is no interior point (in  $Q$ ) of  $\overline{QG}$ . Hence  $\omega$  is a semiregular point of  $Q$ . All other points being regular  $Q$  is semiregular; hence  $P$  is hereditarily semiregular.

Example 2.<sup>3)</sup> The space  $P_2$  consists of the points  $(\frac{1}{n}, x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ) of the plane (with the usual neighborhoods) and an additional point  $\omega$  possessing the fundamental neighborhoods  $U_m - A + \omega$ , where  $U_m$  consists of all  $(\frac{1}{n}, x) \in P$ ,  $n > m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) and  $A$  is countable. Clearly  $P_2$  is a Hausdorff space and, for any  $G = U_m - A + z$ ,  $\text{Int } \overline{G} = U_m + z$ , hence  $P_2$  is not semiregular.

To show that  $P_2$  is hereditarily nearly regular we have to show, for any  $Q \subset S \subset P$ ,  $\overline{Q} \supset S$ ,  $F \subset S$ ,  $F$  relatively closed in  $Q$ ,  $a \in S - F$ , that a set  $B \subset S$  exists such that  $\overline{B} \supset F$ ,  $a \in S - \overline{B}$ . This is obvious for  $a \neq \omega$ , since  $a$  is regular. For  $a = \omega$ , we have only to choose a countable  $B \subset P_2 - \omega$  such that  $\overline{B} \supset F$  which is evidently possible.

\*

### Poznámka o poloregulárních a skoro regulárních prostorech.

(Obsah předešlého článku.)

Hlavním výsledkem článku je věta:

*Dědičně skoro regulární prostor, splňující první axiom spočetnosti, je regulární.*

---

<sup>3)</sup> This example is essentially due to J. Novák (Čech and Novák, l. c., example 3).



## On the equivalence of certain types of extension of topological spaces.

By Miroslav Katětov, Praha.

(Received June 10, 1947).

There are several types of  $H$ -closed or compact, as the case may be, extensions of a given topological space. Such extensions of a space  $R$  are: E. Čech's [1]<sup>1)</sup> compact space  $\beta R$ , defined for every completely regular space  $R$ , H. Wallman's [2] compact space  $\omega R$ , P. S. Alexandroff's [3] spaces  $\alpha R$  and  $\alpha' R$ , the first of them defined for regular  $R$ , the second for completely regular  $R$ . In the recent paper [4] of the author a descriptive characterization is given of four types of extensions, denoted by  $\tau R$ ,  $\tau' R$ ,  $\sigma R$ ,  $\sigma' R$ , which are defined for any Hausdorff space  $R$ <sup>2)</sup>.

It is of interest to know for what spaces  $R$  some of these eight extensions coincide. It is well known [3] that  $\alpha' R = \beta R$  whenever  $\alpha' R$ ,  $\beta R$  exist, i. e. for every completely regular space  $R$ . It is further known that  $\omega R = \beta R$  if and only if  $R$  is normal. In the present note, necessary and sufficient conditions are given for  $\beta R = \tau R$ ,  $\beta R = \tau' R$ ,  $\beta R = \sigma R$ ,  $\beta R = \sigma' R$ , as well as for  $\omega R = \tau R$  etc. It is shown that  $\beta R = \tau R$  for compact  $R$  only,  $\beta R = \sigma R$  if and only if  $R = R_1 + R_2$  where  $R_1$  is compact,  $R_2$  is discrete. The conditions for  $\beta R = \tau' R$ ,  $\beta R = \sigma' R$  show the structure of  $R$  far less clearly and could be probably replaced by simpler ones.

First of all we describe the extensions  $\omega R$ ,  $\beta R$ ,  $\tau R$ , ...

**Definitions.** Let  $R$  be a topological space. A point  $x \in R$  is called *semiregular* if, for every neighborhood  $H$  of  $x$ , there exists an open set  $G$  such that  $x \in G \subset \text{Int } \bar{G} \subset H$ . A set  $Q \subset R$  is said to be *regularly imbedded* (Čech and Novák [5]) in  $R$  if, for every point

<sup>1)</sup> The numbers in brackets refer to the list at the end of the present paper.

<sup>2)</sup> I take the opportunity to correct the erroneous statement of problem 1 in [4], p. 19. The problem should be stated as follows: „I do not know what conditions a space  $P$  must satisfy in order that it might be imbedded in a  $H$ -closed Hausdorff subspace of  $\omega P$ “.

$x \in R$  and every closed set  $F \subset R - x$ , there exists a set  $A \subset Q$  such that  $F \subset \bar{A} \subset R - x$ .  $Q$  is said to be *combinatorially imbedded* [5] in  $R$  if  $\prod_1^n \bar{F}_i = \emptyset$  whenever  $F_i \subset Q$  are relatively closed and  $\prod_1^n F_i = \emptyset$ .

The following four theorems are known. For the first of them see [5].

**Theorem 1.** *Any  $T_1$ -space  $R$  may be both regularly and combinatorially imbedded, in an essentially unique way, in a compact  $T_1$ -space  $\omega R$ .*

**Theorem 2.** *Any completely regular space  $R$  may be imbedded in a compact Hausdorff space  $\beta R$  such that every bounded continuous real function on  $R$  may be extended to a continuous real function on  $\beta R$ . This imbedding is essentially unique.*

**Theorem 3.** *If  $R$  is normal, then  $\beta R = \omega R$ . If  $\omega R$  is a Hausdorff space, then  $R$  is normal.*

**Theorem 4.** *A completely regular space  $R$  is open in  $\beta R$  if and only if  $R$  is locally compact.*

**Definitions.** Let  $R$  be a Hausdorff space,  $Q \subset R$ ,  $\bar{Q} = R$ .  $Q$  is said to be *hypercombinatorially imbedded* in  $R$  if  $\prod_1^n \bar{F}_i = \prod_1^n F_i$  whenever  $F_i \subset Q$  are relatively closed and  $\prod_1^n F_i$  is nowhere dense in  $Q$ .  $Q$  is said to be *paracombinatorially imbedded* in  $R$  if  $\prod_1^n \bar{G}_i \subset Q$  whenever  $G_i \subset Q$  are relatively open and  $\prod_1^n G_i = \emptyset$ .

The following two lemmas and four theorems are given in [4].

**Lemma 1.** *Let  $R$  be a Hausdorff space,  $Q \subset R$ ,  $\bar{Q} = R$ . The imbedding  $Q \subset R$  is hypercombinatorial if and only if  $\bar{F}_1 \bar{F}_2 = F_1 F_2$  whenever  $F_1, F_2$  are relatively closed subsets of  $Q$  and  $F_1 F_2$  is nowhere dense in  $Q$ .*

**Lemma 2.** *Let  $R$  be a Hausdorff space,  $Q \subset R$ ,  $\bar{Q} = R$ . The imbedding  $Q \subset R$  is paracombinatorial if and only if  $\bar{G}_1 \bar{G}_2 \subset Q$  whenever  $G_1, G_2$  are relatively open subsets of  $Q$  and  $G_1 G_2 = \emptyset$ .*

The above lemmas assert evidently that we can put  $n = 2$  in the definitions of the hypercombinatorial and paracombinatorial imbedding without changing their meaning. It is worth mentioning that an analogous lemma does not hold for the combinatorial imbedding [5].

**Theorem 5.** Any Hausdorff space  $R$  may be hypercombinatorially imbedded in a  $H$ -closed<sup>3)</sup> space  $\tau R$  such that  $R$  is open in  $\tau R$  and the subspace  $\tau R - R$  is discrete. The imbedding is essentially unique.

**Theorem 6.** Any Hausdorff space  $R$  may be paracombinatorially imbedded in a  $H$ -closed space  $\tau'R$  such that  $R$  is open in  $\tau'R$  and every point  $x \in \tau'R - R$  is semiregular. This imbedding is essentially unique.

**Theorem 7.** Any Hausdorff space  $R$  may be imbedded both hypercombinatorially and regularly in a  $H$ -closed space  $\sigma R$ . This imbedding is essentially unique.

**Theorem 8.** Any Hausdorff space  $R$  may be imbedded both paracombinatorially and regularly in a  $H$ -closed space  $\sigma'R$  such that every point  $x \in \sigma'R - R$  is semiregular. This imbedding is essentially unique.

Now we proceed to establish the conditions for the equivalence  $\beta R = \tau R, \dots$

**Lemma 3.** If every nowhere dense closed subset of a regular space  $R$  is compact, then  $R$  is normal.

**Proof.** Let  $F_1, F_2$  be disjoint closed subsets of  $R$ . Denote  $\text{Int } F_1$  by  $G$ ,  $F_1 - G$  by  $K$ . For each point  $x \in K$  choose an open set  $H(x)$  such that  $x \in H(x)$ ,  $\overline{H(x)}F_2 = \emptyset$ . Since  $K$  is compact there exist  $x_i$  such that  $\sum_1^n H(x_i) \supset K$ . Setting  $H = G + \sum_1^n H(x_i)$  we have  $H \supset F_1$ ,  $\overline{H}F_2 = \emptyset$ . Hence  $R$  is normal.

**Definition.** A subset  $M$  of a topological space  $R$  is called regularly nowhere dense if  $\overline{M} = \overline{G_1} \overline{G_2}$  where  $G_1, G_2$  are open,  $G_1 G_2 = \emptyset$ .

**Lemma 4.** If every regularly nowhere dense closed subset of a regular space  $R$  is compact, then, for every pair  $G, H$  of open sets such that  $\overline{G} \subset H$ , there exists a continuous real function  $f$  on  $R$  such that  $f(x) = 0$  for  $x \in G$ ,  $f(x) = 1$  for  $x \in R - H$ .

**Proof.** Denote  $\text{Int } \overline{G}$  by  $G_0$ ,  $\overline{G} - G_0$  by  $K$ . For each point  $x \in K$  choose an open set  $U(x)$  such that  $x \in U(x) \subset \overline{U(x)} \subset H$ . Since  $K$  is closed and regularly nowhere dense, therefore compact, there exist  $x_i \in K$  such that  $\sum_1^n U(x_i) \supset K$ . Setting  $U = G_0 + \sum_1^n U(x_i)$  we have  $\overline{G} \subset U \subset \overline{U} \subset H$ . The rest of the proof is now completely analogous to that of the well known Urysohn's lemma.

**Theorem 9.** Let  $R$  be a completely regular space. The imbedding  $R \subset \beta R$  is hypercombinatorial (paracombinatorial) if and only if

<sup>3)</sup> A Hausdorff space  $R$  is called  $H$ -closed if it is closed in any Hausdorff space in which it is imbedded.

every nowhere dense (regularly nowhere dense) closed subset of  $R$  is compact.

Proof. I. Let the imbedding  $R \subset \beta R$  be hypercombinatorial. If  $F \subset R$  is nowhere dense and closed (in  $R$ ), then  $F = \overline{F}$  and since  $\beta R$  is compact, so is  $F$ .

II. Let the imbedding  $R \subset \beta R$  be paracombinatorial. If  $F \subset R$  is closed and regularly nowhere dense (in  $R$ ), then  $F = R\overline{G_1}\overline{G_2}$ , where  $G_1, G_2$  are disjoint open subsets of  $R$ . Therefore  $\overline{F} \subset \overline{G_1}\overline{G_2} \subset R$ , whence  $\overline{F} = F$ . Thus  $F$  is compact.

III. Suppose that every nowhere dense closed set  $F \subset R$  is compact. Let  $F_1, F_2$  be closed subsets of  $R$  and let  $F = F_1 F_2$  be nowhere dense. Choose a point  $x \in \overline{F_1}\overline{F_2}$ . If we had  $x \in \beta R - \overline{F}$ , there would exist an open (in  $\beta R$ ) set  $H$  such that  $H \supset \overline{F}$ ,  $x \in \beta R - \overline{H}$ , hence  $x \in \overline{F_1} - \overline{H}\overline{F_2} - \overline{H}$ . This contradicts the fact that,  $R$  being normal by lemma 3, there exists by theorem 2 a continuous real function  $f$  on  $\beta R$  such that  $f(x) = 0$  for  $x \in F_1 - H$ ,  $f(x) = 1$  for  $x \in F_2 - H$ . Therefore  $\overline{F_1}\overline{F_2} = \overline{F} = F = F_1 F_2$ . Hence by lemma 1 the imbedding  $R \subset \beta R$  is hypercombinatorial.

IV. Suppose that every regularly nowhere dense closed set  $F \subset R$  is compact. Let  $G_1, G_2$  be disjoint open subsets of  $R$ . Denote  $R\overline{G_1}\overline{G_2}$  by  $F$ ;  $F$  is compact, hence  $\overline{F} = F$ . Suppose that  $\overline{G_1}\overline{G_2} \neq F$ ; choose a point  $x \in \overline{G_1}\overline{G_2} - \overline{F}$ . Then there exists an open set  $H$  such that  $H \supset \overline{F}$ ,  $x \in \beta R - \overline{H}$ ,  $x \in \overline{G_1} - \overline{H}$ ,  $x \in \overline{G_2} - \overline{H}$ . This is a contradiction since by lemma 4 and theorem 2 there exists a continuous real function  $f$  on  $\beta R$  such that  $f(x) = 0$  for  $x \in G_1 - \overline{H}$ ,  $f(x) = 1$  for  $x \in R - G_2 - \overline{H}$ . Hence  $\overline{G_1}\overline{G_2} = F \subset R$  which by lemma 2 proves that the imbedding  $R \subset \beta R$  is paracombinatorial.

From the theorems 4, 6, 7, 8, 9 we obtain the following

Theorem 10. *Let  $R$  be a completely regular space. Then*  
 (i)  $\beta R = \tau'R$  if and only if  $R$  is locally compact and every regularly nowhere dense closed set  $F \subset R$  is compact;

(ii)  $\beta R = \sigma R$  if and only if every nowhere dense closed set  $F \subset R$  is compact;

(iii)  $\beta R = \sigma'R$  if and only if every regularly nowhere dense closed set  $F \subset R$  is compact.

In the theorem 11 we succeed to replace the condition for  $\beta R = \sigma R$  by a more illuminating one. As to  $\beta R = \tau'R$  it is clear that if  $R = R_1 + R_2$  where  $R_1$  is compact,  $R_2$  is closed discrete, then the conditions for  $\beta R = \tau'R$  are satisfied. I do not know whether they may be satisfied by a space  $R$  which does not admit of a decomposition of the above kind.

Lemma 5. *In order that every nowhere dense closed subset of a Hausdorff space  $R$  should be compact it is necessary and sufficient that the set of all non-isolated points of  $R$  be compact.*

Proof. The sufficiency being evident, we have only to prove the necessity of the condition. Denote by  $S$  the set of all non-isolated points of  $R$ . Let  $F_\xi$  be, for every ordinal  $\xi < \alpha$ , a non-empty closed subset of  $S$ ; let  $F_\xi \supset F_\eta$  for  $\xi < \eta < \alpha$ . We have to prove  $\prod_{\xi} F_\xi \neq \emptyset$ . If, for some  $\xi$ ,  $F_\eta (F_\xi - \text{Int } F_\xi) \neq \emptyset$  for every  $\eta$ ,  $\xi < \eta < \alpha$ , then we obtain  $\prod_{\eta} F_\eta \neq \emptyset$  since  $F_\xi - \text{Int } F_\xi$  is nowhere dense and closed, therefore compact. Hence we may suppose that there exists, for every  $\xi < \alpha$ , a  $\xi'$  such that  $\xi < \xi' < \alpha$ ,  $F_{\xi'} \subset \text{Int } F_\xi$ . Further we may suppose, for convenience, replacing if necessary  $\{F_\xi\}$  by an appropriate subcollection, that  $F_{\xi+1} \subset \text{Int } F_\xi$ ,  $F_{\xi+1} \neq F_\xi$  for every  $\xi < \alpha$ . For each  $\xi < \alpha$ , choose a point  $a_\xi \in \text{Int } F_\xi - F_{\xi+1}$  and denote by  $A$  the set of all  $a_\xi$ . Evidently  $a_\xi \notin G_\eta = \text{Int } F_\eta - F_{\eta+1}$  whenever  $\eta < \alpha$ ,  $\eta \neq \xi$ . Hence every point  $x \in A$  is an isolated point of the set  $A$ , but is not an isolated point of the whole space  $R$  since  $A \subset S$ . Hence  $A$  is nowhere dense and so is  $B = \overline{A}$  as well. Therefore  $B$  is compact and from  $F_\xi B \neq \emptyset$  we obtain  $\prod_{\xi} F_\xi \neq \emptyset$ .

Theorem 10 and the above lemma imply

Theorem 11. *Let  $R$  be a completely regular space.  $\beta R = \sigma R$  if and only if the set of all non-isolated points of  $R$  is compact.*

Lemma 6. *If the set of non-isolated points of a locally compact Hausdorff space  $R$  is compact, then  $R = R_1 + R_2$  where  $R_1, R_2$  are disjoint closed sets,  $R_1$  is compact,  $R_2$  is discrete.*

Proof. Denote by  $S$  the set of all non-isolated points of  $R$ . For every point  $x \in S$  choose an open set  $G(x)$  such that  $x \in G(x)$  and  $\overline{G(x)}$  is compact. Since  $S$  is compact, there exist  $x_i$  such that  $H = \sum_1^n G(x_i) \supset S$ . The set  $R - H$  is both closed and open since it contains isolated points only. Hence  $H = \overline{H} = \sum_1^n \overline{G(x_i)}$  is compact. Setting  $R_1 = H$ ,  $R_2 = R - H$  we obtain the required decomposition.

Theorem 12. *Let  $R$  be a completely regular space.  $\beta R = \tau R$  if and only if  $R$  is compact.*

Proof. If  $R$  is compact,  $\tau R = R = \beta R$ . If  $\beta R = \tau R$ , then by theorem 5 and 9 and lemma 5 the set all non-isolated points of  $R$  is compact. Hence by theorem 5 and 4 and lemma 6 we obtain  $R = R_1 + R_2$  where  $R_1, R_2$  are disjoint closed sets,  $R_1$  is compact,  $R_2$  is discrete. This yields  $\beta R_2 = \tau R_2$  which is possible only for

a finite  $R_2$ , since otherwise the infinite subspace  $\beta R_2 - R_2 = \tau R_2 - R_2$  would be both discrete and compact which is a contradiction. Since  $R_2$  is finite,  $R = R_1 + R_2$  is compact.

**Theorem 13.** *Let  $R$  be a Hausdorff space. Then*

- (i)  $\omega R = \tau R$  if and only if  $R$  is compact;
- (ii)  $\omega R = \tau' R$  if and only if  $R$  is normal and locally compact and every regularly nowhere dense closed subset of  $R$  is compact;
- (iii)  $\omega R = \sigma R$  if and only if the set of all non-isolated points of  $R$  is compact;
- (iv)  $\omega R = \sigma R$  if and only if  $R$  is normal and every regularly nowhere dense closed subset of  $R$  is compact.

**Proof.** If  $\omega R = \tau R$ , ..., then  $\omega R$  is a Hausdorff space, hence by theorem 3  $R$  is normal,  $\omega R = \beta R$ . Therefore the necessary conditions for  $\omega R = \tau R$  etc. are the same as for  $\beta R = \tau R$  etc. with the additional assumption of normality. In (i) and (iii) this assumption is superfluous by lemma 3. The sufficiency of the conditions follows from theorem 10, since the normality of  $R$  implies  $\omega R = \beta R$ .

#### References.

1. E. Čech: On bicomact spaces. *Annals of Math.* **38** (1937), 823-844.
2. H. Wallman: Lattices and topological spaces. *Annals of Math.* **39** (1938), 112-126.
3. P. S. Alexandroff: O bikompaktných rasširenijach topologičeskich prostranstv. *Matem. Sbornik* **5** (1939), 403-420.
4. M. Katětov: On  $H$ -closed extensions of topological spaces. *Čas. Mat. fys.* **72** (1947), 17-32.
5. E. Čech and J. Novák: On regular and combinatorial imbedding. *Čas. mat. fys.* **72** (1947), 7-16.

#### O ekvivalenci některých typů obalů topologických prostorů.

(Obsah předešlého článku).

V tomto článku se studují podmínky pro ekvivalenci obalů  $\beta R$ ,  $\omega R$ ,  $\tau R$ ,  $\tau' R$ ,  $\sigma R$ ,  $\sigma' R$  topologického prostoru  $R$ . Hlavní výsledky jsou tyto:

*Nechť  $R$  je úplně regulární prostor. Potom (1)  $\beta R = \tau' R$  když a jen když  $R$  je lokálně kompaktní a každá regulárně řídká uzavřená množina  $F \subset R$  je kompaktní; (2)  $\beta R = \sigma R$  když a jen když každá řídká uzavřená množina  $F \subset R$  je kompaktní; (3)  $\beta R = \sigma' R$  když a jen když každá regulárně řídká uzavřená množina  $F \subset R$  je kompaktní.*

*Nechť  $R$  je úplně regulární prostor.  $\beta R = \sigma R$  když a jen když množina všech neisolovaných bodů prostoru  $R$  je kompaktní.*

*Nechť  $R$  je úplně regulární.  $\beta R = \tau R$  když a jen když  $R$  je kompaktní.*

## Mocninné spirály v $p$ -rozměrném euklidovském prostoru $R_p$ .

M. Sypták, Brno.

(Došlo 9. května 1947).

### Úvod.

V předloženém pojednání jsou studovány jisté křivky, které možno považovati za zobecnění známých rovinných spirál, t. zv. *mocninných*. Tyto rovinné spirály jsou vyjádřeny v polárních souřadnicích rovnicí  $\rho = k \cdot \omega^m$  kde  $k, m$  jsou reálné konstanty  $\neq 0$ ; mezi ně patří tedy spirála Archimedova ( $m = 1$ ), hyperbolická ( $m = -1$ ), lituus ( $m = -\frac{1}{2}$ ), atd. Zobecnění spočívá v tom, že mocninné spirály definujeme v euklidovském prostoru  $R_p$  o libovolném počtu dimensí  $p \geq 3$ . V tomto pojednání jest ukázáno, že celá řada vlastností, jež známe o mocninných spirálách, zůstává zachována i po tomto zobecnění, ovšem nahradíme-li pojmy a definice, týkající se rovinných křivek, vhodnými pojmy a definicemi platnými v prostoru  $R_p$ . Důležitou úlohou hraje *hlavní rotační dvojkužel*. Je to (dvojrozměrná) plocha, kterou při *hlavním rotačním pohybu* vytváří přímka, jež prochází středem rotace (je-li  $p$  sudé), resp. protíná osu rotace (je-li  $p$  liché). Při tomto pohybu opisují jednotlivé body prostoru důležité křivky, jež v literatuře jsou označeny jménem *nadkružnice* (viz  $(C)$ ,  $(D)$ ); jsou to křivky prostoru o sudém počtu dimensí, jejichž všechny křivosti jsou konstantní. Mocninné spirály v  $R_p$  definujeme jako křivky, jež leží na hlavním rotačním dvojkuželi a jejichž body mají od vrcholu dvojkužele vzdálenosti úměrné  $m$ -té mocnině oblouku nadkružnice, kterou z dvojkužele vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru. Vztah mezi nadkružnicemi a mocninnými spirálami je také předmětem studia v této práci. V dodatku je pak rozšířena definice známé rovinné křivky *kochleoidy* na prostor  $R_{2n}$ . Její základní čtyři vlastnosti zůstávají v platnosti i v tomto prostoru.

Literatura:

- (A) H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, Lipsko 1908.  
 (B) G. Loria: Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Lipsko 1902.  
 (C) O. Borůvka: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques de l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přír. fak. Masarykovy univ., Brno 146 (1931). Viz též stejné nazvané pojednání od téhož autora v Comptes rendus 193 (1931).  
 (D) M. Sypťák: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p-dimensions, Comptes rendus 195 (1932).

1. Hlavní rotační dvojkůžel.

Otáčení bodu  $P(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  v  $R_{2n}$ , definované v pravouhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \cdot \cos L_i \sigma + x_{2i} \cdot \sin L_i \sigma \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \cdot \sin L_i \sigma + x_{2i} \cdot \cos L_i \sigma \end{aligned} \quad (1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — v nichž  $\sigma$  je parametr a  $L_i \neq 0$  konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*<sup>1)</sup> bodu  $P$  okolo bodu (zvaném *středem* otáčení)  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n} = 0$  v  $R_{2n}$ .

Podobně: Otáčení bodu  $P(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$  v  $R_{2n+1}$ , definované v pravouhlém systému souřadném rovnicemi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \cdot \cos L_i \sigma + x_{2i} \cdot \sin L_i \sigma \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \cdot \sin L_i \sigma + x_{2i} \cdot \cos L_i \sigma \\ X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned} \quad (2)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — v nichž  $\sigma$  je parametr a  $L_i \neq 0$  konstanty, jejichž absolutní hodnoty jsou navzájem různé — nazveme *hlavní otáčení*<sup>1)</sup> bodu  $P$  okolo přímky (zvané *osou* otáčení)  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n} = 0$  v  $R_{2n+1}$ .

Otáčení (1) v  $R_{2n}$  se tedy skládá z  $n$  rovinných otáčení okolo  $n$  ( $2n - 2$ ) — rozměrných prostorů  $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a jejich absolutní hodnoty různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny středem otáčení, budeme nazývat *axiálními prostory*.

Podobně: Otáčení (2) v  $R_{2n+1}$  se skládá z  $n$  rovinných otáčení okolo  $n$  ( $2n - 1$ ) — rozměrných prostorů  $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$  ( $i =$

<sup>1)</sup> Obecné otáčení bodu  $P(x_1, x_2, \dots, x_p)$  v  $R_p$  ( $p \geq 2$ ) okolo ( $p - m$ ) — rozměrného prostoru  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  ( $2 \leq m \leq p$ ) — tedy také okolo bodu a přímky — je vyjádřeno v pravouhlém systému souřadném ortogonální transformací

$$\begin{aligned} X_i &= a_{i,1} \cdot x_1 + \dots + a_{i,m} \cdot x_m \text{ pro } 1 \leq i \leq m, \\ X_i &= x_i \text{ pro } m + 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Poslední rovnice odpadá v případě otáčení kol bodu, t. j. pro  $m = p$ .

$= 1, 2, \dots, n$ ), při čemž poměry kruhových oblouků jsou konstantní a absolutní hodnoty jejich různé od 1. Tyto prostory, jdoucí všechny osou otáčení, budeme nazývat *axiálními prostory*.

Jak se snadno přesvědčíme, tvoří všechna otáčení (1) nebo (2) — příslušná různým hodnotám  $\sigma$  — grupu. Vůči této grupě jsou invariantní všechny axiální prostory a následkem toho každý prostor, který vznikne jako průsek  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) axiálních prostorů. Zejména to tedy platí o středu otáčení a o ose otáčení, u níž dokonce každý její bod je invariantní vůči grupě (2).

*Při hlavním otáčení prostoru  $R_{2n}$  opisuje každý bod  $P(x_1, \dots, x_{2n})$  nadkružnici, jejíž střed je ve středu otáčení a jejíchž axiální prostory jsou axiálními prostory otáčení, nebo v těchto prostorech leží. Při hlavním otáčení prostoru  $R_{2n+1}$  opisuje každý jeho bod  $P(x_1, \dots, x_{2n+1})$  nadkružnici, ležící v nadrovině  $R_{2n}^*$  kolmé k ose otáčení. Její střed je v průsečíku osy otáčení s  $R_{2n}^*$  a její axiální prostory jsou průsečné prostory axiálních prostorů otáčení s  $R_{2n}^*$ , nebo v těchto prostorech leží.*

Důkaz: Křivka, kterou bod  $P$  opisuje, je dána rovnicemi (1), resp. (2). Použijme transformace souřadnic

$$X'_{2i-1} = \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i-1} + \frac{x_{2i}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i},$$

$$X'_{2i} = \frac{x_{2i}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i-1} - \frac{x_{2i-1}}{\sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2}} X_{2i},$$

resp.  $X'_{2n+1} = X_{2n+1}$

pro taková  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), pro která  $x_{2i-1}$  nebo  $x_{2i}$  je různé od 0 a

$$X'_{2i-1} = X_{2i-1}, \quad X'_{2i} = X_{2i}$$

pro taková  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), pro která  $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$ . Tím dostaneme

$$X'_{2i-1} = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \cdot \cos L_i \sigma,$$

$$X'_{2i} = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \cdot \sin L_i \sigma,$$

resp.  $X'_{2n+1} = x_{2n+1}$

( $i = 1, \dots, n$ ), což je nadkružnice, mající uvedené vlastnosti.<sup>2)</sup>

Přímka  $p$  v  $R_{2n}$ , jež prochází středem otáčení  $O$  a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytváří při hlavním rotačním pohybu (1) plochu ( $K_{2n}$ ), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem  $O$* . Podobně: Přímka  $p$  v  $R_{2n+1}$ , jež protíná osu otáčení  $o$  v bodě  $O$  a není k ní kolmá, a jež neleží v žádném axiálním prostoru, vytváří při hlavním rotačním pohybu (2) plochu

<sup>2)</sup> Viz (C), (D).

( $K_{2n+1}$ ), kterou nazveme (*hlavním*) *rotačním dvojkuželem s vrcholem  $O$  a osou  $o$* .

Jejich parametrická vyjádření ( $\equiv$  p. v.) můžeme snadno zjistiti. Jsou-li rovnice přímky  $p$   $x_1 = \rho\alpha_1, \dots, x_{2n} = \rho\alpha_{2n}$ , resp.  $x_{2n+1} = d + \rho C$ , kdež  $\rho$  je parametr,  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{2n}^2 = \text{resp. } C^2 = 1$ ,  $\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2 \neq 0$  pro všechna  $i = 1, \dots, n$  a  $C$  je různé od 0 a 1, pak tato přímka při rotaci (1), resp. (2) vytvoří plochu

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \rho (\alpha_{2i-1} \cos L_i \sigma + \alpha_{2i} \sin L_i \sigma) \\ X_{2i} &= \rho (-\alpha_{2i-1} \sin L_i \sigma + \alpha_{2i} \cos L_i \sigma) \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= d + \rho C \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ). Provedeme-li transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} X'_{2i-1} &= \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i-1} + \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2i} &= \frac{\alpha_{2i}}{r_i} X_{2i-1} - \frac{\alpha_{2i-1}}{r_i} X_{2i} \\ X'_{2n+1} &= X_{2n+1} - d \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ), kde  $r_i = \sqrt{\alpha_{2i-1}^2 + \alpha_{2i}^2}$ , dostaneme  $X'_{2i-1} = \rho r_i \cdot \cos L_i \sigma$ ,  $X'_{2i} = \rho r_i \cdot \sin L_i \sigma$ , resp.  $X'_{2n+1} = \rho C$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Provedme dále transformaci parametru  $s = \sigma \sqrt{r_1^2 L_1^2 + \dots + r_n^2 L_n^2}$ , označme  $l_i \sqrt{r_1^2 L_1^2 + \dots + r_n^2 L_n^2} = L_i$  a píšme  $x_j$  místo  $X'_j$  pro  $j = 1, \dots, n, n+1$ . Tím dostaneme p. v. rotačního dvojkužele ( $K_{2n}$ ) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \rho r_i \cdot \cos l_i s, \quad x_{2i} = \rho r_i \cdot \sin l_i s \quad (3)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic,  $r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$ ,  $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$  a  $\rho$  značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu, a p. v. rotačního dvojkužele ( $K_{2n+1}$ ) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \rho r_i \cdot \cos l_i s, \quad x_{2i} = \rho r_i \cdot \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = \rho C \quad (4)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), při čemž vrchol jeho leží v počátku souřadnic, osa jeho v ose  $X_{2n+1}$ ,  $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$ ,  $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$  a  $\rho$  značí vzdálenost bodu plochy od vrcholu.

**Poznámka:** Rovnice (3), resp. (4) pro  $s = s_0$  (konstanta) představují p. v. přímky, ležící na rotač. dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) a dá se snadno dokázati, že rotací (1), resp. (2) této přímky vznikne týž rotač. dvojkužel. Obzvláště to tedy platí o přímce  $x_{2i-1} = \rho r_i$ ,  $x_{2i} = 0$ , resp.  $x_{2n+1} = \rho C$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Je patrné, že rotační dvojkužel ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) se skládá ze dvou shodných částí, t. z. v. (*hlavních*) *rotačních kuželů* ( $k_{2n}^1$ ),

resp.  $(k_{2n+1}^1)$  pro  $\varrho \geq 0$  a  $(k_{2n}^2)$ , resp.  $(k_{2n+1}^2)$  pro  $\varrho \leq 0$ , jež jsou souměrně položeny dle společného vrcholu. Každý z nich vznikne rotací polopřímky, jejíž koncový bod je ve středu otáčení, resp. na ose otáčení.

Každá nadkoule o středu ve vrcholu rotačního dvojkužele  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  protíná tuto plochu ve dvou shodných nadkružnicích, z nichž jedna leží na  $(k_{2n}^1)$ , resp.  $(k_{2n+1}^1)$  a druhá na  $(k_{2n}^2)$ , resp.  $(k_{2n+1}^2)$ . Nadkoule  $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2$  resp.  $x_{2n+1}^2 = R^2$  ( $R > 0$ ) protíná totiž (3), resp. (4) v nadkružnicích  $x_{2i-1} = \pm Rr_i \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \pm Rr_i \cdot \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = \pm R \cdot C$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Současně vidíme, že nadkoule o poloměru  $R = 1$  protíná (3), resp. (4) v nadkružnicích  $x_{2i-1} = \pm r_i \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \pm r_i \cdot \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = \pm C$ , při čemž  $s$  jest jejich oblouk. Z toho je patrný geometr. význam parametru  $s$  v (3), resp. (4).

Každá nadrovina  $R_{2n}$ , jež je kolmá na osu rotač. dvojkužele  $(K_{2n+1})$  a jež neprochází jeho vrcholem, protíná tento dvojkužel v nadkružnici, mající střed v průsečíku osy a nadroviny  $R_{2n}$ . Neboť nadrovina  $x_{2n+1} = k$  ( $\neq 0$ ) protíná (4) v nadkružnici  $x_{2i-1} = \frac{k}{C} r_i$

$$\cdot \cos l_i s, x_{2i} = \frac{k}{C} r_i \cdot \sin l_i s, x_{2n+1} = k \quad (i = 1, \dots, n).$$

Každá nadkoule se středem na ose rotač. dvojkužele  $(K_{2n+1})$  protíná tuto plochu ve dvou nadkružnicích, ležících v nadrovinách kolmých k ose a majících středy v průsečících nadrovin s osou. Neboť nadkoule  $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 + (x_{2n+1} - k)^2 = R^2$  protíná (4) v nadkružnicích  $x_{2i-1} = \varrho r_i \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \varrho r_i \cdot \sin l_i s$ ,  $x_{2n+1} = \varrho C$  ( $i = 1, \dots, n$ ), kde  $\varrho = Ck \pm \sqrt{C^2 k^2 - k^2 + R^2}$ . Označíme-li  $v^2 = R^2 - k^2$ , což geometricky znamená čtverec vzdálenosti středu nadkoule od povrchových přímek dvojkužele, pak platí:

a) pro  $R^2 > v^2$ , po př.  $R^2 < v^2$  jsou průsekem dvě reálné, po př. dvě imaginární nadkružnice.

b) pro  $R^2 = v^2$  jest průsekem nadkružnice dvojnásobná, podél níž se rotač. dvojkužel dotýká nadkoule.

Protneme rotační dvojkužel  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  dvěma nadkoulami — o poloměrech  $R_1$  ( $> 0$ ),  $R_2$  ( $> 0$ ) a společném středu ve vrcholu dvojkužele — v nadkružnicích  $\kappa_1, \kappa_2$ ! Buďte  $P_1, P_2$  dva body téže povrchové přímky, z nichž  $P_1$  leží na  $\kappa_1$  a  $P_2$  na  $\kappa_2$ ! Opisuje-li  $P_1$  na  $\kappa_1$  oblouk  $\widehat{P_1 Q_1}$ , opisuje  $P_2$  na  $\kappa_2$  oblouk  $\widehat{P_2 Q_2}$  a platí

$$\widehat{P_1 Q_1} : \widehat{P_2 Q_2} = R_1 : R_2. \quad (5)$$

Je-li totiž dvojkužel  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  určen rovnicemi (3), resp. (4), má  $\kappa_1$  p. v.  $x_{2i-1} = \pm R_1 r_i \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \pm R_1 r_i \cdot \sin l_i s$ ,

resp.  $x_{2n+1} = \pm R_1 C$  a  $x_{2i-1} = \pm R_2 r_i \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \pm R_2 r_i \cdot \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = \pm R_2 C$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Jsou-li body  $P_1, Q_1$  určeny parametry  $s_1, s_2$ , jsou body  $P_2, Q_2$  určeny týmiž parametry. Platí tedy  $\widehat{P_1 Q_1} = \int_{s_1}^{s_2} R_1 ds = R_1 (s_2 - s_1)$ ,  $\widehat{P_2 Q_2} = \int_{s_1}^{s_2} R_2 ds = R_2 (s_2 - s_1)$ , z čehož následuje úměra (5).

## 2. Mocninné spirály.

Jestliže mezi  $\varrho, s$  v (3), resp. (4) platí vztah  $f(\varrho, s) = 0$ , pak tyto rovnice představují p. v. křivky, ležící na rotač. dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ). Křivku, u níž platí

$$\varrho = k \cdot (s - s_0)^m \quad (6)$$

— při čemž  $k \neq 0$ ,  $m \neq 0$ ,  $s_0$  jsou reálné konstanty — budeme nazývat *mocninnou spirálou stupně  $m$* . Zvláštní případy těchto křivek nazveme ve shodě s názvy v  $R_2$  takto:

pro  $m = 1$  *Archimedovou spirálou*,

pro  $m = -1$  *hyperbolickou spirálou*,

pro  $m = \frac{1}{2}$  *Fermatovou spirálou*,

pro  $m = -\frac{1}{2}$  spirálou „lituus“,

pro  $m = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  celá kladná čísla,  $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{2}$ , 2) *parabolickou spirálou vyššího stupně*,

pro  $m = -\frac{p}{q}$  ( $p, q$  celá kladná čísla,  $\frac{p}{q} \neq 1$ ) *hyperbolickou spirálou vyššího stupně*.

Dále nazveme křivku, u níž  $\varrho$  je rovno polynomu  $P(s)$  stupně  $n$  ( $\neq 0$ ), *polynomickou spirálou stupně  $n$* . Sem patří ku př. *Galileiova spirála*, u níž  $\varrho = as^2 + bs + c$  ( $a \neq 0, b, c$  jsou konstanty a  $b^2 - 4ac \neq 0$ ). Budiž zde poznamenáno, že u této spirály lze transformací (7) pro  $s_0 = -\frac{b}{2a}$  docílití toho, že  $\varrho$  přejde do tvaru  $as^2 + B$

( $B \neq 0$  konst.). Všechny uvedené křivky patří pod *algebraické spirály*, u nichž mezi  $\varrho$  a  $s$  platí algebraický vztah  $f(\varrho, s) = 0$ . Z *transcendentních spirál* — u nichž  $\varrho$  je rovno transcendentní funkci v  $s$  — jest nejdůležitější spirála *exponenciální* čili *logaritmická*, u níž  $\varrho = k \cdot e^{ms}$  ( $k \neq 0, m \neq 0$  konstanty)<sup>\*)</sup>. Každá z těchto spirál má *pól* ve vrcholu dvojkužele ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) a — v případě, že jde o  $R_{2n+1}$  — má kromě toho *osu* v ose dvojkužele ( $K_{2n+1}$ ).

<sup>\*)</sup> O jejích vlastnostech viz M. Sypták: O logaritmických spirálách v  $p$ -rozměrném euklidovském prostoru. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 70 (1940).

Z geometrického významu v (3), resp. (4) je patrné, že *konchoidy* těchto spirál, když pól konchoidy volíme v pólu spirály, dostaneme, když místo  $\varrho$  dáme  $\varrho + d$ , kdež  $d$  je libovolná konstanta. Jest tedy spirála, u níž  $\varrho = a \cdot \sqrt{s} + d$  ( $a \neq 0$  konstanta) — zvaná někdy *parabolická* — konchoidou Fermatovy spirály.

Dosadme do (3), resp. (4)  $\varrho = k \cdot (s - s_0)^m$  a provedme transformaci systému souřadného (otočení)

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= -x_{2i-1} \cdot \cos l_i s_0 + x_{2i} \cdot \sin l_i s_0, \\ X_{2i} &= -x_{2i-1} \cdot \sin l_i s_0 + x_{2i} \cdot \cos l_i s_0, \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

( $i = 1, \dots, n$ ). Po malé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= r_i k (s - s_0)^m \cdot \cos l_i (s - s_0), \\ X_{2i} &= r_i k (s - s_0)^m \cdot \sin l_i (s - s_0), \\ \text{resp. } X_{2n+1} &= C k (s - s_0)^m. \end{aligned}$$

Provedme dále transformaci parametru  $s = \sigma + s_0$  a pišme  $s$ ,  $x_{2i-1}$ ,  $x_{2i}$ ,  $x_{2n+1}$  místo  $\sigma$ ,  $X_{2i-1}$ ,  $X_{2i}$ ,  $X_{2n+1}$ ! Tím dostaneme p. v. *mocninné spirály stupně  $m$* , ležící na rotačním dvojkuželu ( $K_{2n}$ ) vyjádřeném (3), resp. ( $K_{2n+1}$ ) vyjádřeném (4), v tomto jednoduchém tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \cdot s^m \cdot \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \cdot s^m \cdot \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C k \cdot s^m \end{aligned} \quad (8)$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ); přitom  $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = 1$ , resp.  $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$ , a  $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$ . Kromě toho její pól je v počátku souřadnic a — jde-li o  $R_{2n+1}$  — její osa je souřadnou osou  $X_{2n+1}$ .

Dle (8) jest p. v. *Archimedovy spirály* ( $m = 1$ )

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i k \cdot s \cdot \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i k \cdot s \cdot \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C k \cdot s \end{aligned} \quad (9)$$

( $i = 1, \dots, n$ ) a p. v. *hyperbolické spirály* ( $m = -1$ )

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \frac{k}{s} \cdot \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \frac{k}{s} \cdot \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \frac{k}{s} \end{aligned} \quad (10)$$

( $i = 1, \dots, n$ ). Vzorec (8) doplníme následující větou, na kterou se později budeme často odvolávat:

*Parametrické vyjádření*

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= R_i (aS + b)^m \cdot \cos L_i S, \\ x_{2i} &= R_i (aS + b)^m \cdot \sin L_i S, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= K (aS + b)^m \end{aligned} \quad (11)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), kde  $S$  je parametr a  $R_i \neq 0$ ,  $L_i \neq 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $m \neq 0$ ,  $K \neq 0$ ,  $b$  jsou konstanty a kde platí  $|L_i| \neq |L_j|$  pro  $i \neq j$ , lze vhodnou úpravou uvést na tvar (8), ve kterém  $r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$ , resp.  $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$ , a  $r_1^2 t_1^2 + \dots + r_n^2 t_n^2 = 1$ . Je tedy křivka o p. v. (11) mocninnou spirálou stupně  $m$ , ležící v  $R_{2n}$ , resp.  $R_{2n+1}$ . A z důkazu bude patrné, že všechny spirály — odpovídající různým hodnotám konstanty  $b$  — jsou, až na polohu, stejné a mají společný pól v počátku souřadnic a společnou osu v souřadné ose  $X_{2n+1}$ .

Důkaz: Otočme nejprve systém souřadný dle rovnic

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= x_{2i-1} \cdot \cos \left( L_i \frac{b}{a} \right) - x_{2i} \cdot \sin \left( L_i \frac{b}{a} \right), \\ X_{2i} &= x_{2i-1} \cdot \sin \left( L_i \frac{b}{a} \right) + x_{2i} \cdot \cos \left( L_i \frac{b}{a} \right), \\ X_{2n+1} &= x_{2n+1} \end{aligned}$$

( $i = 1, \dots, n$ ) a provedme transformaci parametru dle vztahu  $\sigma = aS + b$ ! Tím dostaneme  $X_{2i-1} = R_i \cdot \sigma^m \cdot \cos \left( \frac{L_i}{a} \sigma \right)$ ,  $X_{2i} = R_i \cdot \sigma^m \cdot \sin \left( \frac{L_i}{a} \sigma \right)$ , resp.  $X_{2n+1} = K \cdot \sigma^m$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Označíme nyní

$$1^\circ r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2}}, \text{ resp. } r_i = \frac{R_i}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}$$

$$\text{a } C = \frac{K}{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}$$

$$2^\circ k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2}}{\left[ r_1^2 \left( \frac{L_1}{a} \right)^2 + \dots + r_n^2 \left( \frac{L_n}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}m}},$$

$$\text{resp. } k = \frac{\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2 + K^2}}{\left[ r_1^2 \left( \frac{L_1}{a} \right)^2 + \dots + r_n^2 \left( \frac{L_n}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}m}}$$

$$3^\circ l_i = \frac{L_i}{a \cdot \sqrt{r_1^2 \left( \frac{L_1}{a} \right)^2 + \dots + r_n^2 \left( \frac{L_n}{a} \right)^2}}$$

a provedeme dále transformaci parametru

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{r_1^2 \left(\frac{L_1}{a}\right)^2 + \dots + r_n^2 \left(\frac{L_n}{a}\right)^2}}$$

Parametrické vyjádření (11) můžeme pak v tomto označení psát ve tvaru (8), při čemž platí  $r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$ , resp.  $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$ , a  $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$ . Poněvadž  $r_i, l_i, k, C$  nezávisí na  $b$ , nemá  $b$  vliv na tvar křivky. Má vliv pouze na její polohu, neboť se vyskytuje jen v rovnicích pro otočení systému souřadného. Z dokázané věty bezprostředně následuje:

*Konchoida Archimedovy spirály — jestliže její pól je v pólu Archimedovy spirály — jest opět Archimedova spirála, shodná s původní, liší se od ní pouze polohou. Pól, po př. osa jest však oběma spirálám společná.*

Vraťme se ke vztahu (6) a všimněme si, že dle úměry (5) jsou oblouky  $s, S$  nadkružnic — které vytínají z rotač. dvojkužele ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) nadkoule, mající společný střed ve vrcholu a poloměry  $R_1 = 1, R_2 = R (> 0)$  — mezi dvěma povrchovými přímkami, při vhodné volbě orientace, vázány vztahem  $S = Rs$ . Proto z  $\rho = k \cdot (S - S_0)^m$  následuje  $\rho = kR^m (s - s_0)^m$ . Z toho dle (3), resp. (4) a (7) plynou následující dvě věty:

*Bud  $\kappa$  nadkružnice v  $R_{2n}, P, Q$  dva její body a  $O$  její střed, po př. — jde-li o  $R_{2n+1}$  — bod na kolmici o vztýčené ve středu  $\kappa$  na  $R_{2n}$ !*

*Nanesme na spojnici  $\vec{OQ}$  od  $O$  úsečku  $\vec{OA}$  úměrnou  $m$ -té mocnině oblouku  $\widehat{PQ}$ ! Jestliže bod  $P$  je pevný a  $Q$  se pohybuje na  $\kappa$ , pak koncové body  $A$  leží na mocninné spirále stupně  $m$ . Všechny tyto spirály — odpovídající různým volbám bodu  $P$  na  $\kappa$  — jsou až na polohu shodné, mají však společný pól  $O$  a — v případě  $R_{2n+1}$  — společnou osu  $o$ .*

Poznámka 1. Dle (11) platí pro Archimedovu spirálu obecnější věta: Naneseme-li od  $O$  úsečky rovné  $k \cdot \sigma + K$  — kdež  $k \neq 0, K$  jsou konstanty a  $\sigma = \widehat{PQ}$  —, obzvláště tedy naneseme-li od  $Q$  úsečky rovné  $k \cdot \sigma$ , pak body  $A$  leží na Archimedově spirále, jejíž tvar nezávisí na volbě  $P$  ani na konstantě  $K$ .

2. Dle (11) se snadno dokáže: Otáčí-li se rovnoměrně přímka  $p$  v  $R_{2n}$  dle (1), resp. v  $R_{2n+1}$  dle (2) — při čemž prochází středem otáčení  $O$ , resp. protíná osu otáčení  $o$  v bodě  $O$  — a současně na ní (vycházejí z určitého bodu) se pohybuje rovnoměrně bod  $P$ , pak tento bod opisuje Archimedovu spirálu, mající v  $O$  svůj pól a — v případě  $R_{2n+2}$  — v  $o$  svou osu.

Mocninná spirála (8) stupně  $m < 0$  má v pólu asymptotický bod  $a$  — v případě  $-1 \leq m < 0$  — má též asymptotu, jejíž rovnice jsou

a) pro  $m = -1$  (hyperbolická spirála)

$$x_{2i-1} = r_i, x_{2i} = r_i l_i k, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

b) pro  $-1 < m < 0$

$$x_{2i-1} = \lambda r_i, x_{2i} = 0, \text{ resp. } x_{2n+1} = \lambda C \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13)$$

při čemž  $\lambda$  je parametr.

Důkaz: Především je patrné, že u mocninné spirály (8) platí pro  $s = 0$   $dx_{2i-1} : dx_{2i} : (\text{resp.}) dx_{2n+1} = r_i : 0 : (\text{resp.}) C$ . Dále souřadnice bodu  $T$  (viz (27)), ležícího na tečně bodu  $s = 0$  jsou

a) pro  $m = -1$  :  $x_{2i-1} = 0, x_{2i} = r_i l_i k, \text{ resp. } x_{2n+1} = 0$   
( $i = 1, \dots, n$ ),

b) pro  $-1 < m < 0$  :  $x_{2i-1} = 0, x_{2i} = 0, \text{ resp. } x_{2n+1} = 0$   
( $i = 1, \dots, n$ ).

Proto rovnice asymptoty, určené bodem  $T$  a poměrem směrových kosinů, jsou v prvním případě (12) a ve druhém (13).

Poznámka: Jestliže  $m < -1$ , pak vzdálenost  $v = \left| \frac{s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}} \right|$

pólu od tečny mocninné spirály (8) (viz (26)) vzrůstá do  $\infty$ , když  $s \rightarrow 0$ . Tedy u spirály stupně  $m < -1$  asymptota jako tečna v nekonečně vzdáleném bodě křivky neexistuje.

### 3. Polární tečna, normála, subtangenta, subnormála.

Bud  $P$  regulární bod jakékoli spirály  $\Sigma$ , ležící na rotačním dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) a  $O$  bud její pól (vrchol dvojkužele)! Sestrojme v bodě  $P$  tečnu a protněme ji v bodě  $T$  nadrovinou, jdoucí bodem  $O$  kolmo na spojnici  $OP$  (průvodič bodu  $P$ )! Spojnici  $TO$  protněme pak v bodě  $N$  nadrovinou, jdoucí kolem  $P$  kolmo na jeho tečnu! Tím dostaneme pravoúhlý trojúhelník o vrcholech  $P, T, N$ , ve kterém ex def.  $\overline{PT}$  je délka polární tečny,  $\overline{PN}$  je délka polární normály,  $\overline{OT}$  délka polární subtangenty a  $\overline{ON}$  délka polární subnormály. Uvedené délky bereme vždy absolutně.

P. v. spirály  $\Sigma$  můžeme dle (3), (4) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \varrho(s) \cdot \cos l_i s, \\ x_{2i} &= r_i \varrho(s) \cdot \sin l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= C \varrho(s) \end{aligned} \quad (14)$$

( $i = 1, \dots, n$ ). Přitom  $r_i, l_i, C$  jsou konstanty  $\neq 0, |l_i| \neq |l_j|$  pro  $i \neq j, r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$  (resp.  $r_1^2 + \dots + r_n^2 + C^2 = 1$ ),  $r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2 = 1$ .  $\varrho(s)$  je tedy vzdálenost bodu spirály od vrcholu

dvojkružele a  $s$  je oblouk nadkružnice  $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = r_i \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = C$  ( $i = 1, \dots, n$ ), kterou vytíná z dvojkružele nadkoule o středu ve vrcholu a o poloměru 1.

Bod  $P$  buď určen parametrem  $s$ ! Pomocí směrových kosinů lze zjistiti, že pro úhel  $\vartheta$ , sevřený tečnou a průvodičem bodu dotyku  $P$ , platí

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varrho}{\varrho'} \left( \varrho = \varrho(s), \varrho' = \frac{d\varrho}{ds} \right), \quad (15)$$

takže délka polární tečny je

$$\tau = \left| \frac{\varrho}{\varrho'} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right|, \quad (16)$$

délka polární normály

$$\nu = \left| \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \right| \quad (17)$$

délka polární subtangenty

$$s_\tau = \left| \frac{\varrho^2}{\varrho'} \right|, \quad (18)$$

délka polární subnormály

$$s_\nu = |\varrho'| \quad (19)$$

a vzdálenost pólu od tečny

$$v = \left| \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} \right|. \quad (20)$$

Jelikož dále tečna v bodě  $P$  má p. v.  $x_{2i-1} = r_i \varrho \cos l_i s + \lambda r_i (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s)$ ,  $x_{2i} = r_i \varrho \sin l_i s + \lambda r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s)$ , resp.  $x_{2n+1} = C \varrho + \lambda C \varrho'$  ( $i = 1, \dots, n$ ), kdež  $\lambda$  je parametr, a nadrovina, jdoucí pólem  $O$  kolmo na  $OP$ , má rovnici

$$\sum_{i=1}^n r_i (x_{2i-1} \cos l_i s + x_{2i} \sin l_i s) + [\text{resp. } C] = 0,$$

jsou souřadnice bodu  $T$

$$x_{2i-1} = r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \sin l_i s, \quad x_{2i} = -r_i l_i \frac{\varrho^2}{\varrho'} \cos l_i s, \quad (21)$$

$$\text{resp. } x_{2n+1} = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Jelikož dále nadrovina, jdoucí bodem  $P$  kolmo na jeho tečnu, má rovnici

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_{2i-1} - r_i \varrho \cos l_i s) \cdot r_i (\varrho' \cos l_i s - l_i \varrho \sin l_i s) + \\ & + \sum_{i=1}^n (x_{2i} - r_i \varrho \sin l_i s) \cdot r_i (\varrho' \sin l_i s + l_i \varrho \cos l_i s) + \text{resp.} \\ & (x_{2n+1} - C \varrho) C \varrho' = 0 \text{ a spojnice } OT \text{ má p. v. } x_{2i-1} = \lambda r_i l_i \sin l_i s, \end{aligned}$$

$x_{2i} = -\lambda r_i l_i \cos l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = 0$  ( $\lambda$  parametr), jsou souřadnice bodu  $N$

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= -r_i l_i \varrho' \sin l_i s, & x_{2i} &= r_i l_i \varrho' \cos l_i s, \\ \text{resp. } x_{2n+1} &= 0, & (i &= 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (22)$$

Pro mocninné spirály (8) platí tedy

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{s}{m}, \quad (23) \quad s_r = \frac{k}{m} \cdot s^{m+1}, \quad (24)$$

$$s_v = |mk \cdot s^{m-1}|, \quad (25) \quad v = \frac{k \cdot s^{m+1}}{\sqrt{s^2 + m^2}}. \quad (26)$$

Z (24) je patrné, že u hyperbolické spirály jest subtangenta konstantní. Pomocí (18) a (11) se snadno dokáže, že je to jediná křivka na rotačním dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ), mající tuto vlastnost.

Z (25) je dále patrné, že u Archimedovy spirály jest subnormála konstantní. Z (19) a (11) plyne, že je to jediná křivka na rotačním dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) o této vlastnosti.

Dle (21) a (22) platí pro mocninné spirály o p. v. (8):

Body  $T$  leží na křivce

$$x_{2i-1} = \frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = -\frac{r_i l_i k}{m} s^{m+1} \cos l_i s, \quad (27)$$

resp.  $x_{2n+1} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

a body  $N$  na křivce

$$x_{2i-1} = -r_i l_i k m s^{m-1} \sin l_i s, \quad x_{2i} = r_i l_i k m s^{m-1} \cos l_i s, \quad (28)$$

resp.  $x_{2n+1} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Z toho je patrné: U mocninných spirál  $m$ -tého stupně leží koncové body subtangenty (subnormály) na mocninné spirále stupně  $m+1$  (stupně  $m-1$ ), jež má s původní spirálou společný pól a — v případě  $R_{2n+1}$  — leží v nadrovině  $R_{2n}$  jdoucí pólem kolmo na osu. Tedy: U hyperbolické spirály koncové body subtangenty a u Archimedovy spirály koncové body subnormály leží na nadkružnicích, majících středy v pólu spirály. Z (22) je dále patrné, že u polynomické spirály stupně  $m$  leží koncové body subnormály na polynomické spirále stupně  $m-1$ , jež má s původní spirálou společný pól a — v případě  $R_{2n+1}$  — leží v nadrovině  $R_{2n}$ , jdoucí pólem kolmo na osu. U Galileiových spirály je to tedy Archimedova spirála.

Další dvě vlastnosti lze snadno dokázat pomocí (23), (15), resp. (24), (25), (18), (19):

Mocninné spirály na rotačním dvojkuželu ( $K_{2n}$ ), resp. ( $K_{2n+1}$ ) jsou charakterisovány vlastností, že protínají povrchové přímky dvojkužele pod úhlem  $\vartheta$ , jehož (trigonometrická) tangenta je lineární

funkci oblouku  $S$  nadkružnice, kterou z  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  vytíná nadkoule o středu ve vrcholu a libovolného poloměru.

Mocnná spirála  $m$ -tého stupně na rotačním dvojkuželu  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  je charakterisována vlastností, že její polární subtangenta je tvaru  $s_r = k \cdot (S + a)^{m+1}$  a současně její polární subnormála tvaru  $s_n = K \cdot (S + a)^{m-1}$ ; přitom  $k, K$  jsou konstanty  $\neq 0$  a  $S$  má týž význam jako v předchozí větě.

#### 4. Další vlastnosti mocnných spirál.

Podáváme zde několik různorodých vlastností mocnných spirál. Především u spirály (14) uvedeme vzorec pro výpočet plochy  $F$  opsané průvodičem  $\rho(s)$ , když  $s$  jde od  $s_1$  do  $s_2$ . Na základě toho, že poloha opsaná průvodičem konstantní délky  $\rho(s) = R$  se rovná  $\frac{1}{2}R^2 (s_2 - s_1)$ , se snadno zjistí, že

$$F = \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \rho^2(s) ds. \quad (29)$$

Pro mocnné spirály (8) jest tedy

$$F = \frac{1}{2} k^2 \frac{s_2^{2m+1} - s_1^{2m+1}}{2m+1} \text{ pro } m \neq -\frac{1}{2}, \quad (30)$$

$$F = \frac{1}{2} k^2 \log \frac{s_2}{s_1} \text{ pro } m = -\frac{1}{2}. \quad (31)$$

Z toho následuje: Plocha  $F$  opsaná průvodičem  $\rho(s)$ , když jeho koncový bod jde a) od pólu  $s = 0$  do bodu  $P(s)$   $F = \frac{1}{2} k^2 \frac{s^{2m+1}}{2m+1}$  pro  $m > 0$ , b) od bodu  $P(s)$  do pólu  $s = \infty$  (asymptotického bodu)  $F = \infty$  pro  $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ , c) od bodu  $P(s)$  do pólu  $s = \infty$  (asymptotického bodu)  $F = -\frac{1}{2} k^2 \frac{s^{2m+1}}{2m+1}$  pro  $m < -\frac{1}{2}$ .

Poznámka: U Archimedovy spirály jest plocha  $F$  omezená jejím obloukem a průvodiči koncových bodů  $\rho_1, \rho_2$  rovna dle (30)  $F = \frac{1}{6k} (\rho_2^3 - \rho_1^3)$  a u hyperbolické spirály  $F = \frac{1}{2k} (\rho_1 - \rho_2)$ .

Vlastnost vyjádřená vzorci (30), (31) je pro mocnné spirály na  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  charakteristická. Platí totiž: Jestliže u křivky (14) na rotač. dvojkuželi  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  jest plocha  $F$ , opsaná průvodičem  $\rho(s)$ , když jeho koncový bod jde od  $P(s_1)$  do  $P(s)$ , tvaru  $F = a \cdot s^m + b$  ( $a, m, b$  konstanty, a  $m > 0$ ) nebo tvaru  $F = a \cdot \log |b \cdot s|$  ( $a > 0, b$  konstanty), pak křivka (14) je mocnnou spirálou stupně  $\frac{m-1}{2}$  nebo  $-\frac{1}{2}$ . Dle předpokladu [jest totiž

$F = \frac{1}{2} \int_{s_1}^s \varrho^2(s) ds = a \cdot s^m + b$  nebo  $F = \frac{1}{2} \int_{s_1}^s \varrho^2(s) ds = a \cdot \log |b \cdot s|$ .  
 Derivací dle  $s$  dostáváme v prvním případě  $\varrho^2(s) = 2am s^{m-1}$ ,  
 z čehož  $\varrho(s) = \sqrt{2am} \cdot s^{\frac{m-1}{2}}$  a ve druhém  $\varrho^2(s) = \frac{2a}{s}$ , z čehož  $\varrho(s) = \sqrt{2a} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$ .

*V kulové inverzi odpovídá mocninné spirále  $m$ -tého stupně — v případě, že střed inverze je v jejím pólu — mocninná spirála stupně  $m$ , mající s původní spirálou společný pól a resp. osu. Archimedově spirále odpovídá tedy hyperbolická spirála a obráceně.*

Jestliže střed inverze je v počátku souřadnic a poloměr nadkoule  $R$ , pak kulová inverze v  $p$ -rozměrném prostoru  $R_p$  je vyjádřena rovnicemi

$$X_j = \frac{R^2}{x_1^2 + \dots + x_p^2} \cdot x_j \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Odpovídá tedy mocninné spirále (8) mocninná spirála

$$X_{2i-1} = r_i \frac{R^2}{k \cdot s^m} \cos l_i s, \quad X_{2i} = r_i \frac{R^2}{k \cdot s^m} \sin l_i s,$$

$$\text{resp. } X_{2n+1} = C \frac{R^2}{k \cdot s^m} \quad (i = 1, \dots, n).$$

*Protneme-li rotač. dvojkružel  $(K_{2n})$  o p. v. (3), resp.  $(K_{2n+1})$  o p. v. (4) nadkoulemi, majícími společný střed v jeho vrcholu  $V$ , dostaneme systém nadkružnic  $(\Sigma)$ , z nichž každá protíná přímku  $\xi$   $x_{2i-1} = r_i$ ,  $x_{2i} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), resp.  $x_{2n+1} = C$ , ležící na tomto dvojkruželi. Hyperbolická spirála (10) jest charakterisována na  $(K_{2n})$ , resp. na  $(K_{2n+1})$  vlastností, že délky oblouků nadkružnic systému  $(\Sigma)$  od přímky  $\xi$  až k průsečíkům jejich s hyperbolickou spirálou jsou konstantní ( $= k$ ).*

Poznámka: Přímka  $\xi$  jde vrcholem dvojkružele rovnoběžně s asymptotou hyperbolické spirály (10), jak patrně z (12).

Důkaz: Buď  $Q(s_1 \neq 0)$  bod na hyperbolické spirále (10)! Nadkružnice systému  $(\Sigma)$ , jdoucí tímto bodem, má p. v.  $x_{2i-1} =$

$$= \frac{k}{s_1} r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \frac{k}{s_1} r_i \sin l_i s \quad (i = 1, \dots, n), \quad \text{resp. } x_{2n+1} = C \frac{k}{s_1}.$$

Její průsečík  $P$  s přímkou  $\xi$  je určen parametrem  $s = 0$  na nadkružnici a parametrem  $s = \frac{k}{s_1}$  na  $\xi$ . Je tedy oblouk  $\widehat{PQ} = \int_0^{\frac{k}{s_1}} \frac{k}{s_1} ds = k$ .

Buď nyní obráceně  $h$  křivka na  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  mající uvedenou vlastnost! Její p. v. můžeme psát ve tvaru (14). Buď dále  $Q(s_1)$  bod společný této křivce a nadkružnici  $x_{2i-1} = \varrho(s_1) r_i \cos l_i s$ ,  $x_{2i} =$

$= \varrho(s_1) r_i \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = C \varrho(s_1)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ze systému ( $\Sigma$ )! Nadkružnice protíná  $\xi$  v bodě  $P$ , jenž je na ní určen parametrem  $s = 0$ . Je tedy oblouk  $\widehat{PQ} = \int_0^{s_1} \varrho(s_1) ds = \varrho(s_1) \cdot s_1$  a ten dle předpokladu je konstantní ( $= k$ ). Z toho následuje, že  $\varrho(s) = \frac{k}{s}$ , takže  $h$  je hyperbolická spirála, j. b. d.

Podobně se dokáže, že mocninné spirály (8) stupně  $m$  jsou charakterisovány vlastností, že shora uvedené oblouky od přímky  $\xi$  až k průsečíku  $Q(s)$  na mocninné spirále jsou rovny  $\widehat{PQ} = k \cdot s^{m+1}$  ( $k$  konstanta).

*Spirála „lituus“ o p. v. (8) pro  $m = -\frac{1}{2}$  jest na  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  charakterisována vlastností, že plocha, omezená obloukem  $\widehat{PQ}$  nadkružnice  $\kappa$  systému ( $\Sigma$ ) — když  $P, Q$  jsou průsečíky nadkružnice  $\kappa$  s přímkou  $\xi$  a spirálou — a spojnicemi koncových bodů  $P, Q$  s vrcholem  $V$ , má konstantní plochu ( $= \frac{1}{2} k^2$ ).*

Poznámka: Přímka  $\xi$  jest asymptotou spirály, jak je patrné z (13).

Důkaz: Je-li  $Q$  na spirále určen parametrem  $s = s_0$ , jest p. v. nadkružnice  $\kappa$   $x_{2i-1} = r_i \frac{k}{\sqrt{s_0}} \cdot \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = r_i \frac{k}{\sqrt{s_0}} \cdot \sin l_i s$ , resp.

$x_{2n+1} = C \frac{k}{\sqrt{s_0}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), takže body  $P, Q$  jsou na ní určeny parametry  $s = s_0, s = 0$ . Má tedy plocha omezená  $\widehat{PQ}$  a spojnicemi

$\overline{VP}, \overline{VQ}$  dle (29) obsah  $F = \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \frac{k^2}{s^2} ds = \frac{1}{2} k^2$ . Buď nyní obráceně

$h$  křivka na  $(K_{2n})$ , resp.  $(K_{2n+1})$  mající uvedenou vlastnost! Její p. v. lze psát ve tvaru (14). Bod  $Q$  na ní buď určen parametrem  $s = s_0$ ! Pak p. v. nadkružnice ze systému ( $\Sigma$ ), jdoucí tímto bodem, jest  $x_{2i-1} = \varrho(s_0) r_i \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \varrho(s_0) r_i \sin l_i s$ , resp.  $x_{2n+1} = C \varrho(s_0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), takže  $P$  je určen parametrem  $s = 0$ . Dle předpokladu

jest identicky vzhledem k  $s_0$   $\frac{1}{2} \int_0^{s_0} \varrho^2(s_0) ds = \frac{1}{2} k^2$  čili  $\varrho^2(s_0) \cdot s_0 = k^2$ .

Z toho plyne, že křivka  $h$  jest spirálou lituus, j. b. d.

*Promítneme-li nadšroubovici v  $R_{2n+1}$  z bodu  $V$  její osy  $o$  na nadrovinu  $R_{2n}$  kolmou k této ose, dostaneme hyperbolickou spirálu, jež má asymptotický bod v průsečíku nadroviny s osou a jejíž asymptota má směr přímky, jež prochází středem promítání  $V$ , protíná nadšroubovnicí a je s  $R_{2n}$  rovnoběžná.*

Důkaz: Buď

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = C \cdot s \quad (32)$$

( $i = 1, \dots, n$ ) p. v. uvedené nadšroubovice!<sup>4</sup>) Přitom  $r_i, l_i, C$  jsou konstanty  $\neq 0, |l_i| \neq |l_j|$  pro  $i \neq j$  a souřadná osa  $X_{2n+1}$  jest osou nadšroubovice. Bud' dále  $(0, \dots, 0, a)$  střed promítání  $V$  a  $x_{2n+1} = d$  ( $\neq a$ ) nadrovina  $R_{2n}$  kolmá k ose nadšroubovice  $X_{2n+1}$ ! Pak p. v. kužele, jenž z bodu  $V$  promítá nadšroubovici, je

$$x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = a + \varrho(Cs - a)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), kdež  $\varrho$  je parametr. Řez tohoto kužele s  $x_{2n+1} = d$  jest

$$x_{2i-1} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \frac{d-a}{Cs-a} r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = d \quad (33)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), což je dle (11) hyperbolická spirála, mající zřejmě v bodě  $(0, \dots, 0, d)$  asymptotický bod. Použijeme-li na (33) transformaci otočení (2), v níž  $L_i = l_i, \sigma = \frac{a}{C}$  a pak transformaci para-

metru  $s = \omega + \frac{a}{C}$ , dostaneme

$$X_{2i-1} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \cos l_i \omega, \quad X_{2i} = \frac{d-a}{C\omega} r_i \sin l_i \omega, \quad X_{2n+1} = d$$

( $i = 1, \dots, n$ ). To se dá psát ve tvaru (\*)  $X_{2i-1} = R_i \frac{k}{S} \cos L_i S$ ,

$X_{2i} = R_i \frac{k}{S} \sin L_i S, X_{2n+1} = d$  ( $i = 1, \dots, n$ ), při čemž platí  $R_1^2 + \dots + R_n^2 = 1, R_1^2 L_1^2 + \dots + R_n^2 L_n^2 = 1$ , když označíme

$$R_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}}, \quad L_i = \frac{l_i}{\sqrt{R_1^2 l_1^2 + \dots + R_n^2 l_n^2}}$$

$$S = \sqrt{R_1^2 l_1^2 + \dots + R_n^2 l_n^2} \cdot \omega \text{ a } k \cdot C = (d-a) \sqrt{r_1^2 l_1^2 + \dots + r_n^2 l_n^2}$$

Proto dle (12) má asymptota hyper. spirály (\*) p. v.  $x_{2i-1} = \lambda R_i, x_{2i} = R_i L_i, x_{2n+1} = d$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Otočme dále dle (2) — kde

$L_i = l_i, \sigma = \frac{a}{C}$  — přímkou  $x_{2i-1} = \varrho r_i \cos l_i \frac{a}{C}, x_{2i} = \varrho r_i \sin l_i \frac{a}{C},$

$x_{2n+1} = a$  ( $i = 1, \dots, n$ ), která spojuje střed promítání  $V$  s bodem

$x_{2i-1} = r_i \cos l_i \frac{a}{C}, x_{2i} = r_i \sin l_i \frac{a}{C}, x_{2n+1} = a$  ( $i = 1, \dots, n$ ), ve

kterém nadrovina  $x_{2n+1} = a$  protíná nadšroubovici! Dostáváme  $X_{2i-1} = \varrho r_i, X_{2i} = 0, X_{2n+1} = a$ , což je přímka rovnoběžná s uvedenou asymptotou, j. b. d.

<sup>4</sup>) Viz (D).

*Přímá plocha šroubová v  $R_{2n+1}$  jest protata souosým rotačním nadkuželem ve dvou shodných Archimedových spirálách, souměrně položených dle přímky, jež je společnou osou plochy šroubové a nadkužele. Obě spirály mají společný pól ve vrcholu a společnou osu v ose nadkužele.*

Poznámka: 1° Přímá plocha šroubová ( $\pi$ ) jest tvořena přímkami, jež jdou body nadšroubovice a protínají kolmo její osu. Osa nadšroubovice jest osou šroubové plochy. 2° Rotační nadkužel dostaneme takto: Ve středu nadkoule, ležící v nadrovině  $R_{d-1}$  prostoru  $R_d$ , vztyčíme kolmici (osu) a na ní zvolíme bod  $V$  (vrchol). Rotační nadkužel je tvořen spojnicemi vrcholu  $V$  s body nadkoule. Každá nadrovina, kolmá k jeho ose, protíná jej v nadkouli, mající střed v průsečtku této nadroviny s osou.

Důkaz: P. v. plochy ( $\pi$ ) s osou v  $X_{2n+1}$  můžeme psát dle (32) ve tvaru

$$x_{2i-1} = \lambda r_i \cos l_i s, \quad x_{2i} = \lambda r_i \sin l_i s, \quad x_{2n+1} = Cs + c \quad (34)$$

( $i = 1, \dots, n$ ), kde  $\lambda$ ,  $s$  jsou parametry,  $r_i \neq 0$ ,  $l_i \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $c$  jsou konstanty a kde platí  $|l_i| \neq |l_j|$  pro  $i \neq j$ . Dále rovnice rotačního nadkužele s osou v  $X_{2n+1}$  a vrcholem v počátku souřadnic jest

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^2 = 0, \quad (35)$$

kde  $k$  jest konstanta  $\neq 0$ . Je patrné, že tento nadkužel protíná plochu ( $\pi$ ) v křivkách

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}} \cos l_i s, \quad x_{2i} = \pm \frac{k(Cs + c)}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$  ( $i = 1, \dots, n$ ), jež dle (11) jsou Archimedovy spirály, mající zřejmě uvedené vlastnosti.

*Každou mocninnou spirálu v  $R_{2n}$  můžeme považovati za kolmý průmět křivky, v níž se protíná přímá plocha šroubová s vhodnou souosou rotační nadplochou v  $R_{2n+1}$ , na nadrovinu kolmou ke společné ose.*

Protneme-li totiž rotační nadplochu v  $R_{2n+1}$   $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2 - k^2 x_{2n+1}^2 = 0$ , ( $k, m$  jsou konstanty  $\neq 0$ ) — jejíž osou je souřadná osa  $X_{2n+1}$  — přímkou plochou šroubovou (34), dostaneme dvě shodné křivky

$$x_{2i-1} = \pm \frac{k(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}} \cos l_i s, \quad x_{2i} = \pm \frac{k(Cs + c)^m}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_n^2}} \sin l_i s,$$

$x_{2n+1} = Cs + c$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Jejich ortogonální průmět na nadrovinu  $x_{2n+1} = 0$  jsou dle (11) dvě shodné mocninné spirály stupně

$m$ , mající společný pól v průsečíku osy nadplochy s nadrovinou  $x_{2n+1} = 0$ .

#### Dodatek.

Z jiných křivek, které souvisí s projednávanými spirálami, budiž zde uvedena *kochleoida*. Je to křivka v  $R_{2n}$ , jejíž p. v. je možno uvést do tvaru

$$x_{2i-1} = \frac{R_i}{s} (1 - \cos l_i s), \quad x_{2i} = \frac{R_i}{s} \sin l_i s \quad (36)$$

( $i = 1, \dots, n$ ); při tom  $s$  je parametr,  $R_i, l_i$  konstanty  $\neq 0$  a  $|l_i| \neq |l_j|$  pro  $i \neq j$ . Z tohoto p. v. je patrné, že kochleoida (35) je souměrná dle prostoru  $(X_2, X_4, \dots, X_{2n})$  a má v počátku souřadnic asymptotický bod.

Kochleoida má čtyři pozoruhodné vlastnosti:

1° *Promítneme-li nadšroubovici z jejího bodu  $A$  na nadrovinu kolmou k její ose, dostaneme kochleoidu, mající v kolmém průmětu bodu  $A$  asymptotický bod.*

Důkaz. Nadšroubovice měj p. v. (32) a střed promítání ať odpovídá parametru  $s = s_0$ . Přímka, spojující  $A$  s libovolným bodem nadšroubovice protíná nadrovinu  $x_{2n+1} = d$ , kolmou k ose nadšroubovice, v bodě

$$x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0 + r_i \frac{d - C s_0}{C (s_0 - s)} (\cos l_i s_0 - \cos l_i s), \quad x_{2i} = r_i \sin l_i s_0 + \\ + \frac{d - C s_0}{C (s_0 - s)} (\sin l_i s_0 - \sin l_i s), \quad x_{2n+1} = d \quad (i = 1, \dots, n).$$

Použijeme-li transformace

$X_{2i-1} = x_{2i-1} \cos l_i s_0 + x_{2i} \sin l_i s_0 - r_i, \quad X_{2i} = -x_{2i-1} \sin l_i s_0 + \\ + x_{2i} \cos l_i s_0, \quad X_{2n+1} = x_{2n+1} \quad (i = 1, \dots, n)$  a označíme-li  $s_0 - s = \sigma$ , dostaneme

$$X_{2i-1} = r_i \frac{d - C s_0}{C \cdot \sigma} (1 - \cos l_i \sigma), \quad X_{2i} = r_i \frac{d - C s_0}{C \cdot \sigma} \sin l_i \sigma, \quad X_{2n+1} = d$$

( $i = 1, \dots, n$ ), což je p. v. kochleoidy. Podrobíme-li dále kolmý průmět bodu  $A$   $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s_0, \quad x_{2i} = r_i \sin l_i s_0, \quad x_{2n+1} = d$  ( $i = 1, \dots, n$ ) uvedenou transformaci, dostaneme  $X_{2i-1} = X_{2i} = 0, \quad X_{2n+1} = d$  ( $i = 1, \dots, n$ ), tedy asymptotický bod této kochleoidy.

2° *Buď  $\widehat{AB}$  oblouk dané nadkružnice  $\kappa$  a  $T$  jeho těžiště. Je-li bod  $A$  pevný a  $B$  se pohybuje na  $\kappa$ , pak  $T$  opisuje kochleoidu, mající ve středu nadkružnice asymptotický bod. Přitom všechny kochleoidy, odpovídající různým volbám bodu  $A$  na  $\kappa$ , jsou až na polohu shodné.*

Důkaz: Nadkružnice  $\kappa$  v  $R_{2n}$  měj p. v.  $x_{2i-1} = r_i \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = r_i \sin l_i s$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — kdež  $s$  je oblouk;  $r_i, l_i$  konstanty  $\neq 0$ ;  $|l_i| \neq |l_j|$  pro  $i \neq j$ ! Bodům  $A, B$  at odpovídají po řadě parametry  $s_0, s$ ! Pak pro souřadnice  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ) těžiště  $T$  platí  $\xi_j \cdot \int_{s_0}^s ds = \int_{s_0}^s x_j ds$ , z čehož dostáváme  $\xi_{2i-1} = \frac{r_i (\sin l_i s - \sin l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$ ,  $\xi_{2i} = -\frac{r_i (\cos l_i s - \cos l_i s_0)}{l_i (s - s_0)}$ . Použijeme-li transformace  $\xi'_{2i-1} = -\xi_{2i-1} \sin l_i s_0 + \xi_{2i} \cos l_i s_0$ ,  $\xi'_{2i} = \xi_{2i-1} \cos l_i s_0 + \xi_{2i} \sin l_i s_0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a označíme-li  $\sigma = s - s_0$ , dostaneme  $\xi'_{2i-1} = \frac{r_i}{l_i \cdot \sigma} \cdot (1 - \cos l_i \sigma)$ ,  $\xi'_{2i} = \frac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$  ( $i = 1, \dots, n$ ), což je p. v. kochleoidy.

Poznámka: a) Podobným způsobem bychom zjistili, že těžiště  $T$  oblouků  $\widehat{AB}$  nadšroubovice (32) leží na křivce  $\xi'_{2i-1} = \frac{r_i}{l_i \sigma} (1 - \cos l_i \sigma)$ ,  $\xi_{2i} = \frac{r_i}{l_i \sigma} \sin l_i \sigma$ ,  $\xi'_{2n+1} = \frac{C}{2} \sigma$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

b) Z výpočtu je patrné, že geometrické místo těžišť  $T$  oblouků  $\widehat{AB}$  na téže nadkružnici (resp. nadšroubovici) o konstantní délce  $S = s - s_0$  leží na nadkružnici (resp. nadšroubovici)  $\xi_{2i-1} = \frac{2r_i}{l_i S} \sin \frac{l_i S}{2} \cdot \cos l_i \frac{s + s_0}{2}$ ,  $\xi_{2i} = \frac{2r_i}{l_i S} \sin \frac{l_i S}{2} \sin l_i \frac{s + s_0}{2}$  (resp.  $\xi_{2n+1} = \frac{C}{2} \cdot (s + s_0)$ ) ( $i = 1, \dots, n$ ), mající s původní nadkružnicí (resp. nadšroubovicí) společný střed (osu) a všechny axiální prostory.

3° Bodem  $A$  hyperbolické spirály (10) v  $R_{2n}$  nebo  $R_{2n+1}$  vedme rovnoběžku s její asymptotou (12) a nanesme na ni od bodu  $A$  úsečku  $\widehat{AB}$  rovnou vzdálenosti bodu  $A$  od pólu  $O$ , a to ve směru opačném onomu, ve kterém by se bod  $A$  blížil na hyper. spirále do nekonečna! Pohybuje-li se nyní  $A$  na hyperbolické spirále, opisuje  $B$  kochleoidu, mající v pólu spirály svůj asymptotický bod.

Důkaz: Je patrné, že bod  $B$  má souřadnice

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= r_i \frac{k}{s} \cos l_i s - r_i \frac{k}{s}, \quad x_{2i} = r_i \frac{k}{s} \sin l_i s, \quad \text{resp. } x_{2n+1} = \\ &= C \frac{k}{s} - C \frac{k}{s} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

4° Systém nadkružnic v  $R_{2n}$   $x_{2i-1} = \rho r_i \cos l_i s$ ,  $x_{2i} = \rho r_i \sin l_i s$  ( $\rho$  parametr;  $i = 1, \dots, n$ ), který vytíná z rotačního dvojkužele ( $K_{2n}$ ) o p. v. (3) systém nadkouli o společném středu v jeho vrcholu,

pošijme dle vztahů  $X_{2i-1} = x_{2i-1} - \rho r_i$ ,  $X_{2i} = x_{2i}$  ( $i = 1, \dots, n$ )! Tím dostaneme systém nadkružnic  $x_{2i-1} = \rho r_i (\cos l_i s - 1)$ ,  $x_{2i} = \rho r_i \sin l_i s$  ( $\rho$  parametr;  $i = 1, \dots, n$ ), jež procházejí počátkem souřadnic  $O$  a mají v tomto bodě společný tečný a normální prostor.<sup>5)</sup> Pak platí, že *koncové body  $B$  oblouků  $\widehat{OB}$  nadkružnic tohoto systému, měřených od společného bodu  $O$  a majících konstantní délku  $d$ , leží na kochleoidě, mající v  $O$  asymptotický bod.*

Důkaz: Je-li bod  $B$  určen parametrem  $s_0$ , jest  $\widehat{OB} = \int_0^{s_0} \rho ds = \rho s_0$ . Dle předpokladu  $\rho s_0 = d$ , takže  $B$  má souřadnice  $x_{2i-1} = \frac{d}{s_0} r_i (\cos l_i s_0 - 1)$ ,  $x_{2i} = \frac{d}{s_0} r_i \sin l_i s_0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), což při proměnlivém  $s_0$  je p. v. kochleoidy s asymptotickým bodem v  $O$ .

\*

Les spirales d'ordre  $m$  dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions.

Extrait de l'article précédent.

Dans le présent article, j'étudie certaines courbes de l'espace euclidien  $R_p$  à  $p$  dimensions ( $p \geq 2$ ) qui sont exprimées dans le système de coordonnées rectangulaires par les équations (8) et que nous appelons les *spirales d'ordre  $m$* . Ces courbes sont bien connues dans le plan  $R_2$  ou elles peuvent être exprimées dans le système polaire  $\rho, \omega$  par l'équation  $\rho = k \cdot \omega^m$  ( $k, m$  étant des constantes  $\neq 0$ ). Je démontre que la plupart des propriétés de ces spirales planes sont conservées dans l'espace euclidien au nombre quelconque de dimensions. Aux courbes que j'ai ainsi obtenu appartient la *spirale hyperbolique* (10) et celle d'*Archimède* (9), qui jouent un rôle important parmi elles.

Dans le chapitre I, je définis le *bicône de rotation* avec les équations paramétriques (3) dans  $R_{2n}$ , resp. (4) dans  $R_{2n+1}$ , sur laquelle sont situées toutes les spirales de différents ordres. Cette surface est engendrée par une droite qui fait un mouvement de rotation donné par les équations (1), resp. (2) et qui passe par le centre, resp. coupe l'axe de rotation. Dans les chapitres II, III, IV, je présente un nombre de propriétés de ces spirales, par ex:

a) Sur le bicône (3), resp. (4) la spirale d'Archimède (hyperbolique) jouit de la propriété caractéristique d'avoir la subnormale (la subtangente) polaire<sup>6)</sup> constante.

<sup>5)</sup> Viz (C), (D).

<sup>6)</sup> Soit  $P$  un point d'une spirale d'ordre  $m$  et  $O$  son pôle (c'est-à-dire le sommet du bicône). Soit  $t$  la tangente de  $P$  et  $T$  le point d'intersection de  $t$

b) Si l'on projette une hyperhélice dans  $R_{2n+1}$  d'un point de son axe sur l'hyperplan orthogonal à cet axe, on obtient une spirale hyperbolique.

c) Les points finaux des tangentes polaires  $T$  (des normales polaires  $N$ ) d'une spirale d'ordre  $m$  se trouvent sur une spirale d'ordre  $m + 1$  (d'ordre  $m - 1$ ). Alors les points finaux des tangentes d'une spirale hyperbolique et ceux des normales d'une spirale d'Archimède sont situés sur une hypercycloïde ayant son centre dans le pôle de ces spirales. Etc.

Dans l'appendice sont indiquées quelques propriétés intéressantes de la *cochléoïde* donnée dans  $R_{2n}$  par les équations (36). P. ex.

a) La cochléoïde est la projection d'une hyperhélice dans  $R_{2n+1}$  d'un de ses points sur l'hyperplan orthogonal à son axe.

b) Elle est le lieu des centres de gravité des arcs  $\widehat{AB}$  d'une hypercycloïde, le point  $A$  étant fixe et le point  $B$  étant mobile sur l'hypercycloïde.

---

avec l'hyperplan passant par  $O$  et orthogonal à la droite  $\overline{PO}$ . Soit  $N$  le point d'intersection de  $\overline{TO}$  avec l'hyperplan passant par  $P$  et orthogonal à  $t$ . Alors les longueurs  $\overline{PT}$ ,  $\overline{PN}$ ,  $\overline{OT}$ ,  $\overline{ON}$  sont la tangente, la normale, la subtangente et la subnormale polaire.



### Sur une formule du calcul intégral.

Eugen Bunickij, Praha.

(Reçu le 25. septembre 1946.)

1. Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue dans un intervalle ouvert  $(a, b)$  et soit  $\alpha$  un nombre quelconque de cet intervalle. Alors la formule bien connue

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt \quad (1)$$

(où  $n > 0$  et où l'on pose, comme d'ordinaire,  $0! = 1$ ) représente l'intégrale de l'équation différentielle

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x) \quad (\text{pour } a < x < b) \quad (2)$$

satisfaisant aux conditions initiales  $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$ .

2. En modifiant un peu la formule (1), nous allons représenter l'intégrale de (2) comme une somme de produits de  $n$  intégrales simples indéfinies par certaines puissances de  $x$ . Pour ce but, développons  $(x-t)^{n-1}$  suivant la formule du binôme; nous obtenons une série de termes contenant les produits

$$x^{n-1-\nu} \int_{\alpha}^x t^{\nu} \varphi(t) dt;$$

en remplaçant ici l'intégrale définie par l'intégrale indéfinie  $\int x^{\nu} \varphi(x) dx$ , on est conduit à considérer la fonction

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} x^{n-1-\nu} \int x^{\nu} \varphi(x) dx. \quad (3)$$

P. ex.  $F_1(x) = \int \varphi(x) dx$ , donc  $F'_1(x) = \varphi(x)$ . En général, on a pour  $n > 1$

$$F'_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n-1-\nu) x^{n-2-\nu} \int x^{\nu} \varphi(x) dx + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \varphi(x) \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu}. \quad (4)$$

Mais la dernière somme est évidemment égale à  $(1 - 1)^{n-1}$ , c'est-à-dire à zéro; d'autre part, on a

$$\frac{1}{(n-1)!} \binom{n-1}{\nu} (n-1-\nu) = \frac{1}{(n-2)!} \binom{n-2}{\nu}.$$

La formule (4) donne donc

$$F'_n(x) = F_{n-1}(x) \quad (5)$$

pour  $n > 1$ . En utilisant l'équation  $F'_1(x) = \varphi(x)$ , on voit que  $F_n^{(n)}(x) = \varphi(x)$ , c'est-à-dire que  $F_n(x)$  est une intégrale de l'équation (2). L'intégrale générale de cette équation est donc donnée par la fonction

$$F_n(x) + p_{n-1}(x),$$

où  $p_{n-1}(x)$  est un polynôme du degré  $n - 1$  au plus.

\*

**O jednom vzorci integrálního počtu.**

(Obsah předešlého článku.)

Funkce  $F_n$  ze vzorce (3) vyhovuje pro  $n = 1$  rovnici  $F'_1(x) = \varphi(x)$  a pro  $n > 1$  rovnici (5). Tedy je  $F_n(x)$  integrálem diferenciální rovnice (2). (Předpokládá se spojitost funkce  $\varphi$  v intervalu  $(a, b)$ .)

**Poznámka k článku „O integraci úplných  
diferenciálů“<sup>1)</sup>**

Evžen Bunickij, Praha.

(Došlo dne 20. října 1946.)

1. V tomto článku jde o funkce reálných proměnných, u nichž předpokládáme spojitost parciálních derivací těch řádů, jež se v dalším vyskytují. Je-li  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  homogenní funkce stupně  $k$ -tého, je, jak známo,

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = k \varphi(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Budiž nyní

$$dU = \sum_{i=1}^n X_i(x_1, \dots, x_n) dx_i, \quad (2)$$

totálním diferenciálem (nutnou a postačující podmínkou je, jak známo,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \quad (3)$$

pro  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), a předpokládejme, že funkce  $X_i$  jsou homogenní funkce stupně  $k$ -tého.

Potom jest (sčítá se od 1 do  $n$ )

$$d\left(\sum_i X_i x_i\right) = \sum_i X_i dx_i + \sum_i x_i dX_i, \\ \sum_i x_i dX_i = \sum_i \left(\sum_v x_i \frac{\partial X_i}{\partial x_v} dx_v\right) = \sum_v \left(\sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} x_i\right) dx_v = k \sum_v X_v dx_v,$$

a tedy

$$d\left(\sum_i X_i x_i\right) = (k + 1) \sum_i X_i dx_i, \quad (4)$$

t. j.

$$d\left(\sum_i X_i x_i\right) = (k + 1) dU.$$

<sup>1)</sup> Viz Časopis 57 (1928), 87-94.

Je-li tedy  $k \neq -1$ , je funkce  $U$  z rovnice (2) dána výrazem

$$U = \frac{1}{k+1} (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n) + C, \quad (5)$$

kde  $C$  je konstanta. To je jednoduchý vzorec pro integrování úplného diferenciálu (2), platný pro  $k \neq -1$ , který byl odvozen v citovaném článku. V tomto článku se soustředíme na zbývající případ  $k = -1$ . Buďte tedy  $X_i$  v (2) homogenní funkce stupně  $-1$ , takže po substituci

$$u_\nu = \frac{x_\nu}{x_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

jest

$$X_i = \frac{1}{x_1} \varphi_i(u_2, \dots, u_n) \quad (i = 1, \dots, n); \quad (7)$$

podle (4) je pak nyní

$$\sum_{i=1}^n X_i x_i = A \quad (A \text{ konstanta}). \quad (8)$$

Odtud

$$X_1 = \frac{A}{x_1} - \frac{1}{x_1^2} \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) x_\nu,$$

takže pravou stranu v (2) lze psát ve tvaru

$$A \frac{dx_1}{x_1} + \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) \frac{x_1 dx_\nu - x_\nu dx_1}{x_1^2},$$

načež (viz ještě (6) a (7)) lze (2) psát ve tvaru

$$dU = d(A \log |x_1|) + \sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) du_\nu. \quad (9)$$

Součet

$$\sum_{\nu=2}^n \varphi_\nu(u_2, \dots, u_n) du_\nu, \quad (10)$$

do něhož za  $u_\nu$  a za  $du_\nu$  dosadím podle (6), je tedy rozdílem dvou úplných diferenciálů a je tedy sám úplným diferenciálem. Ale součet (10) jest úplným diferenciálem také tehdy, jsou-li  $u_2, \dots, u_n$  nezávisle proměnnými; neboť z (6), (7) plyne

$$\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\mu}$$

pro  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , takže podle (3) je

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 2, 3, \dots, n).$$

Existuje tedy funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$ , mající úplný diferenciál (10), takže (2) neboli (9) lze psát též

$$dU = d(A \log |x_1|) + \sum_{v=2}^n \frac{\partial \psi}{\partial u_v} du_v, \quad (11)$$

kde  $u_v$  jsou všude určena vzorci (6).

A naopak: je-li  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  jakákoliv funkce, je pravá strana rovnice (11) úplným diferenciálem, v němž koeficienty při  $dx_i$  jsou homogenní funkce stupně  $-1$ . Neboť píšeme-li

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_v} = \varphi_v(u_2, \dots, u_n),$$

lze rovnici (11) podle (6) ihned psát ve tvaru

$$dU = \frac{A}{x_1} + \sum_{v=2}^n \varphi_v \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) \frac{x_1 dx_v - x_v dx_1}{x_1^2}.$$

Tedy: Rovnice (11), v níž  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  je libovolná funkce, při čemž za  $u_2, \dots, u_n$ ;  $du_2, \dots, du_n$  dosazujeme  $x_1, \dots, x_n$ ;  $dx_1, \dots, dx_n$  podle vzorců

$$u_v = \frac{x_v}{x_1}, \quad du_v = \frac{1}{x_1^2} (x_1 dx_v - x_v dx_1),$$

nám dává nejobecnější totální diferenciální rovnici tvaru (2) s homogenními koeficienty stupně  $-1$ .

Parciální derivace funkce  $\psi$ , t. j. funkce  $\varphi_v$ , ovšem mohou, ale nemusí býti homogenní.

2. Jsou-li  $X_i$  v (2) homogenní řádu  $k \neq -1$ , lze integraci rovnice (2) ihned provést vzorcem (5). Ale pro  $k = -1$  je tomu jinak, neboť rovnice (11) ukazuje, že  $U(x_1, \dots, x_n)$  nemůžeme obdržeti bez užití obvyklých způsobů integrace úplných diferenciálů. Neboť z (11) plyne

$$U(x_1, \dots, x_n) - A \log |x_1| = \int \sum_{v=2}^n \varphi_v(u_2, \dots, u_n) du_v \quad (12)$$

kde pravá strana značí výsledek integrace úplného diferenciálu (10), v němž za  $u_2, \dots, u_n$  je dosazeno podle (6). Pojmu-li tedy do funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  additivní integrační konstantu, plyne z (12)

$$U(x_1, \dots, x_n) - A \log |x_1| = \psi \left( \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right). \quad (13)$$

Najdu-li tedy nějakým způsobem funkci  $U$ , je tím nalezena i funkce  $\psi(u_2, \dots, u_n)$  a naopak. Integrace totálního diferenciálu (2) s homogenními koeficienty  $X_i$  stupně  $-1$  je tedy úkol právě tak obtížný

jako integrace totálního diferenciálu (10) s libovolnými koeficienty  $\varphi$ , a s  $n - 1$  nezávisle proměnnými (na př. pro  $n = 2$  je integrace tot. diferenciálu (10) ekvivalentní s výpočtem integrálu

$$\int \varphi_2(u_2) du_2).$$

3. Rovnice (11) dává nejobecnější tvar totální rovnice (2) s homogenními koeficienty stupně  $k = -1$ . Rozřešme podobnou úlohu pro  $k \neq -1$ . Rovnice (5) říká, že  $U$  je — až na konstantu  $C$  — homogenní funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  stupně  $k + 1$ , takže (2) má tvar

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (14)$$

kde  $f$  je homogenní funkce stupně  $k + 1$ . Naopak, je-li  $f(x_1, \dots, x_n)$  homogenní stupně  $k + 1$ , jsou koeficienty při  $dx_i$  v (14) homogenní stupně  $k$ . Tím je úloha řešena.

4. Jako aplikaci vyšetřujme diferenciální homogenní rovnici

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0, \quad (15)$$

kde levá strana je totální diferenciál a funkce  $X, Y$  jsou homogenní stupně  $k$ . Je-li  $k \neq -1$ , je obecný integrál podle (5) dán vzorcem

$$X \cdot x + Y \cdot y = (k + 1) C = C_1,$$

kde  $C$  resp.  $C_1$  značí integrační konstantu. Budiž za druhé  $k = -1$ , takže podle (8) je  $X \cdot x + Y \cdot y = \alpha$ , ( $\alpha$  konstanta), načež  $X = \alpha \cdot x^{-1} - Yy \cdot x^{-1}$  a (15) nabude tvaru

$$\frac{\alpha dx}{x} + Y \frac{x dy - y dx}{x} = 0.$$

Ale podle předpokladu

$$Y(x, y) = \frac{1}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

takže substituce  $u = y \cdot x^{-1}$  vede k rovnici

$$\frac{\alpha dx}{x} + \varphi(u) du = 0, \quad \text{t. j. } \alpha \log |x| + \int \varphi(u) du = C,$$

kde po výpočtu integrálu jest dosaditi  $u = y \cdot x^{-1}$ . Je patrné, že v tomto případě  $k = -1$  neposkytuje tento způsob žádných výhod proti obvyklé metodě.

## 5. Příklady.

1. Najděte funkci  $U$ , vyhovující rovnici

$$dU = \left( \frac{2x^3 - 3z^3}{x^4} - \frac{y^2 z}{x^4} \cos \frac{z}{x} - \frac{2y^2}{x^3} \sin \frac{z}{x} \right) dx +$$

$$+ \frac{2y}{x^2} \sin \frac{z}{x} dy + \left( \frac{3z^2}{x^3} + \frac{y^2}{x^3} \cos \frac{z}{x} \right) dz.$$

Koeficienty při  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (jež zde i v následujícím příkladě označíme  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) splňují podmínky integrability a rovnici  $Xx + Yy + Zz = 2$ , načež

$$dU = \frac{2}{x} dx + Y \frac{x dy - y dx}{x} + Z \frac{x dz - z dx}{x};$$

dosadím-li za  $Y$ ,  $Z$  a položím-li  $y \cdot x^{-1} = v$ ,  $z \cdot x^{-1} = t$ , obdržím:

$$dU = \frac{2}{x} (dx + 2v \sin t dv + (3t^2 + v^2 \cos t) dt).$$

Poslední dva členy tvoří totální diferenciál, ale jeho koeficienty nejsou homogenní funkce. Integrujeme-li obvyklým způsobem a zavedeme-li nakonec opět  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , obdržíme

$$U = 2 \log |x| + \frac{y^2}{x^2} \cdot \sin \frac{z}{x} + \frac{z^3}{x^3} + C.$$

2. V rovnici

$$dU = \frac{1}{x^4} (2xz^2 - x^2y - 3y^2z) dx + \frac{1}{x^3} (x^2 + 2yz) dy + \\ + \frac{1}{x^3} (y^2 - 2xz) dz$$

jsou rovněž splněny podmínky integrability a jest  $Xx + Yy + Zz = 0$ . Obdobným způsobem jako v předešlém případě obdržíme

$$dU = (1 + 2vt) dv + (v^2 - 2t) dt.$$

Zde pravá strana je součtem tří totálních „homogenních“ diferenciálů stupně 0, 1, 2, totiž  $dU = dv - 2t dt + (2vt dv + v^2 dt)$ ; integruji-li každý člen podle vzorce (5), obdržím

$$U = v - \frac{2t^2}{2} + \frac{2vt \cdot v + v^2 \cdot t}{3} + C,$$

t. j.

$$U = \frac{y}{x} - \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2z}{x^3} + C.$$

\*

**Remarque à l'article „Sur l'intégration des différentielles totales“<sup>(1)</sup>.**

(Résumé de l'article précédent.)

Considérons l'équation (2), où les  $X_i$  sont des fonctions homogènes du degré  $k$  satisfaisant aux conditions (3). Si  $k \neq -1$ , l'intégrale de (2) est donnée par (5) et l'équation (2) la plus générale de ce genre est de la forme (14), où  $f(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction homogène quelconque du degré  $k + 1$ . Pour  $k = -1$ , les choses sont plus compliquées: la forme la plus générale de l'équation (2) est donnée par (11), où  $A$  est une constante quelconque et où  $\psi(u_1, \dots, u_n)$  est une fonction *arbitraire*; les  $u_v, du_v$  sont définis par (6). L'intégration de (2) pour  $k = -1$  exige donc l'intégration d'une différentielle totale (10) (à  $n - 1$  variables) qui peut être absolument arbitraire. (On suppose partout la continuité des dérivées partielles rentrant dans le calcul.)

---

<sup>1)</sup> Cf. Časopis 57 (1928), 87—94.

## Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à $n$ dimensions. — Courbes sphériques.

Karel Havlíček, Praha.

L'Université Charles, séminaire de géométrie.

(Reçu le 15 mars 1947.)

1. Soit  $R_n$  un espace euclidien à  $n$  dimensions ( $n \geq 2$ ) aux coordonnées cartésiennes rectangulaires. En outre choisissons la notation et la terminologie de M. V. Hlavatý<sup>4</sup>). Alors un vecteur  $\mathbf{v}$  aura  $n$  composantes  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Désignons par  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , et convenons d'appeler par *radius vecteur*  $\mathbf{x}$  le vecteur aux extrémités  $(0, 0, \dots, 0)$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Soit  $\mathbf{r}$  le radius vecteur d'une courbe réelle non isotrope de  $R_n$ , de sorte que  $ds \neq 0$ . On a donc

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (1)$$

Nous supposons que  $\mathbf{r}$  soit de classe  $n + 1$  au moins. Nous considérerons seulement un tel intervalle de paramètre  $s$ , dans lequel il n'y a que des points généraux de notre courbe, c'est-à-dire, nous supposerons, que la matrice

$$\| r'_1, r'_2, \dots, r'_n \|$$

soit du rang 1 pour toutes les valeurs de  $s$  (les accents désignent les dérivées par rapport à  $s$ ).

Désignons par  $\mathbf{t}, {}^1\mathbf{n}, {}^2\mathbf{n}, \dots, {}^{n-1}\mathbf{n}$  les vecteurs unitaires dans les directions de la tangente, de la 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ième</sup>, ...,  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> normale de la courbe. Alors, le déterminant

$$\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ {}^1n_1 & {}^1n_2 & \dots & {}^1n_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}n_1 & {}^{n-1}n_2 & \dots & {}^{n-1}n_n \end{vmatrix} \quad (2)$$

est orthogonal, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} &= 1, \quad {}^\lambda \mathbf{n} \cdot {}^\lambda \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{t} \cdot {}^\lambda \mathbf{n} = 0, \quad {}^\lambda \mathbf{n} \cdot {}^\mu \mathbf{n} = 0, \\ (\lambda, \mu &= 1, 2, \dots, n-1; \lambda \neq \mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Convenons d'appeler *hyperplan normal* au point de la courbe l'hyperplan des vecteurs  ${}^\lambda \mathbf{n}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Soient  $k_\lambda \neq 0$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$ ) les courbures scalaires de la courbe. On a donc les formules de Frenet bien connues

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= k_1 {}^1 \mathbf{n} \\ {}^1 \mathbf{n}' &= -k_1 \mathbf{t} + k_2 {}^2 \mathbf{n} \\ {}^2 \mathbf{n}' &= -k_2 {}^1 \mathbf{n} + k_3 {}^3 \mathbf{n} \\ &\dots \dots \dots \\ {}^{n-2} \mathbf{n}' &= -k_{n-2} {}^{n-3} \mathbf{n} + k_{n-1} {}^{n-1} \mathbf{n} \\ {}^{n-1} \mathbf{n}' &= -k_{n-1} {}^{n-2} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4)$$

Désignons par  $\rho_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$ ) les rayons des courbures, alors

$$\rho_\lambda = \frac{1}{k_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1) \quad (5)$$

Une hypersphère plongée dans  $R_n$  est donnée par l'équation

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = r^2 \quad (6)$$

Dans cet article, nous allons considérer le contact de la courbe (1) avec l'hypersphère (6) et la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (1) soit située sur l'hypersphère (6), mais nous n'allons pas étudier le problème du contact de la courbe (1) avec les sphères à  $k$  dimensions ( $k < n-1$ ). Les sphères osculatrices à  $k$  dimensions ont été étudiées par M. E. Egerváry<sup>2</sup>).

2. La puissance du point  $\mathbf{r}$  par rapport à l'hypersphère (6) étant désignée par  $P$ , on a

$$P = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) - r^2. \quad (7)$$

Si  $\mathbf{r}$  représente le point quelconque de la courbe (1), la puissance  $P = P(s)$  est une fonction réelle du paramètre  $s$ .

**Définition 1.** Quand les équations

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{P(s)}{(s - s_0)^\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, q$$

sont satisfaites pour  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, q$ , nous disons que l'hypersphère (6) a le contact d'ordre  $q$  au moins avec la courbe (1) au point  $s = s_0$ . De plus nous disons que ce contact est précisément d'ordre  $q$  quand en même temps l'inégalité

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{P(s)}{(s - s_0)^{q+1}} \neq 0$$

est aussi satisfaite.

**Théorème 1.** *Pour que l'hypersphère (6) ait le contact d'ordre  $q$  au moins avec la courbe (1) au point  $s = s_0$ , il faut et il suffit que les équations*

$$P(s_0) = P'(s_0) = P''(s_0) = \dots = P^{(q)}(s_0) = 0 \quad (8)$$

*soient satisfaites; pour que ce contact soit précisément d'ordre  $q$ , il faut et il suffit qu'à côté des équations (8) l'inégalité  $P^{(q+1)}(s_0) \neq 0$  soit satisfaite.*

Nous pouvons démontrer facilement ce théorème en appliquant la formule de Taylor

$$P(s) = P(s_0) + \frac{s - s_0}{1!} P'(s_0) + \dots + \frac{(s - s_0)^{q+1}}{(q + 1)!} P^{(q+1)}(s_0) + Z,$$

où  $Z$  désigne le reste.

**Théorème 2.** *La condition nécessaire et suffisante pour que l'hypersphère (6) ait le contact d'ordre  $q = 0$  au moins avec la courbe (1) au point  $s = s_0$ , est: ce point est situé sur l'hypersphère (6). De plus, la condition nécessaire et suffisante pour que ce contact soit d'ordre  $q = 1$  au moins, est: le centre de l'hypersphère (6) est situé dans l'hyperplan normal de la courbe au point  $s = s_0$ . Dans ce cas l'hypersphère (6) touche la courbe (1) au point donné.*

Démonstration. Le cas du contact d'ordre  $q = 0$  est déjà compris dans le théorème 1. Étudions le cas  $q = 1$ . La dérivée de la fonction  $P(s)$  est donnée par la formule

$$P'(s) = 2\mathbf{r}'(s) \cdot [\mathbf{r}(s) - \mathbf{p}]. \quad (9)$$

Si l'on pose  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ ,  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0) = \mathbf{r}'(s_0)$ , la condition nécessaire et suffisante pour le contact d'ordre  $q = 1$  est (voir (8) et (9)):

$$\mathbf{t}_0 \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}) = 0, \quad (9')$$

c'est-à-dire: les vecteurs  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}$  sont perpendiculaires entre eux. Cela étant, nous pouvons écrire

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{p} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \mathbf{n}_0, \quad (\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(s_0)) \quad (10)$$

où  $c_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n - 1$ ) sont les paramètres arbitraires et indépendants entre eux. Le radius vecteur  $\mathbf{p}$  du centre de l'hypersphère est donné par la formule (10), alors

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 - \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \mathbf{n}_0. \quad (10')$$

Les équations (10), resp. (10') sont déjà les équations paramétriques de l'hyperplan normal de la courbe (1) au point  $s = s_0$  avec les paramètres variables  $c_\lambda$ .

Considérons maintenant le contact d'ordre  $q > 1$ . Dans ce cas nous ne pouvons pas choisir le centre de l'hypersphère tout à fait arbitrairement dans l'hyperplan (10'), parce que les paramètres  $c_\lambda$  ne sont plus indépendants entre eux. — Le théorème suivant n'est qu'un théorème auxiliaire.

**Théorème 3.** *Les dérivées du vecteur unitaire  $\mathbf{t}$  de la courbe (1) par rapport à  $s$  sont déterminées par les formules*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(q)} &= A_{q,0} \mathbf{t} + \sum_{\lambda=1}^q A_{q,\lambda} \lambda \mathbf{n} \quad (q = 1, 2, \dots, n-1) \\ \mathbf{t}^{(n)} &= A_{n,0} \mathbf{t} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} A_{n,\lambda} \lambda \mathbf{n} \end{aligned} \quad (11)$$

où les expressions  $A_{i,k}$  sont données par les relations de récurrence au moyen des termes précédents:

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= 0, & A_{1,1} &= k_1 \\ A_{q,0} &= A'_{q-1,0} - k_1 A_{q-1,1} \\ A_{q,i} &= A'_{q-1,i} + k_i A_{q-1,i-1} - k_{i+1} A_{q-1,i+1} \\ A_{q,q-1} &= A'_{q-1,q-1} + k_{q-1} A_{q-1,q-2} \\ A_{q,q} &= k_q A_{q-1,q-1} = k_1 k_2 \dots k_q \neq 0 \\ A_{n,0} &= A'_{n-1,0} - k_1 A_{n-1,1} \\ A_{n,j} &= A'_{n-1,j} + k_j A_{n-1,j-1} - k_{j+1} A_{n-1,j+1} \\ A_{n,n-1} &= A'_{n-1,n-1} + k_{n-1} A_{n-1,n-2} \\ (i &= 1, 2, \dots, q-2) \quad (q = 2, 3, \dots, n-1) \\ (j &= 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned} \quad (12)$$

La démonstration se fait par un calcul mécanique à l'aide des formules de Frenet. La première relation (11) pour  $q = 1$  est la première formule (4) de Frenet. En dérivant l'équation

$$\mathbf{t}^{(q-1)} = A_{q-1,0} \mathbf{t} + A_{q-1,1} \lambda \mathbf{n} + \dots + A_{q-1,q-1} \lambda^{q-1} \mathbf{n},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(q)} &= A'_{q-1,0} \mathbf{t} + A'_{q-1,1} \lambda \mathbf{n} + \dots + A'_{q-1,q-1} \lambda^{q-1} \mathbf{n} + \\ &+ A_{q-1,0} \mathbf{t}' + A_{q-1,1} \lambda \mathbf{n}' + \dots + A_{q-1,q-1} \lambda^{q-1} \mathbf{n}'. \end{aligned}$$

En employant les formules (4) de Frenet, nous obtenons les équations (11) et (12). Parce que nous supposons  $k_q \neq 0$ , nous avons l'inégalité importante  $A_{q,q} \neq 0$ .

Dans les théorèmes suivants, nous considérons le contact d'ordre  $q \geq 2$ .

**Théorème 4.** *Le contact de l'hypersphère (6) avec la courbe (1) au point  $s = s_0$  soit d'ordre  $q$  au moins,  $2 \leq q \leq n$ ; dans ce cas les paramètres  $c_1, c_2, \dots, c_{q-1}$  (voir les formules (10), resp. (10')) sont déterminés d'une manière univoque, tandis que les paramètres  $c_q, c_{q+1}, \dots, c_{n-1}$  sont arbitraires.*

Démonstration. Supposons tout d'abord  $q = 2$ . Nous avons

$$P''(s) = 2 [\mathbf{r}'' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + 1]$$

En écrivant  $\mathbf{r}'' = \mathbf{t}'$ , nous obtenons à l'aide des équations (8), (10), (11) et (12) la condition suivante pour le contact d'ordre  $q = 2$ :

$$1 + (k_1)_0 \mathbf{n}_0 \cdot \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_{\lambda} \mathbf{n}_0 = 0.$$

(Le symbole  $(\dots)_0$  désigne la valeur de la fonction considérée au point  $s = s_0$ .) — Au moyen des formules (3) nous pouvons tirer de cette équation la relation pour le paramètre  $c_1$ :

$$c_1 = - (l_1)_0 = - \left( \frac{1}{k_1} \right)_0.$$

Alors, c'est le cas  $q = 2$ . — Supposons maintenant, que notre théorème soit vrai pour le contact d'ordre  $q - 1$ , c'est-à-dire que les paramètres  $c_1, c_2, \dots, c_{q-2}$  soient déjà fixés. Pour obtenir le paramètre  $c_{q-1}$ , il est utile de calculer la dérivée  $P^{(q)}(s)$  au moyen de la formule (9):

$$P^{(q)}(s) = 2 [\mathbf{r}^{(q)} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + S],$$

où l'expression  $S$  est donnée par la formule

$$S = \binom{q-1}{1} \mathbf{r}^{(q-1)} \cdot \mathbf{r}' + \binom{q-1}{2} \mathbf{r}^{(q-2)} \cdot \mathbf{r}'' + \dots + \binom{q-1}{k} \mathbf{r}^{(q-k)} \cdot \mathbf{r}^{(k)} + \dots + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^{(q-1)}.$$

En écrivant  $\mathbf{r}^{(q)} = \mathbf{t}^{(q-1)}$ , nous obtenons à l'aide des équations (3), (8), (10), (11), (12) la condition

$$(A_{q-1,1})_0 c_1 + \dots + (A_{q-1,q-2})_0 c_{q-2} + (A_{q-1,q-1})_0 c_{q-1} + (S)_0 = 0. \quad (13)$$

Cette équation définit le paramètre  $c_{q-1}$ , parce que les expressions  $(A_{i,k})_0$  et  $(S)_0$  ne sont pas des fonctions des  $c_{\lambda}$ , et parce qu'il y a  $A_{q-1,q-1} \neq 0$  (voir le théorème 3.). Enfin, pour les paramètres  $c_q, c_{q+1}, \dots, c_{n-1}$ , l'équation (13) ne présente aucune condition nouvelle. Le théorème 4. est ainsi démontré.

On peut formuler le théorème que nous venons de démontrer d'une autre manière.

**Corollaire.** *Le lieu des centres de toutes les hypersphères, qui ont le contact d'ordre  $q$  au moins ( $1 \leq q \leq n$ ) avec une courbe au point  $s = s_0$ , est un espace euclidien  $R_{n-q}$  à  $n - q$  dimensions, dit l'espace polaire d'ordre  $q$  du point  $s = s_0$  de la courbe. Dans le cas  $n \neq q$ , cet espace  $R_{n-q}$  est parallèle aux normales  $\mathbf{n}_0$  ( $\lambda = q, q + 1, \dots, n - 1$ ).*

En effet, le centre de l'hypersphère qui a le contact d'ordre  $q$  au moins avec la courbe, est donné par les équations (10), resp. (10'). Le théorème 4. nous dit que dans ces équations il n'y a que

les paramètres  $c_q, c_{q+1}, \dots, c_{n-1}$ , qui sont arbitraires; alors, ces équations définissent un espace euclidien à  $n - q$  dimensions. Le cas  $q = 1$  était déjà considéré dans le théorème 2., parce que le premier espace polaire (c'est-à-dire l'espace polaire d'ordre  $q = 1$ ) n'est que l'hyperplan normal de notre courbe. L'espace polaire d'ordre  $q = n$  est seulement un point, c'est-à-dire le centre de l'hypersphère qui a le contact d'ordre  $q = n$  au moins avec notre courbe.

**Définition 2.** Nous disons qu'une hypersphère est osculatrice au point de la courbe, si elle a le contact d'ordre  $q = n$  au moins avec la courbe au point considéré.

**Théorème 5.** Désignons par  $R$  la longueur du rayon de l'hypersphère osculatrice au point  $s = s_0$  de la courbe (1); cette longueur est donnée par la relation

$$R^2 = \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda^2, \quad (14)$$

les coefficients  $c_\lambda$  étant donnés par le théorème 4.

Ce résultat est une conséquence des équations (3) et (10), parce que

$$R^2 = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}) = \left( \sum_{\lambda=1}^{n-1} c_\lambda \mathbf{n}_0 \right) \cdot \left( \sum_{\mu=1}^{n-1} c_\mu \mathbf{n}_0 \right).$$

Si l'on calcule les coefficients  $c_\lambda$  dans les cas  $n = 2, 3, 4, 5$ , on a:

$$\begin{aligned} n \geq 2, \quad q = 2, \quad c_1 &= -e_1 \\ n \geq 3, \quad q = 3, \quad c_2 &= -e'_1 e_2 \\ n \geq 4, \quad q = 4, \quad c_3 &= -[(e'_1 e_2)' + e_1 k_2] e_3 \\ n \geq 5, \quad q = 5, \quad c_4 &= -\{[(e'_1 e_2)' + e_1 k_2] e_3\}' + e'_1 e_2 k_3\} e_4 \end{aligned}$$

(bien entendu, les valeurs des fonctions  $k_\lambda = \frac{1}{\rho_\lambda}$  sont prises au point  $s = s_0$ ).

Les longueurs des rayons des hypersphères osculatrices sont données par les relations qui sont d'accord avec les résultats de M. E. Egerváry<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} n = 2, \quad R^2 &= e_1^2 \\ n = 3, \quad R^2 &= e_1^2 + (e'_1 e_2)^2 \\ n = 4, \quad R^2 &= e_1^2 + (e'_1 e_2)^2 + [(e'_1 e_2)' + e_1 k_2]^2 e_3^2 \\ n = 5, \quad R^2 &= e_1^2 + (e'_1 e_2)^2 + [(e'_1 e_2)' + e_1 k_2]^2 e_3^2 + \\ &\quad + \{[(e'_1 e_2)' + e_1 k_2] e_3\}' + e'_1 e_2 k_3\}^2 e_4^2. \end{aligned}$$

Les cas  $n \leq 3$  se trouvent presque dans tous les cours de la géométrie différentielle. Le cas  $n = 4$  est considéré plus profondément par



Nous pouvons démontrer ce théorème à l'aide des équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} &= 0 \\ (\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot {}^\lambda \mathbf{n} &= a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (18)$$

où  $\mathbf{x}$  est le radius vecteur du point quelconque de l'hyperplan considéré et  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  ${}^\lambda \mathbf{n}$  sont les vecteurs dépendants de  $s$ .

Supposons d'abord que notre courbe soit sphérique. Alors, il existe un point fixe  $\mathbf{p}$  (voir le théorème 7.) qui satisfait à la condition (15), c'est-à-dire à la première équation du système (18). Si l'on calcule la dérivée de (15), on a (à l'aide de formules de Frenet)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^1 \mathbf{n} = a_1;$$

le point  $\mathbf{p}$  satisfait aussi à la deuxième équation du système (18). Nous pouvons ainsi déduire que ce point  $\mathbf{p}$  satisfait à toutes les équations du système (18). La dernière de ces équations est

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-1} \mathbf{n} = a_{n-1}.$$

En prenant la dérivée de cette équation, il viendra (à l'aide des formules de Frenet)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-2} \mathbf{n} = a_n.$$

Alors, le point  $\mathbf{p}$  vérifie la relation

$$(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \cdot {}^{n-2} \mathbf{n} = a_n. \quad (19)$$

Il en résulte que la solution du système (18) satisfait aussi à l'équation (19), d'où  $a_n = a_{n-2}$ . Donc, la condition (17) est nécessaire.

Supposons au contraire que cette condition (17) est satisfaite. Il en résulte que la solution du système (18) satisfait aussi à l'équation (19): en effet, le déterminant du système (18), c'est-à-dire le déterminant (2), est différent de zéro, alors les équations (18) admettent une solution  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(s)$ , et parce que la condition (17) est satisfaite, cette solution vérifie aussi l'équation (19). Alors, nous pouvons écrire  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(s)$ . Si l'on calcule la dérivée de la première équation (18), on a

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{p} - \mathbf{r}) \cdot (k_1 {}^1 \mathbf{n}) = 1.$$

Il en résulte (à l'aide de la deuxième des équations (18) et de  $k_\lambda \neq 0$ ) qu'il y a

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (20)$$

Si l'on applique cette méthode à toutes les équations (18), on a à l'aide de l'équation (19) les conditions suivantes:

$$\mathbf{p}' \cdot {}^\lambda \mathbf{n} = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1) \quad (21)$$

Les conditions (20) et (21) ne sont que le système des équations linéaires et homogènes pour les composantes inconnues du vecteur

$\mathbf{p}'$ . Mais le déterminant (2) de ce système est différent de zéro; il en résulte qu'il y a

$$p'_1 = p'_2 = \dots = p'_n = 0,$$

d'où  $\mathbf{p}(s) = \text{const.}$  Ce point fixe  $\mathbf{p}$  est indépendant du paramètre  $s$  et il satisfait à la condition (15) pour toutes les valeurs du paramètre  $s$ . Il en résulte que la condition du théorème 7 est satisfaite; notre courbe est sphérique.

Si l'on calcule la condition (17) dans les cas  $n = 2, 3, 4, 5$ , on a:

$$\begin{aligned} n = 2, & \quad \varrho'_1 = 0, \\ n = 3, & \quad (\varrho'_1 \varrho_2)' \varrho_2 + \varrho_1 = 0, \\ n = 4, & \quad [(\varrho'_1 \varrho_2)' \varrho_3] \varrho_3 + (\varrho_1 k_2 \varrho_3)' \varrho_3 + \varrho'_1 \varrho_2 = 0, \\ n = 5, & \quad \{[(\varrho'_1 \varrho_2)' \varrho_3] \varrho_4\}' \varrho_4 + [(\varrho_1 k_2 \varrho_3)' \varrho_4 + \varrho'_1 \varrho_2 k_3 \varrho_4]' \varrho_4 + \\ & \quad + [(\varrho'_1 \varrho_2)' + \varrho_1 k_2] \varrho_3 = 0. \end{aligned}$$

Les cas  $n \leq 3$  sont bien connus. J'ai déduit le cas spécial  $n = 5$  dans un autre travail,<sup>3)</sup> mais par une autre méthode.

Nous avons une application facile du théorème 8., dans le cas où les courbures scalaires sont constantes non nulles ( $k_\lambda = \text{const} \neq 0$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$ ). Celles parmi ces courbes qui sont plongées dans un espace à un nombre pair de dimensions, s'appellent *hypercirconférences* (resp. *circonférences* pour  $n = 2$ ); et, au contraire, celles qui sont plongées dans un espace à un nombre impair de dimensions, s'appellent *hyperhélices* (resp. *hélices* pour  $n = 3$ ). Dans ces cas, il y a toujours  $a_n = 0$  et de plus: si  $q$  est un nombre pair, il y a aussi  $a_q = 0$ ; si  $q$  est un nombre impair, il y a  $a_q \neq 0$  ( $0 < q < n$ ). À l'aide du théorème 8., nous pouvons dire:

*Les hypercirconférences sont des courbes sphériques, et au contraire les hyperhélices ne sont pas des courbes sphériques.* (Voir les travaux de M. O. Borůvka<sup>1)</sup> et de M. M. Sypták.<sup>5)</sup>)

\*

#### Bibliographie.

1. Borůvka O.: Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. — (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No. 146, Brno 1931.)
2. Egerváry E.: Az  $n$ -mértű euklidesi tér görbéinek simulógömbjeiről. (Matem. és természett. Értes., Tome 59, p. 775-784, le résumé allemand Ibid., p. 785-786, Budapest, 1940).
3. Havlíček K.: Klein's representation of ruled surfaces. — (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, No. 172, p. 17-20, Praha 1939-46).
4. Hlavatý V.: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen un Tensorrechnung, (Groningen-Batavia, 1939).
5. Sypták M.: Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à  $p$  dimensions. — (Comptes Rendus, Acad. Sci., Tome 195, p. 298-299, Paris 1932).

**Styk křivky a nadkoule v  $n$ -rozměrném prostoru euklidovském.  
Křivky sférické.**

(Obsah předešlého článku).

V  $n$ -rozměrném prostoru euklidovském předpokládejme křivku, která má v uvažovaném prostoru nenulové křivosti  $k_\lambda \neq 0$ , ( $\lambda = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Geometrické místo středů všech nadkoulí, které mají s takovou křivkou v určitém bodě styk nejméně řádu  $q$  ( $1 \leq q \leq n$ ), je jistý  $(n - q)$  — rozměrný euklidovský prostor, t. zv.  $q$ -tý *polární* prostor uvažovaného bodu křivky; tento polární prostor je rovnoběžný s prostorem, určeným posledními  $n - q$  normálami křivky v uvažovaném bodě. V případě  $q = n$  redukuje se tento polární prostor na bod a příslušná nadkoule se nazývá oskulační.

Křivka, jejíž všechny body leží na nějaké nadkouli, se nazývá sférická. Nutná a dostačující podmínka pro to, aby křivka byla sférická, je splnění diferenciální rovnice  $a_n - a_{n-2} = 0$  v každém jejím bodě; funkce  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) jsou dány rekurentními vztahy (16) jako funkce oblouku dané křivky,  $\rho_\lambda = \frac{1}{k_\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, n - 1$ ) jsou poloměry křivosti. Snadnou aplikaci této věty dostáváme pro případ, že křivosti křivky jsou konstantní,  $k_\lambda = \text{const} \neq 0$ , ( $\lambda = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Vychází známý výsledek: je-li  $n$  číslo sudé, pak tato křivka — t. zv. *nadkružnice* — je sférická, a naopak, je-li  $n$  číslo liché, pak tato křivka — t. zv. *nadšroubovice* — není sférická.

## Constantes thermiques des météorites.

František Link et Otakar Petráček, Praha.

(Reçu le 25 août 1947).

Détermination des constantes thermiques des météorites en vue de classement des météores d'après leurs trajectoires géocentriques. On propose différents types de visibilité des météores que l'on compare avec les observations.

1. Courbe de vie d'un météore. — Dans la vie d'un météore on peut distinguer les phases suivantes représentées sur la fig. 1. Nous y avons représenté la température  $T$  du corps météorique en fonction du temps en supposant l'apport continu de la chaleur.

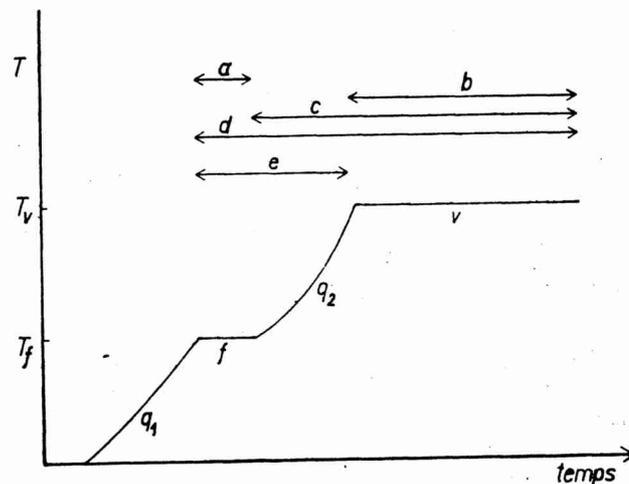


Fig. 1. Courbe de vie d'un météore isotherme. En haut différents types de visibilité.

Dans le cas du corps isotherme la température croît jusqu'à la température de fusion  $T_f$  avec l'apport de chaleur égal à  $q_1$ . La fusion à température constante demandera la chaleur  $f$  et l'élé-

vation suivante de la température jusqu'à la température de vaporisation  $T_v$ , la chaleur  $q_2$ . Finalement pour la vaporisation on aura la chaleur  $v$ . Ces quantités de chaleur sont rapportées à l'unité de poids (l'atome ou la molécule).

Dans le cas d'un corps non isotherme on doit considérer la température moyenne du corps météorique  $T_m$ . La fusion commencera à la surface quand la température moyenne sera inférieure à la température de fusion. La chaleur consommée sera par suite inférieure à  $q_1$ . La fusion sera finie à la température moyenne supérieure à  $T_f$  avec l'apport de chaleur supérieur à  $f$ . Le début de vaporisation aura lieu à la température inférieure à  $T_v$  avec la chaleur  $q'_2$  inférieure à  $q_2$  et la vaporisation demandera plus de chaleur que  $v$ . D'ailleurs nous discuterons plus tard ces circonstances plus en détail.

2. Différents types de visibilité. — La fusion et la vaporisation représentent dans la vie météorique des discontinuités qui peuvent se refléter sur sa courbe de lumière. Celle-ci généralement mal connue possède toutefois deux points importants — l'apparition et la disparition. On peut se demander en quel rapport se trouvent ces points avec la courbe de vie météorique et avec les constantes thermiques qui la caractérisent.

Dans la discussion suivante nous admettrons que la visibilité du météore s'étend entre les différents points de la courbe de vie comme nous avons indiqué par les flèches  $a, b, c, d, e$ . Nous adopterons ici la première approximation d'Öpik [1] que nous généraliserons pour tous les cas discutés dans ce travail.<sup>1)</sup> Nous admettrons que la période de visibilité coïncide toujours avec la dispersion du corps météorique soit par dissipation dans l'état liquide soit par vaporisation et la fin de visibilité (le point de disparition) sera donnée par la dispersion complète du corps météorique.<sup>2)</sup>

*a) Dissipation pendant la fusion.*

Dans le cas isotherme la visibilité commencera au début de la fusion et finira quand celle-ci sera finie. Ce cas considéré par Öpik [1] donne pour le rapport des masses d'air traversées depuis l'entrée dans l'atmosphère jusqu'à la disparition et jusqu'à l'apparition la valeur

$$\frac{M_d}{M_a} = a = \frac{q_1 + f}{q_1}.$$

<sup>1)</sup> La notation d'Öpik n'a pas été conservée dans notre travail.

<sup>2)</sup> Dans tout ce qui suit on admet le mode de dissipation caractéristique au cylindre droit qui se déplace suivant la direction de son axe. Un corps qui serait sphérique durant tout son trajet dans l'atmosphère terrestre donne les constantes trois fois plus grandes (3a, 3b, etc).

Dans le cas non-isotherme la somme  $q_1 + f$  sera la même, mais la chaleur  $q'_1$  sera inférieure à  $q_1$  de façon que  $a' > a$ . La différence sera autant plus grande que le corps météorique diffère de l'état isotherme.

*b) Dissipation pendant la vaporisation.*

Dans le cas isotherme la visibilité commence quand le corps météorique atteint la température de vaporisation. Dans ce cas on d'après Öpik

$$\frac{M_a}{M_a} = b = \frac{q_1 + f + q_2 + v}{q_1 + f + q_2}.$$

Dans le cas non-isotherme le numérateur  $q_1 + f + q_2 + v$  ne changera pas mais le dénominateur sera  $q'_1 + f' + q'_2 < q_1 + f + q_2$  parceque la vaporisation commencera plutôt que dans le cas isotherme. Par suite on aura  $b' > b$ . Cette possibilité nous a conduit à considérer encore les cas suivants qui ne sont pas traités par Öpik.

*c) Dissipation commence à la fin de la fusion.*

Le rapport des masses sera

$$c = \frac{q_1 + f + q_2 + v}{q_1 + f}$$

*d) Dissipation commence au début de la fusion.*

Le rapport des masses sera

$$d = \frac{q_1 + f + q_2 + v}{q_1}$$

*e) Dissipation commence au début de la fusion et finit au début de la vaporisation.*

Le rapport des masses sera

$$e = \frac{q_1 + f + q_2}{q_1}.$$

Ces trois types de visibilité nouveaux, que nous avons ajoutés, pourraient paraître un peu artificiels à première vue, mais nous aurons l'occasion de vérifier leur existence d'après les observations. Les constantes thermiques  $a, b, c, d, e$  que nous venons de définir seront discutées dans la suite.

**3. Première approximation des constantes thermiques peut être calculée à la base des règles suivantes:**

*Règle de Dulong et Petit:* La chaleur atomique est sensiblement constante et voisine de 6 calories.

*Règle de Richards:* La chaleur atomique de fusion divisée par la température absolue de fusion donne le nombre voisin de 2.

**Règle de Trouton:** La chaleur atomique de vaporisation divisée par la température de vaporisation donne le nombre voisin de 21.

Finalement nous utiliserons ici une règle très grossière qui indique que la température absolue de fusion est environ moitié de la température absolue de vaporisation.

A l'aide de ces règles on trouve en partant de 0°K les valeurs suivantes des constantes thermiques des météores:

$$a = \frac{6T_f + 2T_f}{6T_f} = \frac{4}{3} = 1,33, \log a = 0,12,$$

$$b = \frac{27T_v + 2T_f}{6T_v + 2T_f} = 4, \log b = 0,60,$$

$$c = \frac{27T_v + 2T_f}{8T_f} = 7, \log c = 0,84,$$

$$d = \frac{27T_v + 2T_f}{6T_f} = \frac{23}{3} = 9,33, \log d = 0,97,$$

$$e = \frac{6T_v + 2T_f}{6T_f} = \frac{7}{3} = 2,33, \log e = 0,36.$$

On pourrait établir des relations analogues pour les composés chimiques mais leur validité serait très restreinte.

**4. Constantes thermiques des métaux.** — Pour obtenir des valeurs plus précises des constantes thermiques il faut recourir aux mesures de laboratoire. En ce qui concerne les sidérites nous disposons heureusement de nombreuses mesures puisqu'il s'agit de métaux dont la métallurgie est de première importance, comme c'est le cas de fer par exemple. D'un grand nombre de métaux nous avons choisi ceux dont on possède des dates les plus sûres et qui rentrent dans la composition des sidérites (*p*).

Tableau I. [2, 3].

	<i>p</i> %	<i>q</i> <sub>1</sub> kcal	<i>T</i> <sub>f</sub> °K	<i>f</i> kcal	<i>q</i> <sub>2</sub> kcal	<i>T</i> <sub>v</sub> °K	<i>v</i> kcal	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>		
Fe	90,50	15,6	1800	3,6	11,6	3000	85,0	1,23	3,76	6,04	7,43	1,98		
Ni	8,50	10,6	1725	4,1	18,1	3450	87,0	1,39	3,65	8,15	11,3	3,10		
Co	0,60	14,4	1753	3,8	26,6	3458	87,0	1,26	2,94	7,25	8,11	3,10		
Cu	0,06	7,6	1357	3,1	11,5	2868	72,8	1,40	4,32	8,89	12,5	3,00		
Cr	0,06	13,4	1873	3,6	4,8	2600	69,3	1,37	4,55	5,84	7,40	1,63		
99,72								Moyenne pondérée ..		1,24	3,74	6,23	7,77	2,09
								log		0,09	0,57	0,79	0,89	0,32
Fe	σ <sub>pik</sub> [1]	12,1	1800	3,6	10,0	2800	80,0	0,11	0,61	0,83	0,94	0,33		

5. Constantes thermiques des aérolithes. — Ici le problème est beaucoup plus difficile puisque les mesures manquent dans la plupart des cas. Toutefois nous sommes arrivés à calculer pour quelques minerais météoriques les constantes suivantes:

Tableau II. [2, 3, 4].

	$q_1$ kcal	$T_f$ °K	$f$ kcal	$q_2$ kcal	$T_v$ °K	$v$ kcal	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
MgSiO <sub>3</sub> ..	42	1800	15	20	2500	158	1,36	3,05	4,13	5,60	1,83
CaSiO <sub>3</sub> ...	41	1570	13	23	2500	160	1,32	3,21	4,58	6,03	1,88
CaAl <sub>2</sub> Si <sub>2</sub> O <sub>8</sub>	90	1770	29	54	2500	388	1,32	3,24	4,70	6,23	1,92
NaAlSi <sub>3</sub> O <sub>8</sub>	69	1380	13	81			1,19				2,36
Öpik/gr	0,59	1800	0,12	0,23	3000	1,98	1,20	3,11	4,11	4,95	1,60
					Moyenne		1,28	3,16	4,39	5,71	1,92
					log		0,11	0,50	0,64	0,76	0,28

Dans les calcul de ce tableau nous avons admis que les silicates se décomposent en oxydes à la température de 2 500°K qui est la température de vaporisation la plus basse de nos trois oxydes SiO<sub>2</sub>, MgO et CaO. À partir de ce moment commence la vaporisation dont la chaleur  $v$  comprend les chaleurs  $q_2$  des autres oxydes et l'énergie de dissociation du silicate en question.\*)

Exemple:

	kcal	
MgSiO <sub>3</sub> jusqu'à la fusion .....	42	... $q_1$
la fusion .....	15	... $f$
jusqu'à 2 500°K .....	20	... $q_2$
la dissociation .....	21	
SiO <sub>2</sub> la vaporisation .....	63	} ... $v$
MgO jusqu'à 3 070°K .....	17	
MgO la vaporisation .....	57	
	137	

6. Discussion des résultats. — Comparons d'abord les valeurs des constantes thermiques pour les sidérites (sid) et pour les aérolithes (lit).

\*) Une partie des calculs et des recherches bibliographiques a été effectuée par M. J. Starý et nous voudrions bien de lui exprimer ici nos vifs remerciements.

log .....	a	b	c	d	e
sid .....	0,09	0,57	0,79	0,89	0,32
lit .....	0,11	0,50	0,64	0,76	0,28

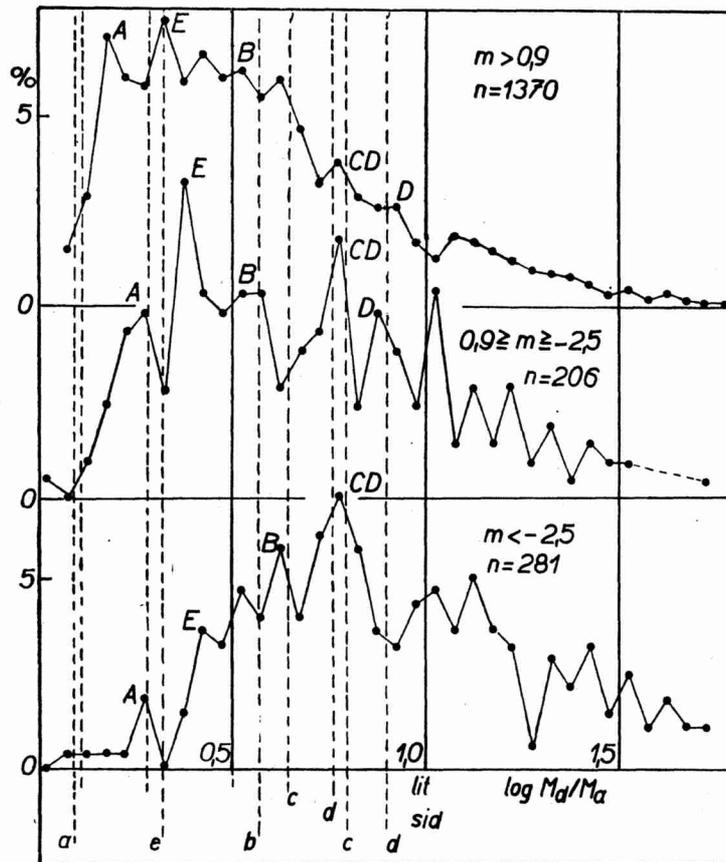


Fig. 2. Statistique des rapports  $\log M_d/M_a$ . En abscisses:  $\log M_d/M_a$ . En ordonnées: Le nombre de cas observés dans l'intervalle de 0,05, exprimé en % du nombre total  $n$  des météores.

On voit que les constantes  $a$  et  $e$  se confondent pratiquement dans les deux cas. D'autre part la constante  $c$  ( $sid$ ) diffère peu de  $d$  ( $lit$ ). Il en suit que ces types de visibilité doivent être assez fréquents puisque les sidérites et les aérolithes s'y accumulent.

Dans la suite nous nous adresserons aux observations des météores. Sur la fig. 2 sont représentées les statistiques relatives aux 1857 météores divisés en trois catégories suivant leurs magnitudes [5].

Le maximum designé par  $A$  doit être rattaché au type de visibilité  $a$ . Ce maximum se déplace avec la magnitude décroissante vers la droite comme l'on doit s'y attendre d'après la non-isothermie croissante des noyaux météoriques. Ce maximum est commun aux sidérites et aux aérolithes.

Le maximum  $E$  qui correspond au type de visibilité  $e$ . Commun aux sidérites et aux aérolithes, il se déplace également vers la droite à la suite de non-isothermie.

Les deux types de visibilité précédents ( $a$ ,  $e$ ) paraissent être très sensibles à la non-isothermie du noyau du fait que le début de visibilité est marqué par le début de fusion à la surface, qui peut commencer, suivant la masse du noyau, bien avant la fusion complète du noyau.

Les maxima  $B_{\text{sid}}$  et  $B_{\text{lit}}$  correspondent au type de visibilité  $b$  des sidérites et des aérolithes. Le maximum  $B_{\text{sid}}$  paraît manquer parmi les météores brillants. Ceci est en accord avec les déductions d'Öpik.

Le maximum  $C_{\text{sid}}-D_{\text{lit}}$  et commun aux sidérites de visibilité  $c$  et aux aérolithes de visibilité  $d$ . L'importance de ce maximum croît avec la masse des météores, ce qui en est en accord avec la théorie. Provisoirement il n'est pas possible de séparer les sidérites des aérolithes comme c'est d'ailleurs le cas du maximum  $A$  et  $B$ .

Le maximum  $C_{\text{lit}}$  ne paraît pas être assez marqué sur nos courbes. En effet étant donnée la mauvaise conductibilité calorifique des aérolithes le type de visibilité  $c$  sera rare parmi les météorites de cette composition.

Le maximum  $D_{\text{sid}}$  est visible sur nos courbes sauf pour les météores très brillants ( $< -2,5^m$ ). Sur nos courbes on voit encore d'autres maxima dont un au voisinage de 1,05 paraît être réel. Son existence reste provisoirement sans interprétation.

**7. Conclusions.** — La discussion des constantes thermiques des météores permet de tirer quelques conclusions dans ce domaine de recherches.

Les constantes thermiques des météores donnent, avec les statistiques météoriques la possibilité de contrôler les hypothèses relatives à la densité de la haute atmosphère [5].

Dorénavant il sera possible de classer chaque météore, dont la trajectoire géocentrique est connue, dans une de nos catégories et dans le cas favorable de déterminer en plus sa composition.

Ces classements auront une certaine importance dans toutes les recherches météoriques qui prendront un essor nouveau après l'introduction des nouvelles méthodes d'observation par le radar.

Note ajoutée à la correction des épreuves: La discussion détaillée du nouveau matériel d'observation rend probable l'existence du type de visibilité F qui remplace sur nos courbes le type A. La visibilité du type F commence à la fin de fusion et finit au début de vaporisation. On trouve pour l'od  $M_d: M_a = 0,23$  pour les sidérites et  $= 0,20$  pour les aérolithes.

#### Bibliographie.

1. E. Öpik: Basis of the physical theory of meteor phenomena, Publ. Obs. Tartu, 29 (1937) No. 5.
2. R. Durrer: Metalurgie des Eisens, Berlin 1943.
3. J. D'Ans et E. Lax: Taschenbuch für Chemiker, Berlin 1943.
4. Landolt-Börnstein: Physikalisch-Chemische Tafeln.
5. F. Link et V. Bumba: En manuscript.

Observatoire National, Ondřejov près de Prague, Tchécoslovaquie.

\*

#### Tepelné konstanty meteoritů.

(Obsah předešlého článku.)

V průběhu meteorického zjevu lze rozeznávat několik fází znázorněných schematicky na obr. 1 a souvisejících úzce s tepelnými konstantami meteorického materiálu. Tyto konstanty lze určit na základě laboratorních měření. Ze statistik výšek zážehů a zhasnutí téměř 2000 meteorů lze nalézt (obr. 2) typy viditelnosti z obr. 1 a kromě toho kontrolovati různé hypotézy týkající se hustoty vysoké atmosféry. Napříště bude možno z výšky zážehu a zhasnutí meteorů — hlavně slabších — určit jejich typ viditelnosti, po případě i jejich složení v alternativě kamené nebo železné. Tím je vlastně dána možnost jakési tepelné analýsy meteorů v případech, kdy pro nedostatek světla selhává spektrální analýsa.

## Sur la préparation des monocristaux du sélénium hexagonal.

Antonín Vaško, Praha.

(Reçu le 18 mars 1947).

On sait que le sélénium a été le premier représentant des semiconducteurs, sur lequel on a trouvé en 1873 le phénomène de photoconductivité. Bien que depuis lors un flux ininterrompu de travaux concernant les propriétés électriques du sélénium ait été publié, dont le nombre dépasse largement mille travaux, il n'existe même pas actuellement une unité de conception sur des questions fondamentales, comme la grandeur absolue de la résistivité électrique et leur variation en fonction de la température. Le sélénium représente actuellement un des éléments dont les propriétés physiques sont les plus mal connues, et l'empirisme presque complet règne encore dans ce domaine.<sup>1)</sup> Pour résoudre au moins ces questions fondamentales, on a tenté de les étudier sur des monocristaux. Or la préparation de monocristaux grands et parfaits dans des conditions reproductibles est un problème essentiel.

Il est connu que le sélénium se présente sous plusieurs variétés allotropiques. Notons que sa forme hexagonale, improprement appelée „métallique“, qui sera étudiée dans cet article, s'obtient généralement par la sublimation du sélénium dans le vide ou à la pression atmosphérique et par la condensation de la vapeur sur des parois maintenues à des températures de l'ordre de 200° C. Il y a plusieurs indications bibliographiques touchant la question de la préparation des monocristaux de sélénium hexagonal par cette méthode générale; citons Brown<sup>2)</sup>, Müller<sup>3)</sup>, Straumanis<sup>4)</sup>, Frank<sup>5)</sup> et d'autres plus anciens qu'on trouvera dans le Gmelin.<sup>6)</sup> Mais, malheureusement, ces indications sont, pour la plupart, insuffisantes pour obtenir des résultats reproductibles. Les indications les plus complètes ont été données par Frank.

Ce dernier a préparé des monocristaux, soit dans le vide, mais à différentes températures fixes de sublimation allant de 275° C à 235° C, la durée de la cristallisation étant de 16,5 heures à 14 jours, — soit à la pression atmosphérique à 250° C pendant 37 jours.

Dans le vide, les monocristaux obtenus ont été d'autant plus parfaits et plus grands que la température s'est plus approchée de 235° C. Les cristaux en feuillets ont de 4 à 10 mm de long, de 3 à 5 mm de large, de 0,2 à 0,6 mm d'épaisseur, les cristaux en aiguilles ayant de 2 à 13 mm de long et de 0,5 à 1,5 mm d'épaisseur. A la pression atmosphérique, Frank n'a trouvé que des cristaux en aiguilles, en prismes hexagonaux, de 4 à 6 mm de long et de 0,1 à 0,2 mm d'épaisseur.

L'article qui suit traite de la préparation des grands monocristaux à la température de sublimation de 217,9° C,\*) c. a. d. à la température d'ébullition de la naphthaline, qui s'est montrée très favorable pour la croissance de grands monocristaux homogènes, et décrit en détail le procédé employé.

#### Préparation dans le vide.

Comme récipient pour la cristallisation, on a employé des tubes en verre, dont la fig. 1. montre la forme et les dimensions.

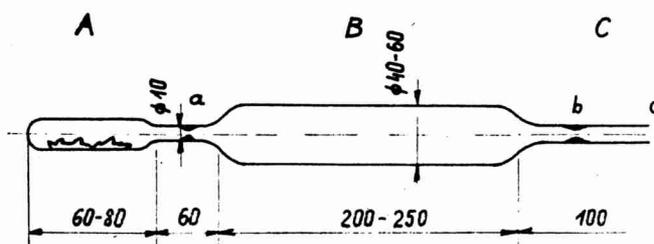


Fig. 1. Le récipient pour la cristallisation.

Par l'ouverture *c* du tube, bien nettoyé et desséché, nous versons environ 20 gr de sélénium grossièrement pulvérisé (Selenium purum in bacillis, Schering 03552); il passe par les étranglements capillaires *a* et *b*, pour se placer dans l'ampoule *A*. Après quoi nous joignons le tube *C* en position horizontale à la pompe à vapeur de mercure et nous poussons le vide jusqu'à  $10^{-4}$  mm Hg. Entre la pompe à vapeur de mercure et le tube de cristallisation il faut arrêter la vapeur de mercure par congélation au moyen de l'air liquide.

Ensuite on place *B* dans un four électrique tubulaire qu'il faut laisser pendant une heure à 400° C, en l'évacuant constamment pendant ce temps pour débarrasser le verre des gaz absorbés. Après

\*) Les fours à naphthaline sont employés dans la fabrication industrielle des redresseurs de courant et des cellules photoélectriques à sélénium.

cela, on écarte le fourneau et on laisse refroidir le tube. Pendant le chauffage, *A* doit être refroidi pour que le sélénium ne sublime pas. Ensuite, on met le four sur *A* et on règle la température à 300° C, à la pression d'environ  $10^{-3}$  mm Hg, de telle sorte que le sélénium commence à bouillir. Après 2 ou 3 heures tout le sélénium est passé dans le tube *B* et il s'est condensé, pour la plus grande partie à l'état amorphe, tandis que les impuretés restent en *A*. Après avoir écarté le four et laissé refroidir le tube, on scelle celui-ci à la lampe en *a*, puis en *b*. A ce moment, nous avons noté la pression indiquée par le manomètre; elle était inférieure à  $10^{-4}$  mm Hg. Le tube détaché *B* est placé obliquement dans le four et chauffé à 300° C. Ici tout le sélénium s'accumule sur la partie inférieure du tube, qu'il faut laisser saillir hors du fourneau. Après que tout le sélénium s'est vaporisé, on interrompt le chauffage et on laisse le tube refroidir dans le four; le récipient de cristallisation est alors prêt pour le thermostat de cristallisation.

Les fig. 2 et 3 montrent ce thermostat, dont la fig. 2 donne en outre les principales dimensions. Dans la boîte en tôle *A* sont placés des tuyaux horizontaux, dans lesquels on place les tubes de cristallisation; on a mis 10 tubes en même temps de chaque côté. Tous ces tuyaux sont complètement recouverts par la naphthaline utilisée comme liquide thermostatique. Le chauffage électrique est assuré par deux résistances, placées sous le fond de la boîte. Le rendement du chauffage est convenablement réglé pour obtenir une ébullition légère et régulière du liquide thermostatique. Des vapeurs de naphthaline se condensent sur le plafond de la boîte *A*, refroidi par un courant d'eau. On peut ajuster le débit de l'eau pour en laisser tomber seulement 2—3 gouttes par seconde sur la paroi. *O* est le trop plein d'écoulement. L'allonge *K* sert à remplir le thermostat et en même temps comme soupape de sûreté. Toute la boîte *A* se trouve dans une autre boîte *B*. L'intervalle entre les deux boîtes est bourré de laine de verre servant à l'isolement thermique.

Le tube de cristallisation préparé est enfoncé d'environ 10 cm dans l'un des tuyaux horizontaux du thermostat, de manière à ce que le bout du tube fasse légèrement saillie et soit tourné vers le haut, afin que le sélénium fondu ne puisse pas s'écouler vers la partie froide du tube. L'espace entre le tube de verre et le tuyau thermostatique doit être soigneusement bouché avec de la laine de verre. Pendant tout le temps de la sublimation, la température du thermostat doit être maintenue exactement constante. Alors les tubes de verre peuvent être enlevés et ouverts avec précaution. Il faut bien se garder de vouloir contrôler la marche de la cristallisation en retirant les tubes du thermostat, ce qui aurait pour effet de la troubler.

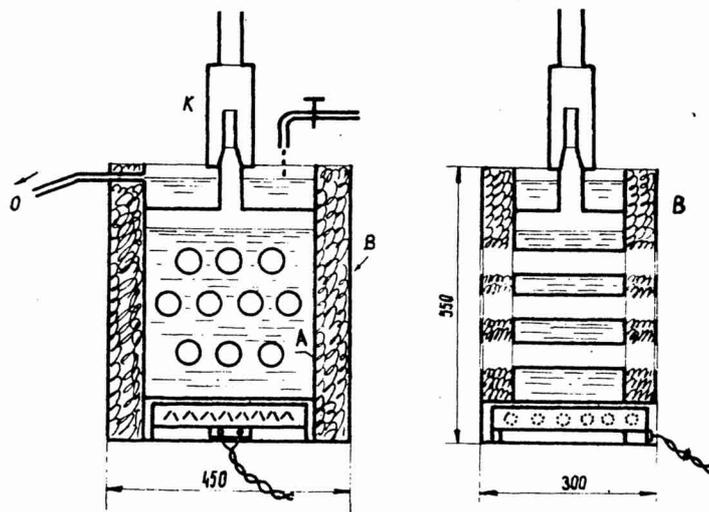


Fig. 2, 3. Le thermostat à naphthaline.

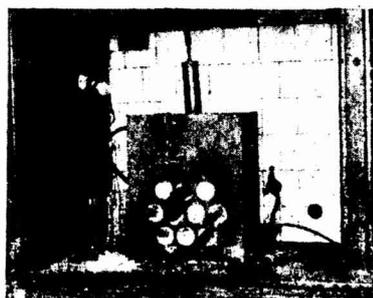


Fig. 4. La section d'un tube d'un diamètre extérieur de 40 mm avec une druse de cristaux en feuillets.

Les cristaux obtenus par ce procédé sont très réguliers, grands et homogènes, et montrent des surfaces réfléchissantes, complètement polies. Souvent on trouve des druses de cristaux. La fig. 4 montre la section d'un tube d'un diamètre extérieur de 40 mm avec une druse bien formée de cristaux en feuillets, de grande taille et très homogènes, qui se sont développés sur la paroi du tube pendant 3 mois; sur la circonférence du tube on voit quelques petits cristaux. Par une série de cristallisations on a trouvé que, dans un bon vide, se forment de préférence des cristaux en feuillets qui ont jusqu'à 40 mm de long, 5 à 10 mm de large et 0,2 à 2 mm d'épaisseur.

#### Préparation à la pression atmosphérique.

Par le même procédé, on a préparé aussi des monocristaux à la pression atmosphérique. Dans ce cas le récipient qui a servi

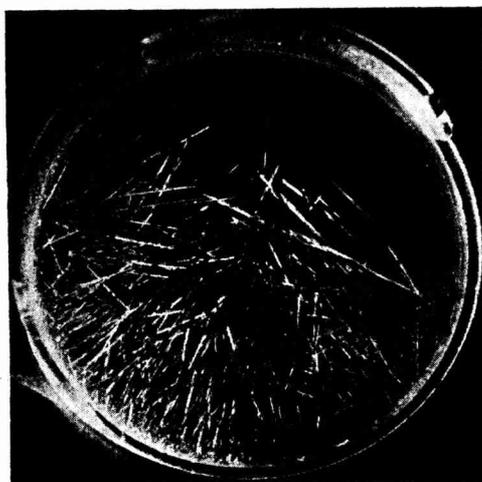


Fig. 5. La section d'un tube d'un diamètre extérieur de 60 mm avec une foule de cristaux en aiguilles.

à la cristallisation ne comprend que la partie *B* (fermée en *a* et munie d'un goulot en *c*). Les récipients ont été remplis de sélénium (*Selenium purum in bacillis*, Schering 03552) et bouchés. Les cristaux ainsi obtenus sont seulement des aiguilles, ayant jusqu'à 40 mm de long et 0,1 à 0,8 mm d'épaisseur. La fig. 5 montre la section d'un tube, ayant un diamètre de 60 mm, avec une foule de ces cristaux, obtenus par cristallisation durant 8 mois. Les plus

grands cristaux étaient creux à l'extrémité la plus épaisse, ainsi que Müller et Straumanis l'avaient observé (l. c.).

Quant à l'orientation cristallographique, on peut dire que, dans les cristaux en aiguilles, le grand axe géométrique se confond avec l'axe cristallographique *c*. Au contraire, dans le cas des cristaux en feuillets, qui sont formés par superposition parallèle des aiguilles, l'axe *c* est dans le plan du feuillet et perpendiculaire au grand axe géométrique. Les stries transversales des cristaux de la fig. 4 montrent la direction de l'axe optique.

Les expériences étant encore en cours, les résultats cités ci-dessus sont seulement provisoires.

C'est avec un plaisir extrême que je saisis l'occasion de remercier le directeur de l'Institut de Physique de l'Université Charles M. Aug. Žáček, qui m'a aidé de ses précieux conseils et a mis à ma disposition les appareils nécessaires.

Je remercie aussi M. Slaba et M. Podaný pour les excellents clichés des fig. 4 et 5.

#### Bibliografie.

1. G. A. Boutry: Les phénomènes photoélectriques et leurs applications, Paris 1936.
2. F. C. Brown: Phys. Rev. 4, 85, 1914.  
F. C. Brown: Phys. Rev. 5, 167, 1915.
3. T. Müller: Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen, 70, 7, 1938.
4. M. Straumanis: Zs. f. Krist. 102, 432, 1940.
5. H. Frank: Aufklärung eines scheinbaren Falles von Energiewanderung. Thèse, Praha 1942.
6. Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie, Selen. 1942.

\*

#### Příspěvek k pěstování jedincových krystalů hexagonálního selenu.

(Obsah předešlého článku.)

Předešlý článek se zabývá pěstováním velkých jedincových krystalů hexagonálního selenu sublimací ve vakuu a za atmosférického tlaku při teplotě 217,9° C v naftalinovém termostatu. Ve vakuu ( $< 10^{-4}$  mm Hg) se vytvořily homogenní, převážně lístkové krystaly, až 40 mm dlouhé, 5–10 mm široké a 0,2–2 mm tlusté; krystalisace trvala 3 měsíce. Za atmosférického tlaku se vytvořily krystaly jehlicovité až 40 mm dlouhé a 0,1–0,8 mm tlusté; doba krystalisace dosahovala 8 měsíců, avšak největší z těchto krystalů byly na silnějším konci duté.

## Contribution à la théorie de l'effet photographique d'intermittence.

Ladislav Zachoval, Český Brod.

(Reçu le 10 juillet 1946).

L'auteur présente une théorie de l'effet d'intermittence fondée sur les idées physiques concernant la formation de l'image latente. La raison, qui nous autorise à négliger les processus chimiques dans ce cas est donnée. Une émulsion simplifiée, qui fait l'objet des considérations, est définie, de même les conditions de la validité de la théorie sont indiquées. L'auteur déduit les équations fondamentales de la théorie concernant l'augmentation du nombre des grains développables dans l'émulsion simplifiée. Les conséquences de la théorie sont mises en parallèle avec l'expérience. On indique les raisons qui permettent d'appliquer la théorie formée pour une émulsion très simplifiée aux émulsions réelles.

La quantité de lumière absorbée par la couche photographique sensible détermine — suivant la loi de réciprocité le noircissement de la couche.  $J$  désignant l'intensité de la lumière et  $t$  le temps de pose, c'est le produit  $Jt$  qui est décisif pour la densité résultante.

Mais l'application de la loi de réciprocité est soumise à des exceptions. L'un des cas où cette loi n'est pas en vigueur est le suivant:

Une partie de la couche sensible photographique est influencée par la quantité  $Jt$  de lumière pendant l'intervalle  $t$  sans intermittence. Une autre partie de la même couche sensible est influencée par la même quantité de lumière  $Jt$ , mais cette fois-ci l'exposition à la lumière se fait à plusieurs intervalles („les temps de pose partiels“) séparés les uns des autres par des intervalles, pendant lesquels aucune lumière n'est incidente („les intervalles obscurs“). En général le noircissement résultant n'est pas le même dans ces deux cas, bien que la quantité totale de lumière agissante soit la même dans le cas d'intermittence autant que dans celui de continuité. C'est ce qu'on appelle effet photographique d'intermittence.

Cet effet est d'une importance non seulement pratique, mais encore théorique. Par exemple pour la sensitométrie ainsi que pour la photométrie photographique c'est le disque tournant à secteurs évidés correspondant aux angles centraux différents, qui est la

façon la plus simple et très précise de régler la quantité de lumière. Mais une conséquence de l'application d'un disque tournant est souvent l'éclairement intermittent.

La différence entre la densité provoquée par l'éclairement continu et celle provoquée par l'éclairement intermittent, correspondant dans les deux cas à la même quantité de lumière  $Jt$ , est si petite, qu'il est presque impossible de supposer une différence quelconque entre les processus chimiques pendant le développement. Ainsi l'effet d'intermittence est peut-être un des cas où l'on peut observer les processus de la formation de l'image latente directement, sans complications dues aux processus chimiques de développement.

I. Il y a beaucoup d'auteurs qui ont traité l'effet d'intermittence (1). Mais il est impossible de mettre en parallèle et de généraliser la plupart des résultats obtenus. Les travaux de R. Davis (2) et A. Kochs (3) sont les premiers qui ont montré la complication de l'effet d'intermittence et les facteurs qui l'influencent d'une manière un peu plus générale. Toutes les recherches faites jusqu'ici montrent que les facteurs déterminant l'effet d'intermittence sont:

1. la longueur d'onde de la lumière;
2. le nombre des intermittences;
3. l'intervalle de la courbe de noircissement dans lequel est situé le noircissement en question;
4. l'intensité de la lumière;
5. le rapport entre l'intervalle du temps, pendant lequel la lumière influence la courbe sensible et l'intervalle de l'obscurité;
6. la sorte d'émulsion photographique.

Les recherches de R. Davis ont montré que l'éclairement intermittent provoque dans certains cas un noircissement plus grand que l'éclairement continu, correspondant à la même quantité de lumière. Les recherches de A. Kochs ont vérifié les résultats obtenus par R. Davis et ont montré l'influence de la qualité de l'émulsion sensible. Dans les dispositifs employés par R. Davis ainsi que par A. Kochs pour obtenir les courbes caractéristiques on variait les temps de pose par un disque tournant, à secteurs évidés, dont on pouvait régler la vitesse.

Les recherches de A. Kochs et R. Davis ont montré que le caractère général de l'effet d'intermittence peut être décrit de la manière suivante: soit  $D$  la différence entre la densité à l'éclairement intermittent et celle à l'éclairement continu. Pour des faibles intensités lumineuses et des temps de pose courts  $D$  est négatif. Les intensités restant toujours faibles et les temps de pose s'allongeant, la valeur absolue de  $D$  croît jusqu'au maximum, puis décroît à zéro. Si les temps de pose continuent à s'allonger,  $D$  devient

positif, croît jusqu'à un maximum et puis diminue à zéro. Il y a des émulsions pour lesquelles on n'a observé qu'une seule valeur du temps de pose, qui rend  $D$  égal à zéro. Pour un petit temps de pose constant et une intensité lumineuse croissante, la valeur absolue de  $D$  diminue, puis  $D$  devient positif et croît avec l'intensité croissante. Le caractère général ici tracé semble être le même pour une émulsion acide que pour une émulsion à l'ammoniac (Fig. 1, 2, 3).

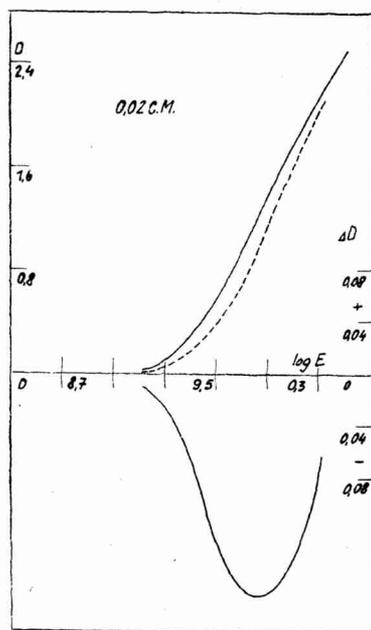


Fig. 1. L'effet d'intermittence pour l'éclairage 0,02 C. — M. Les  $\Delta D$  sont les valeurs moyennes pour  $p = 8$ ,  $p = 16$ ,  $p = 32$ . (R. Davis).

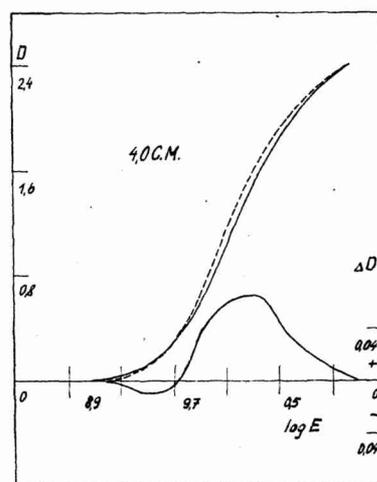


Fig. 2. L'effet d'intermittence pour l'éclairage 4 C. — M. Les fig. 1 et 2 se rapportent à la même couche sensible. Les  $\Delta D$  sont les valeurs moyennes pour  $p = 8$ ,  $p = 16$ ,  $p = 32$ . (R. Davis).

Étant donné le caractère assez compliqué de la valeur  $D$ , qui permet de décrire l'effet d'intermittence, il faut attendre des mesures plus récentes et renoncer pour le moment à l'analyse et à la critique définitive des recherches si intéressantes et profondes de M. J. H. Webb (4) et M. M. J. H. Webb et L. Silberstein (5). Ces recherches concernent un cas spécial, où la densité a été égale à 1. On ne peut en conséquence généraliser les résultats obtenus.

II. Avant les recherches de M. Davis et de M. Kochs les faits connus étaient pour la plupart contradictoires et si confus, que la formation d'une théorie de l'effet d'intermittence était très diffi-

cile. Les processus chimiques formaient la base d'un essai dont M. M. J. M. Blair et M. C. Hylan sont les auteurs (6).

A ma connaissance personne n'a essayé jusqu'à présent d'interpréter les variations de la valeur  $D$  décrites par M. M. Davis et Koehs en prenant pour point de départ les processus physiques qui sont la base des idées actuelles sur l'image latente.

Le but de ce travail est de chercher à s'assurer si les idées physiques assez simples concernant la formation de l'image latente sont

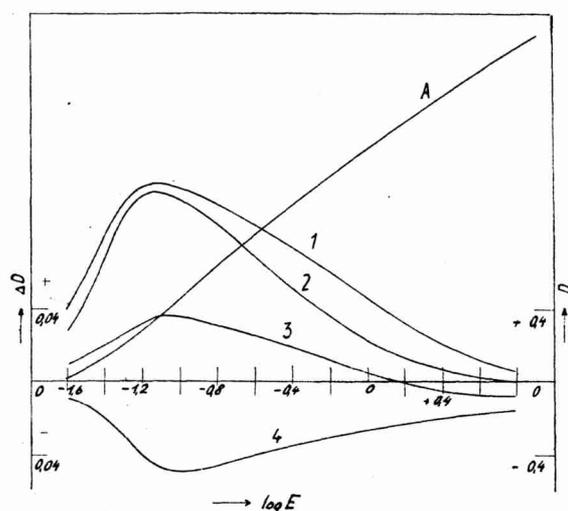


Fig. 3. L'effet d'intermittence de la même couche sensible pour les éclairages différents et pour  $p = 16$ : A. la courbe caractéristique pour l'éclairage non intermittent, correspondant à la courbe 1.

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 1. $p = 16$ , l'éclairage 4 C. — M. | 3. $p = 16$ , l'éclairage 0,1 C. — M.  |
| 2. $p = 16$ , l'éclairage 1 C. — M. | 4. $p = 16$ , l'éclairage 0,02 C. — M. |
- (R. Davis).

une base suffisante pour une théorie de l'effet d'intermittence décrit par les variations de  $D$ . Les considérations ne s'attachent qu'à un modèle simplifié de la couche sensible et à une partie de la courbe caractéristique. Les idées suivantes sur la formation de l'image latente ont été appliquées:

1. Un germe de développement unique suffit pour rendre tout le grain AgBr développable (7);

2. un germe de développement est formé par un groupe d'atomes ou ions qui ne font pas une partie régulière du réseau cristallin d'un grain AgBr (8,8a);

3. on peut s'imaginer la formation d'un tel groupe de la manière suivante: pendant la production d'une émulsion des perturbations locales prennent naissance dans les grains. Dans quelques cas ces perturbations sont déjà des groupes d'atomes qui ne font pas partie du réseau. Un tel groupe est incapable de catalyser le développement, s'il est petit. Ce n'est qu'un groupe convenablement volumineux, qui devient un germe de développement, c'est à dire un endroit où le développement commence. Si le groupe est devenu assez gros déjà pendant la production, il est la cause de la couche sensible. Un groupe encore petit peut devenir assez gros pendant le temps de pose, quand les électrons enlevés par la lumière se raccrochent aux perturbations locales du réseau AgBr. Quelquefois un électron unique suffit pour engendrer le germe d'un groupe d'atomes. Mais dans la plupart des cas, pour agrandir convenablement le groupe non seulement plusieurs électrons sont nécessaires mais aussi des ions positifs qui sont à chaque température libres dans les réseaux (9).

4. L'émulsion simplifiée, qui forme la couche sensible dans nos considérations, a les propriétés caractéristiques suivantes:

a) tous les grains de cette émulsion sont identiques non seulement en ce qui concerne l'étendue, mais aussi en ce qui concerne la structure intérieure initiale;

b) les grains sont situés dans un plan;

c) si un groupe d'atomes dans le grain devient le germe de développement, le grain devient développable et le nombre des grains développables augmente d'une unité.

Il faut encore limiter nos considérations

5. aux intervalles obscurs assez longs, pour que le réseau cristallin soit à l'état stationnaire au commencement de chaque temps de pose partiel;

6. aux densités qui sont proportionnelles au nombre des grains développés (10).

L'émulsion ainsi simplifiée ne forme jamais une couche sensible réelle. Mais on peut s'imaginer que chaque couche sensible réelle est formée par la superposition d'un grand nombre d'émulsions simplifiées de la manière décrite.

Désignons maintenant quelques nombres relatifs à l'unité de surface de la couche sensible: soit  $N$  le nombre des groupes d'atomes capables de devenir germes de développement par l'action de la lumière; soit  $z$  le nombre des grains AgBr; soit  $n$  le nombre des électrons enlevés pendant 1 sec par l'action de la lumière éclairant la couche sensible. Enfin soit  $x$  le nombre des grains devenus développables par l'action de la lumière et  $j$  le nombre d'ions positifs, libres dans le réseau.

III. La question principale pour nos considérations est la suivante: de quelle manière augmente le nombre des grains développables dans l'émulsion simplifiée sous les conditions énoncées? Nous essayerons de répondre seulement pour deux cas les plus simples:

a) Il suffit d'un seul électron pour faire du groupe d'atomes le germe du développement. Il s'agit alors des grains les plus sensibles, qui sont actifs même par l'éclairement le plus faible.

b) Il suffit d'un électron avec un ion positif pour faire du groupe d'atomes le germe du développement. La probabilité de la collision électron — ion — groupe est moindre que la probabilité de la collision électron-groupe. Il s'agit alors des grains dont la sensibilité est un peu moindre que celle du cas a).

a) L'augmentation du nombre des grains développables  $dx$  pendant le temps  $dt$  consiste en deux composantes:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_2. \quad (1)$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$  est due aux grains développables, formés pendant  $dt$  par les électrons enlevés dans le même temps  $dt$ . Le nombre de ces grains est proportionnel au nombre des électrons enlevés dans l'unité de temps et à l'excédent des groupes qui peuvent devenir développables en dehors des groupes qui sont dans les grains déjà faits développables et qui ne peuvent plus contribuer à la formation d'autres grains développables. On a

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = bn \left(N - x \frac{N}{z}\right) = bn \frac{N}{z} (z - x). \quad (2)$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2$  est due aux grains développables formés pendant  $dt$  par les électrons libres au moment  $t$  dans le réseau cristallin. Jusqu'au moment  $t$   $nt$  électrons sont enlevés. Une partie  $\alpha nt$  de ces électrons est déjà située dans des positions fixes. La valeur  $\alpha$ , nous la prenons approximativement comme indépendante du temps et de l' $\alpha < 1$ . Au moment considéré  $t$  il y a  $nt(1 - \alpha)$  électrons libres dans le réseau. L'augmentation est dans ce cas proportionnelle au nombre des électrons libres et au nombre  $\frac{N}{z}(z - x)$  des positions convenables. On a

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = a(1 - \alpha)nt \frac{N}{z}(z - x) = Ant(z - x) \frac{N}{z}. \quad (3)$$

Alors

$$\frac{dx}{dt} = (At + b) \frac{Nn}{z} (z - x) \quad (4)$$

et

$$x = N \left[ 1 - e^{-\frac{Nn}{z} \cdot t(b + \frac{1}{2}At)} \right] \quad (5)$$

supposant  $x = 0$  pour  $t = 0$ .

Il est très probable que les facteurs  $b$  et  $A$  sont fonctions du nombre et du mouvement des ions positifs qui influencent les mouvements des électrons enlevés et limitent l'influence des électrons qui ont été déjà enlevés mais n'ont pas trouvé jusqu'ici les positions définitives dans les groupes d'atomes. C'est la dépendance de la courbe caractéristique de la température qui montre l'influence des ions positifs (11).

En ce qui concerne les valeurs des facteurs  $b$  et  $A$ , on peut dire qu'à chaque électron enlevé correspond tout au plus un grain développable AgBr, au moins dans la partie de la courbe caractéristique qui fait l'objet de nos considérations. Alors,

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{N}{z} (At + b) (z - x) \leq 1, \quad (6)$$

$$0 < b \leq \frac{1}{N},$$

$$b + At \leq \frac{z}{N(z - x)}, \quad (7)$$

$$\frac{x}{Nt(z - x)} \leq A < \frac{z}{Nt(z - x)}. \quad (8)$$

Le nombre des grains développables formés par l'action de la lumière soit  $[x]_{t_0} + [r]_{t_0}$ , si le temps de pose est  $t_0$ . Le terme  $[x]_{t_0}$  exprime le nombre des grains formés pendant le temps de pose. Le terme  $[r]_{t_0}$  exprime le nombre des grains formés après le temps de pose par un processus qui est une analogie à la réaction bimoléculaire. Le noircissement est proportionnel au nombre  $[x]_{t_0} + [x]_{t_0}$  suivant les hypothèses.

L'augmentation du nombre des grains développables après le temps de pose est donnée par la relation:

$$\frac{dx}{dt} = an \frac{N}{z} (t_0 - \alpha t) (z - x), \quad t > t_0. \quad (9)$$

Soit  $t_0 + \tau$  le moment où il n'y a pas d'électrons enlevés par la

lumière et encore libres dans le réseau cristallin. Alors

$$[r]_{t_0} = [x]_{t_0} \cdot e^{-\frac{anN}{z} \cdot t_0^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} + z \left[ 1 - e^{-\frac{anN}{z} \cdot t_0^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \right]. \quad (10)$$

Maintenant soit  $T$  le temps de pose pour l'éclairement non intermittent. A cet éclairement correspondent les  $p$  temps de pose de la durée  $\frac{T}{p}$  pour l'éclairement intermittent. La différence entre le noircissement à l'éclairement intermittent et le noircissement à l'éclairement continu  $D$  est proportionnelle à la différence du nombre des grains développables pour ces deux cas, c'est à dire à la différence

$$\overline{\Delta D} = \left\{ p [x]_{\frac{T}{p}} + p [r]_{\frac{T}{p}} \right\} - \{ [x]_T + [r]_T \} \quad (11)$$

et puisque nous supposons les intervalles obscurs assez longs plus grands que  $\tau$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{\Delta D} = & p [x]_{\frac{T}{p}} \left\{ 1 + e^{-\frac{anN}{z} \left(\frac{T}{p}\right)^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \right\} + pz \left\{ 1 - e^{-\frac{anN}{z} \left(\frac{T}{p}\right)^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \right\} - \\ & - [x]_T \left\{ 1 + e^{-\frac{anN}{z} T^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \right\} + z \left\{ 1 - e^{-\frac{anN}{z} T^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Étant donnée la valeur probable du facteur  $A$ , il est facile de montrer que

$$e^{-\frac{anN}{z} T^2 \frac{(1-\alpha)^2}{2x}} \doteq 1. \quad (13)$$

En conséquence

$$\overline{\Delta D} = 2 \left\{ p [x]_{\frac{T}{p}} - [x]_T \right\}. \quad (14)$$

En supposant les intensités lumineuses faibles et par suite les  $n$  faibles et des temps de pose courts, on peut négliger les termes avec  $t^4$  et plus petits: On a

$$x = Nnt \left\{ b + \frac{1}{2}t \left( A - \frac{Nn}{z} b^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{Nn}{z} bt^2 \left( A - \frac{1}{3} \frac{Nn}{z} b^2 \right) \right\} \quad (15)$$

et pour la valeur  $\overline{\Delta D}$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta D} = & 2NnT^2 \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left( A - \frac{Nnb^2}{z} \right) - \frac{1}{2} \frac{Nn}{z} bT \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left( A - \frac{1}{3} \frac{Nn}{z} b^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Les expériences faites par M. M. Davis et Kochs montrent que  $\overline{\Delta D} < 0$  pour les petits  $T$  et faibles  $n$  dans la plupart des cas. Alors on peut supposer  $A - \frac{Nn}{z} b^2 > 0$ .

On a  $\overline{\Delta D} = 0$  pour  $T_{1,2} = 0$  et pour

$$T_3 = \frac{3}{1 + \frac{1}{p}} \cdot \frac{z}{Nnb} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2A}{A - \frac{Nn}{z} b^2}}. \quad (17)$$

En conséquence  $\overline{\Delta D} < 0$  pour  $0 < T < T_3$ ,  
 $\overline{\Delta D} > 0$  pour  $T > T_3$ .

La valeur de  $T_3$  diminue avec  $n$  croissant. Les variations de  $p$  provoquent les variations de  $T_3$  d'étendue assez limitée.

Les valeurs de  $T$  :  $T_{m_1} = 0$  et  $T_{m_2} = \frac{2}{3} \cdot T_3$  satisfont à l'équation  $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\Delta D} = 0$  et indiquent les valeurs de  $T_1$  pour lesquelles  $\overline{\Delta D}$  a la valeur maximum, qui est

$$\Delta D_m = 4 \frac{p(1-p)}{(1+p)^2} \cdot \frac{z^2}{Nnb^2} \left( A - \frac{Nnb^2}{3z} \right) \frac{1}{\left( 1 + \frac{2A}{A - \frac{Nn}{z} b^2} \right)^3}. \quad (18)$$

$\Delta D_m$  est une fonction assez compliquée de  $n$ .

Les conséquences de la théorie indiquées jusqu'ici sont d'accord avec les expériences (Fig. 1, 2, 4, 5).

Soit maintenant  $T$  invariable et pas trop grand. Si  $n$  varie on a  $\overline{\Delta D} = 0$  pour  $n_1 = 0$  et pour

$$n_{2,3} = \frac{z}{N} \cdot$$

$$\frac{b + AT \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \pm \sqrt{b^2 + A^2 T^2 \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{2}{3} T A b \left( 1 + \frac{1}{p} \right)}}{T b^2 \left( 1 + \frac{1}{p} \right)};$$

$$n_2 < n_3. \quad (19)$$

On a

$$\begin{aligned} \overline{\Delta D} &< 0 \text{ pour } 0 < n < n_2, \\ \overline{\Delta D} &> 0 \text{ pour } n_2 < n < n_3, \\ \overline{\Delta D} &< 0 \text{ pour } n > n_3, \end{aligned}$$

en accord avec les recherches de M. Davis et conformément aux expériences faites par M. T. Luft et M. C. E. Weiland (12, 13).

Les valeurs  $n_2$  et  $n_3$  sont proportionnelles au nombre des grains  $z$ . La valeur d'intensité lumineuse et en conséquence  $n$  pour laquelle  $\Delta D = 0$ , diminue, si  $z$  est décroissant. Ainsi on peut expli-

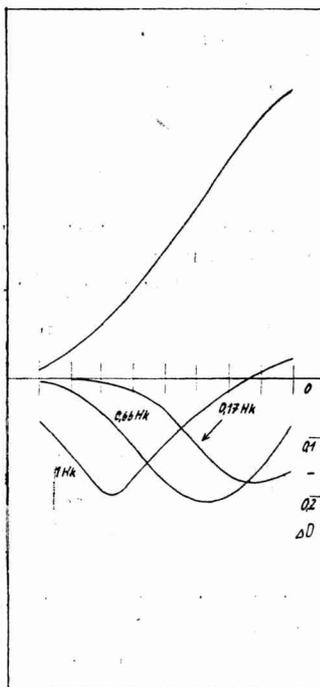


Fig. 4. L'effet d'intermittence pour différents éclairages; l'émulsion Perutz, à l'ammoniac (A. Kochs).

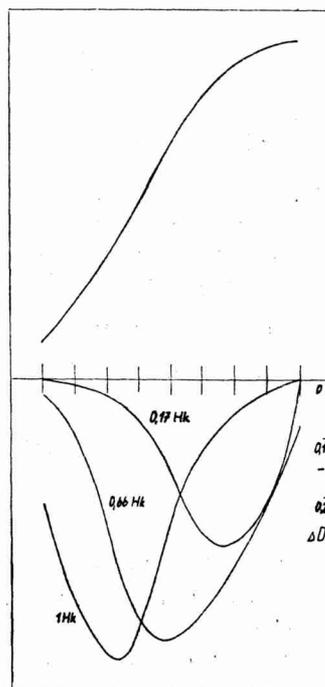


Fig. 5. L'effet d'intermittence pour différents éclairages, l'émulsion Perutz, acide (A. Kochs).

quer — à notre avis — l'expérience suivante, faite par M. Kochs. Il a baigné les couches sensibles dans des bains de différentes concentrations de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ . Puis les couches ont été exposées à la lumière. La différence  $\Delta D$  variait avec la concentration de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  de la façon suivante: pour des concentrations faibles elle était négative, pour des concentrations plus grandes elle était positive et croissante avec une concentration croissante (Fig. 6). Les bains de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  dissolvaient les grains avec une vitesse proportionnelle à la concentration de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  et par ce processus le nombre  $z$  des

grains diminuait. En conséquence l'intensité lumineuse pour laquelle la différence  $\Delta D$  devient positive diminuait aussi.

La considération suivante concerne le cas où on ne peut négliger que les termes avec  $t^5$  et plus petits. Dans ce cas

$$x = Nnt \left\{ b + \frac{1}{2}t \left( A - \frac{Nn}{z} b^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{Nn}{z} bt^2 \left( A - \frac{1}{3} b^2 \frac{Nn}{z} \right) - \frac{1}{4} \frac{Nn}{z} \cdot t^3 \left( \frac{1}{2} A^2 - \frac{Nn}{z} Ab^2 + \frac{1}{6} \frac{N^2 n^2}{z^2} b^4 \right) \right\} \quad (20)$$

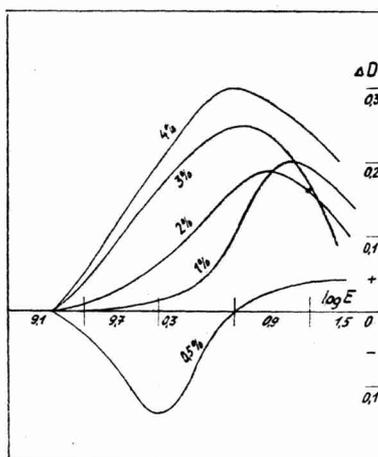


Fig. 6. L'influence du bain préalable de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ . Les concentrations 0,5—4%. La durée du bain: 3 min (A. Kochs).

et par conséquent

$$\begin{aligned} \overline{\Delta D} = 2NnT^2 \left( \frac{1}{p} - 1 \right) & \left\{ \frac{1}{2} \left( A - \frac{Nn}{z} b^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{Nn}{z} \cdot b \cdot T \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left( A - \frac{1}{3} \frac{Nn}{z} b^2 \right) - \frac{1}{4} \frac{Nn}{z} T^2 \left( 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \cdot \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{1}{2} A^2 - \frac{Nn}{z} b^2 A + \frac{1}{6} \frac{N^2 n^2}{z^2} \cdot b^4 \right) \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

L'équation  $\overline{\Delta D} = 0$  peut être satisfaite soit par deux racines réelles différentes, ou par deux racines réelles identiques, ou encore par deux racines complexes, et ce sont les valeurs de  $b$  et  $A$  qui sont décisives. Ces valeurs déterminent aussi les qualités de l'émulsion. Dans la partie de la courbe caractéristique en considération on n'a

observé aucune ou bien une ou deux valeurs du temps de pose — pour différentes émulsions — pour lesquelles  $\Delta D = 0$ . Alors il n'y a pas de désaccords entre l'expérience et la théorie.

b) L'augmentation du nombre des grains développables dans le cas b) est formée de la même façon que dans le cas a). De plus  $\frac{dx}{dt}$  est probablement proportionnel au nombre  $j$  des ions positifs libres dans le réseau ainsi qu'à la différence entre le nombre total  $N$  des groupes d'atomes convenables et le nombre des ions qui ont été capables d'atteindre les groupes convenables d'atomes pendant le  $t$ . Soit  $i$  le nombre de ces ions pour 1 sec. Les ions ont une vitesse moindre que les électrons. En conséquence:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{BjnN}{z} (z - x) (N - i \cdot t) (At + b), \quad (22)$$

$B$  étant une constante. Pour la première approximation on a

$$x = BjN^2nt \left\{ b + \frac{1}{2}t \left( A - \frac{BjnN^2}{z} \cdot b^2 - \frac{ib}{N} \right) - \frac{1}{2} \frac{BjN^2n}{z} \cdot t^2 \cdot \left( Ab - \frac{1}{3} \frac{BjN^2nb^3}{z} + \frac{2}{3} \frac{iA}{N} \cdot \frac{z}{BjnN^2} \right) \right\} \quad (23)$$

et

$$\overline{\Delta D} = 2 Bjn N^2 T^2 \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left( A - \frac{BjnN^2}{z} b^2 - \frac{ib}{N} \right) - \frac{1}{2} \frac{BjnN^2}{z} T \left( 1 + \frac{1}{p} \right) \left( Ab - \frac{1}{3} \frac{BjnN^2b^3}{z} + \frac{2}{3} \frac{iA}{N} \frac{z}{BjnN^2} \right) \right\} \quad (24)$$

L'équation  $\overline{\Delta D} = 0$  est satisfaite par  $T_{1,2} = 0$  et

$$T_3 = \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{p} \right)} \cdot \frac{z}{BjnN^2} \cdot \frac{A - \frac{BjN^2n}{z} b^2 - \frac{ib}{N}}{Ab - \frac{1}{3} \frac{BjnN^2b^3}{z} + \frac{2}{3} \cdot \frac{iA}{N} \cdot \frac{z}{BjnN^2}} \quad (25)$$

Pour  $i = 0$  le cas b) devient à peu près le cas a); alors le produit  $Bj$  a une valeur probablement très proche de  $N^{-1}$ . La valeur de  $T_3$  dans le cas b) diffère de la valeur  $T_3$  du cas a) seulement par les termes d'ordre  $N^{-2}$ . Cela rend compréhensible l'accord de la théorie formée pour une émulsion extrêmement simplifiée avec l'expérience.

La théorie de l'effet d'intermittence fondée sur les idées très simples relatives à la formation de l'image latente et les processus physiques qui l'accompagnent, est capable d'expliquer le caractère général de l'effet d'intermittence en fonction de l'intensité de la

lumière ainsi que du temps de pose. L'influence du bain préalable de  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  semble aussi être expliquée par cette théorie.

La théorie indiquée est incapable de décrire ou d'expliquer les effets dans lesquels les processus chimiques ne sont pas négligeables.

#### Bibliographie.

1. Hay-Rohr: Handbuch der wiss. u. angew. Photographie, Bd. V, p. 307; K. V. Čibissov: Teorija fotografičeskich processov t. I, p. 173; Fortschritte der Photographie Bd. II, p. 246.
2. R. Davis: Sci. Pap. Bur. Standards No. 528 (1926).
3. A. Kochs: ZS f. wiss. Photographie, 36 (1937), 97.
4. J. H. Webb: J. opt. Soc. Am. 23 (1933), 157, 316.
5. L. Silberstein — J. H. Webb: Phil. Mag. 18 (1934), 1.
6. J. M. Blair — M. C. Hylan: J. opt. Soc. Am. 23 (1933), 353.
7. Hay-Rohr: Handb. wiss. Phot. Bd. V., 230.
8. Hay-Rohr: Handb. wiss. Phot. Bd. V., 149, 260.
- 8a. H. Arens — F. Luft: Veröff. Agfa IV (1935), 1.
9. R. W. Gurney — N. F. Mott: Proc. Roy. Soc. 164 (1938), 151.
10. Hay-Rohr: Handb. wiss. Phot. Bd. V., 152.
11. J. H. Webb — Ch. Evans: J. opt. Soc. Am. 28 (1938), 249.
12. F. Luft: Veröff. Agfa IV (1935), 222.
13. C. E. Weinland: J. opt. Soc. Am. 16 (1928), 245.

\*

#### Příspěvek k teorii fotografického intermitenčního zjevu.

(Obsah předešlého článku).

Podle recipročního zákona rozhoduje o výsledném zčernání fotografické citlivé vrstvy za jinak stejných podmínek množství absorbované světelné energie.

Jednou z výjimek tohoto zákona je tak zvaný intermitenční zjev, jehož podstata je taková: světlo intensity  $I$  dopadající na vrstvu po dobu  $t$  způsobí obecně jiné zčernání než světlo téže intensity  $I$ , kterým byla vrstva osvětlena  $p$ -krát po dobu  $t/p$ . V obou případech je množství světelné energie, která na desku působila, stejné, totiž  $I \cdot t$ . Zjev má praktický význam pro sensitoometrii i fotografickou fotometrii a theoretický význam, protože chemické procesy při vyšetřování zjevu lze zanedbat.

I. Po starších autorech (1) přispěli k poznání efektu hlavně R. Davis (2) a A. Kochs (3). Oba zavedli pro charakteristiku děje rozdíl  $\Delta D =$  zčernání při osvětlení intermitenčním — zčernání při osvětlení neintermitenčním. Celkový průběh veličiny  $\Delta D$  je patrný z obr. 1 a 2.

II. Pokus o teorii na základě chemickém obsahuje pojednání (6). Není známo, že by byl učiněn pokus vyložit efekt na podkladě fyzikálním. O to se pokouší tato práce.

Vychází z faktů, že stačí jediný zárodek vývoje, aby se zrno AgBr stalo vyvolatelným (7); že zárodek vývoje je tvořen skupinou atomů nebo iontů, které nepatří k pravidelné mřížce AgBr (8, 8a) a že takový zárodek vývoje vzniká na poruchových místech mřížky doplněných na vhodnou velikost elektrony světlem uvolněnými, po př. pozitivními ionty, které jsou v mřížce volné (9). Omezuje se na zjednodušený model emulze, v níž všechna zrna jsou identická a leží v jedné rovině. Zrna mají tu vlastnost, že vznikem jediného zárodku vývoje se celé zrno stává vyvolatelným. A dále se theorie omezuje na hustoty, při nichž je zčernání úměrno počtu vyvolatelných zrn (10), a na případy, že období mezi dvěma částečnými exposicemi (období tmy) jsou dosti dlouhá, aby mřížka byla ve stacionárním stavu na počátku každé expozice.

Zavádí se označení pro hodnoty vztažené na plošnou jednotku vrstvy:  $N$  je počet atomových skupin, ze kterých se mohou stát zárodky vývoje,  $z$  je počet zrn AgBr;  $x$  je počet vyvolatelných zrn;  $n$  je počet elektronů uvolňovaných světlem za 1 sec;  $j$  je počet volných kladných iontů.

III. Jsou vyšetřovány dva případy:

a) stačí jediný elektron, aby ze skupiny atomů vznikl zárodek vývoje,

b) stačí jeden elektron a jeden pozitivní iont, aby takový zárodek vznikl.

a) Rovnice (4) udává přírůstek vyvolatelných zrn a je odvozena za předpokladu, že vyvolatelná zrna vznikají v době  $dt$  jednak z elektronů v té době uvolňovaných, jednak z elektronů, které od dřívějšíka byly v mřížce volné. Výraz pro počet vyvolatelných zrn v době  $t$  je dán rovnicí (5). Faktory  $b$  a  $A$  závisí patrně na počtu a pohyblivosti kladných iontů v mřížce (11). Jejich velikost je odhadnuta ve výrazech (6, 7, 8) a to za předpokladu, že přírůstek vyvolatelných zrn je menší nebo nanejvýš roven počtu uvolněných elektronů. Rozdíl zčernání  $\overline{\Delta D}$  bude úměrný výrazu (11), který nabývá za daných předpokladů hodnoty (16) zanedbáme-li členy s  $T^4$  a menší. Tento výraz se anuluje pro expoziční dobu (17).  $\overline{\Delta D}$  nabývá maximální hodnoty (18) pro exp. dobu  $T_{m_2} = \frac{2}{3}T_3$ . Je-li exp. doba  $T$  konstantní a mění-li se světelná intenzita, anuluje se  $\overline{\Delta D}$  pro  $n$  dané rovnicí (19). Tyto důsledky theorie souhlasí s experimentem (obr. 3, 4, 5 a (12, (13)). Z výrazu pro  $n_{2,3}$  (t. j. ze závislosti na  $z$ ) lze vyložit vliv předběžné lázně  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  (obr. 6). Výraz (21) udává hodnotu rozdílu  $\overline{\Delta D}$  pro další přiblížení. Důsledky plynoucí z theorie v tomto případě nejsou v rozporu s experimentem.

b) Rovnice (22) udává přírůstek vyvolatelných zrn v tomto případě. Od případu a) se liší faktory  $j$  a  $(N - it)$ . Význam prvního

faktoru je zřejmý. Druhý faktor udává počet vhodných míst, na nichž se mohou uchytit fotochemicky účinné kladné ionty.  $i$  je počet kladných iontů, které mohou za 1 sec dospět na některé z míst  $N$ . Rozdíl  $\overline{\Delta D}$  (24) se v tomto případě anuluje pro expoziční dobu (25), lišící se od doby nalezené v případě a) jen o veličiny řádově  $N^{-2}$ .

IV. Theorie stačí na výklad celkového průběhu intermitenčního zjevu v závislosti na intenzitě světla a expoziční době. Nestací však na výklad dějů, při nichž nelze zanedbávat chemické děje.

