Systém S''_0 práve konštruovaný vyhovuje teda rovnici (40) pre všetky celé $m \geqq 0$ [viď tiež (34), (35)]. Okrem toho vznikol S''_0 z S_0 k-posunutím: lebo čísla skupiny $P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi$ (čo je najmenej jedno číslo a najviac k čísel) sme zmenšili, ostatné sme ponechali bez zmeny. Tým je dôkaz prevedený.

*

Sur les „translations k".

(Résumé de l'article précédent.)

Soient k, n deux nombres entiers donnés, $1 \leqq k \leqq n$. Soit R_n l'espace cartésien à n dimensions. Considérons une translation quelconque (caractérisée par n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$) qui transforme chaque point $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in R_n$ en $[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]$. Cette translation soit appellée une „translation k", si les conditions suivantes sont remplies:

1. Chaque nombre a_i est entier et non négatif ($\geqq 0$).

2. Si l'on désigne par l le nombre de ceux parmi les nombres $a_1, \ldots, a_n$ qui sont différents de zéro, on a $1 \leqq l \leqq k$.

Pour le développement d'un nombre entier $x \geqq 0$ quelconque dans le système dyadique nous allons constamment employer la notation suivante:

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\, 2^m \quad (b_m(x) \text{ égal à } 0 \text{ ou à } 1). \tag{1}$$

Par M nous allons désigner l'ensemble de tous les points $[x_1, \ldots, x_n]$ dont toutes les coordonnées x_i sont entières et non négatives.

Théorème. Il existe un ensemble A et pas plus qu'un seul, jouissant des propriétés suivantes:

I. $A \subset M$.

II. Si $\xi \in A$ et si η provient de ξ par une translation k, on a η non $\in A$.

III. Au contraire, si $\xi \in M - A$, il existe une translation k qui transforme ξ en un point de A.

L'ensemble A est défini de la manière suivante: Un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in M \tag{2}$$

appartient à A, si l'on a

$$b_m(x_1) + \ldots + b_m(x_n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (k+1)) \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

et dans ce cas seulement.

Démonstration de l'unicité. Supposons que deux ensembles différents A_1, A_2 jouissent des propriétés I, II, III. Il existe alors p. ex. un point $\xi_1 \epsilon A_1 - A_2$. Il existe alors un point $\xi_2 \epsilon A_2$, provenant de ξ_1 par une translation k (voir III), donc $\xi_2 \epsilon A_2 - A_1$ (voir II). Ensuite, il existe un point $\xi_3 \epsilon A_1$, provenant de ξ_2 par une translation k (voir III), donc $\xi_3 \epsilon A_1 - A_2$ (voir II) etc. Il existe donc une suite infinie $\xi_1, \xi_2, \ldots$, où $\xi_{2r} \epsilon A_2 - A_1$, $\xi_{2r+1} \epsilon A_1 - A_2$ et où ξ_m provient de ξ_{m-1} par une translation k. Donc, à partir d'un certain rang, une coordonnée au moins de ξ_m est négative — contradiction (voir I).

Reste de la démonstration. Soit maintenant A l'ensemble de tous les points (2) qui satisfont (3). Il nous reste à démontrer que A possède les propriétés II, III (car I est évidente).

Propriété II. Soit $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \epsilon A$ et soit $\eta = [y_1, \ldots, y_n] \epsilon$ ϵM un point provenant de ξ par une translation k. Soit μ le plus grand nombre tel que la suite $b_\mu(y_1), \ldots, b_\mu(y_n)$ ne soit pas identique à $b_\mu(x_1), \ldots, b_\mu(x_n)$. Evidemment, on a ou bien $b_\mu(x_i) = b_\mu(y_i)$ ou bien $b_\mu(x_i) = 1$, $b_\mu(y_i) = 0$; désignons par l le nombre des indices i, pour lesquels la seconde éventualité a lieu; on a évidemment $1 \leq l \leq k$, et donc (voir (3)) $b_\mu(y_1) + \ldots + b_\mu(y_n) \equiv -l \not\equiv 0 \pmod{k+1}$), donc $\eta \epsilon M - A$.

Propriété III. Soit donné un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \epsilon M - A. \tag{4}$$

Il faut démontrer l'existence d'un point appartenant à A et provenant de ξ par une translation k. Pour cela, nous allons en premier lieu décomposer d'une manière convenable le système

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5}$$

que nous désignons par S_0.[1])

Si S est un système des nombres entiers non négatifs $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et f une fonction, nous allons poser $\sum_{x \epsilon S} f(x) = f(a_1) + \ldots + f(a_r)$.

En particulier, nous allons désigner par $\sigma_m(S)$ le reste du nombre $\sum_{x \epsilon S} b_m(x)$ suivant le module $k+1$, donc

$$0 \leq \sigma_m(S) \leq k. \tag{6}$$

---

[1]) Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ peuvent être en partie égaux. Nous regardons deux systèmes comme identiques si l'un d'eux provient de l'autre par une permutation de ses „éléments", de sorte que p. ex. 0, 2, 7, 3, 0, 2, 2, est le même système que 0, 0, 2, 2, 2, 3, 7, mais il est différent de 0, 2, 3, 7 de même que de 0, 2, 0, 7, 3. Quoique la notion d'un „système" est différente de celle d'un „ensemble", nous empruntons quelques notations à la théorie des ensembles (sans qu'aucune confusion soit à craindre), à savoir: Si nous désignons par A le système $a_1, \ldots, a_r$, par B le système $b_1, \ldots, b_s$ et par C le système $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, nous allons écrire: $a_i \epsilon A$, $A \subset C$, $A + B = C$, $B = C - A$. (P. ex. $A + B = C$ équivaut à $B = C - A$, ce qui n'est pas vrai dans la théorie des ensembles.)

Nous allons définir par induction un nombre entier $\pi > 0$, les systèmes

$$S_\pi \subset S_{\pi-1} \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0, \tag{7}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (1 \leqq i \leqq \pi) \tag{8}$$

et les nombres entiers

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_\pi > m_{\pi+1} = -1, \tag{9}$$

$$\sigma^0_{m_1} > 0,\ \sigma^1_{m_2} > 0,\ \ldots,\ \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} > 0, \tag{10}$$

satisfaisant l'inégalité

$$\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} \leqq k \tag{11}$$

comme il suit.

Remarquons d'abord que (7), (8) entraîne

$$S_j = P_{j+1} + \ldots + P_i + S_i \quad (0 \leqq j < i \leqq \pi). \tag{12}$$

Soit m_1 le plus grand nombre tel que $\sigma_{m_1}(S_0) > 0$ (m_1 existe d'après (4)). Posons $\sigma^0_{m_1} = \sigma_{m_1}(S_0)$; parmi les nombres $x_1, \ldots, x_n$ choisissons un système partiel P_1 qui consiste de $\sigma^0_{m_1}$ nombres x satisfaisant la condition $b_{m_1}(x) = 1$. Posons $S_1 = S_0 - P_1$, donc $P_1 = S_0 - S_1$, $0 < \sigma^0_{m_1} \leqq k$.

Supposons que l'on ait déjà défini $S_0, \ldots, S_p, P_1, \ldots, P_p, m_1, \ldots m_p, \sigma^0_{m_1}, \ldots, \sigma^{p-1}_{m_p}$ pour un certain $p \geqq 1$ et que $\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{p-1}_{m_p} \leqq k$.

S'il n'existe aucun nombre m tel que l'on ait

$$m_p > m \geqq 0, \quad 0 < \sigma_m(S_p) \leqq k - \sum_{j=1}^{p} \sigma^{j-1}_{m_j}, \tag{13}$$

posons $\pi = p$, $m_{p+1} = -1$ et l'induction est finie. S'il existe un tel m (dans ce cas S_p ne peut pas être vide), soit m_{p+1} le plus grand nombre m qui satisfait (13) et soit $\sigma^p_{m_{p+1}} = \sigma_{m_{p+1}}(S_p)$. Nous choisissons de S_p un système partiel P_{p+1} qui consiste de $\sigma^p_{m_{p+1}}$ nombres x tels que $b_{m_{p+1}}(x) = 1$ et nous posons $S_{p+1} = S_p - P_{p+1}$.

En procédant ainsi, on obtient enfin $\pi, S_i, P_i, m_i, \sigma^{i-1}_{m_i}$ qui satisfont (7)—(11).

Remarquons enfin les conséquences suivantes qui découlent de la façon dont nous avons défini les $S_i, P_i, \ldots$:

($\mathfrak{A}$) P_i consiste précisément de $\sigma^{i-1}_{m_i}$ éléments; pour $x \in P_i$, on a $b_{m_i}(x) = 1$.

($\mathfrak{B}$) On a $\sigma^{i-1}_{m_i} = \sigma_{m_i}(S_{i-1})$, donc

$$\sigma_{m_i}(S_i) = \sigma_{m_i}(S_{i-1} - P_i) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \pi). \tag{14}$$

($\mathfrak{C}$) On a

$$\sigma_m(S_0) = 0 \text{ pour } m > m_1. \tag{15}$$

$(\mathfrak{D})$ Pour $m_i > m > m_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, on n'a pas (13), donc on a

$$\text{ou bien } \sigma_m(S_i) = 0 \text{ ou bien } \sigma_m(S_i) > k - \sum_{j=1}^{j} \sigma_{m_j}^{j-1}. \tag{16}$$

Ayant ainsi décomposé S_0, nous allons remplacer S_0 par un autre système

$$S'_0: \qquad x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \tag{17}$$

comme il suit: Posons $S'_\pi = S_\pi$. Mais si $x_r \in P_i$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, remplaçons x_r par le nombre

$$x'_r = \sum_{\substack{0 \leqq m \leqq m_i \\ m \neq m_\pi, m_{\pi-1}, \ldots, m_i}} 2^m + \sum_{m > m_i} b_m(x_r)\, 2^m \tag{18}$$

(donc $x'_r < x_r$, car $b_{m_i}(x_r) = 1$); nous obtenons ainsi de P_i un nouveau système P'_i et nous posons

$$S'_i = P'_{i+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi \quad (0 \leqq i < \pi). \tag{19}$$

On voit immédiatement:

$$\sigma_m(S'_0) = \sigma_m(S_0) = 0 \text{ pour } m > m_1 \tag{20}$$

(voir (15), (18)).

Pour $m = m_p$ et pour $x_r \in P_i$, $i \leqq p$, on a $b_{m_p}(x'_r) = 0$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(P'_1 + \ldots + P'_p) = 0$, $\sigma_{m_p}(S'_0) = \sigma_{m_p}(S'_p)$; mais pour $x_r \in S_p = P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(S'_p) = \sigma_{m_p}(S_p) = 0$ (voir (14)), donc

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \pi. \tag{21}$$

Si $m_p > m > m_{p+1}$ et si $x_r \in P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$, on a d'après (18) $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, donc

$$\sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) \text{ pour } m_p > m > m_{p+1}. \tag{22}$$

Remplaçons enfin S'_0 par un nouveau système

$$S''_0: \quad x''_1, x''_2, \ldots, x''_n.$$

Pour définir S''_0, il suffit de définir $b_m(x''_r)$ pour chaque r $(1 \leqq r \leqq n)$ et chaque $m \geqq 0$, ce que nous allons faire maintenant.

Pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$ posons $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$ (pour $r = 1, 2, \ldots, n$), d'où (voir (20), (21))

$$\sigma_m(S''_0) = 0 \tag{23}$$

pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$.

Soit maintenant $m_p > m > m_{p+1}$. Deux cas sont à distinguer.

I. $\sigma_m(S_p) = 0$. Posons (voir (18)) $b_m(x''_r) = b_m(x'_r) - 1 = 0$ pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$, $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$ pour $x'_r \in S'_p$, donc (voir (22))

$$\sigma_m(S''_0) = \sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) = 0. \tag{24}$$

II. $\sigma_m(S_p) > 0$, donc $\sigma_m(S_p) > k - \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}$ (voir (16)).

Donc (voir (11))

$$k + 1 \leqq \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} \leqq 2k. \tag{25}$$

On a

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sum_{x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p} b_m(x'_r) + \sum_{x'_r \in S'_p} b_m(x'_r) \pmod{(k+1)}. \tag{26}$$

Mais (voir (18)) pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ on a $b_m(x'_r) = 1$, tandis que pour $x'_r \in S'_p$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, de sorte que (26) donne

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{mp}^{p-1} + \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)}.$$

La comparaison avec (25) donne

$$\sigma_m(S'_0) + k + 1 = \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1},$$

mais $\sigma_m(S_p) < k + 1$, donc

$$\sigma_m(S'_0) < \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_p}^{p-1};$$

on peut donc poser $b_m(x''_r) = 0$ pour $\sigma_m(S'_0)$ valeurs de l'indice r tels que $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ (pour ces x'_r, on avait $b_m(x'_r) = 1$); pour toutes les autres valeurs de r, on pose $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$. On a alors

$$\sigma_m(S''_0) \equiv \sigma_m(S'_0) - \sigma_m(S'_0) \equiv 0 \pmod{(k+1)},$$

$\sigma_m(S''_0) = 0$. Donc (voir aussi (23), (24)) $\sigma_m(S''_0) = 0$ pour chaque $m \geqq 0$. Donc le point $\xi'' = [x''_1, \ldots, x''_n]$ appartient à A et il provient de ξ par une translation k, car

$$x''_r \leqq x'_r < x_r \text{ pour } x_r \in P_1 + \ldots + P_\pi,$$

$$x''_r = x_r \text{ pour } x_r \in S_\pi,$$

et $P_1 + \ldots + P_\pi$ consiste de $\sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_\pi}^{\pi-1} \leqq k$ éléments (voir (11)).