Pohyb proměnného rovinného útvaru.

Zdeněk Pírko, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1945.)

1. Budiž dána rovinná křivka Γ a budiž σ její oblouk, počítaný od jistého bodu. Zaveďme tento oblouk jako parametr na křivce; označíme-li $\mathfrak{r}$ radiusvektor obecného bodu M křivky Γ, můžeme psát její rovnici ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma). \tag{1}$$

O složkách $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ vektoru $\mathfrak{r}$ předpokládejme, že jsou jednoznačnými funkcemi parametru σ v jistém společném oboru a že mají první a druhou derivaci. — Budeme v dalším nazývat křivku Γ křivkou základní; kromě toho nazveme pravoúhlou soustavu Σ souřadnic x, y, k nimž je křivka rovnicí (1) vztažena, soustavou absolutní.

Vedle této absolutní soustavy Σ zaveďme ještě pravoúhlou soustavu $'\Sigma$ souřadnic $'x$, $'y$ takto: kladnou osou úseček nové soustavy budiž kladná tečna základní křivky Γ v obecném bodě jejím M, kladnou osou pořadnic budiž příslušná kladná normála; přitom kladné smysly nových os souřadnic jsou definovány obvyklým způsobem.[1]) Soustavu nazveme soustavou relativní.

Konečně budiž P bod, jehož souřadnice v relativní soustavě $'\Sigma$ jsou $('x; 'y)$. — Jestliže se relativní soustava pohybuje podél základní křivky Γ a jestliže kromě tohoto základního pohybu má bod P v soustavě $'\Sigma$ zároveň ještě svůj pohyb vlastní, od základního pohybu neodvislý, tu popíše všeobecně trajektorii $'\Gamma$; označíme-li $\mathfrak{R}$ radiusvektor bodu P, vztažený k absolutní soustavě, je rovnice křivky $'\Gamma$ ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + 'x\mathfrak{t} + 'y\mathfrak{n}. \tag{2}$$

Přitom jsou $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\sigma)$ jednotkový vektor tečny resp. normály základní křivky Γ, skaláry

$$'x = 'x(\sigma, \varrho),\ 'y = 'y(\sigma, \varrho) \tag{3$_1$}$$

[1]) Viz Václav Hlavatý, Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937; 21 násl.

jsou jednoznačné funkce dvou nezávislých parametrů σ, ϱ v jistém společném oboru, které mají první derivaci. Je tedy také

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\sigma, \varrho); \tag{3_2}$$

σ je — jako výše — oblouk základní křivky Γ, ϱ je parametr, jímž stanovíme vlastní pohyb bodu P v relativní soustavě. — Křivku $'\Gamma$ budeme v dalším nazývat křivkou odvozenou.

2. Pro křivku $'\Gamma$ odvodíme nyní jisté základní vztahy. — Diferencujeme-li rovnici (2), obdržíme nejprve

$$\mathrm{d}\mathfrak{K} = \mathrm{d}\mathfrak{r} + \mathrm{d}('x\mathfrak{t}) + \mathrm{d}('y\mathfrak{n})$$

a tedy, vzhledem k rovnicím (3_1) a vztahům $\mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{r}_\varrho = \mathfrak{t}_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho = 0$,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{K} = \mathfrak{t}\,\mathrm{d}\sigma + 'x\mathfrak{t}_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + 'x_\sigma\mathfrak{t}\,\mathrm{d}\sigma + 'x_\varrho\mathfrak{t}\,\mathrm{d}\varrho + \\ + 'y_\sigma\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\sigma + 'y\mathfrak{n}_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + 'y_\varrho\mathfrak{n}\,\mathrm{d}\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Podle vzorců Frenetových-Serretových však platí

$$\mathfrak{t}_\sigma = k\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}_\sigma = -k\mathfrak{t},$$

kdež $k = k(\sigma)$ je křivost základní křivky Γ v bodě (σ).

Můžeme tedy psát rovnici (4) také ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\mathfrak{K} = (\mathrm{d}\sigma + 'x_\varrho\,\mathrm{d}\varrho + 'x_\sigma\,\mathrm{d}\sigma - 'yk\,\mathrm{d}\sigma)\,\mathfrak{t} + \\ + ('y_\varrho\,\mathrm{d}\varrho + 'y_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + 'xk\,\mathrm{d}\sigma)\,\mathfrak{n}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Označme $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}('x, 'y)$ resp. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}('x, 'y)$ vektor tečny resp. normály odvozené křivky $'\Gamma$ a s její oblouk. Platí tudíž nejprve

$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{K}}{\mathrm{d}s} = \mathfrak{T}$$

a tedy podle (5)

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{d}s = A\mathfrak{t} + B\mathfrak{n}, \tag{6}$$

jestliže jsme položili pro stručnost

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathrm{d}\sigma + 'x_\varrho\,\mathrm{d}\varrho + 'x_\sigma\,\mathrm{d}\sigma - 'yk\,\mathrm{d}\sigma, \\ B &= \phantom{\mathrm{d}\sigma +{}} 'y_\varrho\,\mathrm{d}\varrho + 'y_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + 'xk\,\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vyjádříme-li ještě vektor $\mathfrak{T}$ lineárně pomocí skalárů $T_{'x}$, $T_{'y}$

$$\mathfrak{T} = T_{'x}\mathfrak{t} + T_{'y}\mathfrak{n}$$

čili

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{d}s = (T_{'x}\mathfrak{t} + T_{'y}\mathfrak{n})\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

obdržíme srovnáním rovnic (6), (8)

$$(A - T_{'x}\mathrm{d}s)\,\mathfrak{t} + (B - T_{'y}\,\mathrm{d}s)\,\mathfrak{n} = 0$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned} A - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0, \\ B - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hledané základní vztahy získáme, dosadíme-li v rovnicích (9) za A, B podle (7):

$$\left.\begin{aligned}(1 + 'x_\sigma - 'yk)\,\mathrm{d}\sigma + 'x_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T'_x\,\mathrm{d}s = 0,\\ ('y_\sigma + 'xk)\,\mathrm{d}\sigma + 'y_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T'_y\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Obecné rovnice (10) specialisujme! — Jestliže bod P je v relativní soustavě pevný (bez vlastního pohybu), pak je

$$'x_\varrho = 'y_\varrho = 0 \text{ a ovšem i } \mathrm{d}\varrho = 0,$$

takže rovnice (10) se zjednoduší:

$$\left.\begin{aligned}(1 + 'x_\sigma - 'yk)\,\mathrm{d}\sigma - T'_x\,\mathrm{d}s = 0,\\ ('y_\sigma + 'xk)\,\mathrm{d}\sigma - T'_y\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Označíme-li $\mathrm{d}'x$ resp. $\mathrm{d}'y$ diferenciály souřadnic $'x$, $'y$ bodu P v relativní soustavě, pak bude

$$\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}s} = T'_x, \quad \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}s} = T'_y,$$

takže rovnice (11) můžeme psát ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + 'x_\sigma - 'yk,\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \quad 'y_\sigma + 'xk.\end{aligned}\right| \tag{12}$$

V této podobě nejsou rovnice (12) nic jiného, než t. zv. **fundamentální rovnice Cesàrovy**, jež jsou východiskem pro přirozenou analysu křivek.[2]) S tohoto hlediska mohli bychom nazvat rovnice (10)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + 'x_\sigma - 'yk + 'x_\varrho \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma},\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \quad 'y_\sigma + 'xk + 'y_\varrho \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma}\end{aligned}\right|$$

„zobecněnými rovnicemi Cesàrovými".

Z rovnic (12) obdržíme pro úhel ν, který svírá tečna odvozené křivky $'\Gamma$ s relativní osou $'x$ (v případě, že bod P nemá vlastní pohyb), výraz

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'x} = \frac{'y_\sigma + 'xk}{1 + 'x_\sigma - 'yk}; \tag{13}$$

pro čtverec elementu oblouku $\mathrm{d}s^2$ této křivky pak nalezneme

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}'x^2 + \mathrm{d}'y^2 =\\ &= [(1 + 'x_\sigma - 'yk)^2 + ('y_\sigma + 'xk)^2]\,\mathrm{d}\sigma^2.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

---

[2]) Viz Ernesto Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca (něm. Vorlesungen über natürliche Geometrie, přel. Gerhard Kowalewski, Berlin 1926 [II. vyd.], 21 násl.); Georg Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Berlin 1923 (III. vyd.), 91 násl.

Stanovme nyní odvozenou křivku $'\Gamma$ těmito dalšími požadavky:

$$'x = l(\sigma), \quad 'y = 0,$$

kdež $l(\sigma)$ je libovolná (regulární) funkce oblouku σ základní křivky Γ. Pak obdržíme z rovnice (13)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{k\, l(\sigma)}{1 + l'(\sigma)} \quad \left(l'(\sigma) = \frac{\mathrm{d}l(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right)$$

čili

$$l'(\sigma) - k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu + 1 = 0; \tag{15}$$

z rovnice (14)

$$\mathrm{d}s^2 = [(1 + l'(\sigma))^2 + k^2\, l^2(\sigma)]\, \mathrm{d}\sigma^2$$

a tudíž vzhledem k rovnici (15) (žádáme-li zároveň, aby oblouk s rostl s rostoucím obloukem σ)

$$\mathrm{d}s = k \frac{l(\sigma)}{\sin \nu} \mathrm{d}\sigma. \tag{16}$$

Rovnice (15), (16) budeme aplikovat na pohyb proměnného rovinného útvaru.[3])

4. Z rovnice (15) plyne

$$\mathrm{d}l(\sigma) = k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu\, \mathrm{d}\sigma - \mathrm{d}\sigma.$$

Jestliže označíme $\mathrm{d}\tau$ kontingenční úhel základní křivky Γ a dále $N(\sigma) = \dfrac{l(\sigma)}{\sin \nu}$, můžeme napsat předcházející rovnici ve tvaru

$$\mathrm{d}l(\sigma) = \left[N(\sigma) \cos \nu - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\right] \mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

Při stejném označení obdržíme z rovnice (16) vztah

$$\mathrm{d}s = N(\sigma)\, \mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

Uvažujme konečně dvě základní křivky Γ_1, Γ_2 obecně různé a další křivku $'\Gamma$ obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2. Z libovolného bodu křivky $'\Gamma$ veďme tečny ke křivkám Γ_1, Γ_2; označme λ jejich úhel. Jsou-li $\mathrm{d}\tau_i$ kontingenční úhly křivek Γ_i ($i = 1, 2$), pak platí nejprve

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\tau_1 - \mathrm{d}\tau_2$$

---

[3]) K jiné geometrické aplikaci rovnic (15), (16), jež pochází od Herwiga, uveďme: Je-li $k = k(\sigma)$ přirozenou rovnicí základní křivky Γ a předpokládáme-li, že úhel ν je stálý, je odvozená křivka $'\Gamma$ isogonální trajektorií tečen základní křivky Γ (pod úhlem ν). Rovnici ∞^1 těchto trajektorií nalezneme z diferenciální rovnice lineární 1. řádu (15); zní

$$l(\sigma) = \exp\,(\operatorname{cotg} \nu \,.\, \textstyle\int k\, \mathrm{d}\sigma)\, [C - \textstyle\int \exp\,(- \operatorname{cotg} \nu \,.\, \textstyle\int k\, \mathrm{d}\sigma)\, \mathrm{d}\sigma],$$

C je integrační konstanta. Rovnice (16) spolu s rovnicí předcházející určuje pak oblouk této trajektorie. Viz Gino Loria, Curve piane speciali algebriche e transcendenti, II, Milano 1930; 306 násl.

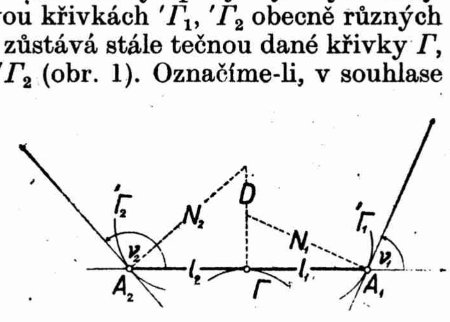
a tudíž podle rovnice (18)

$$d\lambda = \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) ds, \tag{19}$$

kdež opět $N_i(\sigma_i) = \dfrac{l_i(\sigma_i)}{\sin \nu_i}$ $(i = 1, 2)$ je element oblouku křivky $'\Gamma$.

Rovnice (17), (18), (19) lze ihned interpretovat v kinematice proměnného rovinného útvaru:

Nechť se úsečka $\overline{A_1A_2}$ proměnlivé délky l pohybuje svými krajními body A_1, A_2 po daných dvou křivkách $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ obecně různých a její pohyb budiž řízen tak, že zůstává stále tečnou dané křivky Γ, obecně rozdílné od křivek $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ (obr. 1). Označíme-li, v souhlase s předcházejícím výkladem, σ oblouk křivky Γ, $d\tau$ její kontingenční úhel, s_i oblouk křivky $'\Gamma_i$ a l_i části, v něž je úsečka $\overline{A_1A_2}$ v dané fázi pohybu rozdělena bodem dotyku s křivkou Γ $(i = 1, 2)$, pak změna délky dl úsečky l při přechodu z fáze dané do fáze soumezné (při pošinutí úsečky $\overline{A_1A_2}$ po křivce Γ) je patrně rovna algebraickému součtu změn obou jejích částí, t. j.



Obr. 1.

$$dl = dl_1 + dl_2,$$

při čemž platí podle rovnice (17)

$$dl_i = \left(N_i \cos \nu_i - \frac{d\sigma}{d\tau}\right) d\tau, \quad N_i = \frac{l_i}{\sin \nu_i}. \tag{20_1}$$
$$(i = 1, 2)$$

Poněvadž změny dl_1, dl_2 mají opačná znaménka, můžeme psáti také

$$|\, dl \,| = |\, N_1 \cos \nu_1 - N_2 \cos \nu_2 \,|\, d\tau = D\, d\tau; \tag{20_2}$$

význam délky D je patrný z obrázku. Vztah (20_1) je však známý jako druhá základní rovnice d'Ocagneova, vztah (20_2) jako první základní rovnice Mannheimova (pro změnu délky při pohybu proměnného rovinného útvaru).

Při zmíněném pošinutí bude změna oblouku ds_i křivky $'\Gamma_i$ dána rovnicí (18), totiž

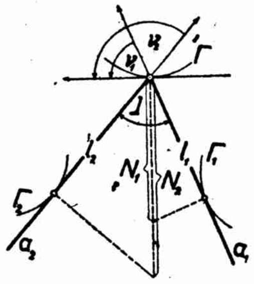
$$ds_i = N_i\, d\tau; \tag{21_1}$$
$$(i = 1, 2)$$

odtud pro poměr obou změn

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{21_2}$$

Vztah (21_1) je totožný s **první základní rovnicí d'Ocagneovou** (pro změnu oblouku při pohybu proměnného rovinného útvaru), vztah (21_2) je pak **třetí základní rovnice Mannheimova** (pro poměr změn oblouků; tento vztah byl ostatně známý již Newtonovi).

Konečně nechť se pohybuje úhel $\widehat{a_1 a_2}$ proměnlivé velikosti λ tak, že svými rameny a_1, a_2 se dotýká dvou daných křivek Γ_1, Γ_2 obecně různých, při čemž jeho pohyb je řízen tak, že vrchol úhlu probíhá danou křivkou $'\Gamma$, obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2 (obr. 2). Označíme-li zase σ_i oblouk křivky Γ_i, $d\tau_i$ kontingenční úhel její ($i = 1, 2$), s oblouk křivky $'\Gamma$, pak **změna úhlu** $d\lambda$ úhlu λ při přechodu z fáze dané do fáze soumezné (při pošinutí úhlu $\widehat{a_1 a_2}$ po křivce $'\Gamma$) je patrně dána rovnicí (19)



Obr. 2.

$$|\,d\lambda\,| = \left| \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2} \right| ds. \tag{22}$$

Rovnice (22) je totožná s **třetí základní rovnicí d'Ocagneovou a druhou základní rovnicí Mannheimovou** (pro změnu úhlu při pohybu proměnného rovinného útvaru).

5. V závěru poznamenejme toto: Autorem základních rovnic pro pohyb proměnného rovinného útvaru je A. Mannheim[4]); způsob, jímž tyto rovnice odvodil, není však prostý námitek.[5]) Přesný důkaz methodou t. zv. infinitesimální geometrie podal teprve M. d'Ocagne[6]), ale pro každou rovnici samostatně, pozměniv také Mannheimovo pořadí. Význam vzorců dostatečně prokazují jejich různé geometrické aplikace.[7])

---

[4]) Nazývá je „formules primordiales“ a uveřejnil je poprvé v knize E. Bour, Cours de Mécanique et Machines, I, Cinématique, Paris 1865 (str. 51—52, 57, 59), poté ve vlastních spisech: Cours de Géométrie descriptive comprenant les éléments de la Géométrie cinématique, Paris 1880 a 1886 (I. a II. vyd.), str. 202—204 resp. 203—205); Principes et développements de Géométrie Cinématique, Paris 1894, str. 44—48.

[5]) Způsob, kterým Mannheim dokazuje své vzorce, lze posouditi také z důkazu vzorce (20_2), jak je podán v knize V. Jarolímek a B. Procházka, Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Praha 1909; str. 389.

[6]) Nazývá je „formules fondamentales“. Viz jeho spisy: Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale, Paris 1896, str. 258 až 264; Cours de Géométrie pure et appliquée, I, Paris 1917; II, Paris 1918 (str. 123—131 prvního dílu); Cours de Géométrie, Paris 1930; str. 38—43. Způsob, kterým d'Ocagne dokazuje své vzorce, lze posoudit z důkazů, jak jsou podány v knize J. Sobotka, Differenciální geometrie, I, Praha 1909; str. 408 násl., 446 násl.

[7]) V uvedených spisech Mannheimových, d'Ocagneových a v knize Sobotkově.