Pour chaque M μ-mesurable il existe alors α, $\alpha' \in S$ tels que

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h \cdot \mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{17}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 6. Soit a un point arbitraire de R. A parcourant la μ-famille additive, $\Gamma(a, A)$ lui-même parcourt aussi une famille additive $\mathfrak{S}$. Pour tous ces Γ posons

$$\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma^{-1}a) = \mu(A).$$

On a $\sigma(S) = \mu(R)$. Soit M μ-mesurable et soit $x \in R$. Soit $x = \xi a$. On sait que $\Gamma(x, M)$ est l'ensemble de tous les $\gamma \in S$ pour lesquels $\gamma^{-1}\xi a \in M$. Pour cela, il faut et il suffit que $\gamma^{-1}a \in \xi^{-1}M$ c. à. d. que $\gamma \in \Gamma(a, \xi^{-1}M)$. Donc on a $\Gamma(x, M) = \Gamma(a, \xi^{-1}M)$. M étant μ-mesurable il y en a de même pour $\xi^{-1}M$, donc $\Gamma(x, M)$ est σ-mesurable dans S. Ensuite on a

$$\sigma[\Gamma(x, M)] = \mu[\Gamma^{-1}(x, M)\, a] = \mu[\Gamma^{-1}(a, \xi^{-1}M)\, a] = \\ = \mu(\xi^{-1}M) = \mu(M).$$

D'après le théorème 6 on a (17) cqfd.

*

O zobecnění věty Blichfeldt-Visserovy z geometrie čísel.

(Výtah z předcházejícího článku.)

V prostoru R, v němž je definována „míra“ $\mu(M)$ (nezáporná, aditivní množinová funkce[4])[5]) na aditivním systému množin $\mathfrak{S}$), budiž dáno h bodů: $a_1, a_2, \ldots, a_h$. Nechť $0 < \mu(R) < \infty$. Nechť $\nu(A)$ značí počet bodů a_i vyskytujících se v množině $A \subset R$. Střední hustota množiny těchto bodů v R je $\frac{h}{\mu(R)} = \frac{\nu(R)}{\mu(R)} = c$. Budiž S jistá grupa prostých zobrazení prostoru R na R, zachovávající míru v R (t. zn. $\alpha \in S$, $M \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mu[\alpha(M)] = \mu(M)$). Toto pojednání zabývá se otázkou: za jakých podmínek existuje pro danou množinu $M \in \mathfrak{S}$ taková transformace α z S, pro kterou transformovaná množina αM obsahuje alespoň $c\mu(M)$ bodů a_i [t. zn. $\nu(\alpha M) \geqq c\mu(M)$]. V tomto pojednání je studován též podobný problém pro obecnější, aditivní, nezápornou, množinovou funkci $\nu(A)$. Věty zde uvedené jsou v jistém smyslu zobecněním známé Blichfeldtovy věty z geometrie čísel, kde v podobném problému[1]) se jedná pouze o grupu všech translací v n-dimensionálním kartézském prostoru.