

Werk

Label: Article

Jahr: 1946

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0071|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires.

Václav Hruška, Prague.

(Reçu le avril 1945.)

1. — Définition. — Soit donnée une fonction

$$f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1,1)$$

Soient $\alpha \neq \beta$ deux points quelconques de l'intervalle (1,1), dans lesquels $f(x)$ a des valeurs différentes

$$f(\alpha) = A \neq B = f(\beta).$$

Si dans un point convenable situé entre α et β la fonction $f(x)$ devient égale à toute valeur choisie entre A et B , je dis que $f(x)$ est une fonction aux valeurs intermédiaires.

A l'aide de cette définition nous pouvons donner à un théorème bien connu de Darboux¹⁾ la forme suivante:

Théorème. — Soit

$$f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1,2)$$

une fonction ayant une dérivée dans chaque point de l'intervalle (1,2). Cette dérivée est une fonction aux valeurs intermédiaires dans l'intervalle (1,2).

Remarque. — De même les fonctions continues dans l'intervalle (1,1), ont naturellement la propriété mentionnée dans la Définition, ce que l'on démontre ordinairement d'une façon indépendante du théorème de Darboux. Mais on peut aussi le démontrer comme une conséquence de ce théorème, car toute fonction continue est aussi une dérivée de son intégrale définie de Cauchy-Riemann, ayant la limite supérieure variable.

2. — Je ne crois pas que le théorème suivant sur les fonctions aux valeurs intermédiaires ait déjà été prononcé:

Théorème. — Soient

$$f(x) \text{ et } \varphi(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2,1)$$

¹⁾ Ch. J. de la VALLÉE-POUSSIN, Cours d'analyse infinitésimale t. 1; p. 70 (71^{ème} éd., Paris, 1930, Gauthier-Villars).

deux fonctions qui possèdent des dérivées du premier ordre $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ partout dans l'intervalle $(2,1)$, dont la dérivée $\varphi'(x)$ va constamment en croissant ou constamment en décroissant dans $(2,1)$. Alors la fonction

$$\lambda(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{\varphi'(x) - \varphi'(a)} \quad (2,3)$$

est une fonction aux valeurs intermédiaires dans $(2,1)$.

Démonstration. — Soit, par exemple, $\varphi'(x)$ une fonction allant constamment en décroissant dans $(2,1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi'(a) > \varphi'(\alpha) > \varphi'(x) > \varphi'(\beta), \\ a < \alpha < x < \beta \leq b. \end{aligned} \quad (2,4)$$

Soit p. ex. aussi

$$A = \lambda(\alpha) > \lambda(\beta) = B. \quad (2,5)$$

Choisissons une valeur L quelconque entre A et B ,

$$A > L > B \quad (2,6)$$

et considérons la fonction

$$\chi(x) = f(x) - x \cdot f'(a) - L [\varphi(x) - x \cdot \varphi'(a)], \quad a \leq x \leq b.$$

Elle a une dérivée

$$\chi'(x) = f'(x) - f'(a) - L [\varphi'(x) - \varphi'(a)] \quad (2,7)$$

partout dans

$$\alpha \leq x \leq \beta \quad (2,8)$$

qui a des valeurs

$$\begin{aligned} \chi'(\alpha) &= f'(\alpha) - f'(a) - L [\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\alpha) [\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] - L [\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= (A - L) [\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] < 0, \\ \chi'(\beta) &= f'(\beta) - f'(a) - L [\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\beta) [\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] - L [\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= (B - L) [\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] > 0 \end{aligned}$$

dans les points $x = \alpha$ et $x = \beta$. Alors, d'après le théorème de DARBOUX, elle a la valeur

$$\chi'(\xi) = 0, \quad \alpha < \xi < \beta$$

dans un point ξ entre α et β , c'est-à-dire

$$\lambda(\xi) = \frac{f'(\xi) - f'(a)}{\varphi'(\xi) - \varphi'(a)} = L, \quad \alpha < \xi < \beta. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque de la rédaction. Dans le théorème de M. Hruška, on peut se passer de la supposition concernant la monotonie de $\varphi'(x)$. En effet, on peut énoncer le théorème suivant:

Soient $F(x)$, $G(x)$ deux fonctions réelles possédant dans l'intervalle fermé $\langle a, b \rangle$ des dérivées finies $F'(x)$,