

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1947

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0072|log13

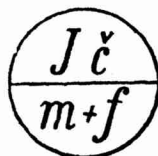
Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY
A FYSIKY

ROČNÍK 72 — SEŠIT 2



PRAHA 1947

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze

Ročník 72 • Sešit 2 • 1947

Hlavní redaktoři

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Část vědecká

Redakční rada pro část matematickou

OTAKAR BORŮVKA, BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, EDUARD ČECH,
VÁCLAV HLAVATÝ, BOHUSLAV HOSTINSKÝ, VLADIMÍR KNICHAL, VLADIMÍR
KOŘÍNEK, MILOŠ KÖSSLER, ŠTEFAN SCHWARZ a FRANTIŠEK VYČICHLO

Redakční rada pro část fyzikální

JINDŘICH M. BAČKOVSKÝ, RUDOLF BRDIČKA, DIONÝS ILKOVIČ,
FRANTIŠEK LINK, ZDENĚK MATYÁŠ, VIKTOR TRKAL a AUGUST ŽÁČEK

Vyučování — Zprávy — Literatura

Odborní redaktoři

KAREL HAVLÍČEK, KAREL HRUŠA, EMIL KAŠPAR, MIROSLAV KATĚTOV
FRANTIŠEK KŘEHLÍK, VLADIMÍR MAJER a JAN VYŠÍN

Ročně 4 sešity

Roční předplatné Kčs 120,—

*Redakce a administrace: Praha II, Žitná 25. Telefon 29308. V pracovní dny
od 8 do 12 a od 14 do 16 hodin kromě soboty. Účet poštovní spořitelny: Jednota
čs. matematiků a fysiků, č.čs. 13103. Knihárna Prometheus v Praze VIII,
Rokoska 94. Telefon RR8139. Novinová sazba povolena ředitelstvím pošt a te-
legrafů 18. listopadu 1933, č.čs. 288250/VII. Dohledací poštovní úřad Praha 25.
Tento sešit vyšel 25. listopadu 1947*

Prof. Dr. Bohumil Bydžovský:

Knihovna, sv. 8

Úvod do analytické geometrie

Druhé vydání. 1946. 8° 436 str., 54 obr. Brož. Kčs 220,—

Autopolární normální jehlany polárnosti n -rozměrného prostoru.

Jan Srb, Jihlava.

(Došlo dne 20. listopadu 1945.)

Pomocí věty, dokázané v první části článku o autopolárných normálních jehlanech, provádím v druhé části syntheticky projektivní klasifikaci polárnosti, tedy i nadkvadrik n -rozměrného prostoru. Jak lze touto cestou jednoduše dospět k afinní a metrické klasifikaci nadkvadrik, ukáži v práci další.

I.

Pro každou polárnost n -rozměrného prostoru platí věta: *Autopolární normální jehlany téže polárnosti n -rozměrného prostoru jsou téhož druhu*, t. j. přímkové hrany dvou různých autopolárných jehlanů téže polárnosti n -rozměrného prostoru je vždy možno tak navzájem přiřadit, že každé hraně jednoho jehlanu odpovídá jediná hrana druhého jehlanu tak, že hranám procházejícím jedním vrcholem jednoho jehlanu odpovídají hrany procházející jedním vrcholem jehlanu druhého, a že involuce harmonických pólů indukované polárnosti na korespondujících si hranách obou jehlanů jsou téhož druhu.

1. Autopolární trojúhelníky téže rovinné polárnosti s jedním společným vrcholem jsou téhož druhu.

Důkaz: *Polárnosti nesingulární.* Z bodu D jedné strany, na př. BC trojúhelníku ABC promítneme čtyři body A, B, S', S'' ($A \equiv B \equiv S' \equiv S''$) druhé strany; na př. AB , na třetí stranu CA do bodů A, C, D', D'' . Pak $Dp(A, B, S', S'') = Dp(A, C, D', D'')$, t. j. neoddělují-li body S', S'' body A, B , neoddělují také body D', D'' body A, C . Platí tedy v perspektivnosti se středy S', S'' ležícími na straně AB trojúhelníku ABC :

(1,1) Neoddělují-li středy S' , S'' vrcholy A , B a korespondují-li v perspektivnosti se středem S' bodům úsečky $\overline{BC}(\overline{CB})^1$ body úsečky $\overline{AC}$, korespondují také v perspektivnosti se středem S'' bodům úsečky $\overline{BC}(\overline{CB})$ body úsečky $\overline{AC}$.

(1,2) V nezvrhlé rovinné polárnosti existují pouze dva druhy autopolárných trojúhelníků, a to s indukovanými involucemi harmonických pólů a) na všech třech stranách eliptickými, b) na jedné straně eliptickou a na dvou stranách hyperbolickými.²⁾

Buďte ABC , $A'B'C'$ dva různé autopolární trojúhelníky téže rovinné polárnosti se společným vrcholem C , tedy s vrcholy A , B a A' , B' ležícími na jeho poláře. Buďte dále P , P' dva harmonické póly na straně BC . Pak body $P_1 \equiv (AP \times B'C)$ a $P'_1 \equiv (A'P' \times B'C)$ jsou harmonické póly na straně $B'C$.

A) Buď na straně AB indukována eliptická involuce harmonických pólů, t. j. harmonické póly A' , B' oddělují vrcholy A , B . Je-li $a > 0$, je tedy $Dp(A, B, A', B') = -a$. Potom je $Dp(A, A', B, B') = 1 - Dp(A, B, A', B') = 1 + a > 0$, t. j. body A , A' neoddělují body B , B' .

a) Buď také na straně BC indukována eliptická involuce harmonických pólů, t. j. body P , P' oddělují body B , C . Leží-li tedy v trojúhelníku $BB'C$ bod P na úsečce $\overline{BC}$, leží bod P' na úsečce $\overline{CB}$. Leží-li bod P_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, pak podle (1,1) leží bod P'_1 na úsečce $\overline{CB'}(\overline{B'C'})$, t. j. body P_1 , P'_1 oddělují body B' , C a involuce harmonických pólů na straně $B'C$ trojúhelníku $A'B'C'$ je eliptická. Podle (1,2), a) je indukována na straně CA i CA' také eliptická involuce harmonických pólů.

b) Na straně BC buď indukována hyperbolická involuce harmonických pólů, t. j. body P , P' neoddělují body B , C . Leží-li tedy v trojúhelníku $BB'C$ bod P na úsečce $\overline{BC}$, leží také bod P' na úsečce $\overline{BC}$. Leží-li bod P_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, pak podle (1,1) leží také bod P'_1 na úsečce $\overline{B'C}(\overline{CB'})$, t. j. body P_1 , P'_1 neoddělují body B' , C a involuce harmonických pólů na straně $B'C$ je hyperbolická. Podle (1,2), b) je na straně CA i CA' indukována hyperbolická involuce harmonických pólů.

B) Buď na straně $AB \equiv A'B'$ indukována hyperbolická involuce harmonických pólů. Podle (1,2) b. je v trojúhelníku ABC i $A'B'C'$ na jedné z obou zbývajících stran indukována eliptická, na druhé hyperbolická involuce harmonických pólů.

¹⁾ Ze dvou částí, na něž dělí přímku dva její různé body A , B , nazýváme jednu část úsečkou $\overline{AB}$, část druhou úsečkou $\overline{BA}$. Body A , B nechť nenáleží žádné z obou úseček.

²⁾ Synthetický důkaz viz na př. Vojtěch, Geometrie projektivní, 1932, str. 308.

V *singulární* rovinné polárnosti 1. druhu s jedním singulárním bodem leží jeden vrchol každého autopolárního trojúhelníku v tomto bodě, kterým tedy procházejí dvě strany trojúhelníku s indukovanými parabolickými involucemi harmonických pólů. Na třetí straně je pak indukována involuce harmonických pólů v téže polárnosti buď jen eliptická nebo jen hyperbolická podle toho, má-li polární svazek přímek s vrcholem v singulárním bodě samodružné paprsky imaginární nebo reálné.

V *singulární* polárnosti 2. druhu s přímkou singulárních bodů, leží vždy jedna strana polárního trojúhelníku v této přímce. Na ostatních dvou stranách jsou vždy indukovány parabolické involuce harmonických pólů. Platí tedy 1. pro všechny rovinné polárnosti.

2. Jsou-li dány involuce harmonických pólů indukované polárností na hranách autopolárního normálního jehlanu, procházejících jedním vrcholem jehlanu, který neleží v singulárním prostoru polárnosti, jsou tím dány involuce harmonických pólů indukované na všech hranách jehlanu.

Důkaz. Buďte dány involuce harmonických pólů indukované polárností n -rozměrného prostoru na hranách procházejících vrcholem A_k ($k = 1, \dots, n+1$) autopolárního normálního jehlanu. Protože podle předpokladu bod A_k není singulární, mohou to být pouze involuce eliptická, hyperbolická nebo parabolická se singulárním bodem jiným než A_k . Vrcholy každé jiné hrany jehlanu $A_i A_j$ ($i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, \dots, n+1$) tvoří s A_k autopolární trojúhelník $A_i A_j A_k$ polárnosti indukované v jeho rovině, na jehož stranách $A_k A_i$ a $A_k A_j$ jsou dány involuce harmonických pólů. Jsou-li obě involuce nezvrhlé a jsou-li P, P' resp. P_1, P'_1 harmonické póly na stranách $A_k A_i$ resp. $A_k A_j$ [$P \neq P' \neq A_k \neq A_i$, $P_1 \neq P'_1 \neq A_k \neq A_j$] jsou $L' \equiv (A_i A_j \times PP'_1)$ a $L \equiv (A_i A_j \times A_k M)$, kde je $M \equiv (A_i P_1 \times A_j P')$, dva harmonické póly na straně $A_i A_j$, jiné než tyto body. Je-li jedna z involucí parabolická, na př. na str. $A_k A_i$, je druhá involuce na straně $A_k A_i$ nezvrhlá. Na straně $A_i A_j$ je pak indukována parabolická involuce harmonických pólů se singulárním bodem A_i .

3. Dva různé autopolární normální jehlany téže nezvrhlé polárnosti n -rozměrného prostoru s $n-1$ společnými vrcholy jsou téhož druhu.

Důkaz. Buďte $J \equiv [A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}]$, $J^0 \equiv [A_1^0, A_2^0, A_3^0, \dots, A_{n+1}^0]$ dva autopolární normální jehlany téže polárnosti n -rozměrného prostoru s $n-1$ společnými vrcholy $A_3, \dots, A_{n+1}$. Při vhodném označení vrcholů A_1^0, A_2^0 jsou involuce harmonických pólů na hranách $A_1 A_{n+1}$, $A_2 A_{n+1}$ a $A_1 A_{n+1}$, A_2, A_{n+1} stejného druhu, protože $A_1 A_2 A_{n+1}$ a $A_1^0 A_2^0 A_{n+1}$ jsou autopolární troj-

úhelníky polárnosti indukované v rovině $(A_1, A_2, A_{n+1}) \equiv (A_1^0, A_2^0, A_{n+1}^0)$ mající společný vrchol A_{n+1} , tedy podle 1. jsou oba trojúhelníky téhož druhu: $A_1 A_2 A_{n+1} \sim A_1^0 A_2^0 A_{n+1}^0$. Hrany $A_{n+1} A_i$ ($i = 3, \dots, n$) jsou oběma jehlanům společné. Jsou tedy na korespondujících hranách obou jehlanů, procházejících vrcholem A_{n+1} , indukovány involucemi harmonických pólů téhož druhu. Podle 2. jsou tedy i na ostatních korespondujících hranách indukovány involuce harmonických pólů stejného druhu a tedy $J \sim J^0$.

4. Budte $J \equiv [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$, $J' \equiv [A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+1}]$ dva různé autopolární normální jehlany téže *nesingulární* polárnosti n -rozměrného prostoru. Volme n řad po n členech nových autopolárných normálních jehlanů této polárnosti takto:

$J_1^1 \equiv [A_1^1, A_2^1, A_3, \dots, A_{n+1}]$, kde A_1^1 je průsečík hrany $A_1 A_2$ jehlanu J s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$. Jehlany J a J_1^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_3, \dots, A_{n+1}$. Je tedy podle 3. $J \sim J_1^1$.

$J_2^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, A_3^2, A_4, \dots, A_{n+1}]$, kde A_2^2 je průsečík hrany $A_2^1 A_3$ jehlanu J_1^1 s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$. Jehlany J_1^1 a J_2^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_4, \dots, A_{n+1}$. Je tedy podle 3. $J_1^1 \sim J_2^1$.

$J_k^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, \dots, A_{k-1}^{k-1}, A_k^k, A_{k+1}^k, A_{k+2}, \dots, A_{n+1}]$, ($1 \leq k \leq n$), kde vrchol A_k^k je průsečík hrany $A_{k-1}^{k-1} A_{k+1}$ jehlanu J_{k-1}^1 s nadrovinou $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$. Jehlany J_{k-1}^1 a J_k^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_2^2, \dots, A_{k-1}^{k-1}, A_{k+2}, \dots, A_{n+1}$. Platí tedy podle 3. $J_{k-1}^1 \sim J_k^1$. Leží-li vrchol A_k^{k-1} již v nadrovině $(A'_1, \dots, A'_n)$, položíme $A_k^{k-1} \equiv A_k^k$. Protože pak $J_{k-1}^1 \equiv J_k^1$, je také $J_{k-1}^1 \sim J_k^1$.

$J_n^1 \equiv [A_1^1, A_2^2, \dots, A_n^n, A_{n+1}]$, kde vrchol A_n^n je průsečík hrany $A_{n-1}^{n-1} A_{n+1}$ s nadrovinou $(A'_1, \dots, A'_n)$. Jehlany J_{n-1}^1 a J_n^1 mají $n - 1$ společných vrcholů $A_1^1, A_2^2, \dots, A_{n-1}^{n-1}$. Podle 3. je $J_{n-1}^1 \sim J_n^1$. Protože je $J \sim J_1^1 \sim J_2^1 \sim J_n^1$, je $J \sim J_n^1$. V polární nadrovině $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} leží n vrcholů $A_1^1, A_2^2, \dots, A_n^n$ jehlanu J_n^1 . Je tedy $A_{n+1}^n \equiv A'_{n+1}$, t. j. jeden vrchol jehlanu J_n^1 se ztotožňuje s jedním vrcholem jehlanu J' .

Druhou řadu autopolárných jehlanů J_i^2 ($i = 1, \dots, n$) dané polárnosti volme stejným způsobem jako jsme volili řadu prvou; nahradíme pouze jehlan J jehlanem $J_n^1 \equiv [A_{n+1}^1, A_1^1, \dots, A_n^1]$ a polární nadrovinu $(A'_1, \dots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} polární nadrovinou $(A'_1, \dots, A'_{n+1}, A'_{n-1})$ bodu A'_n . Obdržíme tak řadu $J_n^1 \sim J_1^2 \sim$

$\sim J_2^2 \dots \sim J_n^2$, tedy $J \sim J_n^1 \sim J_n^2$, t. j. $J \sim J_n^2$, a dva vrcholy jehlanu J_n^2 se ztotožňují s vrcholy A'_n, A'_{n+1} jehlanu J' .

Obecně volíme k -tou řadu autopolárných normálních jehlanů J_i^k ($i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$) stejným způsobem, jako jsme volili řadu prvou, nahradíme pouze jehlan J jehlanem J_n^{k-1} , ve kterém zaměníme pořadí vrcholů tak, že vrchol poslední dáme na prvé místo. Dále nahradíme polární nadrovinu $(A'_1, \dots, A'_n)$ bodu A'_{n+1} polární nadrovinou $(A'_1, \dots, A'_{n-k+1}, A'_{n-k+3}, \dots, A'_{n+1})$ bodu A'_{n-k+2} . Je pak $J_n^{k-1} \sim J_1^k \sim J_2^k \sim \dots \sim J_n^k$, tedy $J \sim J_n^{k-1} \sim J_n^k$, t. j. $J \sim J_n^k$. k vrcholů jehlanu J_n^k se ztotožní s vrcholy $A'_{n-k+2}, A'_{n-k+3}, \dots, A'_{n+1}$ jehlanu J' .

Pro $k = n$ bude tedy $J \sim J_n^n$. Protože se nyní n vrcholů jehlanu J_n^n ztotožňuje s n vrcholy jehlanu J' , je $J' \equiv J_n^n$ a platí tedy $J' \sim J_n^n \sim J$, t. j. $J' \sim J$.

Singulární polárnost h -tého druhu ($h = 1, \dots, n$) má jako involuční korelace jediný prostor S_{h-1} singulárních bodů. Polární svaz, jehož basí je tento singulární prostor, protíná nezávislý S_{n-h} v nezvrhlé polárnosti. Buďte $J \equiv [A_1, \dots, A_{n-h+1}, B_{n-h+2}, \dots, B_{n+1}]$ a $J' \equiv [A'_1, \dots, A'_{n-h+1}, B'_{n-h+2}, \dots, B'_{n+1}]$ dva různé autopolární normální jehlany polárnosti h -tého druhu v n -rozměrném prostoru. Případnou změnou označení lze vždy docílití toho, že vrcholy A_i, A'_i ($i = 1, \dots, n - h + 1$) jsou vrcholy autopolárního normálního jehlanu nezvrhlé polárnosti v S_{n-h} . Zbývající body B_j, B'_j ($j = n - h + 2, \dots, n + 1$) jsou singulární, protože leží v S_{h-1} .

Buď $h = n$. Pak je $S_{h-1} = S_{n-1}$ a $S_{n-h} = S_0$. Má tedy každý z obou jehlanů J, J' jediný nesusulární vrchol $A_1, (A'_1)$, kterým tedy prochází n hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů. Podle 2. jsou tím určeny involuce harmonických pólů na ostatních hranách a $J \sim J'$.

Buď $h = n - 1$. Pak je $S_{h-1} = S_{n-2}$ a $S_{n-h} = S_1$. Polární svaz s basí S_{n-2} protíná hrany $A_1A_2, A'_1A'_2$ v nezvrhlé involuci téhož druhu. Prochází tedy vrcholy A_1, A'_1 jedna hrana s nezvrhlou involucí harmonických pólů téhož druhu a $n - 1$ hran s involucí parabolickou. Je tedy podle 2. $J \sim J'$.

Nechť je $1 \leq h < n - 1$. Buď $J''_1 \equiv [A''_1, \dots, A''_{n-h+1}]$ průmět jehlanu $J'_1 \equiv [A'_1, \dots, A'_{n-h+1}]$ ze singulárního prostoru S_{h-1} do prostoru S_{n-h} určeného body $A_1, \dots, A_{n-h+1}$ jehlanu J . Protože druh involuce je při promítání invariantní, je $J''_1 \sim J'_1$. J''_1 je řez autopolárního jehlanu J' prostorem S_{n-h} , je tedy autopolárním jehlanem nezvrhlé polárnosti tohoto prostoru. Je proto $J''_1 \sim J_1 \equiv [A_1, A_2, \dots, A_{n-h+1}]$, t. j. $J'_1 \sim J''_1 \sim J_1$, čili $J'_1 \sim J_1$. Je proto vždy možno příp. změnou označení docílit toho, že na korespondujících hranách $A_1A_i, A'_1A'_i$ ($i = 2, \dots, n - h + 1$)

jsou indukovány nezvrhlé involuce harmonických pólů téhož druhu. Na korespondujících hranách $A_1B_j, A'_1B'_j$ ($j = n - h - 2, \dots, \dots, n + 1$) jsou indukovány parabolické involuce harmonických pólů, protože A_1, A'_1 jsou nesingulární a B_j, B'_j singulární body. Je tedy podle 2. $J \sim J'$.

Věta uvedená na počátku I. dílu (v dalším I.) platí tedy pro všechny polárnosti n -rozměrného prostoru.

II.

1. V rovinné polárnosti přiřadíme straně polárního trojúhelníku, na níž je indukována involuce harmonických pólů: eliptická znaménko $+$, hyperbolická znaménko $-$, parabolická 0 . Straně se všemi singulárními body (0) . Jsou-li dány involuce harmonických pólů indukované na dvou stranách polárního trojúhelníku, které se neprotínají v bodě singulárním, je určen druh involuce indukované na třetí straně podle pravidla:

- a) $++ \rightarrow +, -- \rightarrow +, +- \rightarrow -, -+ \rightarrow -$
- b) $+0 \rightarrow 0, -0 \rightarrow 0,$
- c) $00 \rightarrow (0).$

Důkaz. a) V nezvrhlé rovinné polárnosti existují polární trojúhelníky typu $+++$, $+-$. V druhém případě plyne cyklickou záměnou: $-+-$, $--+$. b) V singulární polárnosti 1. druhu existují polární trojúhelníky $+00, -00$, kde se pouze strany $+0$ nebo -0 neprotínají v singulárním bodě. c) V singulární polárnosti 2. druhu existuje polární trojúhelník typu $00(0)$, kde se pouze strany 00 neprotínají v singulárním bodě.

2. Autopolárným normálním jehlanem, na jehož hranách procházejících jedním jeho vrcholem neležícím v singulárním prostoru jsou dány involuce harmonických pólů, je polárnost určena. Druh involuce harmonických pólů lze na každé z těchto hran voliti libovolně.

Důkaz. Buď $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ autopolární normální jehlan polárnosti n -rozměrného prostoru. Protože je prostor singulárních bodů nejvýše $(n - 1)$ -rozměrný, neleží v něm alespoň jeden vrchol jehlanu. Nechť je to vrchol A_1 . Na hranách A_1A_i ($i = 2, \dots, n + 1$) budte dány involuce harmonických pólů. Protože bod A_1 není singulární, nemůže žádná hrana obsahovat pouze singulární body.

a) Nechť není na žádné z hran A_1A_i indukována involuce parabolická. K libovolné nadrovině S_{n-1} , která neprochází žádným vrcholem jehlanu, sestrojíme pól takto: K bodům $P_k \equiv [S_{n-1} \times \times (A_1A_k)]$ sestrojíme harmonické póly P'_k na hranách A_1A_k . Protože je $P_k \equiv A_1 \equiv A_k$, je také $P'_k \equiv A_1 \equiv A_k$ a nadroviny $S_{n-1}^{(k)} \equiv [A_2, \dots, A_{k-1}, P'_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1}]$, ($k = 2, \dots, n + 1$)

protínají nadrovinu $(A_2, \dots, A_{n+1})$ v n prostorech $(n-2)$ -rozměrných $(A_2, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{n+1})$, které nemají společného bodu. Jsou tedy polární nadroviny $S_{n-1}^{(k)}$ pólů P_k , ležících v S_{n-1} , nezávislé a protínají se v jediném bodě P , který je pólem nadroviny S_{n-1} . Prochází-li nadrovina S_{n-1} k vrcholy ($k = 1, \dots, n$) jehlanu, je pro tyto body $P_k \equiv A_k, S_{n-1}^{(k)} \equiv (A_2, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1})$, a pól leží v $(n-k)$ -rozměrné stěně jehlanu, určené $n-k+1$ vrcholy, jimiž S_{n-1} neprochází. Prochází-li S_{n-1} bodem A_1 , sestrojíme podle I,2 involuce harmonických pólů na hranách procházejících vrcholem, který v S_{n-1} neleží.

b) Jsou-li na $n-l+1$ hranách A_1A_i , ($i = l+1, \dots, n+1$) indukovány parabolické involuce harmonických pólů, je prostor $S_{n-l} \equiv [A_{l+1}, \dots, A_{n+1}]$ singulární a každá polární nadrovina jím prochází. S_{n-1} tedy protne na S_{n-l} nezávislý prostor S_{l-1} ($A_1, \dots, A_l$) v prostoru S_{l-2} . V nezvrhlé polárnosti v S_{l-1} , určené autopolárním normálním jehlanem $[A_1, \dots, A_l]$ a involucemi harmonických pólů na hranách A_1A_i ($i = 2, \dots, l$), sestrojíme k S_{l-2} pól P podle předešlého odstavce. Pak je prostor $[P, S_{n-l}]$ sdružen k polární nadrovině S_{n-1} v polárném svazu s basí S_{n-2} . Duálně sestrojíme k danému pólu polární nadrovinu.

c) Tři libovolné vrcholy A_i, A_j, A_k ($i \neq j \neq k, i, j, k = 2, \dots, n+1$) jehlanu $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ určují polární trojúhelník $A_iA_jA_k$ polárnosti indukované v jeho stěně těmito vrcholy určené. Involuce harmonických pólů indukované na stranách A_iA_j, A_iA_k, A_jA_k trojúhelníků $A_iA_jA_k$ určíme podle pravidla 1. z trojúhelníků $A_1A_iA_j, A_1A_iA_k, A_1A_jA_k$. V každém z těchto tří trojúhelníků jsou na dvou stranách $A_1A_i, A_1A_j; A_1A_i, A_1A_k; A_1A_j, A_1A_k$, které se protínají v nesingulárním bodě A_1 involuce harmonických pólů dány. Mohou nyní nastat tyto případy: Na hranách A_1A_i, A_1A_j, A_1A_k jehlanu jsou dány involuce harmonických pólů α) neparabolické a 1. všechny tři téhož druhu, pak je trojúhelník $\Delta \equiv A_iA_jA_k$ typu $+++$, 2. dvě téhož druhu a jedna druhu jiného, pak je Δ typu $+--$, β) jedna parabolická a 1. dvě neparabolické stejného druhu, pak je Δ typu $00+$, dvě neparabolické různého druhu, pak je Δ typu $00-$, γ) dvě parabolické a jedna neparabolická, pak je Δ typu $(0)00$, δ) všechny tři parabolické, pak je Δ typu $(0)(0)(0)$.²⁾

3. Autopolární normální jehlan polárnosti n -rozměrného prostoru má nejvýše tři různé druhy vrcholů, a to: k ($0 \leq k \leq n+1$) vrcholů, jimiž prochází $k-1$ hran s indukovanou eliptickou, l ($0 \leq l \leq n+1$) hran s indukovanou hyperbolickou a $n-(k+l-1)$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů;

²⁾ Trojúhelník autopolárního typu $(0)(0)(0)$ existuje. Je určen třemi různými body singulárního prostoru, které neleží v téže přímce.

l vrcholů, jimiž prochází $l - 1$ hran s indukovanou eliptickou, k hran s indukovanou hyperbolickou a $n - (k + l - 1)$ s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l - 1)$ vrcholů, jimiž prochází $k + l$ hran s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů a $n - (k + l)$ hran, jejichž všechny body jsou singulární.

Důkaz.³⁾ Vhodnou volbou označení lze vždy docílit toho, že bod 1 není singulární, a že na prvních $k - 1$ hranách $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, k)$ jsou indukovány eliptické, na dalších l hranách $(1, k + 1), \dots, (1, k + l)$ hyperbolické, a na zbývajících $n - (k + l - 1)$ hranách parabolické involuce harmonických pólů. Schema hran procházejících vrcholem 1 můžeme tedy psát takto:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & \dots, & k, & k+1, & \dots, & k+l, & k+l+1, & \dots, & n+1 \\ 1. & + & & + & - & & - & 0 & & 0 & \end{array}$$

Znaménko libovolné hrany $(s, i) \equiv (i, s)$, $[i \equiv s]$, určíme z trojúhelníku $1is$, jehož dvě strany $(1, i)$ a $(1, s)$ se protínají v nesingulárním bodě 1 a na nichž jsou involuce harmonických pólů dány, podle pravidla 1., t. j. kombinujeme-li podle tohoto pravidla znaménko stojící pod s se znaménkem stojícím pod i . Píšeme-li znaménka hran procházejících r -tým vrcholem do r -tého řádku, je prvé znaménko shodné se znaménkem stojícím v prvním řádku pod r , protože $zn(s, i) = zn(i, s)$. Další znaménka pak obdržíme kombinováním tohoto prvního znaménka se znaménkem napsaným pod číslem příslušného vrcholu v prvním řádku. (s, s) nedává znaménko žádné.⁴⁾ Pro r -tý řádek tedy obdržíme pro $2 \leq r \leq k$: prvé znaménko $+$, $(k - 2)$ -krát $+$ $\rightarrow +$, l -krát $+$ $\rightarrow -$, $n + 1$ —

³⁾ Vrcholy A_i budeme v dalším pro jednoduchost označovat pouze jejich indexy.

⁴⁾ Schema všech hran jehlanu je pak toto:

	1	2	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	...	$k+l-1$	$k+l$	$k+l+1$	$k+l+2$	...	n	$n+1$
1	.	+		+	+	-	-		-	-	0	0		0	0
2	+	.		+	+	-	-		-	-	0	0		0	0
...															
$k-1$	+	+		.	+	-	-		-	-	0	0		0	0
k	+	+		+	.	-	-		-	-	0	0		0	0
$k+1$	-	-		-	-	.	+		+	+	0	0		0	0
$k+2$	-	-		-	-	+	.		+	+	0	0		0	0
...															
$k+l-1$	-	-		-	-	+	+		.	+	0	0		0	0
$k+l$	-	-		-	-	+	+		+	.	0	0		0	0
$k+l+1$	0	0		0	0	0	0		0	0	.	(0)		(0)	(0)
$k+l+2$	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	.		(0)	(0)
...															
n	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	(0)		(0)	(0)
$n+1$	0	0		0	0	0	0		0	0	(0)	(0)		(0)	(0)

V průsečíku i -tého řádku a s -tého sloupce je znaménko hrany $(i, s) \equiv (s, i)$.

$-(k-l) = n - (k+l-1)$ -krát $+ 0 \rightarrow 0$. Pro $k+1 \leq r \leq k+l$: prvé znaménko $-$, $(k-l)$ -krát $- + \rightarrow -$, $(l-1)$ -krát $- \rightarrow +$ a $n - (k+l-1)$ -krát $- 0 \rightarrow 0$. Pro $k+l+1 \leq r \leq n+1$: prvé znaménko 0 , $(k+l-1)$ -krát $0 + \rightarrow 0$, příp. $0 \rightarrow 0$, $n+1 - (k+l) - 1 = n - (k+l)$ -krát $0 0 \rightarrow (0)$. Tím je tvrzení dokázáno.

3. Buď $n+1 = k+l$, t. j. $n - (k+l-1) = 0$, tedy případ polárnosti nesingulární. Autopolární normální jehly různých druhů obdržíme pouze pro $l=0$, nebo při $l \neq 0$ pro $k \leq l$, t. j. $k \leq n-k+1$, čili $k \leq \frac{1}{2}(n+1)$. Tedy pro n sudé: 1 pro $l=0$, $\frac{1}{2}n$ pro $l \neq 0$, celkem $\frac{1}{2}n+1$. Pro n liché: 1 pro $l=0$, $\frac{1}{2}(n+1)$ pro $l \neq 0$, celkem $\frac{1}{2}(n+1)+1$.

Buď $n+1 > k+l$, t. j. $n - (k+l-1) > 0$, tedy případ polárnosti zvrhlé. Položme $k+l=r$, kde je $r=1, \dots, n$. Různé autopolární normální jehly obdržíme opět pro $l=0$, tedy pro $k=r$, nebo při $l > 0$ pro $k \leq l$, t. j. $k \leq \frac{1}{2}r$. Tedy pro všechna r od 1 do n a pro r lichá $\frac{1}{2}(r-1)+1$, pro r sudá $\frac{1}{2}r+1$. Je proto počet různých autopolárních normálních jehlanů singulárních polárností pro n sudé: $1+2+(2+3+\dots+\frac{1}{2}n)+\frac{1}{2}(n+2) = \frac{1}{4}(n+6)(n-2)+3$, pro n lichá: $1+2+(2+3+\dots+\frac{1}{2}(n+1)) = \frac{1}{4}(n+5)(n-1)+1$.

4. Buďte $[A_1, \dots, A_{n+1}]$, $[C_1, \dots, C_{n+1}]$ autopolární normální jehly dvou různých polárností téhož nebo dvou různých n -rozměrných prostorů. Na n hranách $A_{n+1}A_i$ ($i=1, \dots, n$) prvního jehlanu zvolme po dvou libovolných bodech B_i, B'_i , na n hranách $C_{n+1}C_i$ ($i=1, \dots, n$) druhého jehlanu po dvou libovolných bodech D_i, D'_i tak, aby $A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i$, $C_{n+1} \neq D_i \neq D'_i$. Se-strojíme-li $n-1$ bodů $R_i \equiv (B_i, B_{i+1}) \times (B'_i, B'_{i+1})$ a $n-1$ bodů $T_i \equiv (D_i, D_{i+1}) \times (D'_i, D'_{i+1})$, ($i=1, \dots, n-1$), platí: Nezvrlá kolineace K , která přiřazuje $n+2$ bodům A_{n+1}, B_1, B'_1, R_i body C_{n+1}, C_1, C'_1, T_i , přiřazuje bodům B_i, B'_i body D_i, D'_i .

Důkaz. Protože je $A_i \neq A_{i+1}$, $A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i$, platí: $R_i \neq A_{n+1} \neq B_i \neq B'_i \neq B_{i+1} \neq B'_{i+1}$ a je tedy $S_2 \equiv (A_{n+1}, A_n, A_{n-1}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1})$. Bod R_{n-2} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-1}, A_{n-2})$ na přímce (B'_{n-1}, B'_{n-2}) , neleží však v S_2 . Je tedy $S_3 \equiv (A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, A_{n-2}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1}, R_{n-2})$. Bod R_{n-3} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-2}, A_{n-3})$ na přímce (B'_{n-2}, B'_{n-3}) , neleží však v S_3 , je tedy $S_4 \equiv (A_{n+1}, A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1}, R_{n-2}, R_{n-3})$. Obecně bod R_{n-i} leží v rovině $(A_{n+1}, A_{n-(i-1)}, A_{n-i})$ na přímce $(B'_{n-(i-1)}, B'_{n-i})$, neleží však v S_i , je tedy $S_{i+1} \equiv (A_{n+1}, A_n, \dots, A_{n-i}) \equiv (A_{n+1}, B'_n, R_{n-1}, \dots, R_{n-i})$. Protíná tedy daná přímka (R_1, B_1) nadrovinu S_{n-1} v bodě B_2 , přímka (R_2, B_2) prostor S_{n-2} v bodě B_3 , až konečně přímka (R_{n-2}, B_{n-2}) rovinu S_2 v bodě B_{n-1} a přímka (R_{n-1}, B_{n-1}) přímku $(A_{n+1}, A_n) \equiv (A_{n+1}, B'_n)$ v bodě B_n . Pak je $B'_{n-1} \equiv (B'_n, R_{n-1}) \times$

$\times (A_{n+1}, B_{n-1}), B'_{n-2} \equiv (B'_{n-1}, R_{n-2}) \times (A_{n+1}, B_{n-2})$, až $B'_1 \equiv (B'_2, R_1) \times (A_{n+1}, B_1)$. Totéž platí i pro druhý jehlan, zaměníme-li pouze A_i za C_i , B_i za D_i a R_i za T_i . Z důkazu je patrné, že z $n+2$ bodů A_{n+1}, B_1, B'_n, R_i , příp. C_{n+1}, D_1, D'_n, T_i , neleží žádných $n+1$ v téže nadrovině. Je proto K nezvrhlá.

5. Jsou-li jehlany $[A_1, \dots, A_{n+1}], [C_1, \dots, C_{n+1}]$ téhož druhu, je podle 2. možno vhodnou volbou označení docílit toho, že A_{n+1}, C_{n+1} jsou nesingulární vrcholy téhož druhu, a že na korespondujících hranách $A_{n+1}A_i, C_{n+1}C_i$ ($i = 1, \dots, n$) jsou indukovány involuce harmonických pólů téhož druhu. Za body B_i, B'_i , příp. D_i, D'_i volme na hranách s indukovanou eliptickou involucí harmonických pólů dva jednoznačně určené reálné harmonické póly, které oddělují harmonicky bod A_{n+1} , příp. C_{n+1} s jeho harmonickým pólem indukovaným na této hraně, na hranách s indukovanou hyperbolicou involucí harmonických pólů samodružné body této involuce a na hranách s indukovanou parabolickou involucí harmonických pólů bod singulární a libovolný bod této hrany rozdílný od bodu singulárního a bodu A_{n+1} (C_{n+1}). Ve všech případech je splněna podmínka $A_{n+1} \mp B_i \mp B'_i, C_{n+1} \mp D_i \mp D'_i$. Převádí tedy kolineace K jehlan $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ v jehlan $[C_1, \dots, C_{n+1}]$ a involuce harmonických pólů na hranách $A_{n+1}A_i$ prvního jehlanu v involuce harmonických pólů na hranách $C_{n+1}C_i$ jehlanu druhého.

6. V každé polárnosti existují autopolární normální jehlany; podle věty I všechny téhož druhu. Podle II,2 existuje ke každému druhu autopolárního normálního jehlanu určitého druhu určitá polárnost. Podle II,5 jsou polárnosti s autopolárními normálními jehlany téhož druhu kolineární. Protože druh involuce je invariant reálné kolineace, nemohou být polárnosti s autopolárními normálními jehlany různého druhu kolineární. Uvádají tedy čísla, uvedená v II,3 pro počet možných druhů autopolárních normálních jehlanů, počet projektivně různých polárností n -rozměrného prostoru pro reálné kolineace.

Protože incidenční nadplocha každé polárnosti je nadkvadrík, a protože každá nadkvadrík určuje jistou polárnost prostoru k ní příslušného, je uvedeným také dána projektivní klasifikace nadkvadrik pro reálné kolineace.

*

Sur les simplexes autopolaires d'une polarité de l'espace à n dimensions.

(Résumé de l'article précédent.)

Dans la première partie de l'article l'auteur démontre le théorème suivant: Les pyramides normales (simplexes) autopolaires d'une même polarité de l'espace à n dimensions sont de la même

espèce, c. à d., les arêtes de deux différentes pyramides normales autopolaires d'une même polarité de l'espace à n dimensions peuvent toujours être mises en correspondance d'une telle manière qu'à chaque arête d'une des deux pyramides correspond une seule arête de l'autre, de sorte qu'aux arêtes passant par un sommet d'une des pyramides correspondent les arêtes passant par un sommet de l'autre et que les involutions des pôles harmoniques engendrées sur les arêtes correspondantes des deux pyramides soient de la même espèce.

Dans la deuxième partie de l'article l'auteur démontre par voie synthétique le théorème suivant: Une pyramide normale autopolaire d'une polarité de l'espace à n dimensions possède au plus trois espèces différentes de sommets, à savoir: k ($0 \leq k \leq n+1$) sommets par lesquels passent $(k-1)$ arêtes contenant une involution elliptique, l ($0 \leq l \leq n+1$) arêtes contenant une involution hyperbolique et $n-(k+l-1)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques; l sommets par lesquels passent $(l-1)$ arêtes contenant une involution elliptique, k arêtes contenant une involution hyperbolique et $n-(k+l-1)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques et $n-(k+l-1)$ sommets par lesquels passent $(k+l)$ arêtes contenant une involution parabolique de pôles harmoniques et $n-(k+l)$ arêtes dont tous les points sont singuliers.

A l'aide de ces deux théorèmes et de la collinéation par laquelle se correspondent mutuellement deux pyramides normales autopolaires données de la même espèce, l'auteur effectue la classification projective des polarités, et, par suite, aussi celle des quadratiques de l'espace à n dimensions par rapport aux collinéations réelles.

On the extension of the Jordan-Kronecker's „Principle of reduction“ for inseparable polynomials.

Štefan Schwarz, Bratislava.

(Received January 15th, 1947.)

In this paper we shall prove two theorems concerning inseparable polynomials with coefficients in a given field P^1 .

Theorem 1. *Let P be a commutative field of characteristic p , which is not perfect. Let $f(x)$ and $g(x)$ be two eventually inseparable irreducible polynomials with coefficients in P of degree m and n respectively. Let α, β be the roots of $f(x) = 0$ and $g(x) = 0$ respectively. Let*

$$f(x) = f_1(x; \beta)^{p^{e_1}} \cdot f_2(x; \beta)^{p^{e_2}} \dots f_r(x; \beta)^{p^{e_r}}, \quad (1)$$

$$g(x) = g_1(x; \alpha)^{p^{e'_1}} \cdot g_2(x; \alpha)^{p^{e'_2}} \dots g_s(x; \alpha)^{p^{e'_s}}, \quad (2)$$

be the decompositions of $f(x)$ and $g(x)$ into irreducible factors in $P_2 = P(\beta)$ and $P_1 = P(\alpha)$ respectively. Let the degrees of $f_i(x; \beta)$ and $g_i(x; \alpha)$ be m_i ($i = 1, 2, \dots, r$) and n_i ($i = 1, 2, \dots, s$) respectively so that the relations

$$m_1 p^{e_1} + m_2 p^{e_2} + \dots + m_r p^{e_r} = m,$$

$$n_1 p^{e'_1} + n_2 p^{e'_2} + \dots + n_s p^{e'_s} = n,$$

are satisfied.

Under these suppositions the following relations hold:

i) it is $r = s$,

ii) by a suitable arrangement of the factors we have $\frac{m_i}{n_i} = \frac{m}{n}$

(for every i),

¹⁾ Following a suggestion of prof. Dr. Vl. Kořinek, I extend here the method applied in my paper „A hypercomplex proof of the Jordan-Kronecker's „Principle of reduction“, Časopis pro pěst. mat. fys., 71 (1946), p. 17—20, to inseparable polynomials.

For another proof of these theorems see: Fr. K. Schmidt, Sitzungsberichte d. Heidelb. Akad. d. W., math. naturw. Klasse, 5. Abh., 1925.

iii) by the same arrangement of the factors we have $e_i = e'_i$ (for every i).

Proof. We form the hypercomplex system over $\mathbf{P}$

$$\mathfrak{S} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2.$$

We have

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\alpha + \dots + \mathbf{P}_2\alpha^{m-1} \cong \mathbf{P}_2[x] \mid (f(x)) = \\ &= \mathbf{P}_2[x] \mid (f_1(x; \beta))^{p^{e_1}} \dots (f_r(x; \beta))^{p^{e_r}}. \end{aligned}$$

On the other hand we have the analogous decomposition

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\beta + \dots + \mathbf{P}_1\beta^{n-1} \cong \mathbf{P}_1[x] \mid (g(x)) = \\ &= \mathbf{P}_1[x] \mid (g_1(x; \alpha))^{p^{e'_1}} \dots (g_s(x; \alpha))^{p^{e'_s}}. \end{aligned}$$

The commutative ring $\mathfrak{S}$ is therefore expressible as a direct sum of primary rings²⁾

$$\mathfrak{S} = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_3 \oplus \dots \oplus \Phi_r, \quad (3)$$

where

$$\Phi_i \cong \mathbf{P}_2[x] \mid (f_i(x; \beta))^{p^{e_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Similarly the second decomposition in primary rings has the form

$$\mathfrak{S} = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3 \oplus \dots \oplus \Gamma_s, \quad (4)$$

where

$$\Gamma_i \cong \mathbf{P}_1[x] \mid (g_i(x; \alpha))^{p^{e'_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Every primary commutative ring is irreducible, i. e. cannot be decomposed in the direct sum of two subrings. Further, it is well-known: The decomposition of a ring with a unity in two-sided direct irreducible components is (apart from the order of its components) uniquely determined. Comparing the decompositions (3) and (4) we have therefore:

- i) $r = s$,
- ii) every $\Phi_i = \Gamma_i$ if the Γ_i are properly numbered.

It follows from the last result

$$\mathbf{P}_2[x] \mid (f_i(x; \beta))^{p^{e_i}} \cong \mathbf{P}_1[x] \mid (g_i(x; \alpha))^{p^{e'_i}}. \quad (5)$$

The ring $\mathbf{O}_i = \mathbf{P}(\beta)[x] \mid (f_i(x; \beta))^{p^{e_i}}$ is an algebra of order $nm_i p^{e_i}$ over $\mathbf{P}$. The unique prime ideal of the ring $\mathbf{O}_i$ is the ideal $\pi_i = (f_i(x; \beta))$. The exponent of π_i is p^{e_i} , i. e. the integer p^{e_i} is the least integer e for which π_i^e is the zero ideal (0): $\pi_i^{p^{e_i}} = (0)$. The ideal π_i is the radical of $\mathbf{O}_i$.

Similarly the ring $\mathbf{O}'_i = \mathbf{P}(\alpha)[x] \mid (g_i(x; \alpha))^{p^{e'_i}}$ is an algebra

²⁾ See e. g.: Van der Waerden, *Moderne Algebra II*, 1940, p. 42 and 151.

over $\mathbf{P}$ of order $mn_i p^{e_i}$. The ideal $\pi'_i = (g_i(x; \alpha))$ is his unique prime ideal and at the same time his radical. The exponent of π'_i is p^{e_i} .

The rings $\mathbf{O}_i$, $\mathbf{O}'_i$ are isomorphic (the isomorphism leaving $\mathbf{P}$ invariant). We have therefore

$$\text{i) } nm_i p^{e_i} = mn_i p^{e_i},$$

ii) since it is obvious that the isomorphism carries elements of the radical of $\mathbf{O}_i$ into elements of the radical of $\mathbf{O}'_i$, we have also $p^{e_i} = p^{e'_i}$, thus $e_i = e'_i$ and $nm_i = mn_i$, q. e. d.

Theorem 2. *Let the suppositions of Theorem 1 be satisfied. Let us write $g_i(x; \alpha)$ in the form of an integral function in α of the lowest degree. Then the greatest common divisor of $f(x)$ and $g_i(\beta; x)$ is*

$$(f(x), g_i(\beta; x)) = f_i(x; \beta). \quad (6)$$

Proof. Let us transform the right side of the isomorphism

$$\mathbf{P}_2[x] \mid (f_i(x; \beta))^{p^{e_i}} \cong \mathbf{P}_1[x] \mid (g_i(x; \alpha))^{p^{e_i}}.$$

Applying the second theorem of isomorphism $((g(x))$ is a submodul of the ideal $(f(\xi), g_i(x; \xi)^{p^{e_i}})$ of the ring $\mathbf{P}[x, \xi]$), we have

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1[x] \mid (g_i(x; \alpha))^{p^{e_i}} &\cong \mathbf{P}[x, \xi] \mid (f(\xi), g_i(x; \xi)^{p^{e_i}}) \cong \\ &\cong \mathbf{P}[x, \xi] \mid (g(x)) \mid (f(\xi), g_i(x; \xi)^{p^{e_i}}) \mid (g(x)) \cong \mathbf{P}_2[\xi] \mid (f(\xi), g_i(\beta; \xi)^{p^{e_i}}) \cong \\ &\cong \mathbf{P}_2[x] \mid (f(x), g_i(\beta; x)^{p^{e_i}}). \end{aligned}$$

Therefore

$$\mathbf{P}_2[x] \mid (f_i(x; \beta))^{p^{e_i}} \cong \mathbf{P}_2[x] \mid (f(x), g_i(\beta; x)^{p^{e_i}}).$$

Thus we have

$$\begin{aligned} f_i(x; \beta)^{p^{e_i}} &= (f(x), g_i(\beta; x)^{p^{e_i}}), \\ f_i(x; \beta) &= (f(x), g_i(\beta; x)), \end{aligned}$$

q. e. d.

*

O rozšíření Jordan-Kroneckerovho „Principu redukcie“ na inseparabilné polynomy.

(Obsah predchádzajúceho článku.)

Obsahom predchádzajúcej poznámky je dôkaz týchto viet:

Nech $\mathbf{P}$ je nedokonale teleso charakteristiky p . Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dva ireducibilné, po prípade inseparabilné, polynomy z telesa $\mathbf{P}$ stupňov m resp. n . Nech α, β sú korene rovnice $f(x) = 0$ resp. $g(x) = 0$. Nech rozklady $f(x)$ a $g(x)$ v ireducibilných súčini-

telov v telese $P(\beta)$ resp. $P(\alpha)$ sú dané vzťahmi (1) a (2). Stupne polynomov $f_i(x; \beta)$, $g_i(x; \alpha)$ nech sú m_i resp. n_i . Potom platí:

1. $r = s$,
 2. pri vhodnom usporiadaní faktorov $e_i = e'_i$, $mn_i = nm_i$,
 3. ak píšeme $g_i(x; \alpha)$ ako celistvú funkciu v α najnižšieho možného stupňa je polynom $f_i(x; \beta)$ daný vzťahom (6).
-

Théorie photométrique de la pénombre pendant les éclipses de Lune.

F. Link, Praha.

(Reçu le 17 avril 1947.)

La théorie photométrique de la pénombre permet de mettre en évidence un excès de lumière au voisinage de la limite de l'ombre. L'auteur l'explique par la luminescence du sol lunaire sous l'effet des rayons ultraviolets émis par l'atmosphère solaire. Dans la lumière globale de la Lune non éclipsée la proportion de la composante luminescente pourrait atteindre 10%. On discute ensuite quelques conséquences de cette hypothèse de travail.

1. Introduction. — Nous avons développé il y a une dizaine d'années la théorie photométrique des éclipses de Lune concernant uniquement l'ombre terrestre projetée sur la Lune [1]. Dans le présent travail nous nous proposons de donner quelques remarques concernant la théorie de la pénombre négligée jusqu'à présent.

Un observateur situé sur la surface lunaire dans la pénombre verrait une éclipse partielle de Soleil par la Terre. Nous allons d'abord envisager une théorie simplifiée en supposant le disque solaire éclipsé par la Terre circulaire et dépourvue de l'atmosphère ou d'autre milieu absorbant.

2. Théorie simplifiée de la pénombre. — Un observateur placé sur la Lune à la distance γ du centre de l'ombre voit une éclipse partielle de Soleil. Du point de vue photométrique c'est en somme le cas d'une variable à éclipses dont la théorie est assez connue pour permettre un calcul rapide de la densité de la pénombre.

Posons l'intensité du Soleil non éclipsé égale à 1. Pendant une certaine phase de l'éclipse l'intensité du Soleil sera diminuée de α et cette perte de lumière est une fonction de la distance des centres du Soleil et de la Lune γ_1 ,¹⁾ du rapport de leurs rayons $k = R_{\odot}/\pi r$ et de la répartition de la brillance b sur le disque solaire. Pour cette dernière on admet en général la loi suivante

¹⁾ On a $\gamma_1 = 0,998\gamma$. Dans la suite nous poserons $\gamma_1 = \gamma$. La même remarque est valable pour $R_{\odot}$ vu de la Terre et de la Lune.

$$b(R) = 1 - \kappa + \frac{\kappa}{R_{\odot}} \sqrt{R_{\odot}^2 - R^2}$$

où κ est une constante — fonction de la longueur d'onde. Cette constante peut être déterminée par des mesures directes sauf peut être au voisinage immédiat du bord solaire.

Dans la théorie des variables à éclipses on pose généralement

$$\gamma = \pi_{\odot} [1 + k p(\alpha, k, \kappa)] \quad (2)$$

où la fonction p est donnée par différentes tables notamment par celles de Zessewitsch [2, 3]. La densité de la pénombre sera alors

$$D = -\log_{10} (1 - \alpha) \quad (3)$$

à la distance définie par (2).

Le rapport des rayons k varie assez peu entre 0,25 et 0,30, autour de la valeur moyenne $k = 0,28$. Son influence sur la fonction p ne dépasse pas 0,009 pour une variation de k entre 0,25 et 0,30 ce qui donne une variation de la distance γ égale à 0,16'. Si nous adoptons alors la valeur moyenne $k = 0,28$, l'erreur commise sur γ sera toujours inférieure à 0,1' ce qui est parfaitement tolérable. La formule (2) deviendra donc

$$\gamma = \pi_{\odot} + R_{\odot} p(\alpha, 0,28, \kappa). \quad (4)$$

On peut mesurer les distances du bord de l'ombre géométrique²⁾ et nous aurons simplement

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma - \pi_{\odot} - \pi_{\odot} + R_{\odot} = R_{\odot} [1 + p(\alpha, 0,28, \kappa)] - \pi_{\odot} = \\ &= \pi_{\odot} \{109,05 [1 + p(\alpha, 0,28, \kappa)] - 1\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Tableau I.

$D \backslash \kappa$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,05	26,10	25,95	25,74	25,50	25,24	24,91
0,10	20,59	20,49	20,37	20,25	20,10	19,94
0,30	15,10	15,13	15,16	15,20	15,24	15,31
0,40	12,62	12,67	12,78	12,89	13,00	13,15
0,52	10,04	10,18	10,34	10,53	10,70	10,94
0,70	7,38	7,57	7,76	7,99	8,26	8,50
0,82	5,99	6,14	6,36	6,60	6,90	7,22
1,00	4,42	4,63	4,83	5,07	5,37	5,73
1,10	3,77	3,95	4,14	4,37	4,69	5,06
1,22	3,06	3,23	3,44	3,65	3,94	4,31
1,40	2,29	2,44	2,57	2,78	3,07	3,40
1,52	1,85	1,97	2,14	2,30	2,57	2,95

²⁾ $= \pi_{\odot} + \pi_{\odot} - R_{\odot}$.

On voit que la densité de la pénombre, étant une fonction de la distance au bord de l'ombre géométrique, est indépendante de la parallaxe lunaire.³⁾ La même propriété possède aussi approximativement l'ombre au voisinage du son bord comme nous l'avons déjà trouvé auparavant [1].

Dans le tableau suivant sont données quelques valeurs de γ' calculées pour la parallaxe moyenne $\pi_{\odot} = 8,8''$. Etant donné la précision des bases de calcul, l'erreur à craindre atteint quelques unités de la dernière décimale.

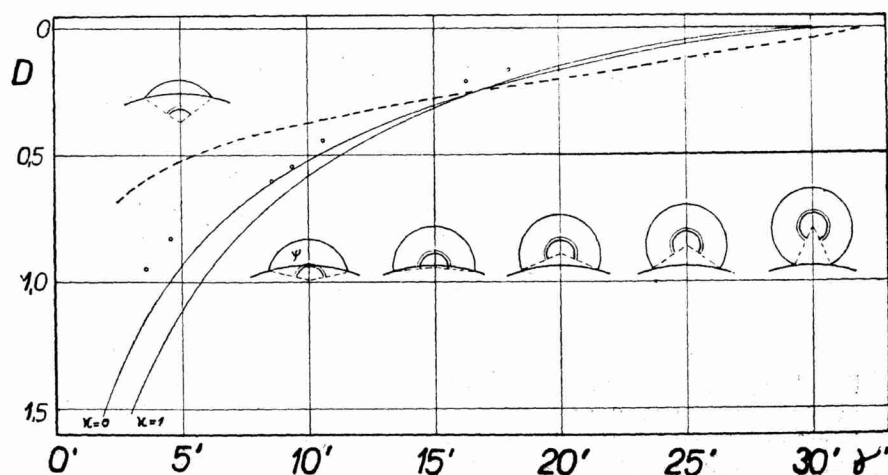


Fig. 1. Densité de la pénombre d'après la théorie simplifiée. Les positions relatives du Soleil et de la Terre pour les multiples de 5' en distances au bord de l'ombre. Petits ronds: Éclipse du 14 septembre 1932 en rouge et en vert d'après Rougier comme exemple d'une éclipse claire. Courbe interrompue: les densités des radiations excitatrices = $-\log_{10} \varepsilon$.

Sur la fig. 1 sont représentées les courbes qui donnent les chiffres ci-dessus. On y voit clairement l'influence de la longueur d'onde qui change de signe au voisinage de $\gamma' = 16'$. Là, en effet, le disque solaire est bisecté par la Terre et l'influence de la répartition de la brillance devient sensiblement nulle.

3. Influence de l'atmosphère terrestre. — Supposons, comme il est d'ailleurs tout à fait naturel, que les rayons solaires subissent une absorption dans l'atmosphère terrestre. Cette perte sera en première approximation la fonction de la distance au centre de la Terre. Pour pouvoir l'étudier nous sommes obligés de calculer l'intensité lumineuse d_i d'un anneau élémentaire découpé sur le Soleil par les

³⁾ Dans les limites d'approximation concernant la valeur de k .

rayons r et $r + dr$ (voir la fig. 2). Nous avons trouvé dans un travail antérieur [1]:

$$\frac{di}{dr} = (1 - \kappa) \varphi_0 r + \frac{\kappa r}{R_\odot} \sqrt{2r\gamma} I_m \quad (6)$$

avec

$$I_m = \frac{1}{8} \pi m \sqrt{2} (1 + \frac{1}{3} m + \dots), \quad (7)$$

$$m = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0 = \frac{R_\odot^2 - (r - \gamma)^2}{r\gamma}, \quad \pi = 3,1416\dots$$

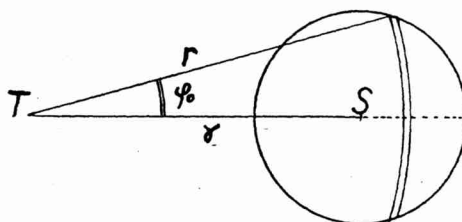


Fig. 2. L'élément de la surface solaire.

Dans notre cas on aura toujours $r > 54'$ ce qui donne pour l'angle φ_0 la limite supérieure $\varphi_0 < 17^\circ$ environ. On peut donc écrire avec une erreur ne dépassant pas 1,5% $\sin \varphi_0 \doteq \varphi_0$ et négliger avec la même approximation le second terme dans l'expression pour I_m . Nous aurons alors les formules suivantes simplifiées

$$di = (P - kQ) dr \quad (8)$$

avec les quantités auxiliaires

$$P = \sqrt{\frac{r}{\gamma} \sqrt{R_\odot^2 - (r - \gamma)^2}} \quad (9)$$

et

$$Q = \sqrt{\frac{r}{\gamma} \sqrt{R_\odot^2 - (r - \gamma)^2}} \left(1 - \frac{\pi}{4R_\odot} \sqrt{R_\odot^2 - (r - \gamma)^2} \right)$$

contenues dans le tableau suivant.

L'extrait du tableau publié ici a été calculé par M. Fr. Hřebík, membre de la Section de calculs de la Société astronomique tchécoslovaque à Prague. En vue d'applications ultérieures ce tableau a été étendu pour les valeurs de $r < 54'$. Toutefois l'erreur qui en résulte ne dépasse pas 0,1 en P et en Q . Pour les $\gamma < 46'$ on trouve le tableau analogue dans [1].

Tableau II.

$\begin{array}{c} \gamma \\ r-\gamma \end{array}$	46'	50'	54'	58'	62'	66'	68'
'	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>	<i>P</i> <i>Q</i>
—15	4,6 3,3	4,6 3,4	4,7 3,4	4,8 3,5	4,8 3,5	4,9 3,6	4,9 3,6
—14	6,5 4,0	6,6 4,1	6,7 4,1	6,7 4,2	6,8 4,2	6,9 4,3	6,9 4,3
—13	7,9 4,2	8,0 4,3	8,1 4,4	8,2 4,4	8,3 4,4	8,4 4,5	8,4 4,5
—12	9,1 4,4	9,2 4,4	9,3 4,5	9,4 4,5	9,5 4,6	9,6 4,6	9,6 4,6
—11	10,1 4,3	10,3 4,3	10,4 4,4	10,5 4,4	10,5 4,4	10,6 4,5	10,7 4,5
—10	11,0 4,3	11,2 4,3	11,3 4,4	11,4 4,4	11,4 4,5	11,5 4,5	11,6 4,5
—9	11,9 4,2	12,0 4,2	12,1 4,2	12,1 4,4	12,2 4,3	12,3 4,3	12,3 4,3
—8	12,6 4,0	12,7 4,1	12,8 4,1	12,9 4,1	12,9 4,1	13,0 4,2	13,0 4,2
—7	13,3 3,9	13,3 3,9	13,4 3,9	13,5 4,0	13,6 4,0	13,6 4,0	13,6 4,0
—6	13,8 3,8	13,9 3,8	14,0 3,8	14,0 3,8	14,1 3,8	14,1 3,8	14,2 3,9
—5	14,3 3,6	14,4 3,7	14,5 3,7	14,5 3,7	14,6 3,7	14,6 3,7	14,6 3,7
—4	14,8 3,5	14,8 3,6	14,9 3,6	14,9 3,6	15,0 3,6	15,0 3,6	15,0 3,6
—3	15,2 3,3	15,2 3,5	15,3 3,5	15,3 3,5	15,3 3,5	15,4 3,5	15,4 3,5
—2	15,2 3,4	15,6 3,4	15,6 3,4	15,6 3,4	15,6 3,4	15,6 3,5	15,6 3,5
—1	15,8 3,4	15,8 3,4	15,8 3,4	15,8 3,4	15,8 3,4	15,8 3,4	15,9 3,4
0	16,0 3,4	16,0 3,4	16,0 3,4	16,0 3,4	16,0 3,4	16,0 3,4	16,0 3,4
+1	16,1 3,5	16,1 3,5	16,1 3,5	16,1 3,5	16,1 3,5	16,1 3,5	16,1 3,5
+2	16,2 3,6	16,2 3,6	16,2 3,6	16,1 3,6	16,1 3,6	16,1 3,6	16,1 3,6
+3	16,2 3,7	16,2 3,7	16,1 3,7	16,1 3,7	16,1 3,7	16,1 3,7	16,0 3,7
+4	16,2 3,9	16,1 3,8	16,1 3,8	16,0 3,8	16,0 3,8	16,0 3,8	15,9 3,8
+5	16,0 4,1	15,9 4,0	15,9 4,0	15,8 4,0	15,8 4,0	15,8 4,0	15,7 4,0
+6	15,8 4,3	15,7 4,3	15,6 4,3	15,6 4,2	15,5 4,2	15,5 4,2	15,4 4,2
+7	15,4 4,5	15,4 4,5	15,3 4,5	15,2 4,5	15,2 4,5	15,1 4,4	15,1 4,4
+8	15,0 4,8	14,9 4,8	14,8 4,7	14,8 4,7	14,7 4,7	14,7 4,7	14,6 4,7
+9	14,5 5,1	14,4 5,0	14,3 5,0	14,2 5,0	14,2 5,0	14,1 4,9	14,1 4,9
+10	13,8 5,3	13,7 5,3	13,6 5,3	13,5 5,2	13,5 5,2	13,4 5,2	13,4 5,2
+11	12,9 5,5	12,8 5,4	12,8 5,4	12,7 5,3	12,6 5,3	12,6 5,3	12,5 5,3
+12	11,9 5,7	11,8 5,7	11,7 5,6	11,6 5,6	11,6 5,6	11,5 5,5	11,5 5,5
+13	10,6 5,6	10,5 5,6	10,4 5,6	10,3 5,5	10,2 5,5	10,2 5,5	10,2 5,4
+14	8,8 5,5	8,8 5,4	8,7 5,4	8,6 5,3	8,6 5,3	8,5 5,3	8,5 5,3
+15	6,4 4,6	6,3 4,6	6,3 4,6	6,2 4,5	6,2 4,5	6,2 4,5	6,1 4,5

4. **Théorie générale.** — Dans la théorie générale, que nous allons développer, on tient compte de l'atmosphère terrestre qui peut modifier d'une certaine façon l'éclairement dans la pénombre. D'après notre théorie [1] de l'ombre, l'éclairement à la distance γ du centre est donné par l'intégrale

$$e = \int_{\gamma-R_{\odot}}^{\gamma+R_{\odot}} T(r) [P - \kappa Q] dr \quad (10)$$

ou le facteur $T(r)$ donne l'affaiblissement des rayons qui est fonction de la distance r au centre de l'ombre auxiliaire. Dans les régions externes de celle-ci cet affaiblissement est seulement due à la réfraction, si nous négligeons l'absorption par l'ozone. On aura alors

$$T(r) = \frac{1}{1 - \frac{d\omega}{dh_0} \pi_{\odot} + \pi_{\odot}} \quad (11)$$

pour

$$r = (\pi_{\odot} + \pi_{\odot}) (1 + h_0) - \omega \quad (12)$$

où ω est le double de la réfraction horizontale à l'altitude h_0 , qui est l'altitude minimum des rayons dans l'atmosphère terrestre. Dans les parties élevées de l'atmosphère on peut simplifier cette expression en écrivant

$$\frac{d\omega}{dh_0} = -\beta_0 \omega, \quad \omega = c \rho \sqrt{6,28 \beta_0} \quad \text{ou} \quad \beta_0 = \frac{d\rho_0}{dh_0} : \rho_0$$

est le gradient relatif de la densité ρ .

Nous aurons alors

$$T(r) = \frac{1}{1 + \frac{c \sqrt{6,28}}{\pi_{\odot} + \pi_{\odot}} \beta_0^{\frac{3}{2}} \rho_0} \quad (13)$$

ce qui nous permettra d'évaluer l'intégrale de l'éclairement. En dehors de l'éclipse nous aurons

$$E = \frac{3,14 R^2_{\odot}}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{3} \right) \quad (14)$$

et le rapport

$$D = \log_{10} \frac{E}{e} \quad (15)$$

donne la densité de la pénombre.

Nous donnerons ici un exemple du calcul de l'éclairement dans la pénombre à la distance $\gamma = 43'$ du centre, c'est-à-dire à la distance $\gamma' = 1,9'$ du bord de l'ombre (pour $\pi_{\odot} = 57'$).

Sur la fig. 3 la courbe inférieure $DAB'BF$ donne les valeurs de $P - \kappa Q$ en fonction de la distance r au centre de l'ombre auxiliaire. L'aire de cette courbe complète entre $r = 59'$ et $r = 27'$ donne l'éclairement E en dehors de l'éclipse. La courbe supérieure en plein trait donne la densité de l'ombre auxiliaire — $\log T(r)$, la courbe en pointillé comprend encore l'absorption par l'ozone vers $0,6 \mu$ que nous négligerons dans la suite. De ces deux courbes (en haut et en bas) résulte à l'aide de la formule (10) la courbe $DAE'E$ dont l'aire

donne l'éclairement e suivant la formule en question. L'aire de la courbe $DAB'BC$ correspond à l'éclairement calculé d'après la théorie simplifiée du No. 2. On voit alors que l'effet de l'atmosphère diminue l'éclairement dans la pénombre. Autrement dit les valeurs du tableau I représentent les densités minima qui auraient lieu en absence de l'atmosphère.

Les densités de l'ombre auxiliaire entre $r = 57'$ et $57,8'$ correspondent aux altitudes des rayons entre 35 et 75 km. Nous y avons adopté les valeurs de ρ et de β d'après nos Tables dioptriques [4]. Ces

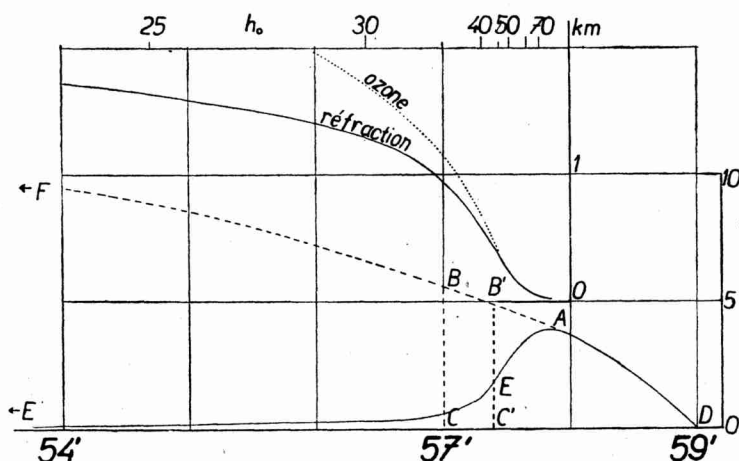


Fig. 3. En haut: La densité de l'ombre auxiliaire. En bas: L'intégration de l'éclairement pour la distance $\gamma = 43'$.

valeurs sont forcément plus ou moins approchées mais leur influence ne peut faire augmenter l'éclairement de telle façon qu'il puisse dépasser les valeurs du tableau I.

Nous insistons tout particulièrement sur ce point parceque les observations montrent que l'éclairement au voisinage du bord de l'ombre est parfois plus grand que l'éclairement théorique, même quand on tient compte dans son calcul de tous les facteurs susceptibles de l'augmenter.

Remarquons encore à la fin que du point de vue théorique tout se passe comme si l'atmosphère terrestre était opaque jusqu'à une altitude voisine de 45 km et complètement transparente audessus. Ceci revient à dire que les aires $AB'E'$ et $E'C'E$ sont égales. Dans ce cas il faudrait prendre pour le bord de l'ombre la circonférence $r = 57,4'$ et compter les distances γ' à partir de cette limite.

5. Lumière diffusée dans l'atmosphère terrestre. — L'observateur placé sur la Lune verrait l'atmosphère terrestre vivement

éclairée par le Soleil et diffusant par suite de la lumière dans l'ombre. Nous pouvons nous demander avec Dubois [5], si cette frange atmosphérique peut donner un effet appréciable dans l'ombre ou dans la pénombre. Il est assez facile d'en fixer l'ordre de grandeur.

Admettons que l'atmosphère diffuse d'une manière appréciable jusqu'à l'altitude de 11 km. En effet d'après ce que nous disent les aviateurs stratosphérique le ciel paraît dans la stratosphère très sombre et sa brillance est négligeable par rapport à celle observée à la surface terrestre. Une telle frange vue de la Lune apparaît sous un angle solide de $3 \cdot 10^{-6}$ stéradian. La brillance du ciel pur à la surface terrestre est de l'ordre de 1500 bougies/m² et celle d'un ciel voilé très brillant 10^4 bougies/m². Adoptons ce dernier chiffre qui nous donne l'éclairement sur la Lune

$$e' = \text{brillance} \times \text{angle solide} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ lux.} \quad (16)$$

Or la densité de l'ombre au centre étant de l'ordre de 4, l'éclairement y sera de l'ordre de 13 lux environs. Nous voyons que l'influence de la lumière diffusée par l'atmosphère est négligeable vis-à-vis de l'éclairement solaire au centre de l'ombre et a fortiori dans la pénombre. On pourrait invoquer l'effet des poussières atmosphérique, qui diffusent plus de lumière dans le sens des rayons incidents mais de tels effet ne peuvent augmenter plus que dix fois la brillance que nous avons déjà adoptée très grande. Même dans ce cas extrême l'éclairement par la frange atmosphérique ne ferait que 2,3% de l'éclairement mesuré au centre de l'ombre.

De cette façon nous avons épuisé tous les facteurs capables d'augmenter l'éclairement dans la pénombre. Au contraire nous avons négligé l'absorption par l'ozone et celle de la haute atmosphère qui ne peuvent que le diminuer.

6. Comparaison avec les observations. — Maintenant nous sommes en état de comparer notre théorie avec les observations. Pour cela nous avons utilisé les observations suivantes:

- | | | | |
|----------|-----------|--|-------|
| 1. 1921 | X. 16. | A. Danjon, C. R. 173 (1921), 706. | |
| 2. 1932 | IX. 14. | G. Rougier, J. d. Obs. 17 (1934), 65. | |
| 3. 1932 | IX. 14. | F. Link, C. R. 195 (1932), 1236. | |
| 4. 1936 | I. 8. | F. Link, J. d. Obs. 19 (1936), 129. | |
| 5. 1938 | XI. 7. | F. Link et Vl. Guth, Zeit. f. Astroph. 18 (1939), 207. | |
| 6. 1942 | III. 3. | G. Rougier et J. Dubois | } (4) |
| 7. 1942 | VIII. 26. | G. Rougier et J. Dubois | |
| 8. 1943 | II. 20. | G. Rougier et J. Dubois | |
| 9. 1943 | VIII. 15. | G. Rougier et J. Dubois | |
| 10. 1945 | XII. 18. | G. Rougier et J. Dubois | |

⁴⁾ D'après l'aimable communication des auteurs.

Les numéros se rapportent aux points de la fig. 4 où l'on donne les différences: densité observée-calculée en fonction de la distance γ' au bord de l'ombre. Pour le calcul nous avons adopté $\kappa = 0,6$ ce qui correspond au milieu du spectre visible et les valeurs du tableau I.

On constate à première vue qu'il-y-a des éclipses qui donnent les densités plus faibles que la théorie. Les différences $O - C$ sont variables d'une éclipse à autre, mais l'allure moyenne des différences peut être représentée par la courbe à traits interrompus, que nous avons dessinée sur la fig. 4. A part de ces éclipses claires, il-y-a aussi quelques éclipses normales par ex. No. 5 ou sombres comme

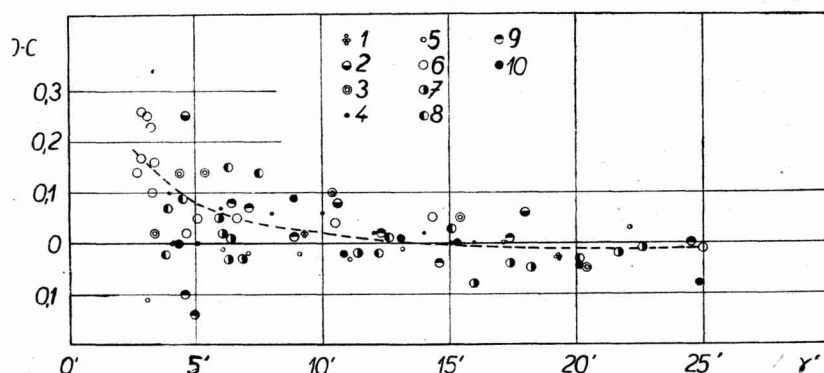


Fig. 4. Différences: densité observée — calculée pour les différentes éclipses en fonction de la distance γ' au bord de l'ombre.

No. 9. Comme dans notre théorie l'absorption par l'ozone a été négligée, ce sont plutôt les éclipses sombres qui doivent représenter le cas normal, tandis que les autres sont affectées d'une source d'éclairement supplémentaire qui diminue la densité théorique.

Pour expliquer cet excès d'éclairement dans la pénombre nous avons proposé l'hypothèse de la luminiscence du sol lunaire excitée par les rayons dont le chemin diffère de celui des rayons optiques [6]. L'existence de la luminiscence de notre satellite paraît probable étant donné le bombardement par les rayons ultraviolets et corpusculaires qui ne sont pas arrêtés par l'atmosphère lunaire. D'après ce que nous enseignent les recherches solaires et ionosphériques le Soleil doit émettre une grande quantité des rayons ultraviolets. Il-y-a quelques indications que cette émission soit localisée dans l'atmosphère solaire et nos recherches qui suivent semblent confirmer ce point de vue.

En ce qui concerne la luminiscence elle-même nous pouvons donner ici quelques chiffres qui nous fixent sur l'ordre de grandeur. La brillance des produits spécialement préparés atteint environ

23 stilb par watt d'énergie excitatrice. La brillance moyenne de la Pleine Lune est de 0,3 stilb. Comme nous verrons plus loin la brillance hypothétique de la Lune due à la luminiscence atteint parfois $\frac{1}{10}$ de cette valeur, soit environ 0,03 stilb. D'autre part l'éclairement énergétique solaire accessible à nos mesures à la surface terrestre et extrapolé à la limite de l'atmosphère est égale à $S=0,13$ watt/cm². Pour obtenir la brillance observée de 0,03 stilb, il suffirait d'avoir un éclairement excitateur de 0,0013 watt/cm² soit $\frac{1}{100}$ de S . Ceci est valable pour une surface de grand pouvoir luminescent. Avec les matières moins luminiscentes il faudrait alors admettre l'excitation solaire plus forte. Une valeur minimum de $\frac{1}{10} S$, qui paraît déjà probable, donnerait la limite supérieure du pouvoir luminescent de la surface lunaire égale à 2—3 stilb/watt.

7. Eclairement par la basse atmosphère solaire. — Si la basse atmosphère solaire, c'est-à-dire la chromosphère ou bien la couronne intérieure sont les sources des radiations excitatrices, l'intensité de ces radiations sera *grosso modo* proportionnelle à l'angle ψ (voir la fig. 1). Il est facile de voir que cet angle varie d'une façon différente que la surface découverte du disque solaire. Autrement dit, l'éclairement excitateur varie d'une autre manière en fonction de la distance au bord que l'éclairement optique.

Ecrivons la brillance d'une plage lunaire en dehors de l'éclipse comme une somme de $1 - p$ de la brillance optique et de p de la brillance luminescente. En appelant e et ε les intensités de l'éclairement optique et excitateur à la distance γ' au bord de l'ombre, on aura la brillance de la plage en ce point

$$b = (1 - p) e + p \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad b = e + p (\varepsilon - e). \quad (17)$$

La différence $b - e = p (\varepsilon - e) = O - C$ donne alors la différence entre la brillance observée et la brillance optique calculée. Pour calculer ε nous avons posé $\varepsilon = \psi/360^\circ$ ou l'angle ψ se détermine par un procédé géométrique évident. Quelques valeurs des différences $\varepsilon - e$ en fonction de la distance au bord γ' sont contenues dans le tableau suivant (pour $\kappa = 0,6$)

Tableau III.

γ'	2,5'	5'	10'	15'	20'	25'	30'
ε	0,21	0,30	0,42	0,53	0,62	0,76	0,91
e	0,03	0,10	0,28	0,49	0,69	0,87	0,98
$\varepsilon - e$	+0,18	+0,20	+0,14	+0,04	-0,07	-0,09	-0,07

On voit qu'il y a une inversion au voisinage de $\gamma' = 15'$. C'est là que les différences $O - C$ doivent changer de signe. En

effet si nous nous reportons à la figure 4, nous voyons qu'une telle inversion existe pour la moyenne des mesures. Cela prouve qu'en moyenne la source des radiations excitatrices se comporte suivant notre hypothèse ci-dessus. Nous avons de cette façon déterminé approximativement $p = 0,1$ et les écarts $O - C$ ainsi calculés donnent la courbe moyenne sur la fig. 4. Naturellement les différences individuelles s'expliquent du fait que la couronne ou la chromosphère ne possèdent pas toujours de symétrie autour du centre de Soleil.

Il ne faut pas perdre de vue aussi l'influence possible des rayons corpusculaires qui peuvent également exciter la luminescence lunaire. La Lune peut être atteinte par les faisceaux de ces rayons émanés du Soleil et déviés dans le champs magnétique terrestre et peut-être aussi lunaire. Dans ces conditions il faudrait trouver simultanément avec les brillance anormales de la pénombre des perturbations magnétiques. Jusqu'à présent des telles correlations n'ont pu être constatées d'une façon sûre, mais des recherches ultérieures basées sur un nombre plus grande d'éclipses permettront d'éclaircir cette question.

8. Autres conséquences de la luminescence lunaire. — Nous avons trouvé que pendant plusieurs éclipses la proportion de la lumière luminescente a atteint environ 10% de la lumière totale de la Pleine Lune. On peut se demander quelles sont les autres conséquences de ce fait. Nous en discuterons ici quelques unes.

a) *Fluctuations de la lumière globale de la Lune* doivent atteindre parfois le chiffre ci-dessus, c'est-à-dire 10% environ. Pour les deceler il faut alors mesurer l'éclairement produit par la Lune à la surface terrestre en le corrigeant de l'effet d'extinction, de l'effet de phase et de distance. Parmi ces corrections, c'est la première qui est la plus délicate. Les mesures de ce genre dont nous disposons jusqu'à présent, ayant visé d'autres buts, se prêtent assez mal à ce genre d'études. Pour cela il faudrait mesurer systématiquement en plusieurs stations convenablement choisies la lumière globale de la Lune. Néanmoins les mesures de Rougier [7] semblent prouver l'existence de fluctuations de ce genre.

Note ajoutée à la correction des épreuves. Nous avons pu établir une corrélation entre les variations de la constante solaire et celles de la magnitude globale de la Lune avec le coefficient de corrélation $r = 0,438 \pm 0,054$ (e. p.), $n = 94$. Une variation de 1% dans la constante solaire produit une variation environ 30 fois plus grande dans l'intensité de la Lune. Nous pouvons rapprocher ces résultats à ceux d'Abbot qui a trouvé que le rapport des variations spectrales et des variations de la constante solaire croît vers les courtes longueurs d'onde et atteint la valeur de

6 environ vers 3500 Å. Ce rapport doit croître d'avantage vers les limites du spectre comme le semblent prouver les mesures optiques de Pettit et les résultats ionosphériques. Suivant notre hypothèse de travail les variations lunaires seraient régies par les variations de l'ultraviolet solaire, inaccessible directement dans tout son étendue à nos mesures directes. (Extrait d'une Note présentée à la Réunion de Lyon, septembre 1947.)

b) *Le phénomène Linné* consiste à l'augmentation de diamètre de la tache blanchâtre entourant un cratère (existant ou non) de ce nom pendant que celui-ci s'enfonce dans la pénombre. On y voyait l'effet de la gelée ou d'autres effets dus au refroidissement progressif de la surface ou une illusion optique. Mais il se peut que la tache blanche soit constituée d'une matière du pouvoir luminescent plus élevé que l'entourage et que dans la pénombre grâce à la prépondérance des rayons ultraviolets sur les rayons optiques (voir le tableau III) sa visibilité et son diamètre augmentent de ce fait.

Les mesures photométriques de cette plage seraient alors un indicateur plus sensible que les mesures de toute la surface lunaire.

c) *La loi de Danjon* relie la luminosité générale des éclipses avec l'activité solaire [8]. Cette loi peut être bien comprise sur la base de la luminescence lunaire. Dans ce cas il semble que ce sont plutôt les radiations corpusculaires qui entrent en jeu. Sous leur influence la surface lunaire émettrait une luminescence plus faible que celle que nous avons étudiée ici. Son influence ne pourrait se manifester que dans les parties centrales de l'ombre où l'éclairement optique est déjà faible. Avant le minimum des taches la zone de celles-ci et aussi la source des radiations corpusculaires descendent vers l'équateur solaire. Il en résulte la probabilité croissante pour que les corpuscules atteignent la Lune et aussi la luminosité croissante des éclipses. Après le minimum de taches, les sources en basses latitudes disparaissent et sont remplacées par les sources en latitudes élevées. L'influence de celles-ci est naturellement moins grande d'où une chute brusque dans la luminosité des éclipses, qui est le fait le plus caractéristique de la loi de Danjon. A l'appui de cette explication nous pouvons encore ajouter que la densité de l'ombre dans les parties marginales ne semble pas suivre le rythme de l'activité solaire [9]. Donc l'influence du Soleil doit se manifester soit dans la basse atmosphère terrestre soit sur la Lune elle-même comme nous avons tenté de prouver.

d) *La composition spectrale de la lumière de Lune* pourrait être étudiée du point de vue de la luminescence. Le spectre de luminescence contient en général quelques bandes assez mal définies. Un tel spectre serait assez difficile à déceler dans le spectre de la Lune en dehors de la pénombre où son intensité est une faible fraction (0,1)

de la lumière solaire. Mais dans la pénombre les circonstances deviennent plus favorables. Avec $p = 10\%$ on trouve qu'à 2,5' du bord de l'ombre la brillance optique et la brillance lumineuse sont déjà du même ordre de grandeur et à 5' du bord la brillance optique est 2,5 plus grande. On se demande, si certaines particularités du spectre au bord de l'ombre signalées par Gauzit et Herman ne seraient pas explicables par la luminescence [10].

Conclusions. — Le but de ce travail était surtout d'attirer l'attention sur la pénombre terrestre qui a été négligée jusqu'à présent. La théorie photométrique de la pénombre comparée avec les observations a permis de découvrir un phénomène nouveau qui est un excès appréciable de la lumière dans la pénombre intérieure et un très faible défaut dans la pénombre extérieure. Nous l'avons interprété comme l'hypothèse de travail par la luminescence du sol lunaire excitée par les rayons ultraviolets émis par la basse atmosphère solaire.

Dans l'esprit de cette interprétation la Lune constitue devant nos yeux une cible sur laquelle il sera possible d'étudier les fluctuations de l'émission ultraviolette solaire qui échappe aux mesures directes. Ce serait en somme la première preuve optique de ce rayonnement dont on connaît déjà les effets électriques sur l'ionosphère.

Dans la suite de ce genre de recherches il faudrait d'abord continuer les mesures des éclipses y compris celles par la pénombre. Puis les mesures de la lumière globale de la Lune et la photométrie de certaines plages telle que la plage de Linné nous paraissent d'un grand intérêt. Enfin une étude spectrale de la lumière de notre satellite tant dans la pénombre qu'en dehors de celle-ci pourrait donner quelques résultats utiles. Dans le domaine de recherches de laboratoire une étude de la luminescence de certains minerais dont on soupçonne l'existence sur la Lune serait capable de compléter les recherches astronomiques proprement dites.

*

Fotometrická theorie polostínu při zatmění Měsíce.

(Obsah předešlého článku.)

Fotometrická theorie polostínu ukazuje zřejmě přebytek světla v okolí hranice stínu. Autor vysvětluje tento zjev luminiscencí měsíční půdy, která je způsobena ultrafialovými paprsky, jež jsou vyzařovány sluneční atmosférou. V celkovém světle nezatemněného Měsíce mohla by luminiscenční složka dosáhnouti 10%. Konečně diskutuje autor některé důsledky této pracovní hypotézy.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] F. Link, Bull. Astr. 8 (1933), 77.
 - [2] W. Zessewitsch, Bull. Inst. Astr. URSS 45 (1939).
 - [3] W. Zessewitsch, Bull. Inst. Astr. URSS 50 (1940).
 - [4] F. Link et Z. Sekera, Publ. Obs. Prague 14 (1940).
 - [5] J. Dubois, Ciel et Terre, 60 (1944), No 4—6.
 - [6] F. Link, C. R. 223 (1946).
 - [7] G. Rougier, Ann. Obs. Strasbourg. 2 (1933), 13.
 - [8] A. Danjon, C. R. 171 (1920), 1127, 1207.
 - [9] F. Link, Ann. d'Astroph 9 (1946), 230.
 - [10] J. Gauzit et L. Herman, Ann. d'Astroph. 6 (1943), 90.
-

Theory of Influence of Order-Disorder Transformations on the Electrical Resistivity in Alloys.

Zdeněk Matyáš, Praha

(Wills Laboratory, University of Bristol.)

(Received February 3, 1947.)

§ 1. Introduction.

It is well known that in many binary alloys the atoms are arranged in an ordered manner at low temperatures, whereas at high temperatures the two sets of atoms are distributed at random over the lattice. As the temperature is raised the transition from the ordered to the disordered state manifests itself in many ways. The specific heat and the electrical resistance, for example, behave anomalously. The first method of approximating to the partition function of an alloy, and hence of obtaining its properties, was given by Bragg and Williams.*) This theory on order-disorder transformation was based upon the consideration of the ordering as a co-operative phenomenon characteristic for large assemblies of atoms, i. e. the long distance order. Bethe,**) on the other hand, has developed the statistical theory based on the local order, taking into account the only mutual interactions between the neighbouring atoms. It is difficult to apply his statistical problem here and furthermore, the physical properties now under consideration, such as electrical conductivity, should mainly depend on the order at long distances, showing a rapid change below the transition temperature. Hence, for the present purpose, we have adopted the theoretical results of the Bragg and Williams' statistics on superlattice.

The present paper is almost entirely concerned with the binary alloy Cu_3Au . The X-ray analysis shows that this alloy has a face-centred cubic structure like pure gold or copper, and that, in the superlattice state, the gold atoms occupy the corner

*) Proc. Roy. Soc. A vol. 145, (1934), p. 669; A vol. 151, (1935), p. 540.

**) Proc. Roy. Soc. A vol. 150, (1935), p. 552.

positions of the elementary cells, while the copper atoms occupy the remaining positions of the face-centred cube, as shown in Fig. 1. This crystal structure remains unchanged during the order-disorder transformation.

Let N be the total number of atoms in the crystal and $F_A N$ ($F_A = \frac{1}{2}$) the number of gold atoms (Au) to be distributed among these N lattice points. The number of copper atoms (Cu) is therefore $(1 - F_A) N = F_B N$ ($F_B = \frac{1}{2}$). For complete disorder the proba-

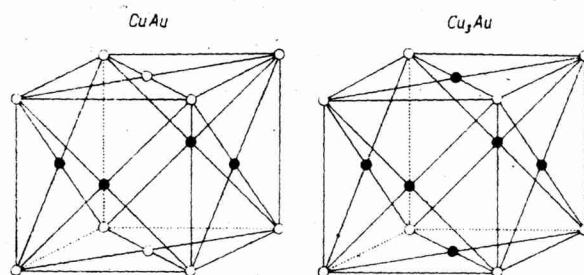


Fig. 1.

bility of any one of the N positions being occupied by a gold atom is F_A and that by a copper atom is $1 - F_A = F_B$. In the perfect ordered alloy on the other hand, both the Au and the Cu atoms form their own superlattices, the two lattices interpenetrating with each other. Let the number of lattice points in the gold superlattice be $F_A N$ (α -sites), then the number in the copper superlattice is $(1 - F_A) N$ (β -sites).

When the perfectly ordered arrangement is disturbed, some of the gold atoms will move into β -sites, displacing an equal number of copper atoms, which move into α -sites. We describe such situations by stating the fraction of α -sites still occupied by „right“ atoms; let this fraction be r_α . Then the degree of superlattice order (Bragg-Williams long distance order) Φ may be written

$$\Phi = \frac{r_\alpha - F_A}{1 - F_A} = \frac{r_\alpha - F_A}{F_B}. \quad (1)$$

We see that Bragg-Williams' order parameter is so defined that it is unity for perfect order and zero for random state.

In an equilibrium state defined by Φ let V be the energy which is necessary for the interchange of two neighbouring atoms from a position of order to one of disorder. Then V is a function of Φ . Bragg and Williams made, for the sake of simplicity, the following assumption:

$$V(\Phi) = V_0 \Phi, \quad (2)$$

where V_0 is the energy required for the creation of a pair of „wrong“ atoms in a perfectly ordered alloy. By an elementary consideration of statistical mechanics we obtain the following condition of equilibrium*):

$$\ln \left(\frac{1}{F_A(1-\Phi)} - 1 \right) + \ln \left(\frac{1}{F_B(1-\Phi)} - 1 \right) = \frac{V}{kT}, \quad (3)$$

where k is Boltzmann's constant.

Eliminating V in the simultaneous equations (2) and (3), we obtain the equilibrium value of Φ corresponding to each value of T . The method of solution is a graphical one and was given by Bragg and Williams.***) The values of Bragg-Williams' parameter Φ for different temperatures obtained in this way are given in table I.

§ 2. Influence of order on the electrical resistivity of Cu_3Au alloy.

A. Experimental results.

Fig. 2 shows the effect of uniform long distance order on the resistivity of a Cu_3Au alloy. At room temperature the specific

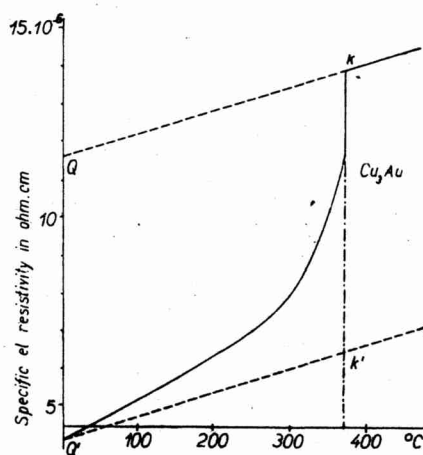


Fig. 2.

resistivity of the rapidly cooled disordered alloy, which is free from large volumes of long distance order, was found to be

*) Bragg-Williams: loc. cit.; Nix-Shockley: Rev. of Mod. Physics, Vol. 10, (1938), p. 16.

**) Bragg-Williams: loc. cit.

$11,4 \cdot 10^{-6}$ ohm . cm; on the other hand an alloy cooled sufficiently slowly to possess a uniform scheme of long distance order of high degree, has a specific resistivity of $3,9 \cdot 10^{-6}$ ohm . cm. The smooth curve below shows the equilibrium resistance-temperature curve of the alloy with coherent schemes of long distance order.*) We see that upon the normal linear dependence on temperature there is superimposed a rapidly increasing rise terminated by a discontinuous jump at the temperature 372° C. Thus the difference of ordinates between the line $Q'K'$,**) which is para-

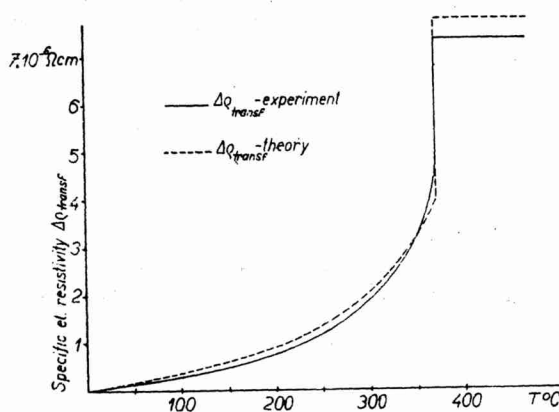


Fig. 3.

llel to QK and the equilibrium curve, mentioned above, give the *anomalous specific resistance* of the alloy due to the order-disorder transformation. The value of this anomalous specific resistivity of Cu_3Au for different temperatures are given in the table I. ($\rho_{\text{experiment!}}$) and in the figure 3.

B. The theory of resistance of alloys.

Following the general quantummechanical theory of electrical resistance as formulated by N. F. Mott,***) we may express the resistivity as follows: the electrical conductivity of metal may be written in the form:

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau,$$

*) Jones, Sykes; Proc. Roy. Soc. A vol. 166 (1938), p. 379.

**) Print Q' denotes the specific resistance of a perfectly ordered alloy at zero temperature.

***) Mott; Theory of the properties of Metals and alloys; Oxford 1936, p. 247.

where τ is the „time of relaxation“, equal to half the time between collisions, N is the effective number of free electrons per unit volume, and m, e is mass or charge of the electron respectively; hence for the resistivity we have

$$\varrho = \frac{m}{Ne^2} \frac{1}{\tau}.$$

$\frac{1}{\tau}$ may be also interpreted as the probability per unit time that an electron makes a collision, or is scattered. We know further that according to quantum mechanics, electrons will move through a perfectly *periodic* field without being scattered at all; in a pure metal or perfectly ordered alloy, the only perturbations from the perfect periodic potential in which the conduction electrons move, are due to the thermal vibrations, which give rise to a scattering probability p_t (say), proportional to the temperature. In the solid solution or disordered alloy there will be a further departure of the field from periodicity in the places which are occupied by foreign atoms or atoms in wrong positions and hence there will be a further scattering probability p_0 independent of the temperature. It may be shown that these probabilities are independent of one another;*) we thus have

$$\varrho = \frac{m}{Ne^2} (p_t + p_0),$$

and hence for the anomalous resistivity of alloy due to the order-disorder transformation

$$\Delta\varrho_{\text{transf}} = \frac{m}{Ne^2} p_0. \quad (1)$$

We know that in pure copper or gold there is one free electron per atom; we can thus suppose, that in the formula for $\Delta\varrho_{\text{transf}}$, in the case of alloys Cu-Au, the effective number of electrons per unit volume is identical with the number of atoms per unit volume.

On the other hand p_0 is given by the well known formula:**)

$$p_0 = \int_0^\pi P(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \, 2\pi \, d\vartheta, \quad (2)$$

where $P(\vartheta)$ is the probability per unit time that an electron is scattered through the solid angle $d\omega$; $P(\vartheta)$ is assumed to be independent of the direction of motion of the electron. Thus we see that we have to calculate the probability $P(\vartheta)$ for any state of disorder of alloy; and to do this we must know the perturbation potential due to the atoms in wrong positions.

*) Mott; loc. cit.; p. 288 and 301.

**) See for example Mott, loc. cit., p. 262.

C. The perturbation potential.

In order to determine this perturbation potential we first take pure gold or copper. Following Wigner and Seitz*) we fill up the whole space with polyhedra, one surrounding each atom, in the following way: for the face-centred structure we draw planes bisecting the lines joining each atom to its nearest neighbours and we thus obtain a dodecahedron surrounding each atom. We denote the potential energy of a valence electron in each cell by $V_{\text{Cu}}(r)$ in pure copper and by $V_{\text{Au}}(r)$ in pure gold and take them equal to the potential energy of the free singly charged ion of copper and gold respectively.

We know that the wave function for the lowest electronic state $u(r)$ or $u'(r)$, in the two pure metals, satisfies the Schrödinger equation:

$$\nabla^2 u + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V_{\text{Cu}}) u = 0,$$

and

$$\nabla^2 u' + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E' - V_{\text{Au}}) u' = 0$$

and also fulfils the following conditions on the boundary of the polyhedron

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u'}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

where $\frac{\partial}{\partial n}$ denotes differentiation normal to the bounding plane.

For any other occupied electronic state with wave number $\mathbf{k}$ in pure copper we shall assume the wave function to have the form:

$$\Psi_{\mathbf{k}} = u(r) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (5)$$

where $u(r)$ is independent of $\mathbf{k}$. For the energy of the $\mathbf{k}$ -state we obtain for pure copper:

$$E_{\mathbf{k}} = \int \Psi_{\mathbf{k}}^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + V_{\text{Cu}}(r) \right] \Psi_{\mathbf{k}} d\tau, \quad (5a)$$

which reduces to $E_{\mathbf{k}} = E_0 + h^2 k^2 / 8\pi^2 m$. In the case of pure gold we have similar relations:

$$E_{\mathbf{k}} = \int \Psi_{\mathbf{k}}^* \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \nabla^2 + V_{\text{Au}}(r) \right] \Psi_{\mathbf{k}} d\tau = E'_0 + h^2 k'^2 / 8\pi^2 m, \quad (6)$$

where we assume, for the wave function $\Psi_{\mathbf{k}}$ the following form

$$\Psi_{\mathbf{k}} = u'(r) e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}. \quad (6a)$$

*) Phys. Rev. vol. 43, (1933), p. 804.

The velocity of an electron in both cases is given by the formula:

$$v = \frac{2\pi}{h} \text{grad}_t E_t = \frac{h\mathbf{k}}{2\pi m}.$$

The electrons behave, therefore, as though they are free.

In the crystal of pure copper or gold as a whole we may write

$$\Psi_t = e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} U(x, y, z) \quad (7)$$

or

$$\Psi_{t'} = e^{i(\mathbf{k}', \mathbf{r})} U'(x, y, z),$$

where U is equal to $u(r)$ within each polyhedron in pure copper, and U' equal to $u'(r)$ inside each polyhedron in pure gold.

In the case of alloy Cu_3Au we can proceed in a similar way. To obtain the wave function of the lowest state, we have to solve Schrödinger's equation for each polyhedron with corresponding potential energy of the free singly charged positive ion of copper or gold and join these wave functions smoothly at the boundaries of the cells.

Naturally it is difficult to find the exact solution, but we can show, that it is easy to give a solution for slightly different case. We suppose that within the polyhedron occupied by the copper atom the potential energy of an electron is given by: $V_{\text{Cu}}(r) - \frac{1}{4}(E_0 - E'_0)$ and inside the cell with gold atom the potential energy is: $V_{\text{Au}}(r) + \frac{3}{4}(E_0 - E'_0)$; the meaning of V_{Cu} , V_{Au} , E_0 and E'_0 being the same as before. We see now that the solution of Schrödinger's equations with the boundary conditions (4), corresponding to the lowest state in such a alloy, is composed of the wave functions $u(r)$ or $u'(r)$ respectively, which are identical with the wave functions in the case of pure gold or copper.*) In crystal of the alloy as a whole we may assume, that the wave function of any occupied state with the wave number $\mathbf{k}$ has the form

$$e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} U(\mathbf{r}), \quad (8)$$

where $U(\mathbf{r})$ is equal to $u(r)$ within each cell with copper atom and equal to $u'(r)$ inside each polyhedron with gold atom. The energy of the lowest state inside the cell with copper atom is now: $E_0 - \frac{1}{4}(E_0 - E'_0)$. The energy of the same state inside the cell with gold atom has the same value and may be expressed by the formula: $E'_0 + \frac{3}{4}(E_0 - E'_0)$. The energy of any other occupied state is given by formula:

*) We suppose that the values of the wave functions $u(r)$ or $u'(r)$, which satisfy the boundary conditions (4) and are normalised to unity for the cell in the alloy Cu_3Au , are practically equal on the boundaries of polyhedra. This condition as can be easily seen from numerical calculations is fulfilled.

$$\begin{matrix} E_0 - \frac{1}{4} (E_0 - E'_0) \\ E'_0 + \frac{3}{4} (E_0 - E'_0) \end{matrix} \rangle + \frac{\hbar^2 k^2}{8\pi^2 m}. \quad (9)$$

In our exact problem we must find the solution for the case when the potential in the cells is equal to V_{Cu} or V_{Au} respectively. We therefore have to apply the ordinary perturbation method and determine the exact energy and wave function of the lowest state. The perturbing energy (ΔV) in a alloy is $-\frac{3}{4}|E_0 - E'_0|$ within the cells with gold atoms and $+\frac{1}{4}|E_0 - E'_0|$ within the cells with copper atoms. It is well known that the first-order energy correction is equal to the mean value of the perturbing energy operator averaged over the unperturbed, or zero-order, wave function. If we normalize the wave functions $u(r)$ or $u'(r)$ so that the integrals: $\int u^* u \, d\tau$ or $\int u'^* u \, d\tau$ over each cells is equal to unity, than we see that the first order energy correction δE of the lowest state is zero in the alloy Cu_3Au for any state of disorder:

$$\delta E = \frac{\int U^* \Delta V U \, d\tau'}{\int U^* U \, d\tau'} = \frac{N \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} |E_0 - E'_0| - N \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} |E_0 - E'_0|}{\int U^* U \, d\tau} = 0,$$

where N denotes the number of atoms in the alloy and $\int d\tau'$ is taken over the space occupied by the alloy.

We may now suppose that we have solved with sufficient accuracy this perturbation problem in the case of the *perfect* ordered alloy and we thus know the exact wave functions of any occupied state. But for our purposes it is sufficient to take the wave functions in the approximate form (8). Let us now calculate the *change* of energy of the electron in the ground state when two neighbouring atoms interchange their places. The change of this energy in the cell which was former occupied by the copper atom is now:

$$\begin{aligned} \int u^*(r) \left(-\frac{1}{4} |E_0 - E'_0| - \frac{3}{4} |E_0 - E'_0| \right) u(r) \, d\tau^* = \\ = -|E_0 - E'_0| \cdot \int u^*(r) u(r) \, d\tau = -|E_0 - E'_0|, \end{aligned}$$

where $\int d\tau$ denotes the integration over the polyhedron corresponding to the copper atom. We obtain the energy with the same absolute value but opposite sign for the cell occupied formerly by a gold atom. We see thus that by interchanging two atoms in the right positions, we are introducing at each polyhedron the perturbing potential $+|E_0 - E'_0|$ or $-|E_0 - E'_0|$ respectively, which gives rise to a scattering of the conducting electrons. Accordingly to our simplified assumptions (8) and (9), we suppose, that these conducting electrons behave as though they were free and thus the calculation of the probability $P(\theta)$ is reduced to the problem of the scattering of free electrons by the constant field $\pm |E_0 - E'_0|$ within each polyhedron occupied by an atom in wrong position.

D. The scattering probability in the case of nearly ordered alloy.

When the alloy is nearly perfectly ordered the scattering centres have very simple form. The interchange of the positions of two neighbour-atoms gives rise to a perturbing potential which is constant in both corresponding polyhedra and its value is $+|E_0 - E'_0|$ or $-|E_0 - E'_0|$ respectively. We can thus say, that in the case of nearly perfectly ordered alloy the scattering centres are formed by scattering dipoles, which are formed by two kind of constant perturbing potential, filling up two adjacent cells. These dipoles are distributed at random in the alloy.

Before we start with the calculation of the scattering probability we express it in terms of the area $J(\vartheta) d\omega$ which an electron must hit in order to be scattered into solid angle $d\omega$. If we denote by $J_D(\vartheta)$ this probability calculated for a single scattering dipole, then clearly

$$P(\vartheta) = xNavJ_D(\vartheta), \quad (10)$$

where x is a fraction giving the proportion of the scattering dipoles present, Na number of atoms per unit volume and v is the velocity of the electron.

Now it is easy to calculate the scattering probability $J_D(\vartheta)$. First it will be convenient to replace our polyhedra by the sphere with the same volume, since the polyhedra approximate closely to spheres. Our scattering dipoles thus consists of two identical spheres, with radius a , in contact and inside one of these spheres the scattering potential is $+|E_0 - E'_0|$, within the other one is $-|E_0 - E'_0|$. For the incident, unperturbed wave of a conducting electron we may take with good approximation the plane wave: $e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{r})}$, as we are only interested in the electrons on the Fermi' surface.

In order to obtain the scattering probability $J_D(\vartheta)$, we have to find the wave function which consists of an incident wave and scattered wave, so that, at large distances from the scattering dipole, which is assumed to be at the origin,

$$\Psi_{\mathbf{t}} \sim e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{r})} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vartheta). \quad (11)$$

We then have $J_D(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2$.

If, moreover, $|E_0 - E'_0| \ll \frac{1}{2}mv^2$ (v is the velocity of the conducting electron, i. e. on the Fermi' surface), as is the case in the applications considered, the problem may be solved by Born's approximation, and we have*)

$$J_D(\vartheta) = \left| \frac{2\pi m}{\hbar^2} \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{r}', \mathbf{r})} \Delta V d\mathbf{r}' \right|^2, \quad (12)$$

*) Mott: loc. cit.; p. 87 and 88, eq. (3) and (5).

where $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ ($|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$) means are respectively the wave vector of a colliding electron before and after the collision, ΔV is the perturbing potential of the scattering dipole and the integration is over the space of the dipole.

We split now the perturbation potential in two parts: $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$; ΔV_1 is equal to $+|E_0 - E'_0|$ inside the sphere with the center at the origin and the radius a and equal to zero outside this sphere, whereas ΔV_2 is different from zero only in the second sphere of equal volume, whose centre is at distance of $\vec{l}$ ($|\vec{l}| = 2a$) from the origin and ΔV_2 is equal there to $-|E_0 - E'_0|$. Accordingly, we can split our integral in (12) in two parts: a) A first integral over the first sphere has the form

$$|E_0 - E'_0| \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{r})} d\mathbf{r};$$

we introduce the polar coordinates r, Θ, φ , with the polar axis along with $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, and after carrying out the integration we obtain

$$4\pi a^3 |E_0 - E'_0| f(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta),$$

where

$$f(x) = x^{-3} (\sin x - x \cos x).$$

(13)

b) In the second integral we carry out the translation of the origin of the coordinate system into the centre of the second sphere $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \vec{l}$. This integral has then a form:

$$\begin{aligned} & -|E_0 - E'_0| e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \vec{l})} \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{r}') } d\mathbf{r}' = \\ & = -|E_0 - E'_0| 4\pi a^3 f(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \cdot e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \vec{l})}. \end{aligned}$$

From our preceding analysis we then obtain for the scattering probability $J_D(\vartheta)$ the following expression:

$$\left| \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} |E_0 - E'_0| a^3 f(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) (1 - e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \vec{l})}) \right|^2.$$

As the orientation of the dipoles are random in the alloy we can take for $|1 - e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \vec{l})}|^2$ in the last formula its average value over all possible orientations. If we introduce the polar coordinates with polar axis in the $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ -direction, we have:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 - e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \vec{l})}|^2} &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2[1 - \cos(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta \cos x)] \sin x \, dx \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx \, d\varphi} = \\ &= 2 \left(1 - \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right). \end{aligned}$$

We can thus write $J_D(\vartheta)$ in the form:

$$J_D(\vartheta) = \left\{ \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} |E_0 - E'_0| a^3 \right\}^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \left(2 - 2 \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right). \quad (14)$$

E. Scattering probability in the case of perfectly disordered alloy.

In the case of a perfectly disordered alloy we can proceed in a similar manner.

In the perfectly ordered alloy each gold atom is surrounded by 12 copper atoms and among the 12 nearest neighbours of each copper atom there are 4 gold atoms and 8 copper atoms. When the alloy is perfectly disordered, we may say, that in the average each „wrong“ atom of copper is surrounded by 3 gold atoms in wrong positions and similarly each „wrong“ gold atom has as its nearest neighbours 3 copper and 2 gold atoms in wrong positions.

If we denote now by $J_{\phi=0}(\vartheta) d\omega$ the area per unit volume which an electron must hit in order to be scattered into solid angle $d\omega$, then for $P(\vartheta)$ we have similar expression as before; that is

$$P(\vartheta) = v J_{\phi=0}(\vartheta) d\omega.$$

In order to calculate the probability $J_{\phi=0}(\vartheta)$ in this case, we may use the Born's formula (12) again. We split the perturbation potential ΔV into parts; each one is equal to $+|E_0 - E'_0|$ or $-|E_0 - E'_0|$ in the sphere corresponding to the atom in the wrong position. The integral in the expression (12) is then given by the following sum:

$$\int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \mathbf{r})} \Delta V d\tau = \sum_{\vec{l}} \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \mathbf{r})} \Delta V_l d\tau_l,$$

where $\int d\tau_l$ is taken over the sphere with the wrong atom in the position given by the lattice vector $\vec{l}$ and ΔV_l is the corresponding perturbation potential.

To carry out the integrations we transform the origin of the coordinates into the centre of each sphere and we thus obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{l}} \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \mathbf{r})} \Delta V_l d\tau_l &= \sum_{\vec{l}} \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \vec{l}+\mathbf{r}')} \Delta V_l d\tau'_l = \\ &= \sum_{\vec{l}} e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \vec{l})} \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{t}', \mathbf{r}')} \Delta V_l d\tau'_l, \end{aligned}$$

where the integration $\int d\tau'_l$ is over each sphere in the new coordinate system.

For the square of this integral we than have

$$|\int e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{v})} \Delta V d\tau|^2 = (E_0 - E'_0)^2 |\int e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{v})} d\tau'|^2 \sum_{\vec{l}} \sum_{\vec{l}'} \pm e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \vec{l}-\vec{l}')} \quad (15)$$

where the double summation extends over all the lattice points corresponding to the atoms in the wrong positions and the sign + or — before the exponential term is to be taken according as the distance $\vec{l} - \vec{l}'$ between two atoms corresponds to like or to unlike atoms respectively. We thus see that the integral in (15) has the same form as in the preceding paragraph and its value is then given by the formula (13).

In order to carry out the duble summation in (15) it will be sufficient to take into account only two sets of terms:

a) The terms which correspond to $\vec{l} - \vec{l}' = 0$ and the number of which is equal to the total number of atoms in the wrong positions, i. e. to $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} Na$, where Na is the number of atoms per unit volume.

b) The terms which correspond to two adjacent atoms. When in this case we draw lines connecting each wrong atom with its nearest neighbours in wrong positions; we see that these lines are oriented at random in the alloy as a whole. According to what we said at the begining of this paragraph, we can see at once, that from each copper atom in the wrong position there diverge on the average 3 lines to its three nearest gold atoms also in the wrong position; similarly from each wrong atom of gold 3 lines diverge to the three nearest copper atoms and 2 lines to the two nearest gold atoms also in the wrong position. Thus the total number of such dublets is equal to:

$Na F_A F_B \cdot (3 + 3) = Na \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 6$ in the case of two odjacent unlike atoms and to $Na F_A F_B \cdot 2 = Na \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2$ in the case of two like atoms.

Now we can easely carry out the summation in (15) for the terms corresponding to $|\vec{l} - \vec{l}'| = 2a$. This sum is equal to

$$Na F_A F_B (2 - 6) \overline{e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \vec{l}-\vec{l}')}}}$$

where $\overline{e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \vec{l}-\vec{l}')}}}$ means the average value taken over all possible orientations of $(\vec{l} - \vec{l}')$ in the space, i. e. it is thus equal to*)

*) The polar coordinates are introduced in the same way as before; e. i. with polar axis in $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ -direction.

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{r}', \vec{l}-\vec{l}')} \sin x \, dx \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx \, d\varphi} = \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta}.$$

It is not necessary to take into account the set of the terms in the double series (15) corresponding to the interaction of the next nearest neighbours, as these terms lead in the final formula for electrical resistivity, to integrals, whose values are practically zero.

If now we put expressions obtained above into the integral (15) we have:

$$\left| \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{r}', \mathbf{r})} \Delta V \, d\tau \right|^2 = (E_0 - E'_0)^2 \left| \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{r}', \mathbf{r})} \, d\tau' \right|^2 N a^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \cdot \left[2 - 4 \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right].$$

For the square of the integral in the last equation we take the expression (13) and can thus write:

$$\left| \int e^{i(\mathbf{t}-\mathbf{r}', \mathbf{r})} \Delta V \, d\tau \right|^2 = (E_0 - E'_0)^2 (4\pi a^3)^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) N a^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \left[2 - 4 \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right].$$

It is now possible to calculate probability $J_{\phi=0}(\vartheta)$ by means of Born's formula (12):

$$J_{\phi=0}(\vartheta) = \left\{ \frac{8\pi^2 m a^3}{h^2} (E_0 - E'_0) \right\}^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) N a^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4} \cdot \left[2 - 4 \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right]. \quad (16)$$

F. Scattering probability in the disordered alloy.

If we compare the formulae (14) and (16) for scattering probability in the two limiting cases, we can immediately see, that the average scattering probability *per atom* in the nearly perfectly ordered alloy is:

$$\left\{ \frac{8\pi^2 m a^3}{h^2} (E_0 - E'_0) \right\}^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \left(1 - \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right)$$

and in the perfectly disordered alloy is (number of atoms in the wrong positions = $2 N a F_A F_B = 2 N a^{\frac{3}{4}} \frac{1}{4}$)

$$\left\{ \frac{8\pi^2 m a^3}{h^2} (E_0 - E'_0) \right\}^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \left(1 - 2 \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \vartheta} \right).$$

During the order-disorder transformations one of these expressions changes continuously into the other one. We will not investigate this change in details; for our purposes it will be sufficient to suppose, that this transition is proportional to the change of Bragg's order parameter Φ , defined by eq. (1) in the first chapter. We thus assume, that the average scattering probability $J_\Phi(\vartheta)$ per atom corresponding to the Bragg's order Φ is equal to

$$J_\Phi(\vartheta) = \left\{ \frac{8\pi^2 m a^3}{h^2} (E_0 - E'_0) \right\}^2 f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \left(1 - (2 - \Phi) \cdot \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right). \quad (17)$$

Any more detailed calculation does not practically change the electrical resistivity; the integrals, which contain $\frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta}$ as a factor in the integrand, have very small values.

§ 3. Final expression for resistivity and comparison with the experimental results.

After these calculations it is possible to write the final expression for the anomalous resistivity $\rho_{\text{transf.}}$ of alloy Cu_3Au in the different states of disorder. If we denote by y the number of atoms in the wrong positions (i. e. $y = 2Na F_A F_B (1 - \Phi)$), then according the formula (10) $P(\vartheta)$ is clearly equal to: $P(\vartheta) = y v J_\Phi(\vartheta) = 2Na F_A F_B (1 - \Phi) v J_\Phi(\vartheta)$. If we assume $Na = N$ (one electron per atom) we may write the expression for anomalous resistivity (1) in the form:

$$\Delta \rho_{\text{transf.}} = \frac{mv}{e^2 N} y \cdot B, \quad (18)$$

where

$$B = \int_0^\pi J_\Phi(\vartheta) 2\pi (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

If we put for $J_\Phi(\vartheta)$ the expression from (18) we can thus write the formula for specific resistivity in the final form.

$$\Delta \rho_{\text{transf.}} = \frac{mv}{e^2} 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \right) (1 - \Phi) \left\{ \frac{8\pi^2 m a^3}{h^2} (E_0 - E'_0) \right\}^2 \cdot \int_0^\pi f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \left(1 - (2 - \Phi) \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} \right) 2\pi (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (19)$$

To compare this theoretical formula with experiment we are accepting the following data:

1. It is well known that the lattice constant of the alloy Cu_3Au is $3,7 \cdot 10^{-8}$ cm and hence for the radius of atomic sphere we obtain: $a = 1,46 \cdot 10^{-8}$ cm.

2. From the paper of N. F. Mott (The electrical resistance of dilute solid solutions; Proc. of Camb. Phil. Soc., Vol. 32, p. 287, 1936) we choose for the value $|E_0 - E'_0| = 2,1 \text{ eV} = 3,34 \cdot 10^{-12}$ erg as corresponding to $a = 1,46 \cdot 10^{-8}$ cm.

3. The maximum kinetic energy of the conducting electrons may be taken from the measurements on the soft X-ray spectra of pure copper carried out by Skinner*) and has the following value: $E_m \doteq 8,5 \text{ eV}$; the corresponding value of the wave vector k is then: $1,5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$ and the product $2ka$ is equal $\doteq 4,5$. The velocity v can, of course, be calculated from E_m by the formula: $E_m = \frac{1}{2} mv^2$.

4. The integrals in the expression (19) were calculated numerically and the following values and obtained

$$\int_0^\pi f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0,014,$$

$$\int_0^\pi f^2(2ka \sin \frac{1}{2}\vartheta) \frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta)}{4ka \sin \frac{1}{2}\vartheta} (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = -0,0006.$$

The values of the integrals which are contained in the integrand factors corresponding to the interaction of next-nearest neighbours are so small, that we can neglect them.

If we put these constants into (19), we obtain for the anomalous specific resistivity $\Delta \rho_{\text{transf.}}$ the values, which are tabulated in the column $\Delta \rho_{\text{transf.}-\text{theory}}$ in the table I and shown in the fig. 3.

Table I.

$T^\circ \text{ C}$	Φ	$\Delta \rho_{\text{transf.}-\text{experim.}}$	$\Delta \rho_{\text{transf.}-\text{theory.}}$
		$\Omega \cdot \text{cm}$	$\Omega \cdot \text{cm}$
372°	0	$7,1 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$
372°	0,46	4,5	4,1
342°	0,64	2,8	2,7
313°	0,69	2,0	2,3
240°	0,83	1,0	1,3
166°	0,91	0,6	0,68
93°	0,96	0,33	0,30
20°	0,98	0,19	0,15
0°	1	0	0

*) Nature, vol. 140 (1937), p. 508.

§ 4. Conclusion.

When we compare the theoretical results with those obtained by experiment, we see that the agreement between the theory and the experiment is close. At the same time it is evident, that anomalous change of resistivity during the order-disorder transformation is governed by the long-distance order. The influence of short-distance order may be expected only in the state of perfect disorder. It will manifest itself in as a slight change in the numerical factor accompanying the term with $\frac{\sin(4ka \sin \frac{1}{2}\theta)}{(4ka \sin \frac{1}{2}\theta)}$.

But this change with regard to the very small value of the corresponding integral is without any practical effect on the final value of electrical resistance.

Similar calculations were carried out for the alloy CuAu and also in close agreement with experiment.

In conclusion I wish to thank Prof. N. F. Mott (Wills Laboratory, University of Bristol) and Prof. V. Trkal (Charles' University in Prague) for helpful interest in this work. At the same time, the writer wishes to express his thanks to Mr. K. Huang for his valuable criticism and advice.

*

Theorie vlivu uspořádání atomů na elektrický odpor slitiny.

(Obsah předchozího článku.)

Uspořádání atomů v jistých slitinách (na př. Cu₃Au, CuAu) je závislé na teplotě. Při nižších teplotách jsou atomy obou složek pravidelně uspořádány v prostorové mříži (vzniká t. zv. nadstruktura), kdežto při zvyšování teploty počnou si vyměňovati navzájem místa a stav dokonalé uspořádanosti se porušuje. Tato transformace slitiny z uspořádaného do neuspořádaného stavu je provázena změnou jistých fyzikálních vlastností. Na př. specifické teplo nebo elektrický odpor se mění charakteristickým způsobem.

Autor ukazuje, jak je možno počítat změnu elektrického odporu během transformace na základě kvantověmechanické teorie elektrické vodivosti. V uspořádané slitině je potenciál vodivostních elektronů dokonale periodický v soulase s periodickým uspořádáním atomů v krystalové mříži. Během transformace se pravidelné uspořádání atomů ruší, vznikají odchylky od dokonalé periodicity potenciálu, které způsobí rozptyl vodivostních elektronů a tím i jistý nadbytečný odpor.

Předpokládáme-li, že zmíněný poruchový potenciál je charakterisován podobným způsobem jako v Mottově teorii elektrické vodivosti zředěných tuhých roztoků, tu zmíněný rozptyl elektronů

je možno počítat na základě Bornovy rozptylové formule. Je možno tedy předpovědět, jak elektrický odpor slitiny závisí na stupni uspořádání atomů.

Bragg a Williams však ukázali, že je možné určit stupeň uspořádanosti slitiny při jisté teplotě z jednoduché statistické theorie. Definujeme-li stupeň uspořádanosti podobným způsobem jako Bragg a Williams, můžeme potom vypočítat ke každé teplotě odpovídající elektrický odpor slitiny. V případě slitiny typu Cu_3Au byly numerické výsledky, plynoucí z theorie, porovnány s experimentem a byla zjištěna uspokojující shoda.
