$G'(x)$.[2]) Soit $G'(x) \neq 0$ pour $a \leqq x \leqq b$[3]) et posons $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Si $A \neq B$, alors la fonction $F'(x) : G'(x)$ prend, dans l'intervalle ouvert (a, b), toutes les valeurs situées entre A et B.

Démonstration. Soit p. ex. $A < B$ et soit C un nombre quelconque tel que $A < C < B$. Evidemment il existe un nombre $h > 0$ tel que

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{G(a+h) - G(a)} < C < \frac{F(b) - F(b-h)}{G(b) - G(b-h)}, \quad a + h < b - h.$$

Choisissons un tel h. La fonction

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{G(x+h) - G(x)}$$

est continue dans l'intervalle fermé $\langle a, b-h \rangle$ (voir[3]) et l'on a $f(a) < C < f(b-h)$. Il existe donc un ξ tel que

$$a < \xi < b - h, \ f(\xi) = C,$$

c'est-à-dire

$$F(\xi + h) - C\,G(\xi + h) = F(\xi) - C\,G(\xi).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un η tel que

$$a < \xi < \eta < \xi + h < b, \ F'(\eta) - C\,G'(\eta) = 0, \text{ c. q. f. d.}$$

Dans le cas particulier $G(x) = x$ on retrouve le théorème de Darboux.

V. Jarník.

*

Poznámka o funkcích s intermediárními hodnotami.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte $F(x)$, $G(x)$ reálné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež mají v $\langle a, b \rangle$ konečnou derivaci (v bodě a zprava, v bodě b zleva). Nechť $G'(x) \neq 0$ pro $a \leqq x \leqq b$. Položme $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Potom platí: je-li $A \neq B$, nabývá funkce $F'(x) : G'(x)$ v otevřeném intervalu (a, b) všech hodnot, ležících mezi čísly A, B.

---

[2]) Où $F'(a)$, $G'(a)$ désignent des dérivées du côté droit au point a et $F'(b)$, $G'(b)$ des dérivées du côté gauche au point b.

[3]) Pour $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ on a donc

$$G(\beta) - G(\alpha) = (\beta - \alpha)\, G'(\gamma) \neq 0 \quad (\alpha < \gamma < \beta).$$