ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST VĚDECKÁ

Vydává

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a osvěty

ROČNÍK 71

1946

Jč m+f

PRAHA 1946

Nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků v Praze

Knihtiskárna „Prometheus“, Praha VIII, Rokoska 94

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique
Éditeur: Jednota československých matematiků a fysiků, Praha
Année 71 1946

Obsah — Sommaire

Část matematická — Travaux mathématiques

Část fysikální — Travaux de physique

On a generalization of Fourier series.

Josef Korous, Praha.

(Received June 12, 1945.)

1. Preliminary.

Before we proceed to formulate the problem which will be discussed, we need several definitions.

First of all, I introduce the following sets of real numbers:

1. $\{l_\nu\}$ denotes the set of real numbers l_ν ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), satisfying the following conditions:

$$l_\nu < l_{\nu+1}, \quad l_{-1} < 0 \leqq l_0, \quad l_\nu = \nu + a + \lambda_\nu,$$

where a*) is a fixed real number and

$$\limsup_{\nu=\pm\infty} |\lambda_\nu| < \tfrac{1}{12}. \tag{1,1}$$

The aggregate of all possible $\{l_\nu\}$ is denoted by $A_1(a)$.

2. $A_2(a) \subset A_1(a)$ is the aggregate of all $\{l_\nu\}$ satisfying

$$\lambda_\nu = O(\log^{-1}|\nu|) \tag{1,2}$$

for $|\nu| > 1$ and

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_\nu}{\nu}\right| < \infty.\text{**)} \tag{1,3}$$

3. $A_3(a) \subset A_2(a)$ contains all $\{l_\nu\}$ satisfying

$$\lambda_\nu = o(\log^{-1}|\nu|) \text{ for } \nu = \pm\infty. \tag{1,4}$$

4. To $A_4(a) \subset A_3(a)$ belong all $\{l_\nu\}$ with

$$\lambda_\nu = O(|\nu|^{-1}\log^{-1}|\nu|) \tag{1,5}$$

for $|\nu| > 1$ and

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\lambda_\nu| < \infty. \tag{1,6}$$

*) For our purposes only $a = 0$ and $a = \pm \frac{1}{2}$ will be needed.

**) The prime indicates throughout this paper that $\nu = 0$ should be excluded.

For brevity, we put $A_i(0) = A_i$, where $i = 1, 2, 3, 4$.

To every $\{l_\nu\}$ we associate an integral function of a complex variable

$$l(z) = (z - l_0) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{l_\nu}\right) e^{\frac{z}{l_\nu}}. \tag{1,7}$$

We denote by $L_i(a)$ the class of all $l(z)$ belonging to $\{l_\nu\} \epsilon A_i(a)$ and write simply L_i instead of $L_i(0)$.

Further, we put for $l(z) \epsilon L_1$

$$k(z) = l(z) \operatorname{cotg} \pi z + \varrho(z), \tag{1,8}$$

where

$$\varrho(z) = \frac{z}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{l(\nu)}{\nu(\nu - z)} - \frac{l(0)}{\pi z} + b,^{*)} \tag{1,9}$$

b being an arbitrary real constant.

If $l(z) \epsilon L_2$, we define also

$$\varrho(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{l(\nu)}{\nu - z}, \tag{1,10}$$

and denote by P the class of all such $\varrho(z)$.

2. The problem.

Let α be a real number and $f(x)$ a real function defined in $[\alpha, \alpha + \pi]$**) and such that $|f(x)|$ is integrable (in the sense of Lebesgue) over this interval. (2,1)

Our object is to investigate expansions of such functions in series

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x)^{\dagger)} \tag{2,2}$$

for $x \epsilon [\alpha, \alpha + \pi]$ and $\{l_\nu\} \epsilon A_1$.

*) The convergence of this series and of the series (1,10) will be made evident in the proof of lemma 4.

**) $[a, b]$ is a closed, (a, b) an open interval.

†) Mr. Walsh occupied himself in a paper entitled „A generalization of the Fourier cosine series" (Am. M. S. Transactions 22) with a similar series. His series is (with our notations) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos l_\nu x$ for $x \epsilon [0, \pi]$ under the following simultaneous assumptions;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n^2 < \infty \text{ and } l_0^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \frac{1}{\pi}.$$

With the aid of the theory of functions of an infinite number of variables Mr. Walsh proves the equiconvergence of his series with that of Fourier. (A cosine series is obtained from (2,2), if e. g. $\alpha = -\frac{1}{2}\pi$ and $f(t)$ is an even function.)

The coefficients a_ν and b_ν are given by the following formulas

$$a_\nu = \tfrac{1}{2}k(l_\nu)\{l'(l_\nu)\}^{-1} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \cos l_\nu t \, dt,$$

$$b_\nu = \tfrac{1}{2}k(l_\nu)\{l'(l_\nu)\}^{-1} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \sin l_\nu t \, dt, \tag{2,3}$$

where $l(z)$ belongs to the same $\{l_\nu\}$.

It is seen at once that the Fourier series of the function $f(t)$ in $[\alpha, \alpha + \pi]$ is a special case of (2,2). This Fourier series is

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} (a'_\nu \cos \nu x + b'_\nu \sin \nu x), \tag{2,4}$$

where

$$a'_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \cos \nu t \, dt,$$

$$b'_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \sin \nu t \, dt, \tag{2,5}$$

and tends to zero in $(\alpha - \pi, \alpha)$.

Further, we observe that the coefficients (2,3) are not determined uniquely, for their formulas contain an arbitrary constant b.*)

Put

$$s_n(x; f) = \sum_{\nu=-n}^{n} (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x)$$

with coefficients (2,3) and

$$S_n(x; f) = \sum_{\nu=-n}^{n} (a'_\nu \cos \nu x + b'_\nu \sin \nu x)$$

with coefficients (2,5), n being a positive integer.

Putting

$$k_n(x, t) = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=-n}^{n} k(l_\nu) \{l'(l_\nu)\}^{-1} \cos [l_\nu(x - t)]$$

and

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-n}^{n} \cos [\nu(x - t)],$$

it is obvious that

$$s_n(x; f) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t) \, k_n(x, t) \, dt$$

*) Consequently the coefficients (2,5) are not unique. Replacing them by $(1 + (-1)^\nu b) a'_\nu$ and $(1 + (-1)^\nu b) b'_\nu$ respectively, we obtain a series equiconvergent with (2,4) in $(\alpha, \alpha + \pi)$, but not in $(\alpha - \pi, \alpha)$ as we may easily convince ourselves by methods used in the theory of Fourier series.

and

$$S_n(x; f) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t)\, K_n(x, t)\, dt.$$

If (R) denotes the circumference of the circle $|z| = R$, it follows by the theorem of residues for almost all values of n*)

$$k_n(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(n+\frac{1}{2})} k(z)\, l^{-1}(z) \cos [(x - t)\, z]\, dz.$$

Putting

$$\varrho_n(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(n+\frac{1}{2})} \varrho(z)\, l^{-1}(z) \cos [(x - t)\, z]\, dz \tag{2,6}$$

and replacing $k(z)$ by (1,8), we obtain

$$k_n(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(n+\frac{1}{2})} \operatorname{cotg} \pi z \cos [(x - t)\, z]\, dz$$
$$+ \varrho_n(x, t) = K_n(x, t) + \varrho_n(x, t),$$

so that

$$s_n(x; f) - S_n(x; f) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t)\, \varrho_n(x, t)\, dt. \tag{2,7}$$

We observe that if the last integral tends to zero for $n \to \infty$, the series (2,2) and (2,4) are equiconvergent so that the question of the convergence of (2,2) reduces to that of the corresponding Fourier series. In the next chapter we give some sufficient conditions for this equiconvergence, while in chapter 4 an analogue of the Riemann-Lebesgue theorem on coefficients (2,3) is established.

3. Theorem on convergence.

In this chapter I establish the following theorem:

(A) *When $f(x)$ is of bounded variation in $[\alpha, \alpha + \pi]$, then for $x \in (\alpha, \alpha + \pi)$*

$$s_n(x; f) - S_n(x; f) \to 0 \text{ for } n \to \infty \tag{3,1}$$

uniformly in $(\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta)$, where η is an arbitrary fixed real number in $(0, 1)$.

The sum of (2,2) is therefore $\frac{1}{2}[f(x - 0) + f(x + 0)]$, as results from the theory of Fourier series.

(B) *When $\{l_\nu\} \in A_2$, then (3,1) holds for any function (2,1) uniformly in $(\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta)$.*

(C) *When $\{l_\nu\} \in A_2$ and $\varrho(z) \in P$, (3,1) is true also for $x = \alpha$*

---

*) In consequence of (1,1) it is obvious that no zero of $l(z)$ coincides with $n + \frac{1}{2}$, if n is large enough.

*provided that $f(t)$ is of bounded variation in $(\alpha + \pi - \eta, \alpha + \pi)$, and for $x = \alpha + \pi$, if $f(t)$ possesses the same property in $(\alpha, \alpha + \eta)$.**)

(D) *When $\{l_\nu\} \in A_4$ and $\varrho(z) \in P$, (3,1) is satisfied uniformly in $[\alpha, \alpha + \pi]$.*

Before proceeding to the proof of this theorem, I introduce some notations which will be employed in what follows (also in the next chapter) and prove some preliminary lemmas.

Notations.

1. β is any fixed number in $(6 \limsup_{\nu=\pm\infty} |\lambda_\nu|, \frac{1}{2})$.

2. η is any number in $(0, 1)$.

3. $\varphi \in [-\pi, \pi]$ is the argument of a complex variable $z = re^{i\varphi}$ where $r > 0$.

4. c_i $(i = 1, 2, \ldots)$ are positive constants independent of r as well as of $\varphi \in [-\pi, \pi]$. They may depend on β. The numbering is independent in every lemma.

5. n denotes in this chapter a positive integer, in the next chapter any integer.

6. k_i are positive constants independent of n and of q (see Lemma 5 e. s.).

7. $M(a) = (-\infty, \infty) - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} [(\nu + a - \delta, \nu + a + \delta) + (\nu - a - \delta, \nu - a + \delta) + (l_\nu - \delta, l_\nu + \delta) + (-l_\nu - \delta, -l_\nu + \delta)]$, where δ is an arbitrary constant in $(0, \frac{1}{24})$. $M = M(0)$.

Lemma 1. *Suppose $l(z) \in L_1$ and $r \in (1, \infty)\, M$. If*

$$\lambda(z) = l(z) \operatorname{cosec} \pi z,$$

then

$$c_1 r^{-\beta} < |\lambda(re^{i\varphi})| < c_2 r^{\beta}. \tag{3,5}$$

Proof. Since by (1,1)

$$|\lambda_\nu| < \lambda < \tfrac{1}{12} \tag{3,6}$$

for almost all values of ν, we have

$$\left| \frac{\lambda_\nu}{r - |\nu|} \right| < 1 \tag{3,7}$$

for all values of $r \in (r_0, \infty)\, M$, where $r_0 > 0$ is properly chosen, and all values of ν with one possible exception.

---

*) These conditions concerning $f(t)$ are sufficient, their necessity is not asserted.

Accordingly, for the same values of r and ν

$$\left|\log\left|1-\frac{\lambda_\nu}{re^{i\varphi}-\nu}\right|\right| < \left|\frac{\lambda_\nu}{r-|\nu|}\right| + c_3\frac{1}{(r-|\nu|)^2}. \tag{3,8}$$

(3,7) may be false for a $|\nu_0| \epsilon (r-\frac{1}{12}, r+\frac{1}{12})$. But in this case

$$|\log|1-\frac{\lambda_{\nu_0}}{re^{i\varphi}-\nu_0}|| < |\log|r-\nu_0|| + |\log|r-l_{\nu_0}|| < 2\log\frac{1}{\delta}. \tag{3,9}$$

Further, putting

$$\varrho_1(z) = \prod_{|\nu|\geqq r^2}\left(1-\frac{z}{l_\nu}\right)e^{\frac{z}{\nu}},$$

we deduce easily

$$|\log|\varrho_1(re^{i\varphi})|| < c_4 r \sum_{|\nu|\geqq r^2}\frac{|\lambda_\nu|}{|l_\nu\nu|} + c_5 r^2 \sum_{|\nu|\geqq r^2}\frac{1}{l_\nu^2} < c_6, \tag{3,10}$$

and by a similar argument

$$|\log|\varrho_2(re^{i\varphi})|| < c_7, \tag{3,11}$$

where

$$\varrho_2(z) = \prod_{|\nu|\geqq r^2}\left(1-\frac{z}{\nu}\right)e^{\frac{z}{\nu}}.$$

We may now write

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\varrho_1(z)\varrho_2^{-1}(z)\prod_{|\nu|<r^2}{}^{'}\frac{\nu}{l_\nu}\cdot\prod_{|\nu|<r^2}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{z-\nu}\right). \tag{3,12}$$

Taking the real parts of logarithms of both sides and utilising (3,6)—(3,11), it follows

$$|\log|\lambda(re^{i\varphi})|| < c_8 + \sum_{|\nu|<r^2}{}^{'}\log\left(1+\left|\frac{\lambda_\nu}{\nu}\right|\right) +$$
$$+\sum_{\nu\epsilon N_1}\frac{|\lambda_\nu|}{\sqrt{\nu^2+r^2}} + \sum_{\nu\epsilon N_2}\frac{|\lambda_\nu|}{r-|\nu|} + \sum_{\nu\epsilon N_3}\left|\frac{\lambda_\nu}{r-|\nu|}\right|.$$

In this formula $N_1 = (-r^2, -1)$ when $\varphi \epsilon [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ and $N_1 = (1, r^2)$ for the remaining values of φ. Similarly $N_2 = (0, \frac{1}{2}r)$ or $(-\frac{1}{2}r, 0)$ and $N_3 = (-r^2, r^2) - N_1 - N_2$.

Hence we deduce by employing (3,6)

$$|\log|\lambda(re^{i\varphi})|| < c_9 + \lambda\log r^2 + \lambda(\log r^2 - \log r) +$$
$$+ c_{10} + \lambda[\log\tfrac{1}{2}r + \log(r^2-r)] < c_{11} + 6\lambda\log r,$$

or

$$|\log|\lambda(re^{i\varphi})|| < c_{12} + \beta\log r,$$

which is equivalent to (3,5).

Lemma 2. *If $g(z) \in L_2(a)$ and*

$$\gamma(z) = g(z) \operatorname{cosec} [\pi(z - a)],$$

then for $r \in M(a)$ and $|a| < 1$

$$c_1 < |\gamma(re^{i\varphi})| < c_2. \tag{3,13}$$

Proof. Let $g_\nu = \nu + a + \gamma_\nu$ be the zeros of $g(z)$.

Using the well-known formula

$$\sin \pi (z - a) = \frac{\sin \pi a}{a} (z - a) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{\nu + a}\right) e^{\frac{z}{\nu}},$$

$\dfrac{\sin \pi a}{a}$ being replaced by π when $a = 0$, and proceeding on the lines of the previous proof, we obtain

$$\frac{\sin \pi a}{a} \gamma(z) = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\nu + a}{g_\nu} \prod_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma_\nu}{z - \nu - a}\right). \tag{3,14}$$

The convergence of both products is evident from (1,3).

From (1,2) it can be easily seen that taking $r \in M(a)$ large enough, we have

$$\left|\frac{\gamma_\nu}{r - |\nu + a|}\right| < \tfrac{1}{2},$$

and consequently

$$\left|\log \left|1 - \frac{\gamma_\nu}{re^{i\varphi} - \nu - a}\right|\right| < 2\left|\frac{\gamma_\nu}{r - |\nu + a|}\right|$$

for all values of ν.

Accordingly,

$$|\log |\gamma(re^{i\varphi})|| < c_3 + 2\left[\sum_{|\nu| \leqq \sqrt{r}} + \sum_{\sqrt{r} < |\nu| < 2r} + \sum_{|\nu| \geqq 2r}\left|\frac{\gamma_\nu}{r - |\nu + a|}\right|\right] <$$

$$< c_3 + c_4 \sqrt{r}\, r^{-1} + c_5 \max_{\sqrt{r} < |\nu| < 2r} |\gamma_\nu| \log r + c_6 \sum_{|\nu| \geqq 2r} \left|\frac{\gamma_\nu}{\nu}\right|,$$

and the result follows from (1,2) and (1,3).

Lemma 3. *When u is real and $|u| > 1$, we have*

$$l(u) = O(|u|^\beta), \tag{3,15}$$

$$g(u) = O(1). \tag{3,16}$$

If m is an integer,

$$|g(m + a)| \leqq k\, |\gamma_m|, \tag{3,17}$$

k being a positive constant independent of m.

Proof. (3,15) holds by (3,5) for the above $u \in M$.

Putting

$$\lambda_m(u) = \frac{u-m}{u-l_m}\,\lambda(u)$$

and omitting in (3,12) the term $1 - \dfrac{\lambda_m}{z-m}$, we deduce by repeating with this modification the analysis in the proof of Lemma 1

$$\lambda_m(u) = O(|u|^\beta)$$

also for $u \in M + (m-\delta, m+1-\delta)$.

Hence for these values of u

$$l(u) = (u - l_m)\,\lambda_m(u)\,\frac{\sin \pi u}{u-m} = O(1)\,O(|u|^\beta) = O(|u|^\beta), \quad (3,18)$$

and the left-hand side being independent of m, (3,18) holds for all real values of u.

The proof of (3,16) follows on the same lines by modifying the proof of Lemma 2. We have

$$g(u) = (u - g_m)\,\gamma_m(u)\,\frac{\sin[\pi(u-a)]}{u-m-a},$$

where

$$\gamma_m(u) = O(1) \text{ for } u \in (m+a-\delta,\, m+a+\delta).$$

Hence

$$|g(m+a)| = |\pi\gamma_m\gamma_m(m+a)|,$$

and (3,17) follows immediately.

Lemma 4. *Suppose* $r \in (1, \infty) M$. *Then*

I. $|\varrho(re^{i\varphi})| < c_1 r^\beta$. (3,19)

II. *When* $\{l_\nu\} \in A_2$, *then*

$$|\varrho(re^{i\varphi})| < c_2. \quad (3,20)$$

III. *When* $\{l_\nu\} \in A_3$ *and* $\varrho(z) \in P$, *then*

$$\varrho(re^{i\varphi}) = o(1) \text{ for } r \to \infty \quad (3,21)$$

uniformly in $[-\pi, \pi]$.

IV. *If* $\{l_\nu\} \in A_4$ *and* $\varrho(z) \in P$, *then*

$$|\varrho(re^{i\varphi})| < c_3 r^{-1}. \quad (3,22)$$

Proof. I. Putting $z = re^{i\varphi}$, we have by (3,15) for $r \in M$ and $\nu \neq 0$

$$\left|\frac{z\,l(\nu)}{(\nu - z)\,\nu}\right| < \frac{c_4 r\,|\nu|^\beta}{|\nu(r - |\nu|)|}, \quad (3,23)$$

whence the convergence of (1,9) follows immediately.*)

*) The constants c are in this proof independent also of ν.

The last expression being $O(|\nu|^{\beta-1})$, $O(r^{\beta}\,|r-|\nu||^{-1})$ and $O(r\,|\nu|^{\beta-2})$ for $|\nu| \leqq \frac{1}{2}r$, $\frac{1}{2}r < |\nu| < 2r$ and $|\nu| \geqq 2r$ respectively, we obtain on carrying out the summation of (3,23) with respect to $\nu \in (-\infty, \infty)$

$$|\varrho(re^{i\varphi})| < c_5 r^{\beta} \log r < c_6 r^{\beta'},$$

where $\beta < \beta' < \frac{1}{2}$.

II. Suppose $\varrho(z) \in P$.*) Then by (3,17) for $r \in M$

$$\left|\frac{l(\nu)}{\nu - z}\right| < c_5 \frac{|\lambda_\nu|}{|r-|\nu||}.$$

The convergence of (1,10) is now evident by (1,3).

Further, we have

$$|\varrho(re^{i\varphi})| < c_7\left[\sum_{|\nu|\leqq\sqrt{r}} + \sum_{\sqrt{r}<|\nu|<\frac{r}{2}} + \sum_{\frac{r}{2}\leqq|\nu|\leqq 2r} + \sum_{|\nu|>2r}\left|\frac{\lambda_\nu}{r-|\nu|}\right|\right]. \tag{3,24}$$

The first sum gives $O(\sqrt{r}\,r^{-1})$, the second and the third ones are $O(\max\limits_{\sqrt{r}<|\nu|\leqq 2r} |\lambda_\nu| \log r)$, while the last one is $o(1)$ for $r \to \infty$ by (1,3).

Hence it can be easily seen that (3,21) and also (3,20) in the case when $\varrho(z) \in P$ are a consequence of (1,4) and (1,2) respectively. (3,20) is established also for the case when $\varrho(z)$ does not belong to P, for such a $\varrho(z)$ differs from a $\varrho(z) \in P$ only by a constant provided that $\{l_\nu\} \in A_2$.

When $\{l_\nu\} \in A_4$, the first two sums and the last one in (3,24) are less than $c_7 r^{-1} \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\lambda_\nu|$, while the third sum is by (1,5) $O(r^{-1}\log^{-1} r \log r) = O(r^{-1})$, and (3,22) is proved.

Lemma 5. *Let $q \in [-\pi, \pi]$ be a constant independent of n and $l = \max\limits_{|z|=n+\frac{1}{2}} |\lambda^{-1}(z)|$. Then for almost all values of n*

$$I_n(q) = \int_{(n+\frac{1}{2})} |e^{iqz} l^{-1}(z)\, dz| < k_1 n l, \tag{3,25}$$

and if $|q| < \pi$,

$$I_n(q) < \frac{k_2 l}{\pi - |q|}. \tag{3,26}$$

Proof. Putting $R = n + \frac{1}{2}$ and taking n large enough,**) we obtain for $z = Re^{i\varphi}$

$$|l^{-1}(z)| < l\,|\operatorname{cosec} \pi z| = 2le_1\,[1 + e_1^2 - 2e_1 \cos(2\pi R \cos\varphi)]^{-\frac{1}{2}} < k_3 l e_1,$$

where $e_1 = e^{-\pi R|\sin\varphi|}$.

*) Consequently $\{l_\nu\} \in A_2$.

**) Notice the footnote on page 11.

Since $\sin \varphi > 2\pi^{-1} \varphi$ for $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, we have

$$l^{-1} I_n(q) < k_3 R \int_0^{2\pi} \exp(-qR \sin\varphi - \pi R |\sin\varphi|)\, d\varphi <$$

$$< k_4 R \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \exp[2R\pi^{-1}(|q| - \pi)\varphi]\, d\varphi \leq$$

$$\leq k_4 R \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi < k_5 n. \tag{3,27}$$

When $|q| < \pi$, (3,27) yields

$$l^{-1} I_n(q) < k_4 R \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \exp[2R\pi^{-1}(|q| - \pi)\varphi]\, d\varphi =$$

$$= \frac{k_4 \pi R}{2R(\pi - |q|)} < \frac{k_6}{\pi - |q|},$$

which completes the proof.

Lemma 6.

$$\text{(i)} \quad \varrho_n(x, t) = O(1) \quad \textit{for } n \to \infty \tag{3,28}$$

uniformly with respect to $x \in (\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta)$ *as well as to* $t \in [\alpha, \alpha + \pi]$.

(ii) *If, moreover,* $\{l_\nu\} \in A_4$ *and* $\varrho(z) \in P$ *then*

$$\varrho_n(x, t) = O(1) \tag{3,29}$$

uniformly for $x \in [\alpha, \alpha + \pi]$ *and* $t \in [\alpha, \alpha + \pi]$.

Proof. Put $|x - t| = q$ and $\varrho = \max\limits_{|z|=n+\frac{1}{2}} |\varrho(z)|$. Using the notations of the previous lemma, it is immediately seen from (2,6) that

$$|\varrho_n(x, t)| < \varrho[I_n(q) + I_n(-q)].$$

Observing that in virtue of (1,2) $n + \frac{1}{2} \in M$ for almost all values of n, the last expression is less than $\dfrac{k_1}{\eta}$ in the case (i) by (3,20), (3,26) and (3,13), and less than $k_2 n^{-1} n = k_2$ in the case (ii) by (3,22), (3,25) and (3,13).

Lemma 7. *Let* t_1 *and* t_2 *be any two numbers in* $[\alpha, \alpha + \pi]$. *Then*

$$\text{(a)} \quad \int_{t_1}^{t_2} \varrho_n(x, t)\, dt = o(1) \quad \textit{for } n \to \infty \tag{3,30}$$

uniformly for $x \in [\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta]$.

(b) *When* $\varrho(z) \in P$ *and* $\{l_\nu\} \in A_3$, (3,30) *holds uniformly in* $[\alpha, \alpha + \pi]$. (3,31)

Proof. The primitive function of $\varrho_n(x, t)$ being

$$J_n(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{(n+\frac{1}{2})} z^{-1} \varrho(z)\, l^{-1}(z) \sin [(t-x) z]\, dz,$$

we deduce easily, retaining the notations of the preceding proof and supposing that $t \in [\alpha, \alpha + \pi]$

$$|J_n(x, t)| < n^{-1} \varrho [I_n(q) + I_n(-q)].$$

Now, the results are obtained by employing (3,19), (3,26) and (3,5) for the case (a) and by employing (3,21), (3,25) and (3,13) for the case (b).

Proof of the theorem.

Suppose that $f(t)$ is a non-decreasing finite function in $[\alpha, \alpha + \pi]$. By applying the second mean-value theorem of the integral calculus to (2,7), we see that (2,7) tends to zero uniformly in $(\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta)$ in virtue of (3,30). A function of bounded variation being a difference of two such functions, (A) is established.

In order to prove (B) and (D), we observe that both statements are true by (A) and (3,31) respectively when $f(x)$ is a polynomial $P(x)$ in $[\alpha, \alpha + \pi]$, for a polynomial is of bounded variation. Now, $f(t)$ being any function defined by (2,1), we have by (3,28) and (3,29) respectively

$$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \varrho_n(x, t)\, [f(t) - P(t)]\, dt \right| < k_1 \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} |f(t) - P(t)|\, dt,$$

where k_1 is independent of $x \in (\alpha + \eta, \alpha + \pi - \eta)$ and of $x \in [\alpha, \alpha + \pi]$ respectively. The last integral can be made arbitrarily small by a suitable choice of $P(t)$. Combining these results we see that (B) and (D) are established.

C is proved by combining the methods of the proofs of A and of B.

4. Theorem on the coefficients.

In this chapter the following theorem will be proved:

The coefficients a_n and b_n given by (2,3) tend to zero for $n = \pm\infty$, provided that $\{l_n\} \in A_2$ and that $f(t)$ is a function defined by (2,1).

Since by the Riemann-Lebesgue theorem $\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} f(t)\, e^{il_n t}\, dt \to 0$ for $n \to \pm\infty$, it is sufficient to prove

$$k(l_n)\, \{l'(l_n)\}^{-1} = O(1).$$

Suppose $|n|$ so large that $|\lambda_n| < \frac{1}{2}$.

When $l_n \neq n$, we have

$$k(l_n) = \varrho(l_n) = O(1) - \frac{l(n)}{\pi \lambda_n} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{l(\nu)}{\nu - l_n}.$$

Arguing as in the proof of Lemma 4 we see that the last sum is $O(1)$ for $n = \pm \infty$. Further, it follows by (3,17)

$$\frac{l(n)}{\lambda_n} = O(1).$$

Accordingly, $k(l_n) = O(1)$.

When $l_n = n$, we have

$$k(l_n) = \frac{1}{\pi} l'(n) + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq n}}^{\infty} \frac{l(\nu)}{\nu - n} + b.$$

whence we see that

$$|k(l_n)| < |l'(n)| + k_1.$$

Accordingly, our problem reduces to the proof of the inequalities

$$k_2 < |l'(l_n)| < k_3. \tag{4,1}$$

Observing that by (1,2) $l_n \in M(-\frac{1}{2})$ for almost all values of n, (4,1) follows immediately from (4,10) and (3,13).

In order to prove (4,10), i. e. Lemma 10, two more lemmas are necessary.

Lemma 8. *If* $l(z) \in L_2$ *and* $I = (\vartheta_1 r, \vartheta_2 r)$ *where* $\vartheta_1 < 1$ *and* $\vartheta_2 > 1$ *are constants independent of* r *and* φ, *then for* $z = re^{i\varphi}$ *and* $r \in (2, \infty)\, M$

$$|\lambda'(z)| < c_1 \sum_{|\nu| \in I} \frac{|\lambda_\nu|}{(r - |\nu|)^2} + c_2 r^{-1}. \tag{4,2}$$

Hence

$$|\lambda'(z)| < c_3 \log^{-1} r. \tag{4,3}$$

Proof. Taking logarithms of (3,14) for $a = 0$ and differentiating, we obtain

$$\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{(z - \nu)(z - l_\nu)}.$$

Using (3,13), (1,2) and (1,3), it is easily seen that for all sufficiently large values of $r \in M$

$$|\lambda'(re^{i\varphi})| < c_4 \left[\sum_{|\nu| \leqq \vartheta_1 r} + \sum_{|\nu| \in I} + \sum_{|\nu| \geqq \vartheta_2 r} \frac{|\lambda_\nu|}{(r - |\nu|)^2} \right] <$$

$$< c_5 r r^{-2} + c_6 \sum_{|\nu| \in I} \frac{|\lambda_\nu|}{(r - |\nu|)^2} + c_7 r^{-1} < c_8 r^{-1} + c_9 \log^{-1} r$$

$$< c_{10} \log^{-1} r.$$

Lemma 9. *The zeros* l'_ν *of the function* $l'(z)$ *where* $l(z) \in L_2$ *are all real and either*

$$\{l'_\nu\} \in A(\tfrac{1}{2}) \text{ or } \{l'_\nu\} \in A(-\tfrac{1}{2}).$$

Proof. The order of $l(z)$ is 1, for $l(z)$ is a canonical product and the exponent of convergence of its zeros is equal to 1. Therefore, by a well-known theorem of Laguerre l'_ν are all real and are separated from each other by the zeros of $l(z)$.

In order that $l'_0 \geq 0$ and $l'_{-1} < 0$ we have to fix the numbering so that either

$$l_{\nu-1} < l'_\nu < l_\nu$$

or

$$l_\nu < l'_\nu < l_{\nu+1}.$$

Put $l_\nu^* = l'_\nu$ in the first case and $l_\nu^* = l'_{\nu-1}$ in the second case.

Denote by I_n the open interval, the end-points of which are $n - \frac{1}{2}$ and l_n^*. It is obvious that for $u \in I_n$

$$|l(n - \tfrac{1}{2})| < |l(u)|; \tag{4,6}$$

furthermore

$$|l(n - \tfrac{1}{2})| \leqq |l(l_n^*)|. \tag{4,7}$$

From (1,2) we see that, given any fixed $\eta_0 \in (0, 1)$, we can choose δ and a positive $N(\eta_0)$ so that

$$I'_n(\eta_0) = [n - 1 + \eta_0,\ n - \eta_0] \subset M$$

for all values of $|n| > N(\eta_0)$.

Put $\lambda_n^* = l_n^* - n + \frac{1}{2}$. We can easily show that there is a fixed $\eta_0 \in (0, 1)$ such that

$$|\lambda_n^*| \leqq \tfrac{1}{2} - \eta_0 \tag{4,8}$$

for all values of $|n| > N(\eta_0)$. For, if (4,8) were false we could choose $u_0 \in I_n$ so that

$$|u_0 - n + \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2} - \eta_0,$$

and since also $u_0 \in I'_n(\eta_0) \subset M$, (3,13) and (4,6) would yield

$$k_1 < \left|\frac{\lambda(n - \frac{1}{2})}{\lambda(u_0)}\right| = \left|\frac{l(n - \frac{1}{2})}{l(u_0)}\right| \frac{\sin \pi u_0}{\sin [\pi (n - \frac{1}{2})]} < \sin \pi\eta_0,$$

which is impossible if η_0 is small enough.

Since by (4,8) $\cos \pi\lambda_n^* > 0$ and $l'_n \in M$ for almost all values of n, we deduce from (4,7) in a similar manner

$$\left|\frac{\lambda(n - \frac{1}{2})}{\lambda(l_n^*)}\right| \leqq \cos \pi\lambda_n^*$$

for all sufficiently large values of $|n|$, whence

$$\cos \pi\lambda_n^* \geqq 1 - \left|\frac{\lambda(n - \frac{1}{2}) - \lambda(l_n^*)}{\lambda(l_n^*)}\right|,$$

or by (3,13)

$$\sin^2 \frac{\pi \lambda_n^*}{2} < k_2 \,|\lambda_n^* \lambda'(l''_n)|,$$

where $l''_n \in I_n$.

Hence by (4,3)

$$|\lambda_n^*| < k_3\, |\lambda'(l''_n)| = O(\log^{-1} |n|). \tag{4,9}$$

Hereby the first required property of $\{l'_\nu\}$ is proved.

In order to prove also

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{\lambda_\nu^*}{\nu}\right| < \infty,$$

we employ (4,2), (4,9) and (1,3). Observing that $l''_s \in M$ for almost all values of s, we have for $N \to \infty$

$$\sum_{|s|>N} \left|\frac{\lambda_s^*}{s}\right| = O\left(\sum_{|s|>N} \left|\frac{\lambda'(l''_s)}{s}\right|\right) =$$

$$= O(\sum_{|s|>N} |s|^{-2}) + O[\sum_{|s|>N} |s|^{-1} \sum_{\frac{1}{2}|s|<|\nu|<2|s|} |\lambda_\nu| (|l''_s| - |\nu|)^{-2}] =$$

$$= o(1) + O[\sum_{|\nu|>\frac{1}{2}N} |\lambda_\nu| \sum_{|s|>\frac{1}{2}|\nu|} |s|^{-1} (|l''_s| - |\nu|)^{-2}] =$$

$$= o(1) + O\left[\sum_{|\nu|>\frac{1}{2}N} |\lambda_\nu|\, |\nu|^{-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right)^2\right] = o(1),$$

whence the result.

Lemma 10. *Putting*

$h = -\dfrac{l'(0)}{l_0}$ *when* $l_0 \neq 0$, *and* $h = l''(0)$ *when* $l_0 = 0$, *we have*

$$h^{-1}\, l'(z) \in L_2(\pm \tfrac{1}{2}), \tag{4,10}$$

provided that $l(z) \in L_2$.

Proof. $l'(z)$ being an integral function of order 1, it can be written in the form

$$l'(z) = he^{\gamma z}(z - l'_0) \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{l'_\nu}\right) e^{\frac{z}{\nu}} = he^{\gamma z}\, t(z) = he^{\gamma z}\, \tau(z) \cos \pi z.$$

γ is a real number, for $l'(z)$ is real for real values of z.

The zeros l'_ν of the function $t(z)$ belonging to $A_2(\pm \frac{1}{2})$, $t(z) \in L_2(\pm \frac{1}{2})$ and Lemma 2 yields for all real values of $u \in M(-\frac{1}{2})$

$$|\tau(u)| > k_1{}^{*})$$

and consequently also

$$|t(u)| > k_2.$$

---

*) k_i are here positive constants independent of u under consideration.

On the other hand, we obtain from (3,13) and (4,3)

$$|l'(u)| = |\pi\lambda(u) \cos \pi u + \lambda'(u) \sin \pi u| < k_3$$

for $u \in M$.

Were now $\gamma > 0$, it would follow for $u \in (1, \infty)\, MM(-\frac{1}{2})$

$$k_3 > |l'(u)| = |h|\, e^{\gamma u}\, |t(u)| > k_2 h e^{\gamma u} \to \infty$$

for $u \to \infty$, which is impossible. The impossibility of $\gamma < 0$ is shown similarly. Accordingly, $\gamma = 0$ and (4,10) is proved.

*

O jistém zobecnění Fourierových řad.

(Obsah předešlého článku.)

Funkci reálné proměnné $f(x)$ s variací konečnou lze pro $x \in (\alpha, \alpha + \pi)$,*) kde α je libovolné číslo reálné, rozvinouti v řadu

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (a_\nu \cos l_\nu x + b_\nu \sin l_\nu x) = \tfrac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)],$$

při čemž l_ν jsou čísla hovící podmínkám

$$l_\nu < l_{\nu+1},\ l_{-1} < 0 \leqq l_0,\ l_\nu = \nu + \lambda_\nu,$$

$$\limsup_{\nu=\pm\infty} |\lambda_\nu| < \tfrac{1}{12}$$

a koeficienty a_ν a b_ν jsou dány vzorci (2,3) (viz (1,7)—(1,10)).

Předpokládáme-li ještě (1,2) a (1,3), je naše řada pro jakoukoli funkci v intervalu $(\alpha, \alpha + \pi)$ integrace schopnou**) v tomto intervalu ekvikonvergentní s řadou Fourierovou s koeficienty (2,5). Za tohoto předpokladu platí také

$$a_\nu \to 0,\ b_\nu \to 0 \text{ pro } \nu = \pm\infty.$$

Za dalších předpokladů pro l_ν platí výše zmíněná ekvikonvergence též pro $x = \alpha$ a $x = \alpha + \pi$.

---

*) Interval otevřený.

**) Ve smyslu Lebesgueově; i co do absolutní hodnoty.

A hypercomplex proof of the Jordan-Kronecker's „Principle of reduction".

Štefan Schwarz, Bratislava.

(Received November 1st, 1945.)

I.

This important theorem of the Galois' theory can be proved very simply by means of only elementary facts known from the theory of algebras.

Let $f(x)$ and $g(x)$ be two separable irreducible polynomials of degree m resp. n over a commutative field P. Let α, β be the roots of $f(x) = 0$ and $g(x) = 0$ respectively. Let us denote $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}(\alpha)$ and $\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}(\beta)$. Let

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_r(x), \tag{1}$$

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \dots g_s(x) \tag{2}$$

be the decompositions of $f(x)$ and $g(x)$ into irreducible factors of degree m_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ and n_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ in P_2 and P_1 respectively. Then, the Jordan-Kronecker's Principle of reduction says: It is

i) $r = s$,

ii) by a suitable arrangement of the factors $\dfrac{m_i}{n_i} = \dfrac{m}{n}$ *(for every i).*

The proof is as follows. We form the hypercomplex system

$$\mathfrak{S} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$$

over P.

We can write $\mathfrak{S}$ in two different manners.

It is first (we use the usual notation)

$$\mathfrak{S} = \mathsf{P}_{1\,\mathsf{P}_2} = \mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\alpha + \mathsf{P}_2\alpha^2 + \dots + \mathsf{P}_2\alpha^{m-1} \cong \mathsf{P}_2[z]/(f(z)).$$

On the other hand we have also

$$\mathfrak{S} = \mathsf{P}_{\mathsf{P}_1} = \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_1\beta + \mathsf{P}_1\beta^2 + \dots + \mathsf{P}_1\beta^{n-1} \cong \mathsf{P}_1[z]/(g(z)),$$

where $\mathsf{P}_1[z]$, $\mathsf{P}_2[z]$ denote rings of polynomials in one variable z over P_1 and P_2 respectively.

The structures of the rings of remainder-classes on the right side of the last relations can be easily given. Writing the factorisation of $f(z)$ in $\mathsf{P}_2[z]$ as above, we have

$$\mathfrak{S} \cong \mathsf{P}_2[z]/(f(z)) = \mathsf{P}_2[z]/(f_1 \cdot f_2 \cdots f_r).$$

But, this ring can be written as a direct sum of the fields Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_r$ corresponding[1]) to the irreducible factors $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_r(z)$ in $\mathsf{P}_2[z]$.

Therefore

$$\mathfrak{S} \doteq \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \ldots \oplus \Phi_r,$$

where

$$\Phi_i \cong \mathsf{P}_2[z]/(f_i(z)), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

In the same manner we treat the second equation (2) and we obtain the direct decomposition

$$\mathfrak{S} = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots \oplus \Gamma_s,$$

where

$$\Gamma_i \cong \mathsf{P}_1[z]/(g_i(z)), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

The decomposition of a ring, possessing a unit, in two-sided direct irreducible components is uniquely determined[2]). Therefore, it is

i) $r = s$ and

ii) by a suitable arrangement $\Gamma_i = \Phi_i$ (for every i),

i. e.

$$\mathsf{P}_1[z]/(g_i(z)) \cong \mathsf{P}_2[z]/(f_i(z)).$$

The order of the field $\mathsf{P}_1[z]/(g_i(z))$ over the field P is evidently $m \cdot n_i$. The order of $\mathsf{P}_2[z]/(f_i(z))$ over P is $n \cdot m_i$.

From that isomorphisme follows therefore

$$mn_i = nm_i,$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m_i}{n_i},$$

q. e. d.

II.

From the isomorphisme just proved

$$\mathsf{P}_1[z]/(g_i(z)) \cong \mathsf{P}_2[z]/(f_i(z))$$

---

1) See e. g.: Van der Waerden, Moderne Algebra II, Berlin 1931, p. 48.
2) See e. g.: Van der Waerden, ibid., p. 162.

follows an interesting and very easy proof of the following theorem due to A. Loewy (M. Z., 15, 1922, p. 266)).

Let — under the same suppositions as above — the explicite factorisation of $f(x)$ and $g(x)$ in P_2 and P_1 respectively be

$$f(x) = f_1(x, \beta) \,.\, f_2(x, \beta) \ldots f_s(x, \beta),$$

$$g(x) = g_1(x, \alpha) \,.\, g_2(x, \alpha) \ldots g_s(x, \alpha).$$

If we write $g_i(x, \alpha)$ in the form of an integral function in α of the lowest degree (what is possible because $\mathsf{P}(\alpha) = \mathsf{P}[\alpha]$) and replace in $g_i(x, \alpha)$ the variable x by the number β and the number α by the indeterminate x, we obtain a polynomial $g_i(\beta, x)$ possessing the following propriety: $f_i(x, \beta)$ is the greatest common divisor of $f(x)$ and $g_i(\beta, x)$.

Proof: We shall transform the left side of the isomorphisme

$$\mathsf{P}_1[x]/(g_i(x, \alpha)) \cong \mathsf{P}_2[x]/(f_i(x,\beta)). \qquad (*)$$

First it is evidently

$$\mathsf{P}_1[x]/(g_i(x, \alpha)) \cong \mathsf{P}[x, \xi]/(f(\xi), g_i(x, \xi)),$$

where $\mathsf{P}[x, \xi]$ is the polynomial domain of all polynomials in two variables x and ξ with coefficients in the commutative field P. In fact, α satisfies the equation $f(\xi) = 0$, which is irreducible in P. Applying the transformation $x \rightarrow \xi$, $\xi \rightarrow x$ we have the further isomorphisme

$$\mathsf{P}_1[x]/(g_i(x, \alpha)) \cong \mathsf{P}[x, \xi]/(f(x), g_i(\xi, x)).$$

According to the second theorem of isomorphisme ($(g(\xi))$ is a sub-modul of the ideal $(f(x), g_i(\xi, x))$) we obtain

$$\mathsf{P}[x,\xi]/(f(x), g_i(\xi, x)) \cong \mathsf{P}[x, \xi]/(g(\xi))\big/(f(x), g_i(\xi, x))/(g(\xi)).$$

But the last expression is evidently isomorphic with

$$\mathsf{P}_2[x]/(f(x), g_i(\beta, x)).$$

It is therefore

$$\mathsf{P}_1[x]/(g_i(x, \alpha)) \cong \mathsf{P}_2[x]/(f(x), g_i(\beta, x)).$$

Comparing it with the relation (*) we have

$$\mathsf{P}_2[x]/(f(x), g_i(\beta, x)) \cong \mathsf{P}_2[x]/(f_i(x, \beta)).$$

Therefore (in the sense of division!)

$$f_i(x, \beta) = (f(x), g_i(\beta, x)),$$

q. e. d.

---

[a]) This theorem enables us to find the polynominal $g_i(x)$ corresponding to $f_i(x)$ and inversely.

Bibliography.

Bibliography concerning the matter of this paper can be found in: Kneser, M. A., **30** (1887), 195. — Landsberg, Crelle J. **132** (1907), 1-20. A. Loewy, M. Z. **15** (1922), 261. — Haupt, Einführung in die höhere Algebra, II (1929), 544.

*

Hyperkomplexný dôkaz Jordan-Kroneckerovej vety o vzájomnej redukcii.

(Obsah predošlého článku.)

Obsahom tejto poznámky je zaujímavý dôkaz tejto — pre Galoisovu teoriu dôležitej — vety, pochádzajúcej od Kroneckera: Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú dva ireducibilné polynomy z telesa P, stupňov m resp. n, z ktorých prvý resp. druhý nech má koreň α resp. β. Nech v $\mathsf{P}(\alpha)$ platí rozklad $g(x)$ v ireducibilných súčiniteľov tvaru (2) a v $\mathsf{P}(\beta)$ rozklad $f(x)$ v tvaru (1).

Potom platí:

1. $r = s$,

2. pri vhodnom poradí $\dfrac{m_i}{n_i} = \dfrac{m}{n}$,

kde m_i, n_i sú stupne polynomov $f_i(x)$ resp. $g_i(x)$.

Dôkaz prevedieme tak, že hyperkomplexný systém $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ rozložíme formálne dvoma spôsobmi (odpovedajúcimi rozkladom $f(x)$ a $g(x)$) na direktný súčet telies a užijeme jednoznačnosti takého rozkladu.

Z izomorfizmu (*) dokázali sme potom túto vetu pochádzajúcu od A. Loewyho: Píšme $g_i(x)$ a $f_i(x)$ ako celistvú funkciu v α resp. β najnižšieho stupňa v tvaru $g_i(x, \alpha)$ resp. $f_i(x, \beta)$. Potom platí: $f_i(x, \beta)$ je najväčšiou spol. mierou polynomov $f(x)$ a $g_i(\beta, x)$.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 71 (1946)

Příspěvek k reducibilitě binomických kongruencí.

Štefan Schwarz, Bratislava.

(Došlo 1. listopadu 1945.)

I.

Obsahem této poznámky jest rozřešení otázky po počtu a stupních ireducibilních faktorů binomické kongruence

$$x^n - a \equiv 0 \pmod p, \quad (n, p) = (a, p) = 1. \tag{1}$$

Pokud jde o lineární faktory takové kongruence, jest všeobecně znám klasický výsledek, který říká: nutná a postačující podmínka pro to, aby kongruence (1) měla řešení, jest splnění vztahu

$$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p,$$

kde $d = (n, p-1)$. Jestliže jest tato podmínka splněna, má (1) právě d řešení.

V této poznámce ukážeme, jak lze nalézti výsledek podobného rázu i pro faktory k-tého stupně. Nejenom výsledky, nýbrž i postup důkazu sám o sobě, nepostrádá jisté zajímavosti.

Platí věta:

Nechť jest dána kongruence (1) n-tého stupně. Nechť k jest celé číslo, $1 \leq k \leq n$. Položme $d_k = (p^k - 1, n)$. Znakem σ_k označme počet ireducibilních faktorů k-tého stupně kongruence (1). Nechť konečně $k' > k'' > k''' > \ldots > 1$ jsou všichni dělitelé čísla k, menší než k. Potom platí

1. pro ta k, pro která jest $a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod p$,

$$\text{je } k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + k''\sigma_{k''} + \ldots + \sigma_1 \equiv 0 \pmod p; \tag{2}$$

2. pro ta k, pro která jest $a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \equiv 1 \pmod p$,

$$\text{je } k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + k''\sigma_{k''} + \ldots + \sigma_1 \equiv d_k \pmod p. \tag{3}$$

Poznámka: Vztahy (2) a (3) dávají zřejmě rekurentní relace, z nichž lze $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ bezprostředně vypočísti (alespoň pro $n < p$).

Důkaz: Nechť $\varphi(x)$ je libovolný (mod p) ireducibilní polynom k-tého stupně s racionálními celými koeficienty. Jeden jeho kořen, ležící ve vhodném rozšíření tělesa tříd zbytků (mod p) K_p označme znakem j. Jak jest známo, jsou potom všechny kořeny všech nerozložitelných polynomů k-tého stupně nad tělesem zbytkových tříd mod p obsaženy v tělese $K_p(j)$. V témž tělese jsou dále obsaženy i všechny kořeny všech nerozložitelných polynomů stupňů $k', k'', k''', \ldots, 1$, kde $k', k'', k''', \ldots, 1$ mají nahoře zavedený význam. Těleso $K_p(j)$ obsahuje p^k elementů tvaru

$$\xi = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_{k-1} j^{k-1} \quad (0 \leq c_i \leq p - 1). \qquad (4)$$

Každý element $\xi \not\equiv 0$ (mod p) hoví vztahu

$$\xi^{p^k - 1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Pro $\xi \equiv 0$ (mod p) jest ovšem

$$\xi^{p^k - 1} \equiv 0 \pmod{p}.^{1)}$$

Uvažujme výraz

$$\sum_{x=\xi} [x^n - a]^{p^k - 1} \pmod{p},$$

kde součet se vztahuje na všechny elementy (4) v počtu p^k. V tomto součtu bude (mod p) tolik jedniček, kolik jest závorek různých od nuly a tolik nul (mod p), kolik má kongruence (1) kořenů mezi elementy (4).

Veličiny (4) hoví však pouze ired. polynomům stupně k, resp. k', resp. k'', ... atd. Při tom ke každému ired. polynomu stupně k-tého přísluší skupina k veličin ξ ze skupiny veličin (4). Podobně pro dělitele $k', k'', \ldots$ atd.

Ježto součet obsahuje p^k sčítanců, jest zřejmě

$$\sum_{\xi} [x^n - a]^{p^k - 1} \equiv p^k - k\sigma_k - k'\sigma_{k'} - k''\sigma_{k''} - \ldots - \sigma_1 \pmod{p}. \qquad (5)$$

Abychom upravili součet na levé straně, připomeňme si: ze vztahu

$$x^{p^k - 1} - 1 \equiv \prod_{\xi \neq 0} (x - \xi) \pmod{p}$$

plyne elementárními algebraickými úpravami pro potenční součty

$$s_i \equiv \sum_{\xi} \xi^i \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{pro } p^k - 1 \nmid i, \\ -1 \pmod{p}, & \text{pro } p^k - 1 \mid i. \end{cases}$$

---

1) Jinak lze také říci: Platí $x^{p^k} - x \equiv \Pi\, \varphi(x)$ (mod p), kde součin se vztahuje na všechny (mod p) ired. polynomy $\varphi(x)$, jichž stupeň dělí k.

Vztah (5) upravujeme umocněním závorky. Ježto budeme dle x sčítati, budou nás zajímati pouze členy s x^i, kde exponent i jest dělitelný číslem $p^k - 1$. To jsou členy, v nichž exponent u x jest tvaru

$$n\left(p^k - 1 - l \cdot \frac{p^k - 1}{d_k}\right) \quad (l = 0, 1, \ldots, d_k - 1).$$

Zbývající členy můžeme vynechati.

Jest tedy, označíme-li k vůli přehlednosti na chvíli $\sigma = k\sigma_k + \ldots + \sigma_1$,

$$-\sigma \equiv \sum_{\xi} \sum_{l=0}^{l=d_k-1} \cdot (-1)^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \binom{p^k - 1}{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \cdot x^{n\left(p^k-1-l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}\right)} \cdot a^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \pmod p.$$

Provedeme-li sumaci dle ξ, jest

$$\sigma \equiv \sum_{l=0}^{d_k-1} (-1)^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \binom{p^k - 1}{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} a^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \pmod p.$$

Dále je však

$$\binom{p^k - 1}{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} = \frac{(p^k-1)(p^k-2)\ldots\left(p^k - l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}\right)}{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}\left(l \cdot \frac{p^k-1}{d_k} - 1\right)\ldots 2 \cdot 1} \equiv$$

$$\equiv (-1)^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \pmod p.$$

Tedy

$$\sigma \equiv \sum_{l=0}^{d_k-1} a^{l \cdot \frac{p^k-1}{d_k}} \pmod p. \tag{6}$$

Nyní nutno rozeznávati dva případy:

1. Je-li

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod p,$$

je

$$\sigma \equiv \frac{a^{p^k-1} - 1}{a^{\frac{p^k-1}{d_k}} - 1} \pmod p,$$

t. j.

$$\sigma \equiv 0 \pmod p,$$

jinak

$$k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + \ldots + \sigma_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

2. Je-li

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \equiv 1 \pmod{p},$$

plyne z relace (6)

$$\sigma \equiv \sum_{l=0}^{d_k-1} 1 \pmod{p},$$

t. j.

$$k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + \ldots + \sigma_1 \equiv d_k \pmod{p}.$$

Tím jest naše věta dokázána.

II.

Z rovnic (2) a (3) lze vypočísti explicitně veličiny $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. K vůli jednoduchosti zaveďme symbol δ_k, který definujeme takto:

$$\delta_k = \begin{cases} 0, \text{ pro ta } k, \text{ pro která jest } a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod{p}, \\ d_k, \text{ pro ta } k, \text{ pro která jest } a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \equiv 1 \pmod{p}. \end{cases}$$

Systém rekurentních relací vypadá takto:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \delta_1, \\ 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv \delta_2, \\ 3\sigma_3 + \sigma_1 &\equiv \delta_3, \\ 4\sigma_4 + 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv \delta_4, \\ 5\sigma_5 + \sigma_1 &\equiv \delta_5, \\ 6\sigma_6 + 3\sigma_3 + 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv \delta_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \pmod{p} \qquad (7)$$

Odtud plyne přímo (pokud index u příslušného σ_k není dělitelný p)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv \delta_1, \\ \sigma_2 &\equiv \tfrac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1), \\ \sigma_3 &\equiv \tfrac{1}{3}(\delta_3 - \delta_1), \\ \sigma_4 &\equiv \tfrac{1}{4}(\delta_4 - \delta_2), \\ \sigma_5 &\equiv \tfrac{1}{5}(\delta_5 - \delta_1), \\ \sigma_6 &\equiv \tfrac{1}{6}(\delta_6 - \delta_3 - \delta_2 + \delta_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \pmod{p} \qquad (8)$$

V případě $n < p$ udává soustava (7) hodnotu veličin $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ jednoznačně. V případě $n > p$ nedává však (7) o číslech $\sigma_p, \sigma_{2p}, \sigma_{3p}, \ldots$ žádných informací. Relace pro $\sigma_p, \sigma_{2p}, \sigma_{3p}, \ldots$ vypadají totiž takto:

$$\begin{aligned} p\sigma_p + \sigma_1 &\equiv \delta_p, \\ 2p\sigma_{2p} + p\sigma_p + 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv \delta_{2p}, \\ 3p\sigma_{3p} + p\sigma_p + 3\sigma_3 + \sigma_1 &\equiv \delta_{3p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

atd.

Sčítanci obsahující $\sigma_p, \sigma_{2p}, \sigma_{3p}, \ldots$ jsou $\equiv 0 \pmod p$, v relacích vypadnou a vztahy (9) dávají pak první relace (7) zároveň se shodami $\delta_1 \equiv \delta_p$, $\delta_2 \equiv \delta_{2p}$, atd., jež lze dokázati ostatně také přímo. Veličiny $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, které nejsou tvaru σ_{kp}, nejsou pak relacemi (8) také určeny jednoznačně (jsouce udány pouze mod p). (Přirozeně v konkretních případech lze je vzhledem ke vztahu $\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + + \ldots + n\sigma_n = n$ určiti zpravidla bez námahy.)

Z odvozených výsledků lze činiti různé zajímavé závěry pro ired. faktory k-tého stupně dané kongruence. Pro lineární faktory dává $\sigma_1 \equiv \delta_1$, pro $n < p$ přímo výsledek v úvodu zmíněný. Pro faktory kvadratické, kubické a obecněji pro faktory prvočíselného stupně q platí tato věta:

Nechť n, σ_k, d_k mají nahoře zavedený význam. Nechť $q > 1$ je prvočíslem, $(p, q) = 1$. Potom pro číslo σ_q platí tyto vztahy:

1. Je-li

$$a^{\frac{p-1}{d_1}} \equiv 1 \pmod p,$$

je

$$\sigma_q \equiv \frac{1}{q}\{(p^q - 1, n) - (p - 1, n)\} \pmod p.$$

2. Je-li

$$a^{\frac{p-1}{d_1}} \not\equiv 1 \pmod p \tag{*}$$

a kromě toho

α) $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \not\equiv 1 \pmod p$, je $\sigma_q \equiv 0 \pmod p$.

β) $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \equiv 1 \pmod p$, je $\sigma_p \equiv \frac{1}{q}(p^q - 1, n)$.

Při tom: Případ 2β může (ale nemusí) nastati jenom tenkráte, platí-li $q \mid p - 1$. Je-li $q \nmid p - 1$, nastane buď případ 2α, anebo případ 1.

Důkaz: 1. Nechť $a^{\frac{p-1}{d_1}} \equiv 1 \pmod p$. Pak je též $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \equiv 1 \pmod p$. K důkazu tohoto tvrzení stačí dokázati, že číslo $\frac{p^q - 1}{d_q}$ jest násobkem čísla $\frac{p - 1}{d_1}$, t. j. že podíl

$$\frac{p^q - 1}{d_q} : \frac{p-1}{d_1}$$

jest číslem celým. Jelikož $(n, p - 1) = d_1$, je $n = \alpha \cdot d_1$, $p - 1 = \beta \cdot d_1$, kde $(\alpha, \beta) = 1$. Tedy jest

$$\frac{p^q - 1}{d_q} : \frac{p-1}{d_1} = \frac{p^q - 1}{(p^q - 1, n)} : \frac{p-1}{(p-1, n)} = \frac{(p-1) \cdot \Sigma}{(p-1 \cdot \Sigma, n)} :$$

$$: \frac{p-1}{d_1} = \frac{\Sigma}{(\beta d_1 \cdot \Sigma, \alpha d_1)} : \frac{1}{d_1} = \frac{\Sigma}{(\beta \cdot \Sigma, \alpha)},$$

kde znakem Σ jsme označili $\Sigma = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{q-1}$. Ježto dále $(\alpha, \beta) = 1$, jest $(\beta\Sigma, \alpha)$ dělitelem čísla Σ a podíl $\frac{\Sigma}{(\beta\Sigma, \alpha)}$ jest číslem celým.

V rovnicích $\sigma_1 \equiv \delta_1$, $\sigma_q \equiv \frac{1}{q} (\delta_q - \delta_1)$ jest tedy $\delta_1 = d_1$, $\delta_q = d_q$, což dává horní vzorec.

2. Nechť jest dále $a^{\frac{p-1}{d_1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$. První rovnice dává $\sigma_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Je-li nadto $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \equiv 1 \pmod{p}$, jest $\delta_q = d_q = (p^q - 1, n)$, tedy $\sigma_q \equiv \frac{1}{q} (p^q - 1, n)$.

Je-li však $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ jest $\delta_q = 0$, tedy $\sigma_q \equiv 0 \pmod{p}$, c. b. d.

Ukážeme nyní, že platí-li $q \nmid p - 1$ a relace (*), nastane nutně případ 2α. Předpokládejme, že platí $a^{\frac{p^q-1}{d_q}} \equiv 1$, $a^{\frac{p-1}{d_1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ a ptejme se, jaké důsledky z toho plynou pro číslo q. Viděli jsme, že lze psáti

$$\frac{p^q - 1}{d_q} = \frac{p-1}{d_1} \cdot s,$$

kde s je celým číslem. Vzhledem k předpokladu $a^{\frac{p-1}{d_1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ může býti číslo $a^{\frac{p-1}{d_1} \cdot s}$ shodno s 1 (mod p) jenom tenkráte, mají-li s a d_1 společného dělitele $m > 1$. Ježto je $d_1 / p - 1$ a s / Σ, platí také $m / p - 1$ a m / Σ. Z první relace plyne $p \equiv 1 \pmod{m}$. Ze vztahu m / Σ plyne však

$$\begin{aligned} 1 + p + p^2 + \ldots + p^{q-1} &\equiv 0 \pmod{m}, \\ \text{t. j.} \quad 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 &\equiv 0 \pmod{m}, \\ q &\equiv 0 \pmod{m}. \end{aligned}$$

Ježto je $q > 1$ prvočíslem, je $q = m$, tedy $q/p - 1$. Případ 2β je tedy možný jenom tenkráte, platí-li $q/p - 1$, c. b. d.

Z odvozené věty lze činiti různé závěry. Jednoduchým důsledkem jest na příklad tato věta:

Polynom $x^n - a$, $(a, p) = (n, p) = 1$ jest mod p nerozložitelný tehdy a jen tehdy, je-li pro každé $k < n$ splněn vztah

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

a platí-li pro $k = n$

$$a^{\frac{p^n-1}{d_n}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Důkaz: a) Je-li podmínka ve větě uvedená splněna, je systém (2) a (3) tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv 0, \\ 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv 0, \\ 3\sigma_3 + \sigma_1 &\equiv 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$n\sigma_n + n'\sigma_{n'} + \ldots + \sigma_1 \equiv d_n \not\equiv 0.$$

Odtud plyne po řadě

$$\sigma_1 \equiv 2\sigma_2 \equiv 3\sigma_3 \equiv \ldots \equiv (n-1)\,\sigma_{n-1} \equiv 0,$$

tedy

$$n\sigma_n \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Užitím rovnice

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \ldots + n\sigma_n = n$$

plyne pak, že je nutně $\sigma_n = 1$, tedy $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{n-1} = 0$.

b) Budiž obráceně $k = \varkappa < n$ první index takový, že

$$a^{\frac{p^\varkappa-1}{d_\varkappa}} \equiv 1 \pmod{p},$$

kdežto pro $k < \varkappa$ je

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Potom ze vztahů (2), (3) plyne opět

$$\sigma_1 \equiv 2\sigma_2 \equiv 3\sigma_3 \equiv \ldots \equiv (\varkappa-1)\,\sigma_{\varkappa-1} \equiv 0,$$

$$\varkappa \,.\, \sigma_\varkappa \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Tedy je $\sigma_\varkappa \neq 0$, t. j. polynom $x^n - a$ jest modulo p rozložitelný, maje ireducibilní faktor stupně $\varkappa < n$. Nadto vychází rovněž, že je $\varkappa \not\equiv 0 \pmod{p}$.

III.

Abychom správně odhadli dosah odvozených vět, provedeme ještě dva instruktivní příklady.

Příklad 1. Jest vyšetřiti rozklad polynomu

$$x^4 + 1$$

dle modulu p.

Potřebné veličiny jsou sestaveny v tabulku:

	p je tvaru	$d_1 = (p^1 - 1, 4)$	$d_2 = (p^2 - 1, 4)$	$d_3 = (p^3 - 1, 4)$	$d_4 = (p^4 - 1, 4)$	$(-1)^{\frac{p^1-1}{d_1}}$	$(-1)^{\frac{p^2-1}{d_2}}$	$(-1)^{\frac{p^3-1}{d_3}}$	$(-1)^{\frac{p^4-1}{d_4}}$
$p = 4k + 3$		2	4	2	4	-1	1	-1	1
$p = 4k + 1$	$p = 8k + 1$	4	4	4	4	1	1	1	1
	$p = 8k + 5$	4	4	4	4	-1	1	-1	1

Systémy kongruencí (2) a (3) jsou tyto:

a) pro p tvaru $4k + 3$

$$\sigma_1 \equiv 0, \quad 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4, \quad 3\sigma_3 + \sigma_1 \equiv 0, \quad 4\sigma_4 + 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4,$$

t. j.

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 = 2;$$

b) pro p tvaru $8k + 1$

$$\sigma_1 \equiv 4, \quad 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4, \quad 3\sigma_3 + \sigma_1 \equiv 4, \quad 4\sigma_4 + 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4,$$

t. j.

$$\sigma_1 = 4, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0;$$

c) pro p tvaru $8k + 5$

$$\sigma_1 \equiv 0, \quad 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4, \quad 3\sigma_3 + \sigma_1 \equiv 0, \quad 4\sigma_4 + 2\sigma_2 + \sigma_1 \equiv 4,$$

t. j.

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0, \quad \sigma_2 = 2.$$

Dokázali jsme tedy tuto větu:

Polynom $x^4 + 1$ jest modulo každého prvočísla p rozložitelný a to: je-li p tvaru $8k + 3, 5, 7$ na dva faktory druhého stupně; je-li p tvaru $8k + 1$ na čtyři faktory lineární.

Poznámka: Existence racionálně nerozložitelných polynomů, jež jsou rozložitelné dle každého prvočíselného modulu p, jest známa. Dá se na příklad jednoduše dokázati, že má tuto vlastnost každý ired. polynom s rac. koeficienty 4. stupně, jehož Galoisovou grupou jest Kleinova čtyřková grupa.[2]) Ostatně plyne bezprostředně z teorie třídních těles, že totéž platí (s eventuální výjimkou konečného počtu prvočísel) pro každý abelovský polynom, jehož Galoisova grupa má tu vlastnost, že řád každého elementu jest menší než řád grupy, t. j. není cyklickou. (Na příklad jest tomu tak pro každou rovnici pro dělení kruhu n-tého stupně, je-li $n \neq 2, 4, p^t, 2p^t$, kde p je liché číslo.)

Příklad 2. Ptejme se, jak se rozpadne polynom

$$x^q - a \pmod{p}, \tag{10}$$

je-li q prvočíslem, $q < p$.

Zde jest číslo $d_k = (p^k - 1, q)$ rovné buď číslu q nebo číslu 1. Nechť p patří mod q k exponentu l.

a) Nechť jest nejdříve $l = 1$. Pak jest $d_k = (p^k - 1, q) = q$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, q$.

α) Je-li

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p},$$

pak jest také

$$a^{\frac{p^2-1}{q}} \equiv 1, \quad a^{\frac{p^3-1}{q}} \equiv 1, \ldots \text{ atd.}$$

Systém kongruencí (7) je tvaru

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv q, \\ 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv q, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ q\sigma_q + \sigma_1 &\equiv q. \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

Ježto je $q < p$, plyne z první kongruence $\sigma_1 = q$ a tedy $\sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_q = 0$. Polynom (10) se úplně rozpadne.

β) Je-li

$$a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{p},$$

pak k sestavení kongruencí musíme věděti, které jest nejnižší číslo k, pro které jest

$$a^{\frac{p^k-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

---

[2]) Na to upozornil na speciálním případě již Frobenius (Berl. Berichte 1896, I, str. 689, srovnej Pólya - Szegö, Aufgaben aus der Analysis II, str. 351) a Hilbert (Gött. Nachrichten 1897, str. 53, Werke II, str. 388-9.)

Zřejmě platí

$$a^{\frac{p^k-1}{q}} = a^{\frac{p-1}{q}(1+p+p^2+\ldots+p^{k-1})} \equiv a^{\frac{p-1}{q}\cdot k} \pmod p.$$

[Poslední relace plyne z toho, že je $1 + p + p^2 + \ldots + p^{k-1} \equiv$ $\equiv k \pmod{p-1}$.] Avšak vzhledem k předpokladu $a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod p$ může být číslo $a^{\frac{p-1}{q}\cdot k}$ shodno s 1 (mod p) jenom tehdy, je-li q dělitelem čísla k. Nejmenší takové číslo jest $k = q$. Tedy v tomto případě jest

$$a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1,\quad a^{\frac{p^2-1}{q}} \not\equiv 1,\ \ldots,\ a^{\frac{p^{q-1}-1}{q}} \not\equiv 1,\quad a^{\frac{p^q-1}{q}} \equiv 1 \pmod p.$$

Podle věty sub II dokázané jest tedy polynom $x^q - a$ (mod p) ireducibilní.

b) Nechť jest za druhé $l > 1$. Pak jest

$$d_1 = 1,\quad d_2 = 1,\ \ldots,\ d_{l-1} = 1,\quad d_l = q.$$

Ukážeme nejdříve, že jest nyní splněn vztah

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \equiv 1 \pmod p,\quad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

Pro $k = 1, 2, \ldots, l-1$ je to zřejmé. Pro $k = l$ uvažme, že celé číslo $\frac{p^l-1}{d_l} = \frac{p^l-1}{q}$ lze psáti ve tvaru

$$(p-1)\cdot\frac{1+p+\ldots+p^{l-1}}{q}.$$

Při tom jest naznačený podíl celým číslem. Kdyby totiž q dělilo $p-1$ a nikoliv vypsaný součet, bylo by $l = 1$, což je proti předpokladu. Tedy jest též $a^{\frac{p^l-1}{q}} \equiv 1 \pmod p$.

Systém kongruencí pro čísla $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ vypadá tedy takto:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv 1,\\ 2\sigma_2 + \sigma_1 &\equiv 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ (l-1)\,\sigma_{l-1} + \ldots + \sigma_1 &\equiv 1,\\ l\sigma_l + \ldots + \sigma_1 &\equiv q. \end{aligned}\right\} \pmod p.$$

Odtud plyne

$$\sigma_1 \equiv 1,\quad 2\sigma_2 \equiv 0,\quad 3\sigma_3 \equiv 0,\ \ldots,\ (l-1)\,\sigma_{l-1} \equiv 0,\quad l\sigma_l \equiv q-1.$$

Ježto je $q < p$ a ježto platí $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + l\sigma_l + \ldots + q\sigma_q = q$, je jediné řešení

$$\sigma_1 = 1,\quad l\sigma_l = q-1,\quad \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_{l-1} = 0.$$

Máme výsledek: náš polynom se rozpadl na faktor stupně prvního a na $\frac{q-1}{l}$ faktorů stupně l-tého.

Úhrnem máme větu:

Je dána kongruence $x^q - a \pmod p$, $q < p$. Nechť p a q jsou dvě různá prvočísla. Nechť p patří mod q k exponentu l. Je-li $l = 1$ a $a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod p$, rozpadne se kongruence na samé lineární faktory. Je-li $l = 1$ a $a^{\frac{p-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod p$, jest polynom ireducibilní. Je-li $l > 1$, rozpadne se $x^q - a \pmod p$ na jeden faktor lineární a na $\frac{q-1}{l}$ faktorů stupně l-tého.[3])

*

Contribution à la réductibilité des congruences binomiques.

(Résumé de l'article précédent.)

Soit (1) une congruence du degré n, $(n, p) = (a, p) = 1$. Soit k un nombre entier, $1 \leq k \leq n$. Posons $d_k = (p^k - 1, n)$. Soit σ_k le nombre des facteurs irréductibles du degré k de la congruence (1). Soient enfin $k' > k'' > \ldots > 1$ tous les diviseurs de k plus petits que k. Alors les relations suivantes ont lieu:

1. pour les k, pour lesquels

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \not\equiv 1 \pmod p,$$

on a

$$k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + k''\sigma_{k''} + \ldots + \sigma_1 \equiv 0 \pmod p;$$

2. pour les k, pour lesquels

$$a^{\frac{p^k-1}{d_k}} \equiv 1 \pmod p,$$

on a

$$k\sigma_k + k'\sigma_{k'} + k''\sigma_{k''} + \ldots + \sigma_1 \equiv d_k \pmod p.$$

Ces relations forment une généralisation d'un résultat classique bien connu concernant le nombre des racines rationnelles de la congruence (1). Elles donnent des formules récurrentes, qui fournissent — en général — les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \pmod p$.

Quelques applications aux équations spéciales servent à illustrer la portée des résultats trouvés.

---

[3]) Jako speciální případ obsažen jest v této větě známý rozklad rovnice pro dělení kruhu $x^q - 1 \equiv 0 \pmod p$. Tady jest vždy $a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1$. Případ $l = 1$ a $l > 1$ lze formulovati jednotně: $x^q - 1 \equiv 0 \pmod p$ rozpadne se na jeden faktor lineární a $\frac{q-1}{l}$ faktorů stupně l-tého. (Lehce se dokáže, že platí ovšem i v případě $p < q$.)

Sur une généralisation d'un théorème des MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres.

Vladimír Knichal.

(Reçu le 25 mars 1946.)

M. Jessen généralisa un des théorèmes de M. Blichfeldt[1]) de la manière suivante. Soit $\{\xi_i\}$ une suite de points de l'espace cartésien R_n à n dimensions ($n \geqq 1$, entier). Si $M \subset R_n$, désignons par $\nu(M)$ le nombre d'indices $i \geqq 1$ pour lesquels $\xi_i \in M$. Etant donnés $a \in R_n$, $\eta > 0$, nous désignerons par $H_\eta{}^a$ le cube (intervalle) dans R_n au centre a et à arête η.

Soit

$$h = \limsup_{\eta \to \infty} \sup_{a \in R_n} \frac{\nu(H_\eta{}^a)}{\eta^n} > \lambda > 0.$$

Soit $M \subset R_n$ un ensemble avec la mesure lebesguienne intérieure $0 < m_i(M) < \infty$.

Alors il existe une telle translation dans R_n par laquelle l'ensemble M se transforme en un ensemble M' tel que[2])

$$\nu(M'') > \lambda m_i(M),$$

M'' signifiant un sousensemble convenable de M'.

M. Visser[3]) généralisa ce théorème de la manière suivante. Il remplaça la fonction d'ensembles $\nu(M)$ par une fonction arbitraire additive, non négative, finie pour tous les M bornés, définie pour les ensembles d'une certaine famille additive contenant tous les ensembles boreliens.

Par une *famille additive*[4]) $\mathfrak{A}$ *d'ensembles* d'un espace R nous entendrons une famille jouissante de la propriété suivante:

[1]) Blichfeldt H. F.: A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), 227.

[2]) Le théorème jouit d'une forme appliquée à la généralisation.

[3]) Visser C.: On a theorem in the geometry of numbers and a property of mass distributions in n-dimensional space. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42 (1939), 487.

[4]) Saks S.: Theory of the Integral, Warszawa 1937, p. 7, § 4.

1. $\emptyset \in \mathfrak{A}$ ($\emptyset$ signifie l'ensemble vide)
2. $M \in \mathfrak{A} \Rightarrow R - M \in \mathfrak{A}$
3. $M_i \in \mathfrak{A}$ pour $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathfrak{A}$.

Par une *fonction d'ensembles* $\nu(M)$ *additive, non négative* [bref: *mesure*, en anglais *measure*)] sur une famille additive $\mathfrak{A}$ nous allons entendre une fonction réelle qui est définie pour tous les $M \in \mathfrak{A}$ et remplit les conditions suivantes:

1. $0 \leqq \nu(M) \leqq \infty$ pour $M \in \mathfrak{A}$
2. $\nu(\sum_{i=1}^{\infty} M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(M_i)$ pour chaque suite $\{M_i\}$

d'ensembles disjoints de $\mathfrak{A}$.

Sans restreindre la généralité on peut formuler *le théorème de M. Visser* de la façon suivante. *Pour chaque ensemble borelien M ayant une mesure lebesguienne $0 < m(M) < \infty$ il existe une translation qui transforme M en M' tel que $\nu(M') > \lambda \,.\, m(M)$.* En effet, chaque ensemble M contient un sousensemble borelien $N \subset M$ tel que $m(N) = m_i(M)$.

A présent on va généraliser le théorème cité de la manière suivante. On remplacera le groupe de translations dans R_n par un certain groupe de homéomorphies dans un espace métrique plus général et la mesure de Lebesgue par une mesure générale. Cependant on va se borner aux espaces R à mesure finie. D'une part cette restriction admet une formulation du théorème principal bien simple, d'autre part elle n a pas un caractè e trop restrictif. En effet, on va montrer dans la suite que le théorème de M. Visser résulte comme une conséquence du notre théorème par un simple passage à la limite.

Théorème 1. *Soit S un groupe métrisé, séparable et multiplicatif. Soient $\alpha\xi$ et égal ment $\xi\alpha$ des transformations continues en $\xi \in S$ pour tout $\alpha \in S$ (pour α fixé $\alpha\xi$ signifie une homéomorphie de S en S). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures définies pour tous les ensembles boreliens $\Gamma \subset S$. Soit $0 < \sigma(S) < \infty$, $0 < \tau(S) < \infty$.*

Pour chaque ensemble borelien $\Gamma \subset S$ il existe alors $\alpha \in S$, $\beta \in S$ tels que[6]

$$\sigma(S)\, \tau(\Gamma\beta) \leqq \tau(S)\, \sigma(\alpha\Gamma) \tag{1}$$

et $\alpha' \in S$, $\beta' \in S$ tels que

$$\sigma(S)\, \tau(\Gamma\beta') \geqq \tau(S)\, \sigma(\alpha'\Gamma) \tag{2}$$

Démonstration. Evidemment il suffit de prouver la relation (1). Par $\mathfrak{S}$ on va désigner le produit cartésien $S \times S$ (métrisé par la

[5]) Voir [4]) p. 16, § 9.
[6]) La signification des symboles $\Gamma\beta$ etc. est évidente.

métrique habituelle: $\varrho((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) = \sqrt{\varrho^2(\alpha, \alpha') + \varrho^2(\beta, \beta')}$. Pour $\Gamma \subset S$ soit $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\Gamma)$ l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\alpha\beta \in \Gamma$. Γ étant un ensemble borelien, $\mathfrak{P}(\Gamma)$ lui-même est borelien. En effet, soit d'abord Γ un ensemble fermé. Soit $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable et dense dans S. Désignons par Γ_n^i $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\varrho(\gamma_i\beta, \Gamma) < \frac{1}{n}$. Γ_n^i est un ensemble ouvert dans $\mathfrak{S}$.

Désignons par Λ_n^i l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\varrho(\alpha, \gamma_i) < \frac{1}{n}$.

Evidemment Λ_n^i est également ouvert dans $\mathfrak{S}$. On a alors

$$\mathfrak{P}(\Gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_n^i \cdot \Lambda_n^i$$

ce qui représente un ensemble G_δ dans $\mathfrak{S}$. Si $\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ on a évidemment $\mathfrak{P}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\Gamma_i)$ et également $\mathfrak{S} - \mathfrak{P}(\Gamma) = \mathfrak{P}(S - \Gamma)$. Désignons par $\mathfrak{B}$ la famille de tous les ensembles $\Gamma \subset S$ pour lesquels $\mathfrak{P}(\Gamma)$ est borelien dans $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{B}$ étant une famille additive et contenant tous les ensembles fermés, elle contient tous les ensembles boreliens dans $\mathfrak{S}$.

Une famille $\sigma\tau$-mesurable[7]) dans $\mathfrak{S}$ est la plus petite famille additive d'ensembles de $\mathfrak{S}$ contenant tous les produits cartésiens $M \times N$ où M resp. N parcourent tous les ensembles de S σ- resp. τ-mesurables. $\mathfrak{S}$ étant séparable il est aisé de voir que chaque ensemble ouvert dans $\mathfrak{S}$ est $\sigma\tau$-mesurable, car on peut le représenter comme une somme dénombrable d'ensembles de la forme $M \times N$ où M, N sont ouverts, donc mesurables dans S. Alors, la $\sigma\tau$-famille d'ensembles de $\mathfrak{S}$ contient tous les ensembles boreliens.

Puisque nous supposons dans notre théorème que Γ soit borelien dans S, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\Gamma)$ est un ensemble $\sigma\tau$-mesurable dans $\mathfrak{S}$. Alors, d'après le théorème de Fubini on a[8]) $[I \leqq \tau(S, . \sigma(S)]$

$$\infty > I = \int_{\mathfrak{P}} d\tau(\alpha)\, d\sigma(\beta) = \int_S [d\tau(\alpha) \int_{\beta \in \alpha^{-1}\Gamma} d\sigma(\beta)] =$$
$$= \int_S \sigma(\alpha^{-1}\Gamma)\, d\tau(\alpha).$$

J'affirme qu'il existe un $\alpha \in S$ tel que $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \geqq \frac{I}{\tau(S)}$. Supposons que cette inégalité ne soit pas vraie, donc que pour tous les $\alpha \in S$

[7]) Voir [4]), p. 82, § 9.
[8]) Voir [4]), p. 85.

on ait $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) < \frac{I}{\tau(S)}$. Désignons par S_n ($n = 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les α pour lesquels $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \leqq \frac{I}{\tau(S)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Evidemment on a $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, donc $0 < \tau(S) = \lim_{n\to\infty} \tau(S_n)$. Alors il existe un tel n pour lequel $\tau(S_n) > \frac{\tau(S)}{2}$. Ensuite on a

$$\int_S \sigma(\alpha^{-1}\Gamma)\, d\tau(\alpha) = \int_{S-S_n} + \int_{S_n} \leqq \frac{I}{\tau(S)}\,\tau(S - S_n) +$$

$$+ \frac{I}{\tau(S)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau(S_n) = I - \frac{I\tau(S_n)}{n\tau(S)} \leqq I\left(1 - \frac{1}{2n}\right) < I$$

ce qui est une contradiction.

D'une manière analogue on obtient

$$I = \int_S [d\sigma(\beta) \int_{\alpha \in \Gamma\beta^{-1}} d\tau(\alpha)] = \int_S \tau(\Gamma\beta^{-1})\, d\sigma(\beta).$$

On montre également qu'il doit exister un $\beta \in S$ tel qu'on ait $\tau(\Gamma\beta^{-1}) \leqq \frac{I}{\sigma(S)}$. Dans le cas contraire on aurait comme dans le cas précédent

$$\int_S \tau(\Gamma\beta^{-1})\, d\sigma(\beta) > \int_S \frac{I}{\sigma(S)}\, d\sigma(\beta) = I.$$

De ces deux relations il suit qu'il existe $\alpha \in S$, $\beta \in S$ tels que

$$\tau(S)\,\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \geqq I \geqq \sigma(S)\,\tau(\Gamma\beta^{-1})$$

c. q. f. d.

Théorème 2. *Soient remplies les suppositions du théorème 1. Soit $\sigma(\Gamma\alpha) = \sigma(\Gamma)$ pour chaque $\alpha \in S$ et pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien.*

Pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien il existe alors β, $\beta' \in S$ tels que

$$\tau(\beta\Gamma) \leqq \frac{\tau(S)\,\sigma(\Gamma)}{\sigma(S)} \leqq \tau(\beta'\Gamma). \tag{3}$$

La démonstration est évidente.

Théorème 3. *Soit R un espace métrique, séparable. Soient $\nu(M)$, $\mu(M)$ deux mesures définies pour tous les $M \subset R$ boreliens. Soit $0 < \nu(R) < \infty$, $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un certain groupe transitif de homéomorphies de R en R. Supposons

1. *qu'il existe un $a \in R$ ($\xi_i \in S$ pour $i = 1, 2, \ldots$) tel que $\xi_i a \to a$ entraîne $\xi_i x \to x$ pour chaque $x \in R$ et $\xi_i^{-1} a \to a$,*

2. *que* $\mu(\alpha M) = \mu(M)$ *pour chaque* $\alpha \in S$ *et pour chaque* $M \subset R$ *borelien,*

3. *qu'il existe un* $b \in R$ *tel que l'égalité* $\mu(\Gamma b) = \mu(\Gamma^{-1}b)$ *est vraie pour chaque* $\Gamma \subset S$ *pour lequel* Γb, $\Gamma^{-1}b$ *sont boreliens dans* R.

Alors, pour chaque $M \subset R$ *borelien il existe* $\beta, \beta' \in S$ *tels que*

$$\nu(\beta M) \leqq \frac{\nu(R)\,\mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\beta' M). \tag{4}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 2. Etablissons d'abord la métrique dans le groupe S. On sait qu'il existe un $a \in R$ jouissant de la propriété 1. Faisons correspondre à chaque $\alpha \in S$ le point $f(\alpha) = \alpha a \in R$. La transformation $f(\alpha)$ transforme S en R (transitivité du groupe S) et elle est biunivoque. En effet, si $\alpha a = \beta a$ $(\alpha, \beta \in S)$ on a $\beta^{-1}\alpha a = a$ donc $\xi_i a \to a$ pour $\xi_i = \beta^{-1}\alpha$, donc $\beta^{-1}\alpha x = x$ pour $x \in R$, $\beta^{-1}\alpha = 1$, $\alpha = \beta$. D'une façon plus générale, $\alpha x = \beta x$ pour certain $x \in R$ entraîne $\alpha = \beta$.

Définissons dans S la distance par $\varrho(\alpha, \beta) = \varrho[f(\alpha), f(\beta)]$. La transformation $f(\alpha)$ est alors une homéomorphie et l'espace S est donc séparable. Soit $\alpha \in S$. Pour $\xi_i \to \xi$ $[\xi_i, \xi \in S]$ on a $f(\xi_i) \to f(\xi)$, donc $\xi_i a \to \xi a$, donc $\alpha\xi_i a \to \alpha\xi a$, $\alpha\xi_i \to \alpha\xi$. Alors $\alpha\xi$ est une transformation continue en ξ.

Pour $\xi_i \to \xi$ on a $\xi_i a \to \xi a$, donc $\xi^{-1}\xi_i a \to a$, donc (d'après la supposition 1) $\xi^{-1}\xi_i\xi^{-1}a \to \xi^{-1}a$, $\xi_i\xi^{-1}a \to a$, $\xi\xi_i^{-1}a \to a$, $\xi_i^{-1}a \to$ $\to \xi^{-1}a$, $\xi_i^{-1} \to \xi^{-1}$.

Alors ξ^{-1} représente une homéomorphie de S en S. $\xi\alpha$ est également une transformation continue en ξ, car $\xi\alpha = (\alpha^{-1}\xi^{-1})^{-1}$ ($\xi\alpha$ est donc une homéomorphie de S en S). Si Γ est borelien dans S, évidemment Γ^{-1} est aussi borelien dans S et il y en a de même avec $\Gamma(x)$ dans R pour chaque $x \in R$, car $x = \alpha a$ entraîne $\Gamma(x) =$ $= \Gamma\alpha a = f(\Gamma\alpha)$ où $\Gamma\alpha$ est borelien dans S.

On sait qu'il existe un $b \in R$ jouissant de la propriété 3. Posons $\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma b)$, $\tau(\Gamma) = \nu(\Gamma b)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien.

σ, τ sont évidemment deux mesures dans S. On a $\sigma(S) =$ $= \mu(Sb) = \mu(R)$ et également $\tau(S) = \nu(R)$. Soit $\alpha \in S$, $\Gamma \subset S$ borelien. Alors on a

$$\sigma(\Gamma\alpha) = \mu(\Gamma\alpha b) = \mu(\alpha^{-1}\Gamma^{-1}b) = \mu(\Gamma^{-1}b) = \mu(\Gamma b) = \sigma(\Gamma).$$

Soit M borelien dans R et soit Γ l'ensemble de tous les $\xi \in S$ pour lesquels $\xi b \in M$, donc $\Gamma b = M$. Γ est donc évidemment borelien dans S. D'après le théorème 2 il existe alors $\beta, \beta' \in S$ tels que

$$\tau(\beta\Gamma) \leqq \frac{\nu(R)\,\sigma(\Gamma)}{\mu(R)} \leqq \tau(\beta'\Gamma).$$

D'après

$$\sigma(\Gamma) = \mu(M),\quad \tau(\beta\Gamma) = \nu(\beta\Gamma b) = \nu(\beta M),\quad \tau(\beta'\Gamma) = \nu(\beta' M)$$

on obtient immédiatement la thèse du notre théorème.

Si le groupe S est commutatif on peut supprimer la supposition 3 dans le théorème précédent. En effet, on a

Théorème 4. *Soient $\nu(M)$, $\mu(M)$ deux mesures définies pour tous les M boreliens dans l'espace métrique séparable R. Soit $0 < \nu(R) < \infty$, $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif et commutatif de homéomorphies de R en R. Supposons que $\mu(\alpha M) = \mu(M)$ pour chaque $\alpha \in S$ et pour chaque $M \subset R$ borelien.

Pour chaque $M \subset R$ borelien il existe alors β, $\beta' \in S$ tels que

$$\nu(\beta M) \leqq \frac{\nu(R)\,\mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\beta' M). \tag{4}$$

Démonstration. On prouve d'une façon tout-à-fait analogue à celle de la démonstration du théorème précédent que $f(\alpha) = \alpha a \in R$ est une transformation biunivoque de S en R (a étant un point quelconque de R). Ensuite on établira la même métrique qu'auparavant. Le groupe S étant commutatif il en résulte que non seulement $\alpha\xi$ mais aussi $\xi\alpha$ est une transformation continue en ξ (α, $\xi \in S$).

Posons $\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma a)$, $\tau(\Gamma) = \nu(\Gamma a)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien.

Alors on a $\sigma(\Gamma\alpha) = \mu(\Gamma\alpha a) = \mu(\alpha\Gamma a) = \mu(\Gamma a) = \sigma(\Gamma)$. Notre thèse s'en suit immédiatement.

R e m a r q u e. On peut aisément étendre le théorème 2 aussi au cas $\tau(S) = \infty$ [mais $\sigma(S) < \infty$]. En parcourant la démonstration du théorème 1 on voit facilement que la thèse (3) du théorème 2 jouit dans ce cas de la forme suivante:

Pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien [$\sigma(\Gamma) > 0$] et pour chaque λ réel il existe un $\beta \in S$ tel que $\tau(\beta\Gamma) > \lambda$. Il en est de même pour la thèse du théorème 3 et 4 dans le cas $\nu(R) = \infty$.

Soit $R = R_n$ l'espace cartésien à n dimensions ($n \geqq 1$, entier). Pour ses points et pour les opérations avec eux on va se servir des notations habituelles dans le calcul vectoriel. Nous désignerons par $\mathfrak{G}(\eta)$ l'ensemble de points $(i_1\eta, i_2\eta, \ldots, i_n\eta)$ $(\eta > 0)$ où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ parcourent tous les nombres entiers. Si l'on a $a - b \in \mathfrak{G}(\eta)$ on appelle a congruent avec b modulo η [$a \equiv b \pmod{\eta}$]. Désignons par H_η° l'ensemble de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour lesquels $-\frac{1}{2}\eta \leqq x_i < \frac{1}{2}\eta$; $i = 1, 2, \ldots, n$. C'est un cube au centre 0 et à arête η. Soit $H_\eta^a = H_\eta^\circ + a$ (un cube au centre a et à arête η). Les cubes $H_\eta^{a_i}$ où a_i parcourt tous les points $\mathfrak{G}(\eta)$ sont disjoints et couvrent R. Soit $m(M)$ la mesure lebesguienne de l'ensemble $M \subset R$.

Théorème 5. *Soit $\eta > 0$. Soit $\nu(M)$ une mesure définie pour tous les $M \subset R$ boreliens. Supposons*

$$\nu(M + x) = \nu(M) \tag{5}$$

pour chaque $x \equiv 0 \pmod{\eta}$. Soit $0 < \nu(H_\eta^\circ) < \infty$.

Pour chaque $M \subset R$ borné et borelien il existe alors a, $a' \in R$ tels que

$$\nu(M + a) \leqq \frac{\nu(H^\circ_\eta)\, m(M)}{\eta^n} \leqq \nu(M + a').$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 4. Choisissons un $r > 0$ impair tel que $M \subset H^\circ_{r\eta}$ (on va supprimer l'indice $r\eta$ jusqu'à la fin de la démonstration). Construisons l'espace $\bar{R}$ en identifiant tous les points congruents mod $r\eta$.

Pour a, $b \in \bar{R}$ définissons la distance par l'égalité suivante: $\bar{\varrho}(a, b) = \min\limits_{\substack{x \equiv a \\ y \equiv b}} \varrho(x, y)$ [$\varrho(x, y)$ étant la distance en R]. Il uffit de prouver l'inégalité $\bar{\varrho}(a, b) \leqq \bar{\varrho}(a, c) + \bar{\varrho}(c, b)$. D'après la définition il existe $x \equiv a$, $y \equiv b$, $z_1 \equiv z_2 \equiv c$ tels que $\bar{\varrho}(a, c) = \varrho(x, z_1)$, $\bar{\varrho}(c, b) = \varrho(z_2, y) = \varrho(z_1, y + z_1 - z_2)$.

Donc

$$\bar{\varrho}(a, b) \leqq \varrho(x, y + z_1 - z_2) \leqq \varrho(x, z_1) + \varrho(z_1, y + z_1 - z_2) = \\ = \bar{\varrho}(a, c) + \bar{\varrho}(c, b).$$

L'espace $\bar{R}$ est évidemment séparable (même compact).

Nous allons dire que l'ensemble $A \subset R$ appartient à $\bar{R}$ ($A \subset \bar{R}$) lorsque $x \in A$, $y \equiv x \Rightarrow y \in A$. Lorsque $A \subset \bar{R}$ et lorsque A est borelien dans R, il est aussi borelien dans $\bar{R}$.

Si A est borelien dans $\bar{R}$ posons $\mu(A) = m(A \,.\, H^\circ)$, $\bar{\nu}(A) = \nu(A \,.\, H^\circ)$.

Ce sont évidemment des mesures dans l'espace $\bar{R}$. Dorénavant a_i va parcourir tous les points d'ensemble $\mathfrak{G}(r\eta)$. Soit $N = \sum\limits_i (M + a_i)$. Cette somme possède des termes disjoints, car $M \subset H^\circ$. Alors N est évidemment borelien dans $\bar{R}$. Pour $a \in R$ on a

$$\bar{\nu}(N + a) = \nu[H^\circ \,.\, \sum_i (M + a_i + a)] = \nu[\sum_i H^\circ \,.\, (M + a_i + a)] =$$
$$= \sum_i \nu[H^\circ \,.\, (M + a_i + a)] = \sum_i \nu[H^{-a_i} \,.\, (M + a) + a_i] =$$
$$= \sum_i \nu[H^{-a_i} \,.\, (M + a)] = \nu \sum_i H^{-a_i} \,.\, (M + a) = \nu[(M + a) \,.\, R].$$

Donc

$$\bar{\nu}(N + a) = \nu(M + a) \tag{6}$$

et également

$$\mu(N + a) = m(M + a) = m(M). \tag{7}$$

Ensuite on a

$$\mu(\bar{R}) = m(H^\circ \,.\, R) = m(H^\circ) = (r\eta)^n. \tag{8}$$

Les points b_i parcourent l'ensemble $\mathfrak{G}(\eta)$. On a (r est impair)

$$\bar{\nu}(\bar{R}) = \nu(H^\circ) = \nu\sum_i H_\eta{}^{b_i} . H^\circ = \nu \sum_{b_i \in H^\circ} H_\eta{}^{b_i} = \sum_{b_i \in H^\circ} \nu(H_\eta{}^{b_i}) =$$

$$= \sum_{b_i \in H^\circ} \nu(H^\circ{}_\eta) = r^n \nu(H^\circ{}_\eta).$$

Donc

$$\bar{\nu}(\bar{R}) = r^n \nu(H^\circ{}_\eta). \tag{9}$$

Soit S le groupe de toutes les translations dans R. Deux points congruents se transforment par une translation en points congruents eux-même. S est évidemment transitif et commutatif.

Pour chaque A borelien dans $\bar{R}$ et pour chaque $a \in R$ on a

$$\mu(A + a) = m[H^\circ . (A + a)] = m(H^{-a} . A + a) = m(H^{-a} . A) =$$

$$= m(H^{-a} . A . \sum_i H^{a_i}) = \sum_i m(H^{-a} . H^{a_i} . A) =$$

$$= \sum_i m[H^{-a-a_i} . H^\circ . (A - a_i)] = \sum_i m(H^{-a-a_i} . H^\circ . A) =$$

$$= m\sum_i H^\circ . A . H^{-a-a_i} = m(H^\circ . A) = \mu(A).$$

Donc la supposition du théorème 4 est remplie. Il existe alors $a, a' \in R$ tels que

$$\bar{\nu}(N + a) \leqq \frac{\bar{\nu}(\bar{R})\, \mu(N)}{\mu(\bar{R})} \leqq \bar{\nu}(N + a').$$

Donc [d'après (6), (7), (8), (9)]

$$\nu(M + a) \leqq \frac{r^n \nu(H_\eta{}^\circ)\, m(M)}{r^n \eta^n} \leqq \nu(M + a')$$

cqfd.

Lemme 1. Soit $a \in R$, $\eta > 0$. Soit $\nu(M)$ une mesure définie pour tous les $M \subset R$ boreliens. Soit $\nu(H) < \infty$ pour chaque cube $H \subset R$.

Il existe alors une mesure $\bar{\nu}(M)$ définie pour tous les $M \subset R$ boreliens telle que $M \subset H_\eta{}^a \Rightarrow \bar{\nu}(M) = \nu(M)$ et telle que $\bar{\nu}(M + x) = \bar{\nu}(M)$ pour chaque $x \in \mathfrak{G}(\eta)$ et pour chaque M borelien.

Démonstration. Le point a_i va parcourir l'ensemble $\mathfrak{G}(\eta)$. Pour $M \subset R$ borelien posons $\bar{\nu}(M) = \sum_i \nu(M . H_\eta{}^{a-a_i} + a_i)$.

Evidemment $\bar{\nu}(M)$ est une mesure dans R. Si $M \subset H_\eta{}^a$ on ne peut avoir $M . H_\eta{}^{a-a_i} \neq \emptyset$ que pour $a_i = 0$. Alors on a $\bar{\nu}(M) = \nu(M . H_\eta{}^a + 0) = \nu(M)$. Ensuite pour $x \in \mathfrak{G}(\eta)$ on a

$$\bar{\nu}(M + x) = \sum_i \nu[(M + x) . H^{a-a_i} + a_i] =$$

$$= \sum_i \nu[M . H^{a-a_i-x} + (a_i + x)] = \sum_i \nu(M . H^{a-a_i} + a_i) = \bar{\nu}(M).$$

Démonstration du théorème de M. Visser. On va appliquer le théorème 5. Soit M borelien dans R, soit $0 < m(M) < \infty$. Choisissons un λ' tel que $h > \lambda' > \lambda > 0$. Evidemment $\lim_{i \to \infty} M \,.\, H_i^\circ = M$.

Choisissons i assez grand pour que

$$m(M_i) > \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\, m(M) \tag{10}$$

où

$$M_i = M \,.\, H_i^\circ \tag{11}$$

Choisissons ensuite a et $\eta > 0$ tels que

$$\frac{\eta^n}{(\eta + 3i)^n} > \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}, \quad \frac{\nu(H_\eta{}^a)}{\eta^n} > \lambda'. \tag{12}$$

Pour $A \subset R$ borelien posons

$$\nu'(A) = \nu(A \,.\, H_\eta{}^a). \tag{13}$$

Evidemment ν' est une mesure dans R et $\nu'(R) < \infty$.

D'après le lemme 1 il existe une mesure $\bar{\nu}(A)$ telle que (pour $A \subset R$ borelien)

$$\bar{\nu}(A) = \nu'(A) \quad \text{pour} \quad A \subset H^a{}_{\eta+3i}$$

et telle que (14)

$$\bar{\nu}(A + x) = \bar{\nu}(A) \text{ pour } x \in \mathfrak{G}(\eta + 3i).$$

On a [a_k parcourt $\mathfrak{G}(\eta + 3i)$, l'indice $\eta + 3i$ est suprimé]

$$\bar{\nu}(H^\circ{}_{\eta+3i}) = \sum_k \bar{\nu}(H^\circ \,.\, H^{a+a_k}) = \sum_k \bar{\nu}(H^{-a_k} \,.\, H^a) =$$
$$= \bar{\nu}(H^a) = \nu'(H^a) = \nu(H_\eta{}^a).$$

Alors on a

$$0 < \nu(H^\circ{}_{\eta+3i}) < \infty.$$

D'après le théorème 5 il existe un $x \in R$ tel que [voir (10), (11), (12)]

$$\bar{\nu}(M_i + x) \geq \frac{\nu(H_\eta{}^a) \,.\, m(M_i)}{(\eta + 3i)^n} > \lambda' \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} \,.\, \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\, m(M)$$

donc tel que

$$\bar{\nu}(M_i + x) > \lambda \,.\, m(M). \tag{15}$$

Pour un point $u \in \mathfrak{G}(\eta + 3i)$ convenable on a donc $\bar{\nu}[(M_i + x) \,.\, H^{a+u}] > 0$. Ensuite on a [voir (13), (14)]

$$\bar{\nu}[(M_i + x) \,.\, H^{a+u}] =$$
$$= \bar{\nu}[(M_i + x - u) \,.\, H^a] = \nu'[(M_i + x - u) \,.\, H^a] =$$
$$= \nu[(M_i + x - u) \,.\, H_\eta{}^a] > 0.$$

Donc $(M_i + x - u) \,.\, H_\eta{}^a \neq 0$. Puisque $M_i \subset H_i^\circ$ on a $M_i + x - u \subset H_i^{x-u}$. Donc $H_i^{x-u} \,.\, H_\eta{}^a \neq \emptyset$ et $H_i^{x-u} \subset H^a{}_{\eta+3i}$. Donc $M_i + x - u \subset H^a{}_{\eta+3i}$, donc d'après (14), (13)

$$\bar{\nu}(M_i + x - u) = \nu'(M_i + x - u) =$$
$$= \nu[H_\eta^\alpha . (M_i + x - u)] \leqq \nu(M_i + x - u) \leqq \nu(M + x - u).$$

Alors on a d'après (15)

$$\nu(M + x - u) \geqq \bar{\nu}(M_i + x - u) = \bar{\nu}(M_i + x) > \lambda . m(M)$$

cqfd.

Dans le cas où $\nu(M)$ est une fonction additive spéciale du théorème de M. Jessen on peut supprimer quelques suppositions des théorèmes 1, 2, 3, 4.

Dans les théorèmes suivants R signifie un espace fixé et S un groupe de transformations biunivoques de R en R. Dans l'espace R soient donnés h points: $a_1, a_2, \ldots, a_h$. A étant un sousensemble de R, $\nu(A)$ *signifie le nombre de points* a_i *contenus dans* A. Alors on a $\nu(R) = h$. *Si* $a \in R$, $A \subset R$, *alors* $\Gamma(a, A)$ *signifie l'ensemble de tous les* $\alpha \in S$ *tels que* $\alpha^{-1}a \in A$.

Théorème 6. *Soit* $\sigma(\Gamma)$ *une mesure définie pour tous les* Γ *d'une famille d'ensembles additive* $\mathfrak{S}$ *de groupe* S. *Soit* $0 < \sigma(S) < \infty$.

Soit $M \subset R$. *Soit* $\Gamma(x, M)$ σ*-mesurable pour tous les* $x \in R$ *et le nombre* $\sigma[\Gamma(x, M)] = |M|$ *soit indépendent de* x.

Alors il existe $\alpha, \alpha' \in S$ *tels que*

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h . |M|}{\sigma(S)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{16}$$

Démonstration. Supposons que l'inégalité

$$\nu(\alpha M) > \frac{h . |M|}{\sigma(S)} = h'$$

soit vraie pour tous les $\alpha \in S$.

Soit Γ_i l'ensemble de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels αM contient le point a_i; soit $\Gamma_i^* = S - \Gamma_i$. L'ensemble de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels αM contient exactement s points $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}$ du système $\{a_r\}$, est évidemment donné par la formule

$$\Gamma_{i_1} . \Gamma_{i_2} \ldots \Gamma_{i_s} . \Gamma_{i_{s+1}}^* \ldots \Gamma_{i_h}^*. \tag{Γ}$$

Cet ensemble est σ-mesurable, car $\Gamma_i = \Gamma(a_i, M)$. Par $\mathfrak{L}$ nous allons désigner le système de tous ces ensembles (Γ) disjoints couvrant S. On a donc

$$h\,|M| = \sum_{i=1}^{h} \sigma(\Gamma_i) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{\Gamma \subset \Gamma_i \\ \Gamma \in \mathfrak{L}}} \sigma(\Gamma) =$$

$$= \sum_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \sigma(\Gamma) \sum_{\Gamma \subset \Gamma_i} 1 > \sum_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \sigma(\Gamma) . h' = h'\sigma(S) = h|M|.$$

On aboutit ainsi à une contradiction.

On peut prouver l'autre part de l'inégalité (16) d'une manière tout-à-fait analogue.

Théorème 7. *Soit $\mu(M)$ une mesure définie pour tous les M d'une famille additive d'ensembles de R. Soit $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif de transformations biunivoques de R en R. Supposons

1. *que $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ pour chaque A μ-mesurable et pour chaque $\alpha \in S$,*

2. *qu'il existe un $a \in R$ tel que $\alpha \in S$, $\alpha a = a \Rightarrow \alpha = 1$ (identité) et tel que, Γ étant un sousensemble de S et Γa étant en outre un ensemble μ-mesurable, il en est de même pour $\Gamma^{-1}a$ et on a*

$$\mu(\Gamma a) = \mu(\Gamma^{-1}a).$$

Pour chaque M μ-mesurable il existe alors $\alpha, \alpha' \in S$ tels que

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h \cdot \mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{17}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 6. Soit a le point mentionné dans la supposition 2. A parcourant la μ-famille additive, $\Gamma(a, A) \subset S$ parcourt aussi une famille additive $\mathfrak{S}$. ξ parcourant le groupe S, ξa représente une transformation biunivoque de S en R. Alors, pour que Γ soit un élément de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que $\Gamma^{-1}a$ soit μ-mesurable. Pour ces $\Gamma = \Gamma(a, A)$, posons [transitivité]

$$\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma a) = \mu(\Gamma^{-1}a) = \mu(A).$$

Evidemment $\Gamma(a, R) = S$, donc

$$\sigma(S) = \mu(R). \tag{18}$$

Soit $x \in R$. Soit $x = \xi a$. Soit M μ-mesurable dans R. Comme l'on sait $\Gamma(x, M)$ signifie l'ensemble de tous les $\gamma \in S$ pour lesquels on a $\gamma^{-1}\xi a \in M$. Pour cela il faut et il suffit que $(\gamma^{-1}\xi)^{-1} \in \Gamma(a, M)$, donc que $\xi^{-1}\gamma \in \Gamma(a, M)$, c. à. d. $\gamma \in \xi\Gamma(a, M)$. On a donc $\Gamma(x, M) = \xi\Gamma(a, M)$. $\Gamma(x, M)$ est donc σ-mesurable car $M = \Gamma^{-1}(a, M)\, a$, donc $\Gamma(a, M) \,.\, a$ et par conséquence $\xi\Gamma(a, M)\, a$ sont μ-mesurables. On a

$$\sigma[\Gamma(x, M)] = \sigma(\xi\Gamma(a, M)] = \mu[\xi\Gamma(a, M)\, a] = \\ = \mu[\Gamma(a, M)\, a] = \mu[\Gamma^{-1}(a, M)\, \sigma] = \mu(M).$$

D'après ces relations et d'après (16), (18), il résulte (17).

Théorème 8. *Soit $\mu(M)$ une mesure définie pour tous les M d'une famille additive d'ensembles de R. Soit $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif, commutatif de transformations biunivoques de R en R. Soit $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ pour chaque A μ-mesurable et pour tous $\alpha \in S$.

Pour chaque M μ-mesurable il existe alors $\alpha, \alpha' \in S$ tels que

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h \cdot \mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{17}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 6. Soit a un point arbitraire de R. A parcourant la μ-famille additive, $\Gamma(a, A)$ lui-même parcourt aussi une famille additive $\mathfrak{S}$. Pour tous ces Γ posons

$$\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma^{-1}a) = \mu(A).$$

On a $\sigma(S) = \mu(R)$. Soit M μ-mesurable et soit $x \in R$. Soit $x = \xi a$. On sait que $\Gamma(x, M)$ est l'ensemble de tous les $\gamma \in S$ pour lesquels $\gamma^{-1}\xi a \in M$. Pour cela, il faut et il suffit que $\gamma^{-1}a \in \xi^{-1}M$ c. à. d. que $\gamma \in \Gamma(a, \xi^{-1}M)$. Donc on a $\Gamma(x, M) = \Gamma(a, \xi^{-1}M)$. M étant μ-mesurable il y en a de même pour $\xi^{-1}M$, donc $\Gamma(x, M)$ est σ-mesurable dans S. Ensuite on a

$$\sigma[\Gamma(x, M)] = \mu[\Gamma^{-1}(x, M)\, a] = \mu[\Gamma^{-1}(a, \xi^{-1}M)\, a] = \\ = \mu(\xi^{-1}M) = \mu(M).$$

D'après le théorème 6 on a (17) cqfd.

*

O zobecnění věty Blichfeldt-Visserovy z geometrie čísel.

(Výtah z předcházejícího článku.)

V prostoru R, v němž je definována „míra" $\mu(M)$ (nezáporná, aditivní množinová funkce[4])[5]) na aditivním systému množin $\mathfrak{S}$), budiž dáno h bodů: $a_1, a_2, \ldots, a_h$. Nechť $0 < \mu(R) < \infty$. Nechť $\nu(A)$ značí počet bodů a_i vyskytujících se v množině $A \subset R$. Střední hustota množiny těchto bodů v R je $\dfrac{h}{\mu(R)} = \dfrac{\nu(R)}{\mu(R)} = c$. Budiž S jistá grupa prostých zobrazení prostoru R na R, zachovávající míru v R (t. zn. $\alpha \in S$, $M \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu[\alpha(M)] = \mu(M)$). Toto pojednání zabývá se otázkou: za jakých podmínek existuje pro danou množinu $M \in \mathfrak{S}$ taková transformace α z S, pro kterou transformovaná množina αM obsahuje alespoň $c\mu(M)$ bodů a_i [t. zn. $\nu(\alpha M) \geqq c\mu(M)$]. V tomto pojednání je studován též podobný problém pro obecnější, aditivní, nezápornou, množinovou funkci $\nu(A)$. Věty zde uvedené jsou v jistém smyslu zobecněním známé Blichfeldtovy věty z geometrie čísel, kde v podobném problému[1]) se jedná pouze o grupu všech translací v n-dimensionálním kartézském prostoru.

Sur la distribution des mesures sur une sphère à n dimensions.

Vladimír Knichal, Praha.

(Reçu le 19 mai 1946.)

Dans mon article[1]) „Sur une généralisation d'un théorème des MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres" j'ai réussi à prouver le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit S un groupe métrique et séparable (multiplicatif). Soient $\alpha\xi$ et $\xi\alpha$ des transformations continues en $\xi \in S$ pour tout $\alpha \in S$ (donc, α étant donné, $\alpha\xi$ signifie une homéomorphie de S en S). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures[2]) définies pour tout $\Gamma \subset S$ borelien. Soit $0 < \sigma(S) < \infty$, $0 < \tau(S) < \infty$. Soit $\sigma(\Gamma\alpha) = \sigma(\Gamma)$ pour tout $\alpha \in S$ et pour tout $\Gamma \subset S$ borelien. Pour chaque ensemble $\Gamma \subset S$ borelien il existe alors β, $\beta' \in S$ tels que*

$$\tau(\beta\Gamma) \leqq \frac{\tau(S)\,\sigma(\Gamma)}{\sigma(S)} \leqq \tau(\beta'\Gamma). \tag{1}$$

Dans la note suivante je voudrais présenter — par application du théorème cité — la solution d'un problème dû à M. Rössler — d'un problème tout-à-fait analogue à un théorème de M. Blichfeldt connu de la géométrie des nombres: Soient donnés h points x_1, $x_2, \ldots, x_h$ arbitraires sur une sphère à n dimensions et à l'aire P et un ensemble M situé sur cette sphère à la mesure (lebesguienne) $\mu(M)$. Alors sur l'unité d'aire tombent en moyenne $\frac{h}{P}$ points x_i. Si la distribution de points x_i était homogène, l'ensemble M contiendrait environs $\frac{h}{P}\,\mu(M)$ de points cités. On se pose la question si l'on peut „faire tourner" l'ensemble M, quelle que soit la distri-

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Tome 71, 1946, page 33. Théorème 2.

[2]) S. Saks, Theory of the Integral, Warszawa 1937, p. 16 (une mesure est une fonction d'ensembles non négative et dénombrablement additive).

bution de ces points, de la façon que l'ensemble transformé par cette rotation contienne au moins $\frac{h}{p}\mu(M)$ points x_i. Ce problème, même un problème un peu plus général, est résolu d'une manière affirmative par le théorème suivant;)

Théorème 2. *Soit $n \geqq 1$ un nombre entier. Soit $K = K_n$ une sphère à n dimensions*

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \tag{2}$$

à la métrique habituelle (comme un sousensemble d'un espace R_{n+1} cartésien à $n+1$ dimensions). *Soit $\mu(N)$ l'aire d'un ensemble $N \subset K$ borelien. Soit $\nu(N)$ une mesure*[2]) *arbitraire définie pour tout $N \subset K$ borelien. Soit*) $0 < \nu(K) < \infty$.

Pour chaque $M \subset K$ borelien il existe alors des transformations β, β' isométriques positives (c. à d. des transformations linéaires homogènes, orthogonales au déterminant 1, transformant alors la surface (2) en soi-même d'une manière isométrique — brièvement appellées „rotations") *de la sphère K telles que l'on ait*

$$\nu(\beta M) \leqq \frac{\nu(K)\,\mu(M)}{\mu(K)} \leqq \nu(\beta' M). \tag{3}$$

Avant de démontrer le théorème 2 nous allons établir d'abord quelques remarques et lemmes.

Dans l'espace R_{n+1} nous allons désigner les points et les rayons vecteurs correspondants par les mêmes lettres.

Soit f une transformation isométrique de la surface K en K. Pour $x \in K$ posons $f(x) = x'$. Pour $x, y \in K$ on a[5]) $(x' - y')^2 = (x - y)^2$, donc

$$x' \cdot y' = x \cdot y. \tag{4}$$

Désignons les points $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$ qui se trouvent sur la sphère K successivement par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ce système de points représente une base linéaire orthogonale dans R_{n+1} (car $a_i^2 = 1$, $a_i \cdot a_k = 0$ pour $i \neq k$). Selon (4), $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ forment évidement aussi une base linéaire orthogonale et l'on a $a'_k = \sum_i \alpha_{ki} a_i$, où α_{ki} sont des coefficients réels. Ces coefficients forment d'après (4) une matrice orthogonale au déterminant $|\alpha_{ki}| = \pm 1$. Si $|\alpha_{ki}| = +1$ on a la transformation isométrique positive, dans le cas contraire négative. Etant $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$,

[3]) Dans la note citée sub 1) on peut s'instruir comment le cas d'un système de h points x_i se peut déduire comme un cas particulier du théorème 2.

[4]) Dans le cas $\nu(K) = 0$ la relation (3) est aussi satisfaite; mais ce cas est banal.

[5]) En appliquant la symbolique du calcul vectoriel.

$x' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$ on a $x = \sum_i x_i a_i$ et $x' = \sum_i \beta_i a'_i$, alors d'après (4) $x_i = x \,.\, a_i = x' \,.\, a'_i = \beta_i$, donc $x' = \sum_k x_k a'_k = \sum_{k,i} x_k \alpha_{ki} a_i = \sum_i x'_i a_i$, donc

$$x_i' = \sum_k \alpha_{ki} x_k. \tag{5}$$

La transformation f est donc représentée par une transformation (5) linéaire orthogonale des coordonnées x_i.

D'autre part, soit $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ une base linéaire orthogonale située sur K. Il existe alors une seule transformation isométrique f telle que l'on ait $f(a_i) = a'_i$. Si $x = \sum_i x_i a_i$ on a évidemment [voir (4)]

$$x' = f(x) = \sum_i x_i a'_i. \tag{6}$$

Le système de toutes les transformations isométriques resp. isométriques positives de K en K forme un groupe $\overline{S} = \overline{S}_n$ resp. $S = S_n$. Ces groupes sont évidemment transitifs.

La sphère K [voir (2)] est un espace compact.

Définissons une métrique dans l'espace $\overline{S}$ comme il suit: Posons

$$\varrho(\alpha, \beta) = \sup_{x \in K} | \alpha(x) - \beta(x) | = \max_{x \in K} | \alpha(x) - \beta(x) | \tag{7}$$

pour $\alpha, \beta \in \overline{S}$. $\varrho(\alpha, \beta)$ remplit les postulats d'une métrique.

Lemme 1. *La transformation $\zeta = \xi\eta$ dépend d'une manière continue du couple $\xi, \eta \in \overline{S}$.*

Démonstration. Soient $\xi_0, \eta_0 \in \overline{S}$, $\zeta_0 = \xi_0\eta_0$, $\varepsilon > 0$. La sphère étant compacte, on peut choisir $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $| \xi_0(x) - \xi_0(x') | < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour $| x - x' | < \varepsilon'$; $x, x' \in K$. Soit $\varrho(\xi, \xi_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(\eta, \eta_0) < \varepsilon'$. On obtient ensuite $\varrho(\xi\eta, \xi_0\eta_0) \leqq \varrho(\xi\eta, \xi_0\eta) + \varrho(\xi_0\eta, \xi_0\eta_0) = \sup_{x \in K} | \xi\eta x - \xi_0\eta x | + \sup_{x \in K} | \xi_0\eta x - \xi_0\eta_0 x | \leqq \sup_{y \in K} | \xi y - \xi_0 y | + \sup_{\substack{|y - y'| < \varepsilon' \\ y, y' \in K}} | \xi_0 y - \xi_0 y' | \leqq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Lemme 2. *La transformation ξ^{-1} dépend d'une manière continue de la transformation $\xi \in \overline{S}$.*

Démonstration. Soit $\xi_0 \in \overline{S}$, $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $| \xi_0^{-1}x - \xi_0^{-1}x' | < \varepsilon$ pour $x, x' \in K$, $| x - x' | < \varepsilon'$. Soit $\varrho(\xi, \xi_0) < \varepsilon'$. On a ensuite $\varrho(\xi^{-1}, \xi_0^{-1}) = \sup_{x \in K} | \xi^{-1}x - \xi_0^{-1}x | = \sup_{\xi y \in K} | y - \xi_0^{-1}\xi y | = \sup_{y \in K} | \xi_0^{-1}\xi_0 y - \xi_0^{-1}\xi y | \leqq \sup_{\substack{|z - z'| < \varepsilon' \\ z, z' \in K}} | \xi_0^{-1}z - \xi_0^{-1}z' | \leqq \varepsilon$.

Corollaires. Si $\alpha \in \overline{S}$ resp. S et si ξ parcourt l'espace $\overline{S}$ resp. S, alors $\alpha\xi$, $\xi\alpha$, ξ^{-1} représente chaque une homéomorphie de $\overline{S}$ en $\overline{S}$ resp. de S en S. Si $\alpha \in \overline{S}$ resp. S et si $F \subset \overline{S}$ resp. S est un ensemble borelien[6]), les ensembles $\alpha\Gamma$, $\Gamma\alpha$, Γ^{-1} sont aussi boreliens.

Lemme 3. *L'espace $\overline{S}$ et par suite aussi l'espace S (qui est un sousensemble fermé de l'espace $\overline{S}$) est un espace compact.*

Démonstration. Soit $\alpha_i \in \overline{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. K étant compact, on peut choisir de la suite $\{\alpha_i\}$ une suite $\{\beta_i\}$ partielle de manière que $\beta_i a_k \to a'_k$ pour $i \to \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. On a donc $(\beta_i a_k) \,.\, (\beta_i a_l) \to a'_k \,.\, a'_l$.

Mais [d'après (4)] on a $(\beta_i a_k) \,.\, (\beta_i a_l) = a_k \,.\, a_l$. Il s'en suit $a'_k \,.\, a'_l = a_k \,.\, a_l$. Le système $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ est donc une base orthogonale. Soit β une transformation isométrique transformant a_k en a'_k. Soit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K$ et $\varepsilon > 0$ et choisissons i assez grand pour que l'on ait $| \beta_i a_k - a'_k | \leqq \frac{\varepsilon}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

On a $| \beta_i x - \beta x | = | \sum_k x_k(\beta_i a_k) - \sum_k x_k(\beta a_k) | \leqq \sum_k | \beta_i a_k - a'_k | \leqq$

$\leqq (n+1) \frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon.$

Il s'en suit $\beta_i \to \beta \in \overline{S}$.

Nous allons considérer le lemme suivant comme connu.

Lemme 4. *$N \subset K$ étant borelien et α étant un élément de $\overline{S}$, on a*[7]) $\mu(\alpha N) = \mu(N)$ *et* $0 < \mu(K) < \infty$.

Dorénavant soit S_a le système de tels $\alpha \in S$ pour lesquels $\alpha a = a$ (à cause de brièveté on écrit $a_n = a$). S_a forme évidemment un groupe.

Lemme 5. *Le groupe S_a est isomorphe et isométrique avec le groupe S_{n-1} ($n \geqq 1$, entier).*

Démonstration. Soit $\alpha \in S_a$. αx détermine donc une transformation positive isométrique de la surface K_{n-1} en soi même (on peut considérer K_{n-1} comme un sousensemble de K_n en posant $x \in K_{n-1} \Leftrightarrow x \in K$, $x \,.\, a = 0$). D'autre part, α' étant une transformation positive isométrique de la surface K_{n-1} en soi-même, on peut la prolonger en toute la surface K_n: En effet, définissons α de telle façon que l'on ait $\alpha a = a$ et $\alpha a_i = \alpha' a_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Cette correspondance $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ est évidemment isomorphe. Elle est même isométrique, ce que nous démontrons de suite. α, β étant des éléments de S_a et x étant un élément de K, définissons $y \in K_{n-1}$ de manière que l'on ait $x = \lambda y + \lambda' a$ (λ, λ' réels) [$\lambda' =$

---

[6]) $\Gamma \subset S$ étant borelien dans S il est borelien aussi dans $\overline{S}$ et réciproquement (S est fermé dans $\overline{S}$).

[7]) αN est par suite aussi borelien dans K.

$= x \cdot a$, $\lambda = \sqrt{(x - \lambda' a)^2}$, donc $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, $|\lambda| \leqq 1$]. On a donc $|\alpha x - \beta x| = |\lambda(\alpha y - \beta y) + \lambda'(\alpha a - \beta a)| = |\lambda| \, |\alpha y - \beta y| \leqq$ $\leqq |\alpha y - \beta y|$ et donc $\sup_{x \in K} |\alpha x - \beta x| \leqq \sup_{y \in K_{n-1}} |\alpha y - \beta y|$. Puisque on a aussi $\sup_{y \in K_{n-1}} |\alpha y - \beta y| \leqq \sup_{x \in K_n} |\alpha x - \beta x|$, on obtient pour la distance dans l'espace S_{n-1} $\varrho'(\alpha, \beta) = \varrho(\alpha, \beta)$.

Lemme 6. *Il existe un $T \subset S$ jouissant des propriétés suivantes:*

1. *Pour chaque $x \in K$ il existe exactement un seul $\alpha = \alpha_x \in T$ tel que l'on ait $\alpha a = x$.*
2. *Si $\beta \in S_a$, $\alpha \in T$, $\alpha a \neq -a$, on a $\beta^{-1}\alpha\beta \in T$.*
3. *$\alpha \in T$ entraîne $\alpha^{-1} \in T$.*
4. *$\alpha_1, \alpha_2 \in T$ entraîne $|\alpha_1^{-1}a - \alpha_2^{-1}a| = |\alpha_1 a - \alpha_2 a|$. La transformation biunivoque $x \longleftrightarrow x'$ de l'espace K en soi-même donnée par la relation $\alpha_{x'} = (\alpha_x)^{-1}$ est donc isométrique et* (en vertu du lemme 4) *ne change pas la mesure μ.*
5. *$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \in T$, $\alpha_0 \in T$, $\alpha_0 a \neq -a$, $\alpha_i a \to \alpha_0 a$ pour $i \to \infty$ entraîne $\alpha_i \to \alpha_0$ pour $i \to \infty$.*

Démonstration. Pour $n = 1$ il suffit de poser $T = S$. Soit donc $n \geqq 2$. Soit U le groupe de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels on a $\alpha a_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Soit $\overline{T}$ le système de toutes les transformations de la forme $\beta^{-1}\alpha\beta$ où β parcourt les éléments de S_a et α ceux de U. Pour $x \in K$ il existe $y \in K_{n-1}$ tel que $x = \lambda y + \lambda' a$ (λ, λ' réels, donc $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$). Ensuite il existe un $\beta \in S_a$ tel que $\beta y = a_0$. Soit $\alpha \in S$ la transformation qui transforme $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a$ respectivement en points $+ \lambda' a_0 - \lambda a, a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda a_0 + \lambda' a$ qui forment une base orthogonale au déterminant $+1$ située dans K. On a donc $\alpha \in U$ et $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta^{-1}\alpha a = \beta^{-1}(\lambda a_0 + \lambda' a) = \lambda\beta^{-1}a_0 + \lambda'\beta^{-1}a =$ $= \lambda y + \lambda' a = x$. Pour chaque $x \in K$ il existe donc un élément $\gamma \in \overline{T}$ tel que $\gamma a = x$. Si $x \neq -a$, il n'existe qu'un tel γ. Supposons que l'on ait $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta'^{-1}\alpha'\beta' a \neq -a$ pour $\beta, \beta' \in S_a$; $\alpha, \alpha' \in U$. On a ensuite $\beta^{-1}\alpha a = \beta'^{-1}\alpha' a$, donc $\overline{\beta}\alpha a = \alpha' a$, où $\overline{\beta} = \beta'\beta^{-1} \in S_a$. Évidemment on a $\alpha a = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha' a = \lambda'_1 a_0 + \lambda'_2 a$ (tous les λ sont réels, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 = 1$), donc $\lambda'_1 a_0 + \lambda'_2 a = \lambda_1 \overline{\beta} a_0 +$ $+ \lambda_2 a$. En multipliant cette relation par $a = \overline{\beta} a$ (produit scalaire) on obtient $\lambda'_2 = \lambda_2$ et donc $\lambda'_1 = \pm \lambda_1$,

donc soit 1: $\lambda_1 \neq 0$, $\overline{\beta} a_0 = \pm a_0$,

soit 2: $\lambda'_1 = \lambda_1 = 0$, donc $\alpha' a = \alpha a = \pm a$.

Dans le premier cas on a $\alpha a = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha a_0 = \lambda_2 a_0 - \lambda_1 a$ (α est une transformation positive isométrique) et $\alpha a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et également $\alpha' a = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha' a_0 =$ $= \lambda_2 a_0 \mp \lambda_1 a$, $\alpha' a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Puisque $\overline{\beta} a_0 =$

$= \pm a_0$, $\bar\beta a = a$, $a . \bar\beta a_i = \bar\beta a . \bar\beta a_i = a . a_i = 0$ et d'une manière analogue $a_0 . \bar\beta a_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient $\bar\beta a_i = = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Il s'en suit $\bar\beta\alpha a = \bar\beta(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 a) = = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha'\bar\beta a = \alpha' a = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, donc $\bar\beta\alpha a = \alpha'\bar\beta a$. D'une façon analogue on a $\bar\beta\alpha a_0 = \alpha'\bar\beta a_0$ et ensuite $\bar\beta\alpha a_i = \bar\beta a_i = = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ et $\alpha'\bar\beta a_i = \alpha' \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. On obtient donc $\bar\beta\alpha a_i = \alpha'\bar\beta a_i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, donc $\bar\beta\alpha = = \alpha'\bar\beta$, donc $\beta^{-1}\alpha\beta = \beta'^{-1}\alpha'\beta'$.

Dans le second cas on ne peut pas avoir $\alpha a = -a$, car on obtiendrait $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta^{-1}(-a) = -a$ contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha' a = \alpha a = a$, $\alpha' a_0 = \alpha a_0 = a_0$ et ensuite $\alpha' a_i = \alpha a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Donc on a $\alpha' = \alpha = 1$ (l'identité). On a donc aussi $\beta^{-1}\alpha\beta = \beta'^{-1}\alpha'\beta'$.

Soit maintenant T le système des $\alpha \in \bar T$ tels que l'on ait soit $\alpha a \neq -a$ soit $\alpha \in U \subset \bar T$.

Démonstration de la thèse 1 pour T. Il suffit de démontrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in T$ tel que $\alpha a = -a$. C'est donc cet α qui fait correspondre la base $-a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, -a$ à la base orthogonale $a_0, a_1, \ldots, a$. Si l'on avait $\alpha a = \beta a$ et $\alpha, \beta \in U$ on aurait évidemment $\alpha = \beta$.

Démonstration de la thèse 2. Si l'on a $\beta \in S_a$, $\alpha \in T$, $\alpha a \neq -a$ on a $\alpha \in \bar T$ et évidemment $\beta^{-1}\alpha\beta \in \bar T$. Puisque $\beta^{-1}\alpha\beta a = = \beta^{-1}\alpha a \neq \beta^{-1}(-a) = -a$, on a $\beta^{-1}\alpha\beta \in T$.

Démonstration de la thèse 3. Si $\alpha \in T$ on a $\alpha \in \bar T$, donc $\alpha = \beta^{-1}\alpha'\beta$, où $\beta \in S_a$, $\alpha' \in U$, donc $\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha'^{-1}\beta \in \bar T$, car $\alpha'^{-1} \in U$. Si $\alpha^{-1}(a) \neq -a$ on a $\alpha^{-1} \in T$. Si $\alpha^{-1}a = -a$ on a $\alpha(-a) = a$, $\alpha a = -a$, donc $\alpha \in U$, $\alpha^{-1} \in U \subset T$.

Démonstration de la thèse 4. Soit d'abord $\alpha \in U$. Ensuite on a $\alpha a = \lambda_1 a + \lambda_2 a_0$ et donc $\alpha a_0 = -\lambda_2 a + \lambda_1 a_0$ (la matrice des coefficients doit être orthogonale et au déterminant 1). Il s'en suit $a = \lambda_1\alpha^{-1}a + \lambda_2\alpha^{-1}a_0$, $a_0 = -\lambda_2\alpha^{-1}a + \lambda_1\alpha^{-1}a_0$ et donc $\alpha^{-1}a = = \lambda_1 a - \lambda_2 a_0$ et

$$\alpha a + \alpha^{-1}a = 2\lambda_1 a = 2\,(a \,.\, \alpha a)\, a. \tag{8}$$

Si $\alpha' \in T$ (donc $\alpha' \in \bar T$) on obtient $\alpha' = \beta^{-1}\alpha\beta$, où $\beta \in S_a$, $\alpha \in U$. La relation (8) est donc vraie et par conséquent ($\beta a = a$) $\beta^{-1}\alpha\beta a + + \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta a = 2\,(a \,.\, \beta^{-1}\alpha\beta a)\, a$, car $a . \beta^{-1}\alpha\beta a = \beta a . \alpha\beta a = a . \alpha a$. On a donc $\alpha'^{-1}a = 2\,(a . \alpha' a)\, a - \alpha' a$. Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ et en posant $\alpha_1 a - \alpha_2 a = v$ on a $|\alpha_1^{-1}a - \alpha_2^{-1}a| = |2\,(a . v)\, a - v| = = \sqrt{4\,(a . v)^2 - 4\,(a . v)\,(a . v) + v^2} = |v|$.

Démonstration de la thèse 5. S étant compact on peut choisir de chaque suite partielle de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une suite partielle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ telle que $\gamma_i = \beta_i^{-1}\alpha'_i\beta_i$, où $\beta_i \in S_a$, $\alpha'_i \in U$ et où les suites $\{\alpha'_i\}$ et $\{\beta_i\}$ sont convergentes. Soit $\alpha'_i \to \alpha'_0$, $\beta_i \to \beta_0$. On a donc $\alpha'_0 a_k = a_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et $\beta_0 a = a$, donc $\alpha'_0 \in U$, $\beta_0 \in S_a$. En vertu des lemmes 1 et 2 on a $\gamma_i \to \beta_0^{-1}\alpha'_0\beta_0 = \gamma_0 \in \overline{T}$ et $\gamma_i a \to \gamma_0 a$, donc $\gamma_0 a = \alpha_0 a \neq -a$, $\gamma_0 \in T$, donc $\gamma_0 = \alpha_0$. Il s'en suit $\alpha_i \to \alpha_0$.

Lemme 7. *Dans S_a soit définie une mesure $\omega(\Gamma)$ pour chaque $\Gamma \subset S_a$ borelien. Soit $0 < \omega(S_a) < \infty$. Il existe alors une mesure $\tau(\Gamma)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien telle que l'on ait*

$$\tau(\Gamma_M) = \nu(M)$$

pour chaque $M \subset K$ borelien. Γ_M y signifie l'ensemble de tous les $\alpha \in S$ tels que $\alpha a \in M$. L'ensemble Γ_M est évidemment un ensemble borelien dans S.

Démonstration. Soit T l'ensemble construit dans le lemme 6. Soit $\gamma \in S$; décomposons $\gamma = \alpha\beta$ en un produit tel que $\alpha \in T$, $\beta \in S_a$ (on a $\gamma a = \alpha\beta a = \alpha a$, donc $\alpha = \alpha_{\gamma a}$ est déterminé d'une manière univoque et évidemment $\beta = \alpha^{-1}\gamma \in S_a$). Considérons dans ce sens l'espace S comme le produit cartésien $K \times S_a$ $[\gamma = (\gamma a, \alpha_{\gamma a}^{-1}\gamma)]$. Désignons par $\mathfrak{M}$ le plus petit système additif[8]) contenant tous les ensembles $M \times \Lambda$ où M resp. Λ est borelien dans K resp. S_a. Le système $\mathfrak{M}$ contient tous les $\Gamma \subset S$ boreliens. Il suffit de démontrer qu'il contienne tous les $\Gamma \subset S$ ouverts.

Posons $\Gamma_1 = \Gamma - \alpha_{-a}S_a$. $\alpha_{-a}S_a$ étant fermé dans S, Γ_1 est par conséquent un ensemble ouvert dans S. Soit $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma = \alpha\beta$ ($\alpha \in T$, $\beta \in S_a$, donc $\alpha a \neq -a$). Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma' \in S$, $\varrho(\gamma', \gamma) < \varepsilon \Rightarrow \gamma' \in \Gamma_1$. Il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $\varrho(\alpha'\beta', \alpha\beta) < \varepsilon$ pour $\varrho(\alpha', \alpha) < \varepsilon'$ et pour $\varrho(\beta', \beta) < \varepsilon'$ (lemme 1). Il s'en suit $\gamma' = \alpha'\beta' \in \Gamma_1$. Choisissons (la propriété 5 de l'ensemble T) un $\varepsilon'' > 0$ tel que $\alpha' \in T$, $\varrho(\alpha' a, \alpha a) < \varepsilon'' \Rightarrow \varrho(\alpha', \alpha) < \varepsilon'$. Il existe donc un tel entourage M_1 du point αa dans K et un tel entourage Λ_1 du point β dans S_a que $M_1 \times \Lambda_1 \subset \Gamma_1$. On voit aisément que $M_1 \times \Lambda_1$ est un ensemble ouvert dans S.[9]) S étant compact et donc séparable, on a $\Gamma_1 \in \mathfrak{M}$.

---

[8]) S. Saks, Theory of the Integral, p. 7.

[9]) En effet, soit $\gamma_0 \in M_1 \times \Lambda_1$, $\gamma_n \to \gamma_0$; posons $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$, $\gamma_n = \alpha_n\beta_n$ ($\alpha_i \in T$, $\beta_i \in S_a$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$), donc $\alpha_0 a \neq -a$. On a $\gamma_n a \to \gamma_0 a$, c'est-à-dire $\alpha_n a \to \alpha_0 a$, d'où l'on déduit d'une part $\alpha_n \in M_1$ pour $n > n_1$, d'autre part $\alpha_n \to \alpha_0$ (thèse 5 du lemme 6). On a ensuite $\alpha_n^{-1}\gamma_n \to \alpha_0^{-1}\gamma_0$ (lemme 1 et 2), c'est-à-dire $\beta_n \to \beta_0$, donc $\beta_n \in \Lambda_1$ pour $n > n_2$, donc enfin $\gamma_n \in M_1 \times \Lambda_1$ pour $n > \mathrm{Max}\,(n_1, n_2)$.

Ensuite, l'ensemble $\Gamma\,.\,\alpha_{-a}S_a$ (partie commune) est ouvert dans $\alpha_{-a}S_a$, donc $\overset{-1}{\alpha}_{-a}\Gamma\,.\,S_a$ est ouvert dans S_a et par suite $\Gamma\,.\,\alpha_{-a}S_a = \{-a\} \times \overset{-1}{\alpha}_{-a}\Gamma\,.\,S_a$, où $\{-a\}$ resp. $\overset{-1}{\alpha}_{-a}\Gamma\,.\,S_a$ est borelien dans K resp. dans S_a.

Définissons pour[10]) $\Gamma \in \mathfrak{M}$:

$$\tau(\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta \in S_a} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta \in \Gamma \\ x \in K}} \mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x \in K} \mathrm{d}\nu(x) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta \in \Gamma \\ \beta \in S_a}} \mathrm{d}\omega(\beta).$$

Soit M un ensemble borelien dans K. On a ensuite $\Gamma_M = M \times S_a$ $[(x \in K,\ \beta \in S_a);\ \alpha_x\beta \in \Gamma_M \Leftrightarrow \alpha_x\beta a \in M \Leftrightarrow \alpha_x a \in M \Leftrightarrow x \in M]$, donc

$$\tau(\Gamma_M) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta \in S_a} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{x \in M} \mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)}\,.\,\omega(S_a)\,.\,\nu(M).$$

Lemme 8. *Soit définie une mesure $\omega(\Gamma)$ pour tous les $\Gamma \subset S_a$ boreliens. Soit*

1. $0 < \omega(S_a) < \infty$;
2. $\omega(\alpha\Gamma) = \omega(\Gamma)$ *pour* $\alpha \in S_a$ *et pour tous les* $\Gamma \subset S_a$ *boreliens*;
3. $\omega(\Gamma^{-1}) = \omega(\Gamma)$ *pour tous les* $\Gamma \subset S_a$ *boreliens.*

Alors il existe une mesure $\sigma(\Gamma)$ définie pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que

1. $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$ *pour tous les* $M \subset K$ *boreliens*;
2. $\sigma(\gamma\Gamma) = \sigma(\Gamma)$ *pour* $\gamma \in S$ *et pour tous les* $\Gamma \subset S$ *boreliens*;
3. $\sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ *pour tous les* $\Gamma \subset S$ *boreliens.*

Démonstration. La mesure σ soit définie à l'aide de la mesure μ de la même manière que la mesure τ à l'aide de celle ν dans le lemme précédent. Ainsi il est évident que la thèse 1 (analogue à celle du lemme 7) est vraie (voir le lemme 4).

Démonstration de la thèse 2. Soit Γ borelien dans S. On a $(x \in K;\ \beta, \beta' \in S_a)$

$$\sigma(\gamma\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} \mathrm{d}\mu(x) \int\limits_{\alpha_x\beta \in \gamma\Gamma} \mathrm{d}\omega(\beta) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\gamma x \in K} \underset{(x)}{\mathrm{d}\mu(\gamma x)} \int\limits_{\alpha_{\gamma x}\beta \in \gamma\Gamma} \mathrm{d}\omega(\beta)$$

et ensuite (car $\overset{-1}{\alpha}_{\gamma x}\gamma\alpha_x \in S_a$)

$$\sigma(\gamma\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} \mathrm{d}\mu(x) \int\limits_{\gamma\alpha_x\beta' \in \gamma\Gamma} \underset{(\beta')}{\mathrm{d}\omega(\alpha_{\gamma x}^{-1}\gamma\alpha_x\beta')} =$$

$$= \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} \mathrm{d}\mu(x) \int\limits_{\alpha_x\beta' \in \Gamma} \mathrm{d}\omega(\beta') = \sigma(\Gamma)$$

(voir la propriété 2 de la mesure ω et le lemme 4).

10) S. Saks, Theory of the Integral, p. 85.

Démonstration de la thèse 3. On a ($x, x', y \in K$; $\beta \in S_a$)

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta \in \Gamma^{-1} \\ x \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta^{-1} \in S_a}^{(\beta)} \mathrm{d}\omega(\beta^{-1}) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta^{-1} \in \Gamma^{-1} \\ x \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x).$$

En posant $\alpha_{x'} = \alpha_x^{-1}$ (voir la propriété 4 du lemme 6 et la propriété 3 de la mesure ω) on obtient

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_{x'}^{-1}\beta^{-1} \in \Gamma^{-1} \\ x' \neq -a}}^{(x')} \mathrm{d}\mu(\alpha_{x'}^{-1}a) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\beta\alpha_{x'} \in \Gamma \\ x' \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x').$$

En posant $\beta\alpha_{x'}\beta^{-1} = \alpha_y$ ($\beta\alpha_{x'}\beta^{-1} \in T$, voir la propriété 2 de l'ensemble T) c. à d. $y = \alpha_y a = \beta\alpha_{x'}\beta^{-1}a = \beta\alpha_{x'}a = \beta x'$, il s'en suit

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_y\beta \in \Gamma \\ y \neq -a}}^{(y)} \mathrm{d}\mu(\beta^{-1}y) =$$

$$= \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\alpha_y\beta \in \Gamma} \mathrm{d}\mu(y) = \sigma(\Gamma).$$

Lemme 9. *Dans $S = S_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) il existe une mesure $\sigma(\Gamma)$ définie pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que*

1. $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$ *pour tous les $M \subset K$ boreliens* [*donc* $0 < \sigma(S) = \mu(K) < \infty$];
2. $\sigma(\alpha\Gamma) = \sigma(\Gamma)$ *pour $\alpha \in S$ et pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens*;
3. $\sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ *pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce lemme à l'aide de l'induction complète par rapport à n en appliquant le lemme 8. Dans le cas $n = 1$ S_a contient seulement la transformation identique 1. On pose $\omega(\emptyset) = 0$, $\omega(\{1\}) = 1$. Les suppositions 1, 2, 3 sont remplies dans ce lemme et par conséquent même les thèses 1, 2, 3 ce qui est en accord avec les thèses 1, 2, 3 du notre lemme.

Soit $m \geqq 2$ (m entier). Supposons que notre lemme soit prouvé pour $n = m - 1$. Le groupe $(S_m)_{a_m}$ est en vertu du lemme 5 isomorphé et isométrique avec le groupe S_{m-1}. Selon la supposition d'induction il existe donc dans l'espace S_{m-1} et par suite même dans $(S_m)_{a_m}$ une mesure $\omega(\Gamma)$ définie pour tout $\Gamma \subset S_a$ borelien de telle façon que les prémisses du lemme 8 soient remplies. Ce lemme donne immédiatement notre thèse pour $n = m$.

Lemme 10. *Dans l'espace S il existe une mesure $\tau(\Gamma)$ pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que*

$$\tau(\Gamma_M) = \nu(M)$$

pour tous les $M \subset K$ boreliens.

Démonstration. On va appliquer le lemme 7. Pour $n = 1$ définissons la mesure ω dans l'espace S_a de la même manière qu'au commencement de la démonstration précédente. Pour $n > 1$ S_a est en vertu du lemme 5 isomorphe et isométrique avec S_{n-1}; alors, d'après le lemme 9, il existe une mesure ω dans S_a telle que $0 < \omega(S_a) < \infty$. Il en résulte sans peine notre thèse.

Démonstration du théorème 2. Nous allons appliquer le théorème 1. Le groupe $S = S_n$ est métrique et séparable (lemme 3). Les transformations $\alpha\xi$ et $\xi\varkappa$ sont continues en $\xi \in S$ pour tous les $\alpha \in S$ (lemme 1). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures définies dans les lemmes 9, 10. En vertu du lemme 9 on a $0 < \sigma(S) < \infty$ et $\sigma(\Gamma\varkappa) = \sigma(\varkappa^{-1}\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ pour tout $\alpha \in S$ et pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens. Selon le lemme 10 on a $0 < \tau(S) = \tau(\Gamma_K) = \nu(K) < \infty$, car dans le théorème 2 on a supposé $0 < \nu(K) < \infty$. En appliquant le théorème 1 on obtient immédiatement pour $\Gamma = \Gamma_M$ la thèse du théorème 2 en considérant que $\tau(\beta\Gamma_M) = \tau(\Gamma_{\beta M}) = \nu(\beta M)$, $\tau(S) = \nu(K)$, $\sigma(S) = \mu(K)$, $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$.

*

O rozložení měr na *n*-dimensionální ploše kulové.

(Výtah z předcházejícího článku.)

Budiž $n \geqq 1$, celé. Budiž K n-dimensionální plocha kulová. Nechť $\mu(N)$ značí plošný obsah (borelovské) množiny $N \subset K$. Budiž $\nu(N)$ libovolná míra[2]) definovaná pro všechna borelovská $N \subset K$ [na př. nechť $\nu(N)$ značí počet bodů z daného konečného systému bodů: $x_1, x_2, \ldots, x_h$ ležících na kouli, které padnou do množiny N]. Nechť $0 < \nu(K) < \infty$. Pak pro každé borelovské $M \subset K$ existují „otočení“ β, β' plochy kulové K tak, že platí (3).

O k-posunutiach.

Anton Kotzig, Bratislava.

(Došlo dňa 13. mája 1946.)

Nech sú k, n dané prirodzené čísla, $1 \leq k \leq n$. Vyšetrujme n-rozmerný priestor R_n (ponímaný ako množina všetkých systémov $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \xi$, kde x_i sú t. zv. súradnice bodu ξ). Budeme nazývať k-posunutím také posunutie v priestore R_n, pri ktorom sa zmení najmenej jedna a najviac k súradníc, ktoré sa zmenšia o celé čísla a ostatné súradnice zostanú bez zmeny. Nech je ďalej M množina všetkých bodov, ktorých všetky súradnice sú celé nezáporné čísla, potom platí veta:

Existuje jedna a len jedna množina A, ktorá má tieto tri vlastnosti:

1. $A \subset M$.
2. Ak je $\xi \in M - A$, existuje k-posunutie, ktoré prevádza bod ξ v bod množiny A.
3. Ak je $\xi \in A$ a ak je η bod, vznikajúci z ξ k-posunutím, neleží η v množine A.

Množina A je potom definovaná takto: Nech je $\xi = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bod o celých nezáporných súradniciach. Rozviňme súradnice v dyadickej sústave

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x_i)\, 2^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

($b_m(x_i) = 0$ alebo $= 1$, pre každé i je ovšem maximálne konečný počet čísel $b_m(x_i)$ rôzny od nuly). Potom bod ξ patrí do množiny A vtedy a len vtedy, ak je

$$b_m(x_1) + b_m(x_2) + \ldots + b_m(x_n) \equiv 0 \pmod{(k+1)} \qquad (*)$$

pre každé celé $m \geq 0$.

Def.: Ak bod α ($\alpha \in M$) určitým k-posunutím prejde v bod α', budeme hovoriť, že bod α je počiatočný, α' výsledný bod tohoto k-posunutia. Ak prevedieme postupne viac (napr. s) k-posunutí tak, že výsledný bod jednoho k-posunutia považujeme za počiatočný bod ďalšieho k-posunutia, jednotlivé polohy bodu bude nám udávať postupnosť bodov: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Takejto postupnosti budeme hovoriť *k*-reťaz z bodu α_0.

Dôkaz vety: Dokážeme teraz, že existuje maximálne jedna množina majúca vlastnosti 1., 2., 3.

Dôkaz: Predpokladajme, že existujú dve také množiny A, B, ktoré majú vlastnosti 1., 2., 3. Aby $A \neq B$, musí existovať aspoň jeden bod taký, že je elementom len jednej z týchto množín. Bez újmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že existuje bod β_0, o ktorom platí: $\beta_0 \in B$, a zároveň β_0 neleží v A. Skonštruujme k-reťaz z bodu β_0 týmto spôsobom: Prvé k-posunutie preveďme tak, aby platilo $\beta_1 \in A$ (je to možné na základe vlastnosti 2., lebo β_0 neleží v A). Na základe vlastnosti 3. však potom platí: β_1 neleží v B. Môžeme tedy druhé k-posunutie voliť tak, aby $\beta_2 \in B$; na základe vlastnosti 3. bude platiť: β_2 neleží v A a tretie k-posunutie možno voliť tak, aby platilo: $\beta_3 \in A$ neleží v B, atď. Týmto spôsobom docielime toho, že o bodoch tejto k-reťazi bude platiť:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{2l} \in B; \quad \beta_{2l} \text{ neleží v } A \\ \beta_{2l+1} \in A; \ \beta_{2l+1} \text{ neleží v } B \end{array}\right\} \text{pre všetky } l = 0, 1, 2, \ldots$$

Uvážme, že každým k-posunutím sa najmenej jedna súradnica umenší. Je zrejmé, že pre nejaké j bude najmenej jedná súradnica bodu β_j záporná. Ale to nie je možné, lebo musí byť $\beta_j \in M$; preto je zrejmé, že nemôžu existovať dve rôzne množiny majúce vlastnosti 1., 2., 3. (Že nemôže existovať viac takých množín, je z dôkazu tiež zrejmé.)

Ide ešte o dôkaz, že množina definovaná podmienkami (*) má vlastnosti 1., 2., 3.:

Každé celé nezáporné číslo x dá sa rozvinúť v dvojkovej (dyadickej) sústave, pri čom budeme stále užívať označenia

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\, 2^m \quad (b_m(x) = 0, \text{ alebo } = 1).^{1)} \tag{1}$$

Ak je daná ľubovolná skupina A, skladájúca sa z celých nezáporných čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,^{2)} \tag{2}$$

[1]) Pre každé také x je ovšem opäť maximálne konečný počet čísel $b_m(x)$ rôzny od nuly.

[2]) Tieto čísla $a_1, \ldots, a_p$ nemusia byť navzájom rôzne, bude záležať na tom, koľkokrát sa každé z nich v tej skupine vyskytuje. Naproti tomu nám nebude záležať na tom, v jakom poriadku sú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_p$ napísané. Teda napr.: 2, 2, 0, 7, 7, 2 bude tá istá skupina ako 0, 2, 7, 2, 7, 2, ale iná než 2, 0, 7, alebo 2, 2, 2, 0, 7. Ačkoľvek teda „skupina“ (užívam úmyselne tohoto neutrálneho slova) je niečo trochu iného než „množina“, budeme užívať symboliky obvyklej z teorie množín: Keď je A skupina $a_1, \ldots, a_p$, ak je B skupina $b_1, \ldots, b_q$ a ak označíme C skupinu $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$, budeme písať $C = A + B$, $B = C \dot{-} A$, $A \subset C$ (A je „časťou“ C), $a_1 \in A$, $a_2 \in A, \ldots, a_p \in A$ (a_i je „prvkom“ skupiny A) atď. Nedorozumenie je iste vylúčené.

budeme znakom $\sigma_m(A)$ označovať zbytok čísla

$$b_m(a_1) + b_m(a_2) + \ldots + b_m(a_p) = \sum_{x \in A} b_m(x)^{3)} \tag{3}$$

podľa modulu $k + 1$, takže $0 \leq \sigma_m(A) \leq k$.

Nech je teraz S_0 ľubovolná skupina n celých nezáporných čísel

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{4}$$

Budem hovoriť, že skupina T_0 celých nezáporných čísel

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{5}$$

vzniká z S_0 k-posunutím, ak je $y_p \leq x_p$ pre $p = 1, 2, \ldots, n$ a ak nerovnosť $y_p < x_p$ platí najmenej pre jednu a najviac pre k hodnôt p.

Ak skupina (4) splňuje rovnice

$$\sigma_m(S_0) = 0 \quad \text{pre } m = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

a ak skupina (5) (označme ju T_0) vzniká k-posunutím z S_0, nemôžu byť splnené všetky rovnice

$$\sigma_m(T_0) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Lebo nech je m_0 najväčšia hodnota m taká, že je $b_m(y_p) < b_m(x_p)$ aspoň pre jedno p $(1 \leq p \leq n)$. Zo vzťahov $y_q \leq x_q$, $b_m(y_q) = b_m(x_q)$, platných pre $m > m_0$, $q = 1, 2, \ldots, n$ plynie, že je nutne $b_{m_0}(y_q) \leq b_{m_0}(x_q)$ pre $q = 1, 2, \ldots, n$, takže $\sum_{y \in T_0} b_{m_0}(y)$ je menšie než $\sum_{x \in S_0} b_{m_0}(x)$ aspoň o 1 a najviac o k. Nakoľko $\sigma_{m_0}(S_0) = 0$, nemôže byť $\sigma_{m_0}(T_0) = 0$.

Aby sme dokázali základnú vetu, stačí teda, keď dokážeme ešte toto:

Nech je daná skupina (4) celých nezáporných čísel — označme ju S_0, ktorá nesplňuje všetky rovnice (6). Potom existuje skupina T_0, vznikajúca z S_0 k-posunutím a taká, že platia všetky rovnice (7).

Dôkaz: Budeme definovať celé číslo $\pi > 0$, skupiny

$$S_\pi \subset S_{\pi-1} \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0, \tag{8}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi) \tag{9}$$

celé čísla

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_\pi > m_{\pi+1} = -1.^{4)} \tag{10}$$

a celé kladné čísla

$$\overset{0}{\sigma}_{m_1}, \overset{1}{\sigma}_{m_2}, \ldots, \overset{\pi-1}{\sigma}_{m_\pi} \tag{11}$$

spôsobom, ktorý teraz popíšeme.

[3]) Smysel symbolu je jasný. Obecne, ak je A skupina $a_1, a_2, \ldots, a_p$ a ak je $f(x)$ ľubovolná funkcia, značí symbol $\sum_{x \in A} f(x)$ číslo $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_p)$.

[4]) Číslo $m_{\pi+1}$ zavádzam len pre pohodlie.

Z (8), (9) plynie, že

$$S_0 = P_1 + P_2 + \ldots + P_i + S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi), \tag{12}$$

obecnejšie

$$S_j = P_{j+1} + \ldots + P_i + S_i \quad (0 \leqq j < i \leqq \pi), \tag{13}$$

špeciálne

$$S_0 = P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi + S_\pi. \tag{14}$$

Pre všetky dostatočne veľké m je $b_m(x_p) = 0$, teda $\sigma_m(S_0) = 0$; podľa predpokladu existuje však m_1 také, že

$$\sigma_{m_1}(S_0) > 0. \tag{15}$$

Zvolme za m_1 najväčšie číslo, pre ktoré platí (15). Položme $\sigma_{m_1}(S_0) = \sigma^0_{m_1}$ a z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyberme $\sigma^0_{m_1}$ čísel

$$x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,\sigma^0_{m_1}}, \tag{16}$$

pre ktoré je $b_{m_1}(x) = 1$; čísla (16) nech tvoria skupinu P_1, kladieme potom $S_1 = S_0 - P_1$, takže $P_1 = S_0 - S_1$, $0 < \sigma^0_{m_1} \leqq k$. Predpokladajme, že sme už definovali pre isté $p \geqq 1$ skupiny

$$S_p \subset S_{p-1} \subset \ldots \subset S_0, \tag{17}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

celé čísla

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_p \geqq 0 \tag{19}$$

a celé kladné čísla

$$\sigma^0_{m_1}, \ldots, \sigma^{p-1}_{m_p} \tag{20}$$

tak, že

$$\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{p-1}_{m_p} \leqq k \tag{21}$$

a že každá skupina P_i sa skladá z $\sigma^{i-1}_{m_i}$ čísel; pre $p = 1$ sme to práve učinili.

Skupina $S_p = S_0 - (P_1 + \ldots + P_p)$ sa skladá z $n - \sigma^0_{m_1} - \ldots - \sigma^{p-1}_{m_p} \geqq n - k \geqq 0$ čísel. Ak neexistuje žiadne číslo m, pre ktoré by platilo

$$m_p > m \geqq 0, \; 0 < \sigma_m(S_p) \leqq k - \sum_{i=1}^{p} \sigma^{i-1}_{m_i}, \tag{22}$$

položme $\pi = p$, $m_{p+1} = -1$ a sme s indukciou hotoví. Ak však existuje také číslo m, pre ktoré platí (22) — nech je m_{p+1} najväčšie také číslo m — položme $\sigma_{m_{p+1}}(S_p) = \sigma^p_{m_{p+1}}$, takže podľa (22) je

$$\sigma^p_{m_{p+1}} > 0, \quad \sum_{i=1}^{p+1} \sigma^{i-1}_{m_i} \leqq k.$$

Vyberme ďalej zo skupiny S_p skupinu $\sigma^p_{m_{p+1}}$ čísel

$$x_{p+1,1}, x_{p+1,2}, \ldots, x_{p+1,\sigma^p_{m_{p+1}}}, \tag{23}$$

pre ktoré je $b_{m_{p+1}}(x) = 1$, túto skupinu označme P_{p+1} a položme $S_{p+1} = S_p - P_{p+1}$. Vidíme, že vzťahy (17) až (21) budú teraz platiť s indexom $p + 1$ namiesto p. Nakoľko každá skupina obsahuje aspoň jedno číslo, je vidieť, že sa postup musí najneskoršie po n krokoch zastaviť, takže dospejeme takto k systému s vlastnosťami (8) až (13).

Z toho, ako bol indukčný krok (prvý a $(p + 1)$-ý) prevedený, je zrejmé ešte toto: Predovšetkým je

$$\sigma^0_{m_1} + \sigma^1_{m_2} + \ldots + \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} \leqq k, \tag{24}$$

teda istotne

$$1 \leqq \pi \leqq k.$$

Za druhé: P_i sa skladá z $\sigma^{i-1}_{m_i}$ čísel, pri čom pre $x \in P_i$ je $b_{m_i}(x) = 1$, teda $\sigma_{m_i}(P_i) = \sigma^{i-1}_{m_i}$.

Za tretie:

$$\sigma^{i-1}_{m_i} = \sigma_{m_i}(S_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi), \tag{25}$$

takže podľa vlastnosti druhej je

$$\sigma_{m_i}(S_i) = \sigma_{m_i}(S_{i-1} - P_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi). \tag{26}$$

Za štvrté:

$$\sigma_m(S_0) = 0 \tag{27}$$

pre $m > m_1$.

Za piate: Pre

$$m_i > m > m_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi)$$

neplatí (22), t. j. je

$$\text{buďto } \sigma_m(S_i) = 0, \text{ alebo } \sigma_m(S_i) > k - \sum_{j=1}^{i} \sigma^{j-1}_{m_j} \tag{28}$$

$$(m_i > m > m_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, \pi).$$

Teraz nahradím skupinu S_0 novou skupinou S'_0 (složenou tiež z n celých nezáporných čísel) takto: Skupinu S_π nechám bez zmeny, kdežto čísla každej skupiny P_i $(i = 1, 2, \ldots, \pi)$ zmením takto:

Ak je $x \in P_i$, nahradím číslo x číslom

$$x' = \sum_{\substack{0 \leqq m \leqq m_i \\ m \neq m_\pi, m_{\pi-1}, \ldots, m_{i+1}, m_i}} 2^m + \sum_{m > m_i} b_m(x)\, 2^m. \tag{29}$$

T. j. koeficienty pri 2^m $(m > m_i)$ nechám bez zmeny, koeficienty pri $2^{m_i}, 2^{m_{i+1}}, \ldots, 2^{m_\pi}$ nahradím nulami (vieme, že v x bol koeficient pri 2^{m_i} rovný 1), ostatné koeficienty nahradím jedničkami. Nakoľko prvý súčet v (29) je menší než 2^{m_i}, je $x' < x$. Skupinu čísel x', ktorú takto dostaneme zo skupiny P_i, označme P'_i, položme ešte

$$S'_\pi = S_\pi,\ S'_i = P'_{i+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi \quad (i = 0, 1, \ldots, \pi - 1). \tag{30}$$

Čísla z S'_0 vznikly teda z čísel skupiny S_0 tak, že sme čísla skupiny $P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi$ zmenšili, ostatné nechali bez zmeny.

Je zrejmé toto:

1. Ak je $m > m_1$, je:

$$\sigma_m(S'_0) = \sigma_m(S_0) = 0. \tag{31}$$

2. Ak je $m = m_p$ $(p = 1, 2, \ldots, \pi)$, je podľa (29) $b_{m_p}(x') = 0$ pre $x' \in P'_i$, akonáhle $i \leqq p$

t. j.

$$\sigma_{m_p}(P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_p) = 0,$$

t. j.

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = \sigma_{m_p}(S'_p).$$

Ale pre $x' \in S'_p$, t. j. $x' \in P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$[5]) je podľa (29) a v dôsledku rovnice $S_\pi = S'_\pi$ zrejme $b_{m_p}(x') = b_{m_p}(x)$,[6]) takže $\sigma_{m_p}(S'_p) = \sigma_{m_p}(S_p) = 0$ [viď (26)].

Teda:

Pre $m = m_p$ $(p = 1, 2, \ldots, \pi)$ je

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = 0. \tag{32}$$

3. Ak je $m_p > m > m_{p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots, \pi)$, platí toto: keď je $x' \in P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$, t. j. $x' \in S'_p$, je podľa (29) a v dôsledku rovnice $S_\pi = S'_\pi$ zrejme $b_m(x') = b_m(x)$, tedy

$$\sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p). \tag{33}$$

Nahradíme konečne čísla skupiny $S'_0 = P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$ novými číslami, ktoré budú tvoriť novú skupinu S''_0 o n číslach a budú sostrojené takto:

1. Čísla z S'_π necháme bez zmeny.

2. Koeficienty $b_m(x')$ pre $m > m_1$ a práve tak koeficienty $b_{m_1}(x'), b_{m_2}(x'), \ldots, b_{m_\pi}(x')$ nechám bez zmeny pre každé $x' \in S'_0$.

Podľa (31), (32) bude potom

$$\sigma_m(S''_0) = 0 \text{ pre } m > m_1 \text{ a práve tak pre } m = m_1, \quad m = m_2, \ldots, m = m_\pi. \tag{34}$$

3. Nech je konečne m číslo, splňujúce nerovnosť $m_p > m > m_{p+1}$ $(1 \leqq p \leqq \pi)$. Potom zmením koeficienty $b_m(x')$ takto:

---

[5]) Pre $p = \pi$ odpadne ovšem $P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi$, podobne v analogických prípadoch.

[6]) Znakom x značím to číslo z S_p, z ktorého vzniklo číslo x' zmenou, udanou v (29).

I. Buď je $\sigma_m(S_p) = 0$. Potom všetky koeficienty $b_m(x')$ pre všetky $x' \in P'_1 + \ldots + P'_p$ nahradím nulami [u x' boly tieto koeficienty rovné 1, viď (29)], kdežto u všetkých $x' \in P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi = S''_p$ nechám $b_m(x')$ bez zmeny.

Potom bude teda:

$$\sigma_m(S''_0) = \sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) = 0 \tag{35}$$

[viď (33)].

II. Alebo neni $\sigma_m(S_p) = 0$. Potom je podľa (28)

$$\sigma_m(S_p) > k - \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1};$$

nakoľko $\sigma_m(S_p) \leqq k$ a nakoľko platí (24), je istotne

$$k + 1 \leqq \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + \sigma_m(S_p) \leqq 2k. \tag{36}$$

Je

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sum_{x' \in P'_1 + \ldots + P'_p} b_m(x') + \sum_{x' \in P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi} b_m(x') \pmod{(k+1)}. \tag{37}$$

Ale podľa (29) a v dôsledku rovnice $S'_\pi = S_\pi$ je

$$\sum_{x' \in P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi} b_m(x') = \sum_{x \in P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi} b_m(x) \equiv \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)},$$

kdežto prvý súčet v (37) sa skladá zo samých jedničiek. Teda

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_p}^{p-1} + \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)}. \tag{38}$$

Nakoľko $0 \leqq \sigma_m(S'_0) \leqq k$, plynie z (36), (38) zrejme

$$\sigma_m(S'_0) + k + 1 = \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + \sigma_m(S_p) < \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + k + 1,$$

t. j.

$$\sigma_m(S'_0) < \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}. \tag{39}$$

Nakoľko ďalej všetky čísla

$$x' \in P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_p$$

(ktorých počet je práve rovný $\sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}$) majú koeficient $b_m(x') = 1$, môžem tieto koeficienty podľa (39) zmeniť tak, že u $\sigma_m(S'_0)$ týchto čísel $x' \in P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_p$ koeficient $b_m(x') = 1$ nahradím nulou, u ostatných čísel $x' \in P'_1 + \ldots + P'_p$ jako aj u všetkých čísel $x' \in S'_p$ nechám $b_m(x')$ bez zmeny. Potom bude zrejme

$$\sigma_m(S''_0) = 0. \tag{40}$$

Systém S''_0 práve konštruovaný vyhovuje teda rovnici (40) pre všetky celé $m \geqq 0$ [viď tiež (34), (35)]. Okrem toho vznikol S''_0 z S_0 k-posunutím: lebo čísla skupiny $P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi$ (čo je najmenej jedno číslo a najviac k čísel) sme zmenšili, ostatné sme ponechali bez zmeny. Tým je dôkaz prevedený.

*

Sur les „translations k“.

(Résumé de l'article précédent.)

Soient k, n deux nombres entiers donnés, $1 \leqq k \leqq n$. Soit R_n l'espace cartésien à n dimensions. Considérons une translation quelconque (caractérisée par n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$) qui transforme chaque point $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in R_n$ en $[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]$. Cette translation soit appellée une „translation k“, si les conditions suivantes sont remplies:

1. Chaque nombre a_i est entier et non négatif ($\geqq 0$).

2. Si l'on désigne par l le nombre de ceux parmi les nombres $a_1, \ldots, a_n$ qui sont différents de zéro, on a $1 \leqq l \leqq k$.

Pour le développement d'un nombre entier $x \geqq 0$ quelconque dans le système dyadique nous allons constamment employer la notation suivante:

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\, 2^m \quad (b_m(x) \text{ égal à } 0 \text{ ou à } 1). \tag{1}$$

Par M nous allons désigner l'ensemble de tous les points $[x_1, \ldots, x_n]$ dont toutes les coordonnées x_i sont entières et non négatives.

Théorème. Il existe un ensemble A et pas plus qu'un seul, jouissant des propriétés suivantes:

I. $A \subset M$.

II. Si $\xi \in A$ et si η provient de ξ par une translation k, on a η non $\in A$.

III. Au contraire, si $\xi \in M - A$, il existe une translation k qui transforme ξ en un point de A.

L'ensemble A est défini de la manière suivante: Un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in M \tag{2}$$

appartient à A, si l'on a

$$b_m(x_1) + \ldots + b_m(x_n) \equiv 0 \pmod{(k+1)} \text{ pour } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

et dans ce cas seulement.

Démonstration de l'unicité. Supposons que deux ensembles différents A_1, A_2 jouissent des propriétés I, II, III. Il existe

alors p. ex. un point $\xi_1 \in A_1 - A_2$. Il existe alors un point $\xi_2 \in A_2$, provenant de ξ_1 par une translation k (voir III), donc $\xi_2 \in A_2 - A_1$ (voir II). Ensuite, il existe un point $\xi_3 \in A_1$, provenant de ξ_2 par une translation k (voir III), donc $\xi_3 \in A_1 - A_2$ (voir II) etc. Il existe donc une suite infinie $\xi_1, \xi_2, \ldots$, où $\xi_{2r} \in A_2 - A_1$, $\xi_{2r+1} \in A_1 - A_2$ et où ξ_m provient de ξ_{m-1} par une translation k. Donc, à partir d'un certain rang, une coordonnée au moins de ξ_m est négative — contradiction (voir I).

Reste de la démonstration. Soit maintenant A l'ensemble de tous les points (2) qui satisfont (3). Il nous reste à démontrer que A possède les propriétés II, III (car I est évidente).

Propriété II. Soit $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in A$ et soit $\eta = [y_1, \ldots, y_n] \in M$ un point provenant de ξ par une translation k. Soit μ le plus grand nombre tel que la suite $b_\mu(y_1), \ldots, b_\mu(y_n)$ ne soit pas identique à $b_\mu(x_1), \ldots, b_\mu(x_n)$. Evidemment, on a ou bien $b_\mu(x_i) = b_\mu(y_i)$ ou bien $b_\mu(x_i) = 1$, $b_\mu(y_i) = 0$; désignons par l le nombre des indices i, pour lesquels la seconde éventualité a lieu; on a évidemment $1 \leq l \leq k$, et donc (voir (3)) $b_\mu(y_1) + \ldots + b_\mu(y_n) \equiv -l \not\equiv 0 \pmod{k+1}$), donc $\eta \in M - A$.

Propriété III. Soit donné un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in M - A. \tag{4}$$

Il faut démontrer l'existence d'un point appartenant à A et provenant de ξ par une translation k. Pour cela, nous allons en premier lieu décomposer d'une manière convenable le système

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5}$$

que nous désignons par S_0.[1])

Si S est un système des nombres entiers non négatifs $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et f une fonction, nous allons poser $\sum\limits_{x \in S} f(x) = f(a_1) + \ldots + f(a_r)$.

En particulier, nous allons désigner par $\sigma_m(S)$ le reste du nombre $\sum\limits_{x \in S} b_m(x)$ suivant le module $k + 1$, donc

$$0 \leq \sigma_m(S) \leq k. \tag{6}$$

---

1) Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ peuvent être en partie égaux. Nous regardons deux systèmes comme identiques si l'un d'eux provient de l'autre par une permutation de ses „éléments", de sorte que p. ex. 0, 2, 7, 3, 0, 2, 2, est le même système que 0, 0, 2, 2, 2, 3, 7, mais il est différent de 0, 2, 3, 7 de même que de 0, 2, 0, 7, 3. Quoique la notion d'un „système" est différente de celle d'un „ensemble", nous empruntons quelques notations à la théorie des ensembles (sans qu'aucune confusion soit à craindre), à savoir: Si nous désignons par A le système $a_1, \ldots, a_r$, par B le système $b_1, \ldots, b_s$ et par C le système $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, nous allons écrire: $a_i \in A$, $A \subset C$, $A + B = C$, $B = C - A$. (P. ex. $A + B = C$ équivaut à $B = C - A$, ce qui n'est pas vrai dans la théorie des ensembles.)

Nous allons définir par induction un nombre entier $\pi > 0$, les systèmes

$$S_\pi \subset S_{\pi-1} \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0, \tag{7}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (1 \leqq i \leqq \pi) \tag{8}$$

et les nombres entiers

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_\pi > m_{\pi+1} = -1, \tag{9}$$

$$\sigma^0_{m_1} > 0,\ \sigma^1_{m_2} > 0,\ \ldots,\ \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} > 0, \tag{10}$$

satisfaisant l'inégalité

$$\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} \leqq k \tag{11}$$

comme il suit.

Remarquons d'abord que (7), (8) entraîne

$$S_j = P_{j+1} + \ldots + P_i + S_i \quad (0 \leqq j < i \leqq \pi). \tag{12}$$

Soit m_1 le plus grand nombre tel que $\sigma_{m_1}(S_0) > 0$ (m_1 existe d'après (4)). Posons $\sigma^0_{m_1} = \sigma_{m_1}(S_0)$; parmi les nombres $x_1, \ldots, x_n$ choisissons un système partiel P_1 qui consiste de $\sigma^0_{m_1}$ nombres x satisfaisant la condition $b_{m_1}(x) = 1$. Posons $S_1 = S_0 - P_1$, donc $P_1 = S_0 - S_1$, $0 < \sigma^0_{m_1} \leqq k$.

Supposons que l'on ait déjà défini $S_0, \ldots, S_p, P_1, \ldots, P_p, m_1, \ldots m_p, \sigma^0_{m_1}, \ldots, \sigma^{p-1}_{m_p}$ pour un certain $p \geqq 1$ et que $\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{p-1}_{m_p} \leqq k$.

S'il n'existe aucun nombre m tel que l'on ait

$$m_p > m \geqq 0, \quad 0 < \sigma_m(S_p) \leqq k - \sum_{j=1}^{p} \sigma^{j-1}_{m_j}, \tag{13}$$

posons $\pi = p$, $m_{p+1} = -1$ et l'induction est finie. S'il existe un tel m (dans ce cas S_p ne peut pas être vide), soit m_{p+1} le plus grand nombre m qui satisfait (13) et soit $\sigma^p_{m_{p+1}} = \sigma_{m_{p+1}}(S_p)$. Nous choisissons de S_p un système partiel P_{p+1} qui consiste de $\sigma^p_{m_{p+1}}$ nombres x tels que $b_{m_{p+1}}(x) = 1$ et nous posons $S_{p+1} = S_p - P_{p+1}$.

En procédant ainsi, on obtient enfin $\pi, S_i, P_i, m_i, \sigma^{i-1}_{m_i}$ qui satisfont (7)—(11).

Remarquons enfin les conséquences suivantes qui découlent de la façon dont nous avons défini les $S_i, P_i, \ldots$:

($\mathfrak{A}$) P_i consiste précisément de $\sigma^{i-1}_{m_i}$ éléments; pour $x \in P_i$, on a $b_{m_i}(x) = 1$.

($\mathfrak{B}$) On a $\sigma^{i-1}_{m_i} = \sigma_{m_i}(S_{i-1})$, donc

$$\sigma_{m_i}(S_i) = \sigma_{m_i}(S_{i-1} - P_i) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \pi). \tag{14}$$

($\mathfrak{C}$) On a

$$\sigma_m(S_0) = 0 \text{ pour } m > m_1. \tag{15}$$

(𝔇) Pour $m_i > m > m_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, on n'a pas (13), donc on a

$$\text{ou bien } \sigma_m(S_i) = 0 \text{ ou bien } \sigma_m(S_i) > k - \sum_{j=1}^{j} \sigma_{m_j}^{j-1}. \tag{16}$$

Ayant ainsi décomposé S_0, nous allons remplacer S_0 par un autre système

$$S'_0: \qquad x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \tag{17}$$

comme il suit: Posons $S'_\pi = S_\pi$. Mais si $x_r \in P_i$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, remplaçons x_r par le nombre

$$x'_r = \sum_{\substack{0 \leqq m \leqq m_i \\ m \neq m_\pi, m_{\pi-1}, \ldots, m_i}} 2^m + \sum_{m > m_i} b_m(x_r)\, 2^m \tag{18}$$

(donc $x'_r < x_r$, car $b_{m_i}(x_r) = 1$); nous obtenons ainsi de P_i un nouveau système P'_i et nous posons

$$S'_i = P'_{i+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi \quad (0 \leqq i < \pi). \tag{19}$$

On voit immédiatement:

$$\sigma_m(S'_0) = \sigma_m(S_0) = 0 \text{ pour } m > m_1 \tag{20}$$

(voir (15), (18)).

Pour $m = m_p$ et pour $x_r \in P_i$, $i \leqq p$, on a $b_{m_p}(x'_r) = 0$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(P'_1 + \ldots + P'_p) = 0$, $\sigma_{m_p}(S'_0) = \sigma_{m_p}(S'_p)$; mais pour $x_r \in S_p = P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(S'_p) = \sigma_{m_p}(S_p) = 0$ (voir (14)), donc

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \pi. \tag{21}$$

Si $m_p > m > m_{p+1}$ et si $x_r \in P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$, on a d'après (18) $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, donc

$$\sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) \text{ pour } m_p > m > m_{p+1}. \tag{22}$$

Remplaçons enfin S'_0 par un nouveau système

$$S''_0: \quad x''_1, x''_2, \ldots, x''_n.$$

Pour définir S''_0, il suffit de définir $b_m(x''_r)$ pour chaque r $(1 \leqq r \leqq$ $\leqq n)$ et chaque $m \geqq 0$, ce que nous allons faire maintenant.

Pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$ posons $b_m(x''_r) =$ $= b_m(x'_r)$ (pour $r = 1, 2, \ldots, n$), d'où (voir (20), (21))

$$\sigma_m(S''_0) = 0 \tag{23}$$

pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$.

Soit maintenant $m_p > m > m_{p+1}$. Deux cas sont à distinguer.

I. $\sigma_m(S_p) = 0$. Posons (voir (18)) $b_m(x''_r) = b_m(x'_r) - 1 = 0$ pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$, $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$ pour $x'_r \in S'_p$, donc (voir (22))

$$\sigma_m(S''_0) = \sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) = 0. \tag{24}$$

II. $\sigma_m(S_p) > 0$, donc $\sigma_m(S_p) > k - \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}$ (voir (16)).

Donc (voir (11))

$$k + 1 \leqq \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} \leqq 2k. \tag{25}$$

On a

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sum_{x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p} b_m(x'_r) + \sum_{x'_r \in S'_p} b_m(x'_r) \pmod{(k+1)}. \tag{26}$$

Mais (voir (18)) pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ on a $b_m(x'_r) = 1$, tandis que pour $x'_r \in S'_p$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, de sorte que (26) donne

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{mp}^{p-1} + \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)}.$$

La comparaison avec (25) donne

$$\sigma_m(S'_0) + k + 1 = \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1},$$

mais $\sigma_m(S_p) < k + 1$, donc

$$\sigma_m(S'_0) < \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_p}^{p-1};$$

on peut donc poser $b_m(x''_r) = 0$ pour $\sigma_m(S'_0)$ valeurs de l'indice r tels que $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ (pour ces x'_r, on avait $b_m(x'_r) = 1$); pour toutes les autres valeurs de r, on pose $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$. On a alors

$$\sigma_m(S''_0) \equiv \sigma_m(S'_0) - \sigma_m(S'_0) \equiv 0 \pmod{(k+1)},$$

$\sigma_m(S''_0) = 0$. Donc (voir aussi (23), (24)) $\sigma_m(S''_0) = 0$ pour chaque $m \geqq 0$. Donc le point $\xi'' = [x''_1, \ldots, x''_n]$ appartient à A et il provient de ξ par une translation k, car

$$x''_r \leqq x'_r < x_r \text{ pour } x_r \in P_1 + \ldots + P_\pi,$$

$$x''_r = x_r \text{ pour } x_r \in S_\pi,$$

et $P_1 + \ldots + P_\pi$ consiste de $\sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_\pi}^{\pi-1} \leqq k$ éléments (voir (11)).

Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires.

Václav Hruška, Prague.

(Reçu le avril 1945.)

1. — **Définition.** — Soit donnée une fonction

$$f(x), \quad a \leqq x \leqq b. \tag{1,1}$$

Soient $\alpha \neq \beta$ deux points quelconques de l'intervalle (1,1), dans lesquels $f(x)$ a des valeurs différentes

$$f(\alpha) = A \neq B = f(\beta).$$

Si dans un point convenable situé entre α et β la fonction $f(x)$ devient égale à toute valeur choisie entre A et B, je dis que $f(x)$ est une fonction aux valeurs intermédiaires.

A l'aide de cette définition nous pouvons donner à un théorème bien connu de Darboux[1]) la forme suivante:

Théorème. — Soit

$$f(x), \quad a \leqq x \leqq b \tag{1,2}$$

une fonction ayant une dérivée dans chaque point de l'intervalle (1,2). Cette dérivée est une fonction aux valeurs intermédiaires dans l'intervalle (1,2).

Remarque. — De même les fonctions continues dans l'intervalle (1,1), ont naturellement la propriété mentionnée dans la Définition, ce que l'on démontre ordinairement d'une façon indépendante du théorème de Darboux. Mais on peut aussi le démontrer comme une conséquence de ce théorème, car toute fonction continue est aussi une dérivée de son intégrale définie de Cauchy-Riemann, ayant la limite supérieure variable.

2. — Je ne crois pas que le théorème suivant sur les fonctions aux valeurs intermédiaires ait déjà été prononcé:

Théorème. — Soient

$$f(x) \text{ et } \varphi(x), \quad a \leqq x \leqq b \tag{2,1}$$

[1]) Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse infinitésimale t. 1; p. 70 (7ième éd., Paris, 1930, Gauthier-Villars).

deux fonctions qui possèdent des dérivées du premier ordre $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ partout dans l'intervalle (2,1), dont la dérivée $\varphi'(x)$ va constamment en croissant ou constamment en décrossant dans (2,1). Alors la fonction

$$\lambda(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{\varphi'(x) - \varphi'(a)} \tag{2,3}$$

est une fonction aux valeurs intermédiaires dans (2,1).

Démonstration. — Soit, par exemple, $\varphi'(x)$ une fonction allant constamment en décroissant dans (2,1), c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\varphi'(a) > \varphi'(\alpha) > \varphi'(x) > \varphi'(\beta), \\ a < \alpha < x < \beta \leqq b.\end{gathered} \tag{2,4}$$

Soit p. ex. aussi

$$A = \lambda(\alpha) > \lambda(\beta) = B. \tag{2,5}$$

Choisissons une valeur L quelconque entre A et B,

$$A > L > B \tag{2,6}$$

et considérons la fonction

$$\chi(x) = f(x) - x \,.\, f'(a) - L\,[\varphi(x) - x \,.\, \varphi'(a)], \quad a \leqq x \leqq b.$$

Elle a une dérivée

$$\chi'(x) = f'(x) - f'(a) - L\,[\varphi'(x) - \varphi'(a)] \tag{2,7}$$

partout dans

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \tag{2,8}$$

qui a des valeurs

$$\begin{aligned}\chi'(\alpha) &= f'(\alpha) - f'(a) - L\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\alpha)\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] - L\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= (A - L)\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] < 0, \\ \chi'(\beta) &= f'(\beta) - f'(a) - L\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\beta)\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] - L\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= (B - L)\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] > 0\end{aligned}$$

dans les points $x = \alpha$ et $x = \beta$. Alors, d'après le théorème de Darboux, elle a la valeur

$$\chi'(\xi) = 0, \quad \alpha < \xi < \beta$$

dans un point ξ entre α et β, c'est-à-dire

$$\lambda(\xi) = \frac{f'(\xi) - f'(a)}{\varphi'(\xi) - \varphi'(a)} = L, \quad \alpha < \xi < \beta. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque de la rédaction. Dans le théorème de M. Hruška, on peut se passer de la supposition concernant la monotonie de $\varphi'(x)$. En effet, on peut énoncer le théorème suivant:

Soient $F(x)$, $G(x)$ deux fonctions réelles possédant dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ des dérivées finies $F'(x)$,

$G'(x)$.[2]) Soit $G'(x) \neq 0$ pour $a \leqq x \leqq b$[3]) et posons $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Si $A \neq B$, alors la fonction $F'(x) : G'(x)$ prend, dans l'intervalle ouvert (a, b), toutes les valeurs situées entre A et B.

Démonstration. Soit p. ex. $A < B$ et soit C un nombre quelconque tel que $A < C < B$. Evidemment il existe un nombre $h > 0$ tel que

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{G(a+h) - G(a)} < C < \frac{F(b) - F(b-h)}{G(b) - G(b-h)}, \quad a + h < b - h.$$

Choisissons un tel h. La fonction

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{G(x+h) - G(x)}$$

est continue dans l'intervalle fermé $\langle a, b-h \rangle$ (voir[3]) et l'on a $f(a) < C < f(b-h)$. Il existe donc un ξ tel que

$$a < \xi < b - h, \; f(\xi) = C,$$

c'est-à-dire

$$F(\xi + h) - C\, G(\xi + h) = F(\xi) - C\, G(\xi).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un η tel que

$$a < \xi < \eta < \xi + h < b, \; F'(\eta) - C\, G'(\eta) = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Dans le cas particulier $G(x) = x$ on retrouve le théorème de Darboux.

V. Jarník.

*

Poznámka o funkcích s intermediárními hodnotami.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte $F(x)$, $G(x)$ reálné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež mají v $\langle a, b \rangle$ konečnou derivaci (v bodě a zprava, v bodě b zleva). Nechť $G'(x) \neq 0$ pro $a \leqq x \leqq b$. Položme $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Potom platí: je-li $A \neq B$, nabývá funkce $F'(x) : G'(x)$ v otevřeném intervalu (a, b) všech hodnot, ležících mezi čísly A, B.

---

[2]) Où $F'(a)$, $G'(a)$ désignent des dérivées du côté droit au point a et $F'(b)$, $G'(b)$ des dérivées du côté gauche au point b.

[3]) Pour $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ on a donc

$$G(\beta) - G(\alpha) = (\beta - \alpha)\, G'(\gamma) \neq 0 \quad (\alpha < \gamma < \beta).$$

Pohyb proměnného rovinného útvaru.

Zdeněk Pírko, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1945.)

1. Budiž dána rovinná křivka Γ a budiž σ její oblouk, počítaný od jistého bodu. Zaveďme tento oblouk jako parametr na křivce; označíme-li $\mathfrak{r}$ radiusvektor obecného bodu M křivky Γ, můžeme psát její rovnici ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma). \tag{1}$$

O složkách $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ vektoru $\mathfrak{r}$ předpokládejme, že jsou jednoznačnými funkcemi parametru σ v jistém společném oboru a že mají první a druhou derivaci. — Budeme v dalším nazývat křivku Γ křivkou základní; kromě toho nazveme pravoúhlou soustavu Σ souřadnic x, y, k nimž je křivka rovnicí (1) vztažena, soustavou absolutní.

Vedle této absolutní soustavy Σ zaveďme ještě pravoúhlou soustavu $'\Sigma$ souřadnic $'x$, $'y$ takto: kladnou osou úseček nové soustavy budiž kladná tečna základní křivky Γ v obecném bodě jejím M, kladnou osou pořadnic budiž příslušná kladná normála; přitom kladné smysly nových os souřadnic jsou definovány obvyklým způsobem.[1]) Soustavu nazveme soustavou relativní.

Konečně budiž P bod, jehož souřadnice v relativní soustavě $'\Sigma$ jsou $('x; 'y)$. — Jestliže se relativní soustava pohybuje podél základní křivky Γ a jestliže kromě tohoto základního pohybu má bod P v soustavě $'\Sigma$ zároveň ještě svůj pohyb vlastní, od základního pohybu neodvislý, tu popíše všeobecně trajektorii $'\Gamma$; označíme-li $\mathfrak{R}$ radiusvektor bodu P, vztažený k absolutní soustavě, je rovnice křivky $'\Gamma$ ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + 'x\mathfrak{t} + 'y\mathfrak{n}. \tag{2}$$

Přitom jsou $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\sigma)$ jednotkový vektor tečny resp. normály základní křivky Γ, skaláry

$$'x = 'x(\sigma, \varrho), \; 'y = 'y(\sigma, \varrho) \tag{3$_1$}$$

[1]) Viz Václav Hlavatý, Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937; 21 násl.

jsou jednoznačné funkce dvou nezávislých parametrů σ, ϱ v jistém společném oboru, které mají první derivaci. Je tedy také

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\sigma, \varrho); \tag{3_2}$$

σ je — jako výše — oblouk základní křivky Γ, ϱ je parametr, jímž stanovíme vlastní pohyb bodu P v relativní soustavě. — Křivku $'\Gamma$ budeme v dalším nazývat křivkou odvozenou.

2. Pro křivku $'\Gamma$ odvodíme nyní jisté základní vztahy. — Diferencujeme-li rovnici (2), obdržíme nejprve

$$\mathrm{d}\mathfrak{R} = \mathrm{d}\mathfrak{r} + \mathrm{d}('x\mathfrak{t}) + \mathrm{d}('y\mathfrak{n})$$

a tedy, vzhledem k rovnicím (3_1) a vztahům $\mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{r}_\varrho = \mathfrak{t}_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho = 0$,

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\mathfrak{R} = \mathfrak{t}\,\mathrm{d}\sigma + {'x}\mathfrak{t}_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + {'x_\sigma}\mathfrak{t}\,\mathrm{d}\sigma + {'x_\varrho}\mathfrak{t}\,\mathrm{d}\varrho +\\ + {'y_\sigma}\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\sigma + {'y}\mathfrak{n}_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + {'y_\varrho}\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\varrho.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Podle vzorců Frenetových-Serretových však platí

$$\mathfrak{t}_\sigma = k\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}_\sigma = -k\mathfrak{t},$$

kdež $k = k(\sigma)$ je křivost základní křivky Γ v bodě (σ).

Můžeme tedy psát rovnici (4) také ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\mathfrak{R} = (\mathrm{d}\sigma + {'x_\varrho}\,\mathrm{d}\varrho + {'x_\sigma}\,\mathrm{d}\sigma - {'y}k\,\mathrm{d}\sigma)\,\mathfrak{t} +\\ + ({'y_\varrho}\,\mathrm{d}\varrho + {'y_\sigma}\,\mathrm{d}\sigma + {'x}k\,\mathrm{d}\sigma)\,\mathfrak{n}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Označme $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}('x, 'y)$ resp. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}('x, 'y)$ vektor tečny resp. normály odvozené křivky $'\Gamma$ a s její oblouk. Platí tudíž nejprve

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{R}}{\mathrm{d}s} = \mathfrak{T}$$

a tedy podle (5)

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{d}s = A\mathfrak{t} + B\mathfrak{n}, \tag{6}$$

jestliže jsme položili pro stručnost

$$\left.\begin{aligned}A &= \mathrm{d}\sigma + {'x_\varrho}\,\mathrm{d}\varrho + {'x_\sigma}\,\mathrm{d}\sigma - {'y}k\,\mathrm{d}\sigma,\\ B &= \qquad\; {'y_\varrho}\,\mathrm{d}\varrho + {'y_\sigma}\,\mathrm{d}\sigma + {'x}k\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vyjádříme-li ještě vektor $\mathfrak{T}$ lineárně pomocí skalárů $T_{'x}$, $T_{'y}$

$$\mathfrak{T} = T_{'x}\mathfrak{t} + T_{'y}\mathfrak{n}$$

čili

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{d}s = (T_{'x}\mathfrak{t} + T_{'y}\mathfrak{n})\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

obdržíme srovnáním rovnic (6), (8)

$$(A - T_{'x}\,\mathrm{d}s)\,\mathfrak{t} + (B - T_{'y}\,\mathrm{d}s)\,\mathfrak{n} = 0$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned}A - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0,\\ B - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hledané základní vztahy získáme, dosadíme-li v rovnicích (9) za A, B podle (7):

$$\left.\begin{aligned}(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)\,\mathrm{d}\sigma + {}'x_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0,\\ ({}'y_\sigma + {}'xk)\,\mathrm{d}\sigma + {}'y_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

3. Obecné rovnice (10) specialisujme! — Jestliže bod P je v relativní soustavě pevný (bez vlastního pohybu), pak je

$${}'x_\varrho = {}'y_\varrho = 0 \text{ a ovšem i } \mathrm{d}\varrho = 0,$$

takže rovnice (10) se zjednoduší:

$$\left.\begin{aligned}(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)\,\mathrm{d}\sigma - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0,\\ ({}'y_\sigma + {}'xk)\,\mathrm{d}\sigma - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Označíme-li $\mathrm{d}'x$ resp. $\mathrm{d}'y$ diferenciály souřadnic $'x$, $'y$ bodu P v relativní soustavě, pak bude

$$\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}s} = T_{'x}, \quad \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}s} = T_{'y},$$

takže rovnice (11) můžeme psát ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + {}'x_\sigma - {}'yk,\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \qquad {}'y_\sigma + {}'xk.\end{aligned}\right| \quad (12)$$

V této podobě nejsou rovnice (12) nic jiného, než t. zv. fundamentální rovnice Cesàrovy, jež jsou východiskem pro přirozenou analysu křivek.[2]) S tohoto hlediska mohli bychom nazvat rovnice (10)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + {}'x_\sigma - {}'yk + {}'x_\varrho\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma},\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \qquad {}'y_\sigma + {}'xk + {}'y_\varrho\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma}\end{aligned}\right|$$

„zobecněnými rovnicemi Cesàrovými".

Z rovnic (12) obdržíme pro úhel ν, který svírá tečna odvozené křivky $'\Gamma$ s relativní osou $'x$ (v případě, že bod P nemá vlastní pohyb), výraz

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'x} = \frac{{}'y_\sigma + {}'xk}{1 + {}'x_\sigma - {}'yk}; \quad (13)$$

pro čtverec elementu oblouku $\mathrm{d}s^2$ této křivky pak nalezneme

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}'x^2 + \mathrm{d}'y^2 =\\ &= [(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)^2 + ({}'y_\sigma + {}'xk)^2]\,\mathrm{d}\sigma^2.\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

[2]) Viz Ernesto Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca (něm. Vorlesungen über natürliche Geometrie, přel. Gerhard Kowalewski, Berlin 1926 [II. vyd.], 21 násl.); Georg Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Berlin 1923 (III. vyd.), 91 násl.

Stanovme nyní odvozenou křivku $'\Gamma$ těmito dalšími požadavky:

$$'x = l(\sigma), \quad 'y = 0,$$

kdež $l(\sigma)$ je libovolná (regulární) funkce oblouku σ základní křivky Γ. Pak obdržíme z rovnice (13)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{k\, l(\sigma)}{1 + l'(\sigma)} \quad \left(l'(\sigma) = \frac{\mathrm{d}l(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right)$$

čili

$$l'(\sigma) - k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu + 1 = 0; \tag{15}$$

z rovnice (14)

$$\mathrm{d}s^2 = [(1 + l'(\sigma))^2 + k^2\, l^2(\sigma)]\, \mathrm{d}\sigma^2$$

a tudíž vzhledem k rovnici (15) (žádáme-li zároveň, aby oblouk s rostl s rostoucím obloukem σ)

$$\mathrm{d}s = k \frac{l(\sigma)}{\sin \nu} \mathrm{d}\sigma. \tag{16}$$

Rovnice (15), (16) budeme aplikovat na pohyb proměnného rovinného útvaru.[3])

4. Z rovnice (15) plyne

$$\mathrm{d}l(\sigma) = k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu\, \mathrm{d}\sigma - \mathrm{d}\sigma.$$

Jestliže označíme $\mathrm{d}\tau$ kontingenční úhel základní křivky Γ a dále $N(\sigma) = \dfrac{l(\sigma)}{\sin \nu}$, můžeme napsat předcházející rovnici ve tvaru

$$\mathrm{d}l(\sigma) = \left[N(\sigma) \cos \nu - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\right] \mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

Při stejném označení obdržíme z rovnice (16) vztah

$$\mathrm{d}s = N(\sigma)\, \mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

Uvažujme konečně dvě základní křivky Γ_1, Γ_2 obecně různé a další křivku $'\Gamma$ obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2. Z libovolného bodu křivky $'\Gamma$ veďme tečny ke křivkám Γ_1, Γ_2; označme λ jejich úhel. Jsou-li $\mathrm{d}\tau_i$ kontingenční úhly křivek Γ_i ($i = 1, 2$), pak platí nejprve

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\tau_1 - \mathrm{d}\tau_2$$

---

[3]) K jiné geometrické aplikaci rovnic (15), (16), jež pochází od Herwiga, uveďme: Je-li $k = k(\sigma)$ přirozenou rovnicí základní křivky Γ a předpokládáme-li, že úhel ν je stálý, je odvozená křivka $'\Gamma$ isogonální trajektorií tečen základní křivky Γ (pod úhlem ν). Rovnici ∞^1 těchto trajektorií nalezneme z diferenciální rovnice lineární 1. řádu (15); zní

$$l(\sigma) = \exp\, (\operatorname{cotg} \nu \,.\, \textstyle\int k\, \mathrm{d}\sigma)\, [C - \int \exp\, (-\operatorname{cotg} \nu \,.\, \int k\, \mathrm{d}\sigma)\, \mathrm{d}\sigma],$$

C je integrační konstanta. Rovnice (16) spolu s rovnicí předcházející určuje pak oblouk této trajektorie. Viz Gino Loria, Curve piane speciali algebriche e trascendenti, II, Milano 1930; 306 násl.

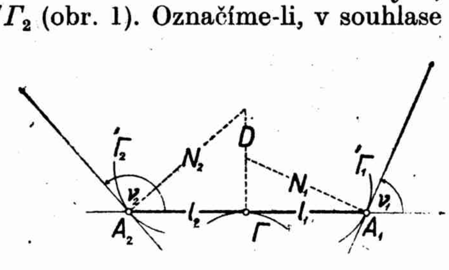
a tudíž podle rovnice (18)

$$d\lambda = \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) ds, \tag{19}$$

kdež opět $N_i(\sigma_i) = \frac{l_i(\sigma_i)}{\sin \nu_i}$ $(i = 1, 2)$ je element oblouku křivky $'\Gamma$.

Rovnice (17), (18), (19) lze ihned interpretovat v kinematice proměnného rovinného útvaru:

Nechť se úsečka $\overline{A_1A_2}$ proměnlivé délky l pohybuje svými krajními body A_1, A_2 po daných dvou křivkách $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ obecně různých a její pohyb budiž řízen tak, že zůstává stále tečnou dané křivky Γ, obecně rozdílné od křivek $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ (obr. 1). Označíme-li, v souhlase s předcházejícím výkladem, σ oblouk křivky Γ, $d\tau$ její kontingenční úhel, s_i oblouk křivky $'\Gamma_i$ a l_i části, v něž je úsečka $\overline{A_1A_2}$ v dané fázi pohybu rozdělena bodem dotyku s křivkou Γ $(i = 1, 2)$, pak změna délky dl úsečky l při přechodu z fáze dané do fáze soumezné (při pošinutí úsečky $\overline{A_1A_2}$ po křivce Γ) je patrně rovna algebraickému součtu změn obou jejích částí, t. j.



Obr. 1.

$$dl = dl_1 + dl_2,$$

při čemž platí podle rovnice (17)

$$dl_i = \left(N_i \cos \nu_i - \frac{d\sigma}{d\tau}\right) d\tau, \quad N_i = \frac{l_i}{\sin \nu_i}. \tag{20_1}$$

$$(i = 1, 2)$$

Poněvadž změny dl_1, dl_2 mají opačná znaménka, můžeme psáti také

$$|\,dl\,| = |\,N_1 \cos \nu_1 - N_2 \cos \nu_2\,|\, d\tau = D\, d\tau; \tag{20_2}$$

význam délky D je patrný z obrázku. Vztah (20_1) je však známý jako druhá základní rovnice d'Ocagneova, vztah (20_2) jako první základní rovnice Mannheimova (pro změnu délky při pohybu proměnného rovinného útvaru).

Při zmíněném pošinutí bude změna oblouku ds_i křivky $'\Gamma_i$ dána rovnicí (18), totiž

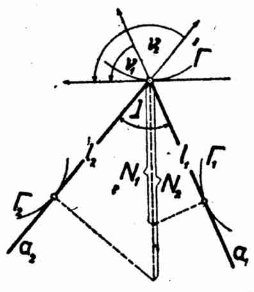
$$ds_i = N_i\, d\tau; \tag{21_1}$$
$$(i = 1, 2)$$

odtud pro poměr obou změn

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{21_2}$$

Vztah (21_1) je totožný s **první základní rovnicí d'Ocagneovou** (pro změnu oblouku při pohybu proměnného rovinného útvaru). vztah (21_2) je pak **třetí základní rovnice Mannheimova** (pro poměr změn oblouků; tento vztah byl ostatně známý již Newtonovi).

Konečně nechť se pohybuje úhel $\widehat{a_1 a_2}$ proměnlivé velikosti λ tak, že svými rameny a_1, a_2 se dotýká dvou daných křivek Γ_1, Γ_2 obecně různých, při čemž jeho pohyb je řízen tak, že vrchol úhlu probíhá danou křivkou $'\Gamma$, obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2 (obr. 2). Označíme-li zase σ_i oblouk křivky Γ_i, $d\tau_i$ kontingenční úhel její ($i = 1, 2$), s oblouk křivky $'\Gamma$, pak **změna úhlu** $d\lambda$ úhlu λ při přechodu z fáze dané do fáze soumezné (při pošinutí úhlu $\widehat{a_1 a_2}$ po křivce $'\Gamma$) je patrně dána rovnicí (19)



Obr. 2.

$$|\,d\lambda\,| = \left| \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2} \right| ds. \tag{22}$$

Rovnice (22) je totožná s **třetí základní rovnicí d'Ocagneovou** a **druhou základní rovnicí Mannheimovou** (pro změnu úhlu při pohybu proměnného rovinného útvaru).

5. V závěru poznamenejme toto: Autorem základních rovnic pro pohyb proměnného rovinného útvaru je A. Mannheim[4]); způsob, jímž tyto rovnice odvodil, není však prostý námitek.[5]) Přesný důkaz methodou t. zv. infinitesimální geometrie podal teprve M. d'Ocagne[6]), ale pro každou rovnici samostatně, pozměniv také Mannheimovo pořadí. Význam vzorců dostatečně prokazují jejich různé geometrické aplikace.[7])

---

[4]) Nazývá je „formules primordiales" a uveřejnil je poprvé v knize E. Bour, Cours de Mécanique et Machines, I, Cinématique, Paris 1865 (str. 51—52, 57, 59), poté ve vlastních spisech: Cours de Géométrie descriptive comprenant les éléments de la Géométrie cinématique, Paris 1880 a 1886 (I. a II. vyd.), str. 202—204 resp. 203—205); Principes et développements de Géométrie Cinématique, Paris 1894, str. 44—48.

[5]) Způsob, kterým Mannheim dokazuje své vzorce, lze posouditi také z důkazu vzorce (20_2), jak je podán v knize V. Jarolímek a B. Procházka, Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Praha 1909; str. 389.

[6]) Nazývá je „formules fondamentales". Viz jeho spisy: Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale, Paris 1896, str. 258 až 264; Cours de Géométrie pure et appliquée, I, Paris 1917; II, Paris 1918 (str. 123—131 prvního dílu); Cours de Géométrie, Paris 1930; str. 38—43. Způsob, kterým d'Ocagne dokazuje své vzorce, lze posoudit z důkazů, jak jsou podány v knize J. Sobotka, Differenciální geometrie, I, Praha 1909; str. 408 násl., 446 násl.

[7]) V uvedených spisech Mannheimových, d'Ocagneových a v knize Sobotkově.

V této práci jsem podal jejich důkaz, používaje jednotného hlediska a analytické methody. Význam rovnic (10) je však mnohem širší a daleko přesahuje úzký obor kinematiky proměnného rovinného útvaru.

*

Sur le mouvement d'une figure plane variable.

(Résumé de l'article précédent).

Pour l'étude des propriétés géométriques d'une figure plane variable qui se meut dans son plan, on se sert habituellement de certaines relations dites „primordiales" ou „fondamentales" qui étaient déduites à son temps par MM. Mannheim et d'Ocagne (cfr l'oeuvre magistral de Mannheim ou traités divers de d'Ocagne). Ces relations ne sont qu'un cas très particulier des équations générales, que nous appelons „les équations généralisées de M. Cesàro pour l'analyse intrins que des courbes planes". La démonstration de ces équations et leur spécialisation à celles de Mannheim et de d'Ocagne font l'objet de notre travail.

Exploration météorique de la haute atmosphère.

F. Link, Praha.

(Reçu le 18 mars 1945.)

Sommaire. L'application d'une méthode basée sur la théorie météorique d'Öpik permet de confirmer les résultats des sondages crépusculaires de la haute atmosphère en ce qui concerne le faible gradient de densité. Sa variation saisonière a pu être mise en évidence. En outre cette méthode permet d'étudier les différentes catégories des météorites, dont une fut inconnue jusqu'à présent. Les essaims météoriques (Perséides et Léonides) ne se distinguent pas essentiellement de météores sporadiques.

1. Introduction. L'exploration de la haute atmosphère à l'aide des phénomènes météoriques a été inaugurée par le travail bien connu de Lindemann et Dobson en 1923 [1]. Quoique la théorie exposée dans ce travail s'est montrée incorrecte, elle fut le point de départ d'une série de travaux concernant ce domain intéressant de géophysique. Sans vouloir entrer ici dans les détails des récentes théories nous en exposerons néanmoins quelques points saillants.

Pendant son trajet dans les couches raréfiées de la haute atmosphère, le météorite rencontre les molécules d'air. Ces choques individuels font perdre progressivement l'énergie cinétique très importante du météorite. Elle se consomme en partie à l'évaporation du météorite et le reste est utilisé à l'accélération des molécules d'air rencontrées. Le rapport de ces deux énergies dépend du degré de l'élasticité des choques peu connu jusqu'à présent. Quant à la lumière visible du météore, elle est due principalement à la récombinaison des molécules ionisées par choques, mais une très faible fraction de l'énergie totale du météore est utilisée à cet effet. Làdessus règne encore une très grande incertitude.

Nous avons montré il y a une dizaine d'années [2] que les mesures de la brillance du ciel crépusculaire au zénit peuvent servir de sondages optiques de la haute atmosphère. L'application de notre méthode conduit notamment au faible gradient de densité et son diminution avec l'altitude entre 50 et 150 km, ce qui fut en accord avec les résultats de Lindemann et Dobson. Comme leur théorie s'est montrée inexacte, il nous a paru nécessaire de voir, si l'accord persiste aussi avec les nouvelles théories météoriques. Pour la comparaison nous avons choisi la théorie d'Öpik, qui malgré les maigres dates d'observations est susceptible d'une interprétation pratique, non seulement du point de vue que nous poursuivons, mais aussi en ce qui concerne l'astronomie météorique proprement dite.

2. Bases de la méthode. Dans l'élaboration de notre méthode de l'exploration de la haute atmosphère nous avons été guidés par les considérations suivantes:

1°. Le problème météorique de la haute atmosphère contient trop d'inconnues. T chons alors d'en éliminer la plus importante qui est la densité de l'air.

2°. Les dates d'observation sont en général maigres et peu précises. Parmi elles les altitudes d'apparition et de disparition sont les plus dignes de confiance et les plus nombreuses.

3°. L'éclat du météore est une quantité généralement mal déterminée. Son introduction dans la méthode implique en même temps la connaissance de la vitesse, qui elle aussi est mal déterminée. En plus le mécanisme de la production de la lumière est peu connu.

Ces considérations nous ont conduit à la méthode basée sur la théorie d'Öpik [3]. Les limites de son application sont discutées en détail dans le travail cité. Contentons nous de dire ici qu'elle est applicable aux météores faibles, dont la limite nous avons fixé à $m \geqq 1$. Ceci n'a rien d'absolu, mais l'expérience a montré que cette magnitude sépare deux groupes de météores, qui se comportent d'une manière nettement différente (voir No 6).

Notre méthode ne demande que les altitudes d'apparition h_a et de disparition h_d sans parler de la magnitude nécessaire pour le classement seulement. Nous la prennons telle qu'elle est donnée par les observations sans aucune reduction au zénit. Le rapport des masses d'air traversées par le météore depuis l'entrée dans l'atmosphère terrestre jusqu'à l'apparition et jusqu'à la disparition est d'après Öpik égal à

$$\frac{M_d}{M_a} = \frac{q + h}{q} = k, \tag{1}$$

ou q est la quantité de la chaleur nécessaire pour porter un gramme de la matière météorique à la température d'évaporation et h la chaleur nécessaire pour l'évaporation qui suit. Ce rapport est alors uniquement une fonction de la composition du météorite. Pour les sidérite en pur fer Öpik donne pour $k = 4{,}1$, tandisque pour les météores pierreux on estime $k = 2{,}9$ approximativement.

Notre méthode consiste principalement à déterminer ce rapport en partant des masses d'air connues par une autre méthode (crépusculaire dans notre cas) et à traiter statistiquement ces rapports obtenus pour un grand nombre de météores. Si d'une part tous les météorites appartenaient à ces deux catégories et si d'autre part les masses d'air étaient connues pour toutes les trajectoires observées, on ne devrait rencontrer dans nos statistiques que les deux rapports cités. En réalité nous trouverons une certaine dispersion et m me les décalages dus à l'imprécision des dates d'observation et de la théorie. La discussion des ces circonstances basée sur un nombre suffisant d'observations permettra alors de jetter quelques lumières sur la structure peu connue de la haute atmosphère.

3. Calcul des masses d'air. Tant que l'inclinaison de la trajectoire sur la verticale n'est pas trop grande ($i < 75$) on peut remplacer le rapport des masses d'air traversées par le météore par le rapport des masses d'air comptées suivant la verticale aux points d'apparition et de disparition.

Nous avons donc

$$\frac{M_d}{M_a} = \frac{m_d}{m_a} = k \tag{2}$$

Le calcul des masses verticales m_a et m_d suppose connue la structure de la haute atmosphère en fonction de l'altitude, c'est à dire la densité de l'air ϱ en fonction de l'altitude h. La fonction $\varrho = f(h)$ étant connue soit sous sa forme analytique ou numérique, on peut évaluer les intégrales

$$m_d = \int_{h_d}^{\infty} \varrho \, dh \text{ et } m_a = \int_{h_a}^{\infty} \varrho \, dh \tag{3}$$

Dans l'atmosphère exponentielle où la densité de l'air varie suivant la loi

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta h} \tag{4}$$

on a simplement la formule

$$\log k = \log \frac{m_d}{m_a} = \beta \, (h_a - h_d), \tag{5}$$

qui nous servira au debut de nos discussions.

Dans la discussion approfondie nous avons utilisé les masses d'air calculées par l'intégration numérique à partir des densités crépusculaires [4]. Les dates nécessaires sont résumés dans le tableau I.

4. Le matériel d'observation résulte de différentes collections de trajectoires réelles dont voici l'énumération succinte (Tableau II).

De ce nombre total on a dû éliminer un certain nombre de trajectoires de météores trop brillants discutés séparement et puis toutes les trajectoires trop basses ($h_d < 45$ km), trop élevées ($h_a > 200$ km) et trop inclinées ($i > 75$). Naturellement on a aussi éliminé les trajectoires incomplètes. Des trajectoires qui sont

Tableau I.

Densités et masses d'air d'après les observations crépusculaires [4].

Altitudes h km	$-\log \varrho$	$-\log m$
30	1,90	1,05
40	2,55	1,61
50	3,04	2,13
60	3,60	2,63
70	4,17	3,02
80	4,54	3,29
90	4,80	3,53
100	5,04	3,75
120	5,51	4,19
140	5,95	4,59
160	6,36	4,94
180	6,71	5,27
200	7,04	5,58

Tableau II.

Trajectoires réelles des météores.

No.	Auteur	Publication	Genre de météores	Nombre de trajectoires
1.	W. F. Denning	M. N. 57, 72, 76	Toutes sortes	788
2.	P. Sawicky	A. N. 228	Perséides 1907—25	386
3.	Ph. Broch	A. N. 190	Perséides 19. siècle	118
4.	D. M. Wills	Pop. Astr. 42, 43	Léonides 1933—34	346
5.	Ch. P. Olivier	Publ. Flower Obs.	Léonides 1932	97
6.	Teichgräber	A. N.	Toutes sortes	30

restées, on a formé une cartothèque contenant en tout 881 trajectoires, qui vont nous servir dans la discussion suivante.

5. Statistique des différences d'altitudes. Nous avons d'abord effectué le classement statistique des différences d'altitudes d'apparition et de disparition $\Delta h = h_a - h_d$ en vue d'une information préalable sur les conditions dans la haute atmosphère. Le classement était effectué pour trois intervales d'altitudes moyennes $h_0 = \frac{1}{2}(h_a + h_d)$, c'est à dire pour $h_0 = 50$—79 km, $h_0 = 80$—109 km et $h_0 = 110$—150 km. Les résultats sont contenus dans le tableau III et représentés sur la fig. 1. On y voit quatre maxima de fréquences désignés successivement par A, B, C et D que l'on retrouve surtout dans les deux intervales extrêmes.

Dans l'atmosphère exponentielle les maxima de fréquences correspondraient d'après la formule (5)

$$k = \beta\,(h_a - h_d) = \beta \Delta h \tag{5}$$

aux différentes catégories de météorites. Mais, indépendement de cette question, le décalage des courbes vers la droite peut s'inter-

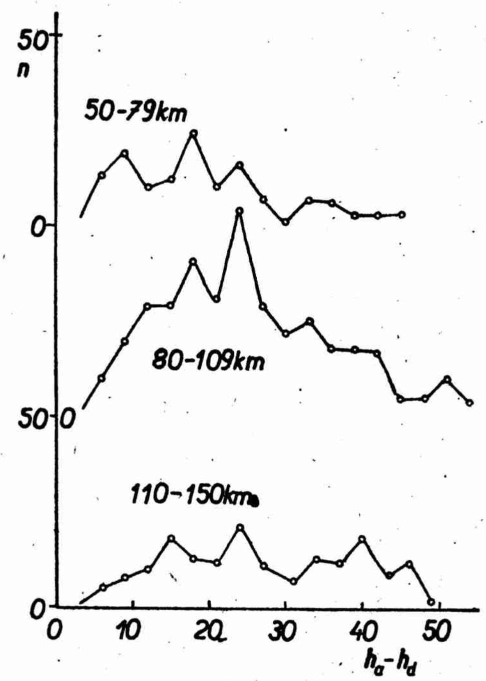


Fig. 1. Statistique des différences $h_a - h_d$.

préter comme une diminution du gradient de densité avec l'altitude croissante. Entre 50—79 km et 110—150 km le rapport des gradients peut être estimé d'après la formule derivée de la formule (5)

$$\beta_1/\beta_2 = \Delta_2 h/\Delta_1 h. \tag{6}$$

Celle-ci donne pour les différents maxima

	A	B	C	D
β_1/β_2	15/9 = 1,67	24/18 = 1,33	39/24 = 1,63	45/33 = 1,36

soit 1,5 en moyenne. Ce rapport correspond à peu près aux conditions de la table I calculée d'après les densités crépusculaires. Cette variation notable du gradient de densité fait alors nécessaire de passer aux rapports des masses d'air.

Tableau III.

Statistique des différences $h_a - h_d$ en fonction de $\frac{1}{2}(h_a + h_d)$ (voir la fig. 1).

$h_a - h_d$ km	Nombre de cas pour $\frac{1}{2}(h_a + h_d)$		
	50 — 79 km	80—109 km	110—150 km
5— 7	13	10	5
8—10	19	20	8
11—13	10	29	10
14—16	11	29	18
17—19	24	41	13
20—22	10	31	12
23—25	16	54	21
26—28	7	29	11
29—31	1	22	7
32—34	7	25	13
35—37	6	18	12
38—40	3	18	18
41—43	3	17	9
44—46	3	5	12
47—49	—	5	2
50—52	10	10	—
52—54	—	4	—
	133	367	171

6. Statistique des rapports des masses d'air. Dans la discussion qui va suivre nous avons dressé une statistique des rapports des masses d'air prises dans la colonne 3 du tableau I. Les premiers essaies faits sur le nombre total d'observations ont donné des résultats fort complexes. C'est pourquoi nous avons dû traiter séparément la periode d'été avril-septembre et celle d'hiver octobre-mars. Les résultats obtenus après cette division sont excellents (voir le tableau IV et la fig. 2). En outre on a separé le groupe de Léonides et de Perséides. Ce dernier est malheureusement peu homogène du fait que nous avons dû éliminer nombreuses trajectoires faute de magnitudes ou à cause des chiffres parfois trop fantaisistes rencontrés dans le matériel d'observations.

L'examen de nos courbes concernant les météores sporadiques*) fait ressortir l'existence des trois maxima de fréquence A, B, C. Les autres maxima B_1 et D sont plus ou moins hypothétiques. Suivant toute probabilité le sommet B correspond aux météorites pierreux et le sommet C aux fers météoriques. Leurs positions moynnes

*) C'est ainsi que nous appellerons les météores autres que les Léonides et les Perséides. Le gros de ces météores est constitué par les météores réellement sporadiques et une faible fraction appartient aux essaims.

$\frac{1}{2}(B + B') = 0{,}47 = \log k_B$ et $\frac{1}{2}(C + C) = 0{,}70 = \log k_C$ sont en bon accord avec les valeurs théoriques 0,47 et 0,62. De cet accord on peut encore conclure à l'exactitude essentielle de nos densités crépusculaires. Quant au premier maximum A il rend probable l'existence d'une troisième catégorie de météorites inconnue jusqu'à

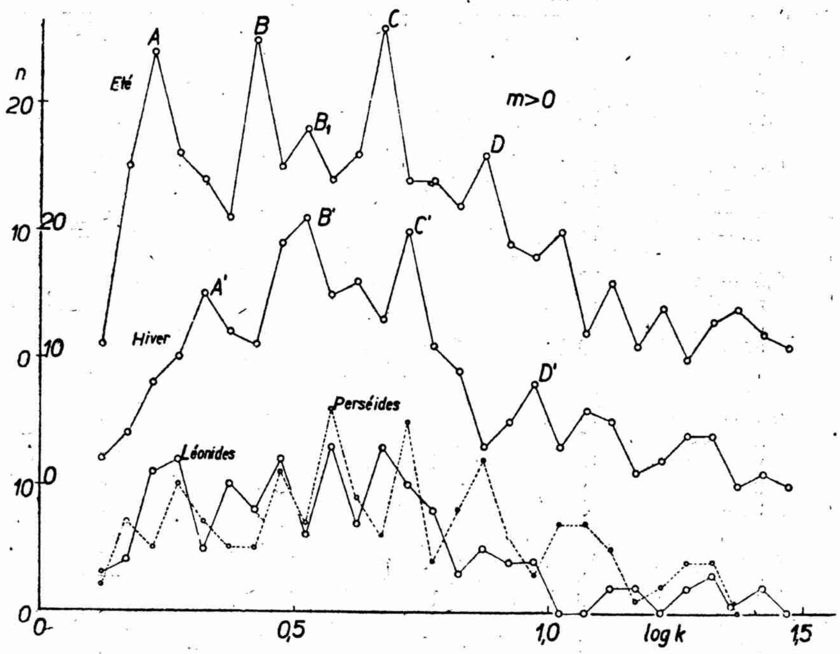


Fig. 2. Statistique des rapportes des masses d'air.

présent. La détermination expérimentale du rapport k pour les différentes matières pourrait peut être donner une indication sur la composition chimique de cette nouvelle catégorie, si ce ne sont pas tout simplement les conditions toutes différentes de celles que suppose la théorie, qui seraient responsables du premier maximum (A) de fréquences.

Les essaims météoriques de Léonides et de Perséides ont été discutés à part. Leurs courbes de fréquences (voir la fig. 2) montrent plusieurs maxima de fréquences dont le premier peut être identifié à coup sûr avec le maximum A des météores sporadiques. Sa position est intermediaire entre la courbe d'été et celle d'hiver. Quant aux autres maxima, les identifications ne sont que plus ou moins probables d'autant plus que les dates concernant les Perséides ne sont pas toujours de toute première qualité. En tous cas il ne se

Tableau IV.

Statistique des rapports des masses d'air = log k (voir la fig. 2).

log k	Nombre de cas			
	Eté		Hiver	
	Sporadiques	Perséides	Sporadiques	Léonides
0,10—14	1	2	2	3
15—19	15	7	4	4
20—24	24 A	5	8	11
25—29	16	10 A	10	12
0,30—34	14	7	15 A′	5
35—39	11	5	12	10
40—44	25 B	5	11	8
45—49	15	11 B	19	12 B′
0,50—54	18	7	21 B′	6
55—59	14	16 B_1?	15	13 B'_1?
60—64	16	9	16	7
65—69	26 C	6	13	13 C′?
70—74	14	15 C?	20 C′	10
0,75—79	14	4	11	8
80—84	12	8	9	3
85—89	16 D?	12 D?	3	5
90—94	9	6	5	4
95—99	8	3	8 D′?	4
1,00—04	10	7	3	—
05—09	2	7	6	—
10—14	6	10	5	2
15—19	1	6	1	2
20—24	4	7	2	0
1,25—29	—	5	4	2
30—34	3	5	4	3
35—39	4	3	—	1
40—44	2	7	1	2
45—49	1	9	—	—
	301	202	228	150
	Nombre total: 881			

manifeste dans nos courbes aucune différence notable entre les météores des essaims et les météores sporadiques.

Les bolides, c'est-à-dire les météores plus brillants que 1^m, se comportent d'une manière différente. Nous avons pu dresser une statistique des rapports k pour 238 exemplaires exclus à cause de leurs éclat de la première statistique (tableau IV). La courbe de fréquence montre aux faibles valeurs de k quelque ressemblance avec celle des météores faibles (voir la fig. 3). Plus loin au lieu de descendre brusquement, comme le font les faibles météores, la courbe continue à se maintenir aux valeurs élevées. Comme d'autre part l'application de la théorie d'Öpik n'est plus permise dans ce cas, nous ne l'avons pas discuté plus en détail.

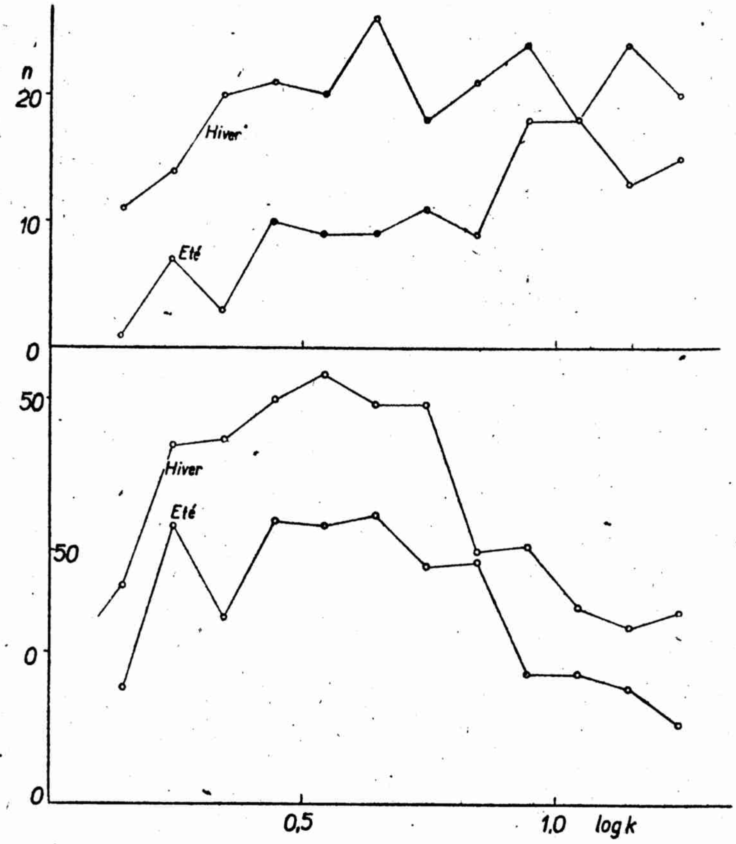


Fig. 3. Statistique des rapports k pour les météores brillants (en haut) et les météores faibles (en bas). L'intervalle de log k est le double de celui de la fig. 2.

La confirmation des résultats crépusculaires par la méthode météorique concerne naturellement le faible gradient de densité et ne dit rien des valeurs absolues de la densité. Ni l'une ni l'autre méthode ne peuvent fournir les valeurs absolues de la densité, comme il ressort de leur principe, qui consiste à comparer les rapports des masses d'air parcourues par les rayons ou par les météores. De ce principe résulte aussi l'impossibilité d'étudier la structure détaillée de la haute atmosphère, puisque dans le calcul des masses d'air par l'intégration des densités s'effacent plus ou moins toutes les particularités de la fonction $\rho = f(h)$. C'est de ce point de vue que nous devons juger les résultats acquis.

7. Influences diverses. Nos statistiques des rapports des masses d'air permettent d'étudier l'influence de différents facteurs sur la structure de la haute atmosphère.

a) *Variation annuelle* est visible à première vue sur nos courbes de fréquences. Le décalage des maxima de fréquence peut être interpreté comme une variation du gradient de densité. Le sens de cette variation est tel que le gradient est plus fort en été qu'en hiver. Si cette variation était uniquement due aux variations de la température et non à celle du poids moléculaire, l'ionosphère vers 100 km d'altitude serait plus froide en été qu'en hiver. Cela est valable pour les conditions nocturnes. Un phénomène semblable se rencontre dans les sondages par le son des régions entre 30 et 50 km d'altitude [5].

Il est difficile de calculer exactement l'amplitude de température nécessaire pour produire l'effet observé d'autant plus que l'amplitude ne doit pas être nécessairement la même aux différentes altitudes. La supposition de l'atmosphère exponentielle ne peut servir ici qu'en première approximation, mais comme ordre de grandeur 'élevation de la température de 25% environ peut rendre compte des faits observés.

b) *Variation nocturne* n'a pu être bien étudiée étant donné que la plupart des observations se placent dans la première partie de la nuit et nous disposons d'un nombre très restreint d'observations matinales.

c) *Influence de l'activité solaire* a été examinée sommairement. On a formé deux groupes d'observations. Dans le premier sont classées les observations effectuées dans les années, dont le nombre relatif moyen de taches dépasse 20, et ce groupe d'observations embrasse alors le maximum d'activité solaire. Dans le second groupe sont les autres observations, qui se rapportent au minimum. On n'a pu trouver de différences notables sauf peut-être le fait, que les courbes trouvées pendant le minimum d'activité solaire paraissent moins troublées et les maxima des fréquences y sont plus prononcés, que pendant les maxima d'activité.

8. Conclusions. La théorie d'Öpik appliquée aux météores faibles ($> 1^m$) permet, en partant des altitudes d'apparition et de disparition seulement, d'arriver aux conclusions suivantes:

1°. La statistique des différences d'altitudes entre le point d'apparition et de disparition indique une diminution du gradient de densité avec l'altitude.

2°. La statistique correspondante des masses d'air revèle des maxima de fréquence, qui d'après la théorie indiquent l'existence des trois catégories de météorites, dont deux (B et C) correspondent aux types pierreux et metalliques et la premi re constitue probablement une nouvelle classe de météorites.

3°. Les masses d'air nécessaires ont été calculées d'après les densités de l'air trouvée par notre méthode crépusculaire. De la coïncidence approchée des deux maxima de fréquence (B et C) avec leurs positions théoriques résulte aussi une confirmation de la méthode crépusculaire.

4°. Les courbes de fréquences d'été et d'hiver montrent un décalage des maxima, qui peut s'interpréter comme une diminution de la température de l'ionosphère en été.

5°. Les résultats concernant les essaims de Perséides et de Léonides ne permettent de tirer aucune conclusion nette, qui les différentierait d'autres météores. Le décalage des maxima de fréquence est sans doute d'origine saisonière.

6°. Le présent travail montre l'importance des bonnes détermination d'altitudes des météores. Les observations doivent être poursuivies systématiquement pendant toute l'année et prolongées aussi dans les heures matinales negligées jusqu'à présent. Dans ce domaine le travail organisé des amateurs est d'une grande utilité.

7°. Seuls mé éors faibles (audessous de 1^m) peuvent rendre des services dans l'exploration de la haute atmosphère au moins d'après la théorie d'Öpik. Les bolides nécessiteraient alors d'autres bases théoriques.

Bibliographie.

[1] F. A. Lindemann-B. M. B. Dobson: Proc. Roy. Soc. London (A), **102** (1923), 411.
[2] F. Link: Journ. des Obs., **17** (1934), 161.
[3] E. Öpik: Publ. Obs. Tartu, **29** (1937), No. 5.
[4] F. Link: Met. Zeit., **61** (1944), 87.
[5] P. Duckert: Erg. d. Kosm. Phys. I.

*

Meteorický výzkum vysoké atmosféry.

(Obsah předešlého článku.)

Sloučením Öpikovy theorie svícení meteorů a autorovy theorie soumrakových zjevů podařilo se:

a) ověřiti výsledky týkající se hustot vzduchu v ionosféře a jejího malého gradientu,

b) ukázati, že gradient hustoty vzduchu je v létě větší než v zimě, což by se dalo interpretovati nižší teplotou v létě než v zimě,

c) vedle existence železných a kamenných meteoritů byla nalezena též nová dosud neznámá kategorie lišící se buď tepelnými vlastnostmi nebo odlišným mechanismem svícení, než jaký předpokládá Öpik.

K těmto poznatkům lze dospěti jen ze stanovení výšek zažehnutí a zhasnutí meteorů, což ukazuje na důležitost amatérských pozorování toho druhu pěstovaných ve větším měřítku dosud jen ve Spojených státech a v Anglii.

Elektromagnetické vlny na drátu s isolačním obalem.

Památce prof. F. Záviška - † 17. IV. 1945.

Ivan Šimon, Praha.

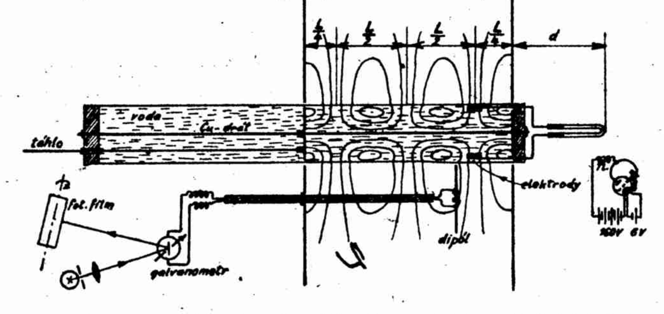
(Došlo 1. srpna 1945.)

V roce 1934 uveřejnil prof. Záviška pod tímto titulem theoretickou práci [1], ve které ukázal, jakým způsobem je ovlivňováno šíření elektromagnetických vln podél vodivého drátu dielektrickým obalem. Výsledky citované práce lze shrnouti takto: Podél drátu se může šířiti vlnění dvojího druhu. Prvé — t. zv. hlavní vlna — odpovídá normálním, „drátovým" vlnám, jen jest jeho postupná rychlost vlivem obalu snížena. Toto snížení vlnových délek je v oblasti velkých vlnových délek nezávislé na kmitočtu, tedy bez disperse. Druhý druh vlnění — t. zv. vedlejší vlny 1., 2., 3., ... řádu — odpovídá vlnám v dielektrických válcích a vyznačuje se značnou disp rsí. Zatím co existence hlavních vln plynula již ze starší theorie Harmsovy [2] a byla také pokusně dokázána (Weiss [3]), byla theorie vedlejších vln nová a chybělo dosud její pokusné ověření.

V letech 1935—36 jsem provedl na podnět prof. Žáčka měření, směřující k tomuto cíli. Výsledky měření se však tehdy neshodovaly s výpočtem a proto nedošlo k uveřejnění. Teprve letos, chtěje zužitkovati některá z tehdy provedených měření k určení dielektrické konstanty vody, nalezl jsem ve svém tehdejším výpočtu nedopatření, po jehož odstranění se ukázala uspokojivá shoda měření s theorií. Protože drátové a trubicové vlny nabyly mezitím v rychle se rozvíjejícím oboru elektrických mikrovln značného významu, pokládal jsem za vhodné uveřejniti tento experimentální doplněk práce prof. Závišky.

Měření bylo provedeno na měděném drátě průměru 0,4 cm, opatřeném vodním obalem ve tvaru souosého válce průměru 12 cm. Voda — zvolená pro svoji vysokou dielektrickou konstantu $\varepsilon = 80$ — byla nalita v tenkostěnné trubici z bakelisovaného papíru. Budicí vlny v oboru 70 až 170 cm byly získávány pomocí malého oscilátoru s triodou knoflíkového typu (RCA 955).

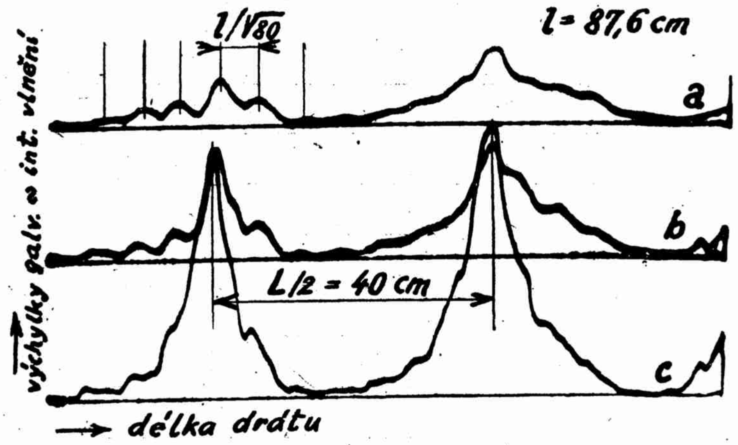
Celé uspořádání je patrné z obr. 1. Měděný drát je napjat v gumoidové trubici asi 150 cm dlouhé, naplněné vodou. Na jednom konci trubice bylo zevně umístěno plechové stínítko rozměrů asi 70 × 70 cm², které bylo také uvnitř doplněno plechovým kotoučem v téže rovině! Otvory v tomto vnitřním stínítku byly do vody zavedeny dvě elektrody, které byly umístěny v takové vzdálenosti od stínítka, kde podle výpočtu měly vystupovati elektrické siločáry kolmo z vodního obalu do vnějšího prostoru. Za tuto vzdálenost byla brána čtvrtina vlnové délky L drátového vlnění, vypočtená předem podle Záviškovy theorie pro danou budící vlnovou délku l. Elektrody byly napájeny krátkým vedením, které bylo velmi volně



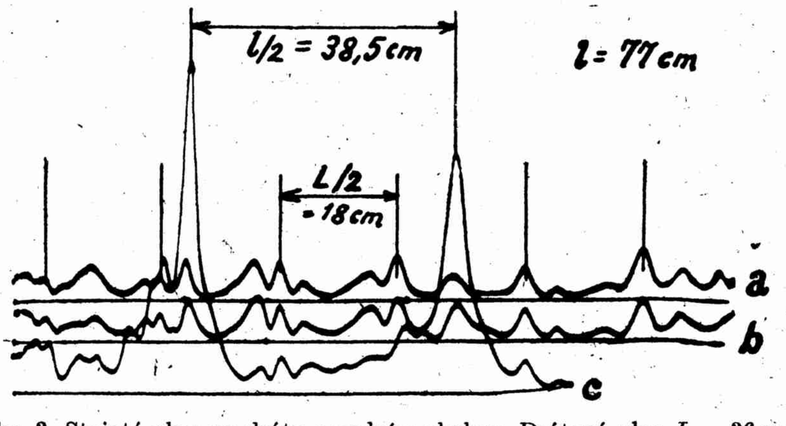
Obr. 1. Uspořádání pro měření stojatých vln na drátu s dielektrickým obalem.

spřaženo s opodál postaveným oscilátorem. Délku d tohoto vedení bylo možno měniti pozounovitým nástavcem, takže se celý systém dal vyladiti na žádanou vlnovou délku. Význam tohoto ladění bude ukázán dále. — Podél vodního obalu se dalo posouvati druhé stínítko, s kterým se současně také uvnitř posunovalo kruhové stínítko, spojené třecím kontaktem s drátem. Kdykoliv se během posouvání stala vzdálenost mezi posuvnými a pevnými stínítky rovnou celistvému násobku půlvlny L 2, vytvořilo se mezi stínítky stojaté vlnění; takový případ je právě naznačen na obr. 1. V tomto případě ukazuje galvanometr, spojený s detektorem indikačního dipólu, umístěného mezi stínítky, maximální výchylku. Výchylky galvanometru byly registrovány na fotografický papír, jehož odvinování bylo vázáno s pohybem stínítek. Tím byl umožněn zcela samočinný chod zařízení během měření, takže odpadlo rušení, způsobené nepravidelnými odrazy rozptýleného vlnění při změnách polohy pozorovatele. — Vlnová délka budícího vlnění byla měřena Lecherovými dráty, velmi volně vázanými s oscilátorem.

Protože nebylo možno zabrániti, aby mezi stínítka nevnikalo zčásti také vlnění přímo z oscilátoru — po příp. po různých odrazech v laboratoři — vznikaly z počátku superposicí naprosto nepřehledné serie maxim a minim. Teprve zavedení fotografické registrace výchylek galvanometru umožnilo nalézti hledané zákoni-

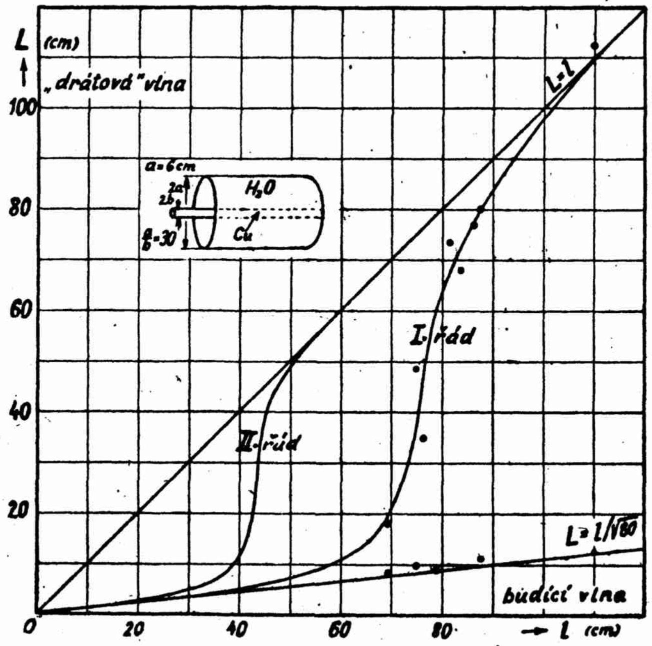


Obr. 2. Stojaté vlny na drátu s vodním obalem. Drátová vlna $L = 80$ cm. Postupným laděním napájecího vedení (viz obr. 1) byla intensita drátových vln vyzdvižena nad úroveň rušivých vln. Délka napájecího vedení byla po řadě: a) d = 44 cm, b) d = 47 cm, c) d = 50,5 cm.



Obr. 3. Stojaté vlny na drátu s vodním obalem. Drátová vlna $L = 36$ cm. Délka napájecího vedení byla po řadě: a) a b) d = 0 cm, c) d = 23 cm.

tosti v seriích výchylek. — Bylo provedeno více než 50 měření, z nichž však pouze asi pětina dala upotřebitelné výsledky. Mnohá měření poskytovala pouze triviální výsledek $L = l$ (L = vlnová délka drátového vlnění, l = vlnová délka budícího vlnění), jiná zase $L = l/\sqrt{80}$, což odpovídá vlnění, šířícímu se ve vodě. Zpravidla byly všechny tyto případy současně kombinovány a teprve vhodným vyladěním napájecího vedení se podařilo vyzdvihnouti drátové vlny nad úroveň rušivých vln; to je na př. velmi dobře patrné z obr. 2 (měření č. 20). V tomto případě bylo superponováno pouze



Obr. 4. Závislost vlnové délky drátového vlnění na budící vlnové délce pro měděný drát se souosým vodním obalem. — Plně vytažené křivky byly vypočteny podle Záviškovy theorie, experimentálně zjištěné hodnoty jsou vyznačeny body.

drátové a „vodní" vlnění. Na obr. 3 je jiný příklad (měření č. 40), kde se zprvu objevovalo jen budící vlnění, které se podařilo potlačiti vhodným vyladěním napájecího obvodu.

Výsledky měření jsou uvedeny v následující tabulce:

l (cm)	87,6	87,4	86,2	83,8	81,6	81,6	77,0	75,2	69,4
L (cm)	80	80	77	68	74	73	36	48	18

V obr. 4 jsou naměřené hodnoty srovnány s křivkami pro vedlejší vlny 1. a 2. řádu, vypočtenými podle Záviškovy theorie pro pokusně realisovaný případ. Ve vlnovém oboru, jenž byl k disposici, se dalo vzbuditi na drátu pouze vedlejší vlnění 1. řádu. Ačkoliv naměřené hodnoty vlnových délek vykazují poměrně značný rozptyl, zaviněný nedostatečnou přesností měření stojatých vln na drátu, je viděti, že v celku dobře odpovídají výpočtu podle Záviškovy theorie.

Práce byla provedena v laboratořích Fysikálního ústavu Karlovy university, jehož řediteli, prof. Dr. Aug. Žáčkovi děkuji za propůjčení přístrojů a živý zájem na postupu měření. Prof. Dr. V. Petržílkovi rovněž děkuji za účinnou podporu při práci.

*

Electromagnetic waves on a wire surrounded by a dielectric cylinder.

(Abstract of the preceding paper.)

More than ten years ago the late prof. Záviška — who died in a german concentration camp on april 17 45 — was theoretically dealing with the propagation of electromagnetic waves along a conducting wire, surrounded by a dielectric cylinder. He has shown that, in addition to the main wave, other waves (secondary waves) can propagate along the wire, provided the applied wavelength is sufficiently short. The behaviour of this type of waves is somewhat similar to that of waves in the hollow wave guides which become more important in the recent time. The theory of prof. Záviška has been verified in the case of a copper wire (4 mm dia.) surrounded by a water cylinder ($\varepsilon = 80$, 120 mm dia.) by the author, who found quite a good agreement of measured wavelengths (dots in the fig. 4) with calculated curves.

Literatura.

[1] Záviška: Věstník král. čes. společnosti nauk, Tř. II., 1934.
[2] Harms: Ann. d. Phys., 23 (1907), 44.
[3] Weiss: Ann. d. Phys., 28 (1909), 651.