losti V^1V ($B'^1B' \perp BO$), směru však opačného, je rychlost V'^1V' bodu V' ve směru kolmém na VV' omezena spojnicí V^1B'.

Okamžitý střed otáčení V_s normály n_v, tedy střed křivosti pro vrchol V, je v průsečíku normály n_v se spojnicí ${}^1V^1V'$.

Obdobná jednoduchá konstrukce je i pro počátku bližší průsečík křivky (c) s trajektorií (b). Tam ovšem rychlosti V^1V a B'^1B' jsou sobě rovné velikostí i směrem.

Analytické a synthetické studium křivky třetího stupně dané třemi páry konjugovaných bodů. Singularity.

Dr Václav Štěpánský, Mor. Ostrava.

Východiskem našich úvah je věta: Geometrické místo bodu, jehož spojnice se třemi body roviny (A, B, C) protínají tři přímky roviny (o_1, o_2, o_3) v bodech ležících na téže přímce, je obecná křivka třetího stupně. Důkaz této věty podal H. Grassmann[1]) pomocí bodového počtu a A. Clebsch pomocí eliptických argumentů. Podáme jednoduchý analytický důkaz věty, ukážeme, že toto určení křivky je totožné s určením třemi páry konjugovaných bodů, budeme se zabývati konstrukcemi křivky takto určené a vyšetřovati případy singulární.

Trojúhelník určený body A, B, C nazývejme trojúhelníkem prvořadým a trojúhelník o stranách o_1, o_2, o_3 a vrcholech O_1, O_2, O_3 (o_1 proti O_1) trojúhelníkem druhořadým. Druhořadý trojúhelník zvolme za základní trojúhelník projektivních souřadnic. Souřadnice bodu O_1 jsou $1:0:0$, bodu O_2 $0:1:0$ a bodu O_3 $0:0:1$. Souřadnice bodů A, B, C jsou $a_1 : a_2 : a_3$ resp. $b_1 : b_2 : b_3$ a $c_1 : c_2 : c_3$. Hledáme rovnici geometrického místa bodů X (x_1, x_2, x_3). Pro spojnici $\overline{XA}$ dostáváme rovnici

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kde ξ_i ($i = 1, 2, 3$) jsou souřadnice proměnného bodu této přímky. Podobně $\overline{XB}$ a $\overline{XC}$ mají rovnice

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pro průsečný bod M (m_1, m_2, m_3) přímek $\overline{XA}$, $\overline{O_2O_3}$ určíme souřad-

[1]) Crelleův Journal, 86, str. 117.

nice ze soustavy

$$\xi_1 + 0 \,.\, \xi_2 + 0 \,.\, \xi_3 = 0 \text{ a } \xi_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \xi_2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + \xi_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

poměrem

$$m_1 : m_2 : m_3 = 0 : \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

a podobně souřadnice průsečíku $N \equiv (\overline{XB} \,.\, \overline{O_1O_3})$

$$n_1 : n_2 : n_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : 0 : \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Konečně bod $P \equiv (\overline{XC} \,.\, \overline{O_1O_2})$ je stanoven poměrem

$$p_1 : p_2 : p_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : 0.$$

Body M, N, P budou ležeti na přímce, když

$$\begin{vmatrix} 0 & \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pouhým dosazením příslušných souřadnic se přesvědčíme, že křivka třetího stupně určená touto rovnicí prochází jednak šesti body O_1, O_2, O_3, A, B, C a ještě těmito dalšími šesti průsečíky $(\overline{AB} \,.\, \overline{O_1O_2}) \equiv O'_3$, $(\overline{AO_2} \,.\, \overline{BO_1}) \equiv O''_3$, $(\overline{AC} \,.\, \overline{O_1O_3}) \equiv O'_2$, $(\overline{AO_3} \,.\, \overline{CO_1}) \equiv O''_2$, $(\overline{BC} \,.\, \overline{O_2O_3}) \equiv O'_1$, $(\overline{BO_3} \,.\, \overline{CO_2}) \equiv O''_1$. V této konfiguraci určují však body křivky třetího stupně podle Cayleye[2]) čtveřiny korespondenční; jsou to čtveřiny $A, O_1; B, O_2; A, O_1; O_3C — B, O_2; CO_3$, z čehož dále vyplývá, že dvojice na př. A, O_1; BO_2; $O'_3O''_3$ určují 6 vrcholů úplného čtyrstranu vepsaného naší křivce a jsou tudíž páry bodové AO_1; BO_2; CO_3; $O'_1O''_1$; O'_2, O''_2; O'_3, O''_3 dvojiny bodů konjugovaných (Cayley tamtéž).

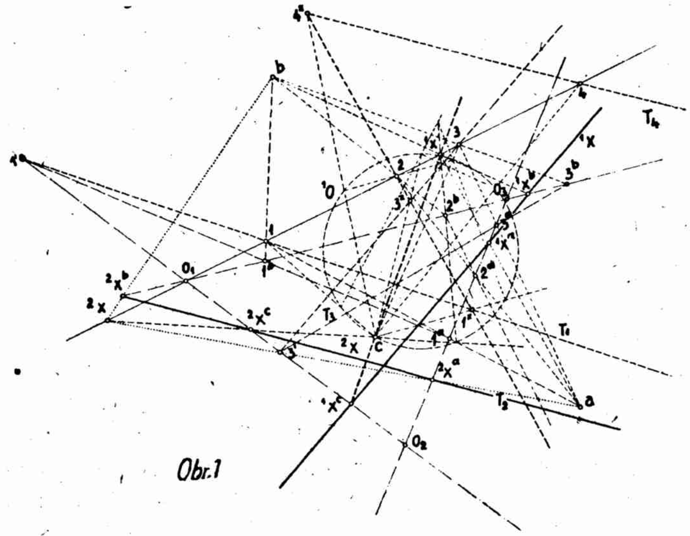
Připomeňme si ještě, co máme rozuměti pod obecnou polohou trojiny konjugovaných párů bodových. Nemá-li křivka degenerovati, je nutné, aby se žádný z činitelů a_1, b_2, c_3 nerovnal nule, to znamená, že nesmí žádný z bodů A, B, C konjugovaný k příslušnému z trojiny O_1, O_2, O_3 ležeti na spojnici zbývajících bodů této trojiny. Ze stejného důvodu je nutné, aby platily vztahy $a_1b_2 — b_1a_2 \neq 0$, $a_1c_3 — a_3c_1 \neq 0$ a $b_2c_3 — b_3c_2 \neq 0$, což značí geometricky, že spojnice dvou bodů z trojice A, B, C nesmí procházeti třetím

[2]) Mémoire sur les courbes du troisième ordre, Liouville Journal 9, str. 288.

bodem z trojice O_1, O_2, O_3. Když jsme si takto zajistili zcela obecnou polohu daných konjugovaných párů, můžeme přistoupiti ke konstrukci naší křivky (obr. 1).

Zvolili jsme konjugované páry a, o_1; b, o_2; c, o_3 (v obrazcích jsou body označeny písmeny malými a přímky velkými). Budeme vyhledávati body křivky na paprscích svazku o_1.

Vytkněme na zvoleném paprsku ${}^1O$ body $1, 2, 3, 4, \ldots$ libovolně a promítněme tuto řadu jednak z bodu a na $\overline{o_2o_3}$, dostaneme řadu



Obr. 1

$1^a, 2^a, \ldots$ a jednak z bodu b na $\overline{o_1o_3}$ do bodů $1^b, 2^b, \ldots$ Řady $1^a, 2^a, \ldots$ $1^b, 2^b, \ldots$ jsou projektivní a spojnice $\overline{1^a1^b}, \overline{2^a2^b}, \overline{3^a3^b}, \ldots$ obalují kuželosečku. Bodům $1, 2, \ldots$ přísluší jednoznačně tečny této kuželosečky (K^2). Na paprscích ${}^1O$ a $\overline{o_1o_2}$ vzniká pak následující příbuznost: bodu 1 na ${}^1O$ přísluší jednoznačně průsečík $(\overline{1^a1^b} \,.\, \overline{o_1o_2}) \equiv 1'$; obecně libovolnému bodu j řady ${}^1O$ přísluší jediný bod j' řady $\overline{o_1o_2}$, naopak to však neplatí. Bodu j' řady $\overline{o_1o_2}$ příslušejí dva body řady ${}^1O$, které dostaneme, když z bodu j' vedeme tečny ke K^2 a jejich průsečíky s přímkami $\overline{o_2o_3}$, $\overline{o_1o_3}$ spojíme s body a, b. Průsečník těchto spojnic je bod j.

Příbuznost ve směru $1, 1'$ je jednojednoznačná a ve směru $1'1$ jednodvojznačná, bod o_1 je jejím bodem samodružným a tudíž obalují spojnice $\overline{11'}, \overline{22'}, \ldots$ opět kuželosečku, označme ji L^2. Vedeme-li bodem c tečny ke kuželosečce L^2, protnou tyto paprsek ${}^1O$

ve dvou bodech ${}^1x$, ${}^2x$, jež jsou body uvažované křivky třetího stupně. V obraze byly též sestrojeny přímky ${}^1X$, ${}^2X$, které náleží podle definice křivky bodům ${}^1x$, ${}^2x$. Z uvedené konstrukce jednotlivých bodů křivky se potvrzuje, že je křivka skutečně stupně třetího. Ukázali jsme konstrukci bodů křivky, jež se nacházejí na paprscích svazku o_1 (nebo o_2, o_3), podobně můžeme určovati body křivky na paprscích svazků o vrcholech a, b, c.

Mysleme si na př. bodem a libovolný paprsek A a zvolme na A řadu bodů $1, 2, 3, \dots$ a promítněme ji z bodu b na $\overline{o_1o_3}$, dostaneme řadu $1^b, 2^b, \dots$ a promítnutím z bodu c na přímku $\overline{o_1o_2}$ řadu $1^c, 2^c, \dots$ Řady bodové $1^b, 2^b, \dots$ a $1^c, 2^c, \dots$ jsou projektivní a jejich spojnice obalují kuželosečku (A^2), která se dotýká přímek $\overline{o_1o_3}$, $\overline{o_1o_2}$. Kdybychom pak vedli k této kuželosečce tečny z bodu a, pak tyto tečny X_1 (X_2) mají tu vlastnost, že jejich průsečíky s přímkami $\overline{o_1o_2}$, $\overline{o_1o_3}$, $\overline{o_2o_3}$ spojeny resp. s body a, b, c určují tři paprsky, jež procházejí jediným bodem x_1, (x_2) naší křivky třetího řádu. Body tyto leží současně na vytčeném paprsku A.

Případy singulární.

Nechť $o_1 \equiv a$, po dosazení do rovnice křivky $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ a $a_3 = 0$ obdržíme rovnici křivky ve tvaru

$$x_2 \begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

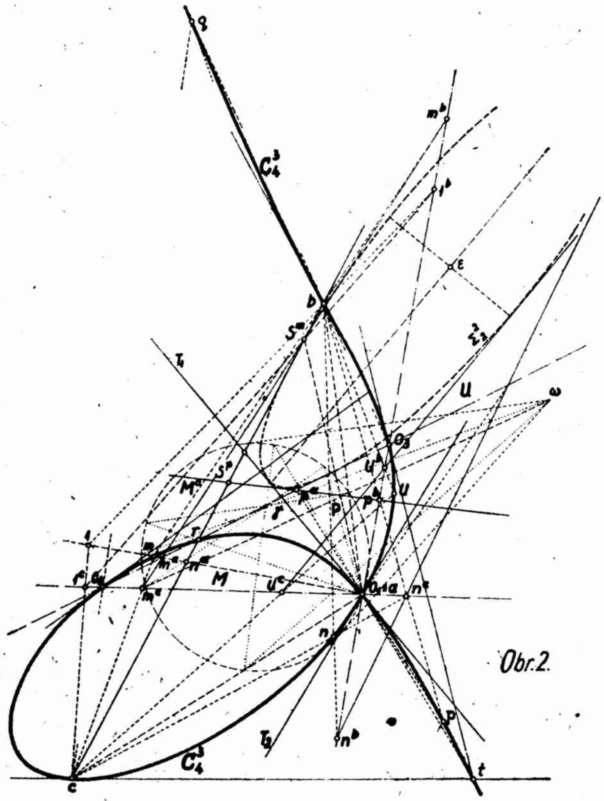
křivka je racionální a má dvojný bod v bodě $o_1 \equiv a$. Výsledek můžeme vysloviti větou: **Geometrickým místem bodů x té vlastnosti, že paprsky směřující z těchto bodů ke třem pevným bodům $a_1 \equiv o_1$, b, c protínají strany trojúhelníka $a \equiv o_1, o_2, o_3$ resp. O_1, O_2, O_3 vždy ve třech bodech ležících na přímce, je křivka třetího stupně s dvojným bodem v bodě $a \equiv o_1$ a dvěma páry konjugovaných bodů b, o_2, a c, o_3.**

Na podkladě geometrické definice křivky sestrojíme její body na paprscích svazku $o_1 \equiv a$ (obr. 2). Veďme bodem a paprsek M, který protíná křivku v bodě m. Spojíme-li bod m s vrcholy a, b, c a tyto spojnice protínáme se stranami O_1, O_2, O_3, dostáváme body m^a, m^b, m^c, které leží na přímce M^0. Vytkneme-li si tedy paprsek M, můžeme zjistiti jeho průsečík s křivkou, budeme-li znáti polohu přímky M^0.

Z bodů m^b, m^c můžeme sestrojiti bod m dvěma způsoby a tím si zajistíme i přesnost konstrukce tohoto bodu.

Zvolme na M řadu bodů $1, 2, 3, \dots$ a promítněme tyto řadu jednak z bodu b na přímku $\overline{o_1o_3}$ do bodů $1^b, 2^b, \dots$ a jednak z bodu c na přímku $\overline{o_1o_2}$ do bodů $1^c, 2^c, \dots$, řady tyto budou projektivní a protože mají bod o_1 samodružný, budou též perspektivní se středem perspektivity $s \equiv (\overline{1^b 1^c} . \overline{2^b 2^c})$. Spojíme-li bod m^a se středem s, dostáváme přímku M^0.

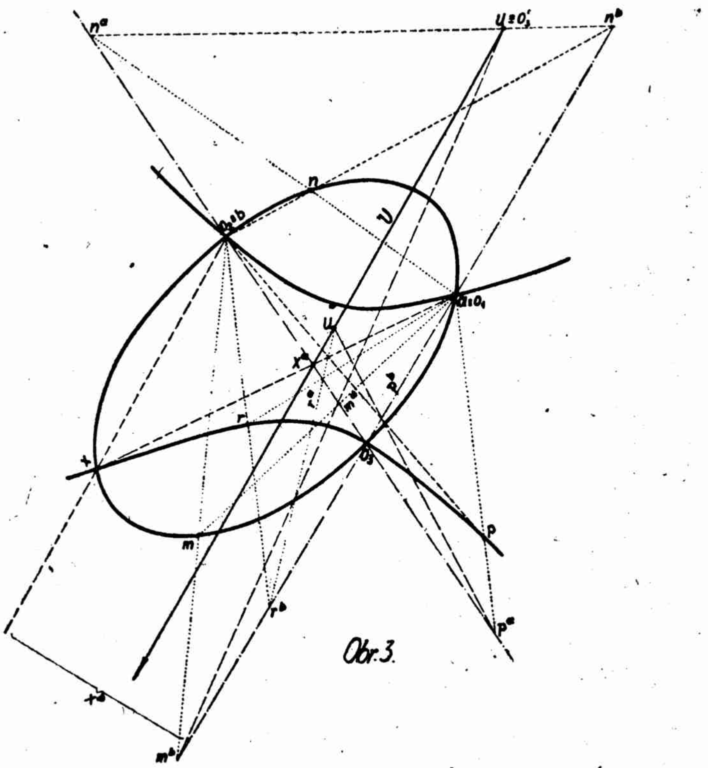
Otáčí-li se paprsek M kolem středu $o_1 \equiv a$, mění i střed perspektivity s^m svoji polohu a vztah je tu jednoduchý. Středy perspektivity s^m pohybují se po přímce $\overline{bc}$, jednojednoznačná příbuz-



Obr. 2

nost bodů s^m a $(M . \overline{bc})$ je involutorní a z bodu o_1 se promítá tato involuce involucí svazku paprskového, jejíž samodružné paprsky splývají s tečnami dvojného bodu $o_1 \equiv a$. Tato involuce je tudíž totožná s involucí, jež promítá konjugované páry bodů naší křivky. Středy perspektivity uvažovaných projektivních řad $1^b, 2^b, \ldots, 1^c, 2^c, \ldots$ pro libovolný paprsek M leží na $\overline{bc}$ z toho důvodu, že prvky řad příslušné průsečíku $(M . \overline{bc})$ leží na spojnici $\overline{bc}$. Involuce svazku plyne z involutorní příslušnosti paprsků $\overline{o_1 o_3}$ a $\overline{o_1 c}$. Paprsek M může splynouti s příslušným paprskem $\overline{o_1 s^m}$ jen v tom případě, když bod m splývá s bodem $o_1 \equiv a$, tedy na tečně v dvojném bodě křivky. Přímky M^0 jako spojnice bodů s^m a m^a určují na přímkách $\overline{bc}$ a $\overline{o_2 o_3}$ projektivní řady a obalují kuželosečku (Σ^2), která se dotýká tečen v dvojném bodě naší kubické křivky (obr. 2).

Na podkladě vyšetřených vztahů můžeme sestrojovati racio-



Obr. 3.

nální křivku třetího stupně, když je dána některým z následujících způsobů určení.

1. Racionální křivka třetího stupně je dána bodem dvojným a dvěma páry bodů konjugovaných.

2. Křivka C_4^3 je dána bodem dvojným, jedním párem bodů konjugovaných a ještě dalšími třemi body obyčejnými.

3. Křivka C_4^3 je dána bodem dvojným s příslušnými tečnami a dalšími čtyřmi svými obecnými body, z nichž dva mohou býti sdružené imaginární. A pod.

Specialisujeme-li dále polohu vrcholů a, b, c, o_1, o_2, o_3, dojdeme až ke konstrukci a vlastnostem kuželosečky.

Zvolme na př. $a \equiv o_1$, $b \equiv o_2$, pak dostáváme po úpravě rovnici

$$x_2x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + x_1x_3 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

křivka se rozpadá v přímku $x_3 = 0$ a v kuželosečku $2x_1x_2c_3 - x_3(x_2c_1 + x_1c_2) = 0$. Body o_1, o_2, o_3, c budou míti na kuželosečce nějakou zvláštní vzájemnou polohu. Určíme rovnice tečen naší kuželosečky v bodech o_1, o_2, o_3. Bod o_1 má tečnu $2c_3x_2 - c_2x_3 = 0$, v bodě o_2 je tečna $2c_3x_1 - c_1x_3 = 0$ a tečna v bodě o_3 má rovnici $c_2x_1 + c_1x_2 = 0$. Z prvních dvou rovnic můžeme odvoditi ještě rovnici $c_2x_1 - c_1x_2 = 0$. Dospíváme k větě: Zvolíme-li na kuželosečce tři body o_1, o_2, o_3 a bod čtvrtý c na spojnici pólu o'_3 přímky $\overline{o_1o_2}$ s bodem o_3, pak můžeme považovati kuželosečku za geometrické místo bodů té vlastnosti, že jejich spojnice s body o_1, o_2, c protnou přímky $\overline{o_2o_3}$, $\overline{o_1o_3}$, $\overline{o_1o_2}$ (vždy v uvedeném pořadí) v bodech, jež leží na přímce. Ke každému bodu kuželosečky přináleží tímto způsobem určitá přímka a všechny tyto přímky procházejí bodem o'_3 (pólem přímky $\overline{o_1o_2}$). Dalším rozborem rovnice naší kuželosečky a z její geometrické definice mohli bychom zjistiti ještě jiné vztahy a konstrukce, jako příklad uvádíme konstrukci čtvrtého společného průsečíku dvou kuželoseček; řešení této úlohy je patrno z obrazce (obr. 3).

Mohli bychom uvažovati také ještě o jiných speciálních případech polohy bodů a, b, c, o_1, o_2, o_3. K zajímavějším výsledkům však dospějeme, budeme-li se zabývati rozšířením našich úvah do prostoru trojrozměrného a vícerozměrného.