Sur une généralisation d'un théorème des MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres.

Vladimír Knichal.

(Reçu le 25 mars 1946.)

M. Jessen généralisa un des théorèmes de M. Blichfeldt[1]) de la manière suivante. Soit $\{\xi_i\}$ une suite de points de l'espace cartésien R_n à n dimensions ($n \geqq 1$, entier). Si $M \subset R_n$, désignons par $\nu\,(M)$ le nombre d'indices $i \geqq 1$ pour lesquels $\xi_i \in M$. Etant donnés $a \in R_n$, $\eta > 0$, nous désignerons par $H_\eta{}^a$ le cube (intervalle) dans R_n au centre a et à arête η.

Soit

$$h = \limsup_{\eta \to \infty} \sup_{a \in R_n} \frac{\nu(H_\eta{}^a)}{\eta^n} > \lambda > 0.$$

Soit $M \subset R_n$ un ensemble avec la mesure lebesguienne intérieure $0 < m_i(M) < \infty$.

Alors il existe une telle translation dans R_n par laquelle l'ensemble M se transforme en un ensemble M' tel que[2])

$$\nu(M'') > \lambda m_i(M),$$

M'' signifiant un sousensemble convenable de M'.

M. Visser[3]) généralisa ce théorème de la manière suivante. Il remplaça la fonction d'ensembles $\nu(M)$ par une fonction arbitraire additive, non négative, finie pour tous les M bornés, définie pour les ensembles d'une certaine famille additive contenant tous les ensembles boreliens.

Par une *famille additive*[4]) $\mathfrak{A}$ *d'ensembles* d'un espace R nous entendrons une famille jouissante de la propriété suivante:

---

[1]) Blichfeldt H. F.: A new principle in the geometry of numbers, with some applications. Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1914), 227.

[2]) Le théorème jouit d'une forme appliquée à la généralisation.

[3]) Visser C.: On a theorem in the geometry of numbers and a property of mass distributions in n-dimensional space. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 42 (1939), 487.

[4]) Saks S.: Theory of the Integral, Warszawa 1937, p. 7, § 4.

1. $\emptyset \in \mathfrak{A}$ ($\emptyset$ signifie l'ensemble vide)
2. $M \in \mathfrak{A} \Rightarrow R - M \in \mathfrak{A}$
3. $M_i \in \mathfrak{A}$ pour $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathfrak{A}$.

Par une *fonction d'ensembles $\nu(M)$ additive, non négative* [bref: *mesure*, en anglais *meusure*)] sur une famille additive $\mathfrak{A}$ nous allons entendre une fonction réelle qui est définie pour tous les $M \in \mathfrak{A}$ et remplit les condit ons suivantes:

1. $0 \leqq \nu(M) \leqq \infty$ pour $M \in \mathfrak{A}$
2. $\nu(\sum_{i=1}^{\infty} M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(M_i)$ pour chaque suite $\{M_i\}$

d'ensembles disjoints de $\mathfrak{A}$.

Sans restreindre la généralité on peut formuler *le théorème de M. Visser* de la façon suivante. *Pour chaque ensemble borelien M ayant une mesure lebesguienne $0 < m(M) < \infty$ il existe une translation qui transforme M en M' tel que $\nu(M') > \lambda \,.\, m(M)$.* En effet, chaque ensemble M contient un sousensemble borelien $N \subset M$ tel que $m(N) = m_i(M)$.

A présent on va généraliser le théorème cité de la manière suivante. On remplacera le groupe de translations dans R_n par un certain groupe de homéomorphies dans un espace métrique plus général et la mesure de Lebesgue par une mesure générale. Cependant on va se borner aux espaces R à mesure finie. D'une part cette restriction admet une formulation du théorème principal bien simple, d'autre part elle n a pas un caractè e trop restrictif. En effet, on va montrer dans la suite que le théorème de M. Visser résulte comme une conséquence du notre théorème par un simple passage à la limite.

Théorème 1. *Soit S un groupe métrisé, séparable et multiplicatif. Soient $\alpha\xi$ et égal ment $\xi\alpha$ des transformations continues en $\xi \in S$ pour tout $\alpha \in S$ (pour α fixé $\alpha\xi$ signifie une homéomorphie de S en S). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures définies pour tous les ensembles boreliens $\Gamma \subset S$. Soit $0 < \sigma(S) < \infty$, $0 < \tau(S) < \infty$.*

Pour chaque ensemble borelien $\Gamma \subset S$ il existe alors $\alpha \in S$, $\beta \in S$ tels que[6]

$$\sigma(S)\,\tau(\Gamma\beta) \leqq \tau(S)\,\sigma(\alpha\Gamma) \tag{1}$$

et $\alpha' \in S$, $\beta' \in S$ tels que

$$\sigma(S)\,\tau(\Gamma\beta') \geqq \tau(S)\,\sigma(\alpha'\Gamma) \tag{2}$$

Démonstration. Evidemment il suffit de prouver la relation (1). Par $\mathfrak{S}$ on va désigner le produit cartésien $S \times S$ (métrisé par la

[5]) Voir [4]) p. 16, § 9.
[6]) La signification des symboles $\Gamma\beta$ etc. est évidente.

métrique habituelle: $\varrho((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) = \sqrt{\varrho^2(\alpha, \alpha') + \varrho^2(\beta, \beta')}$. Pour $\Gamma \subset S$ soit $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\Gamma)$ l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\alpha\beta \in \Gamma$. Γ étant un ensemble borelien, $\mathfrak{P}(\Gamma)$ lui-même est borelien. En effet, soit d'abord Γ un ensemble fermé. Soit $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable et dense dans S. Désignons par $\Gamma_n{}^i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\varrho(\gamma_i\beta, \Gamma) < \frac{1}{n}$. $\Gamma_n{}^i$ est un ensemble ouvert dans $\mathfrak{S}$.

Désignons par $\Lambda_n{}^i$ l'ensemble de points $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}$ tels que $\varrho(\alpha, \gamma_i) < \frac{1}{n}$.

Evidemment $\Lambda_n{}^i$ est également ouvert dans $\mathfrak{S}$. On a alors

$$\mathfrak{P}(\Gamma) = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_n{}^i \cdot \Lambda^i{}_n$$

ce qui représente un ensemble G_δ dans $\mathfrak{S}$. Si $\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ on a évidemment $\mathfrak{P}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\Gamma_i)$ et également $\mathfrak{S} - \mathfrak{P}(\Gamma) = \mathfrak{P}(S - \Gamma)$. Désignons par $\mathfrak{B}$ la famille de tous les ensembles $\Gamma \subset S$ pour lesquels $\mathfrak{P}(\Gamma)$ est borelien dans $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{B}$ étant une famille additive et contenant tous les ensembles fermés, elle contient tous les ensembles boreliens dans $\mathfrak{S}$.

Une famille $\sigma\tau$-mesurable[7]) dans $\mathfrak{S}$ est la plus petite famille additive d'ensembles de $\mathfrak{S}$ contenant tous les produits cartésiens $M \times N$ où M resp. N parcourent tous les ensembles de S σ- resp. τ-mesurables. $\mathfrak{S}$ étant séparable il est aisé de voir que chaque ensemble ouvert dans $\mathfrak{S}$ est $\sigma\tau$-mesurable, car on peut le représenter comme une somme dénombrable d'ensembles de la forme $M \times N$ où M, N sont ouverts, donc mesurables dans S. Alors, la $\sigma\tau$-famille d'ensembles de $\mathfrak{S}$ contient tous les ensembles boreliens.

Puisque nous supposons dans notre théorème que Γ soit borelien dans S, $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\Gamma)$ est un ensemble $\sigma\tau$-mesurable dans $\mathfrak{S}$. Alors, d'après le théorème de Fubini on a[8]) $[I \leqq \tau(S, . \sigma(S)]$

$$\infty > I = \int_{\mathfrak{P}} d\tau(\alpha)\, d\sigma(\beta) = \int_{S} [d\tau(\alpha) \int_{\beta \in \alpha^{-1}\Gamma} d\sigma(\beta)] =$$
$$= \int_{S} \sigma(\alpha^{-1}\Gamma)\, d\tau(\alpha).$$

J'affirme qu'il existe un $\alpha \in S$ tel que $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \geqq \frac{I}{\tau(S)}$. Supposons que cette inégalité ne soit pas vraie, donc que pour tous les $\alpha \in S$

[7]) Voir [4]), p. 82, § 9.
[8]) Voir [4]), p. 85.

on ait $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) < \frac{I}{\tau(S)}$. Désignons par S_n ($n = 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les α pour lesquels $\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \leqq \frac{I}{\tau(S)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Evidemment on a $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, donc $0 < \tau(S) = \lim\limits_{n\to\infty} \tau(S_n)$. Alors il existe un tel n pour lequel $\tau(S_n) > \frac{\tau(S)}{2}$. Ensuite on a

$$\int\limits_S \sigma(\alpha^{-1}\Gamma)\,\mathrm{d}\tau(\alpha) = \int\limits_{S-S_n} + \int\limits_{S_n} \leqq \frac{I}{\tau(S)}\,\tau(S - S_n) +$$

$$+ \frac{I}{\tau(S)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau(S_n) = I - \frac{I\tau(S_n)}{n\tau(S)} \leqq I\left(1 - \frac{1}{2n}\right) < I$$

ce qui est une contradiction.

D'une manière analogue on obtient

$$I = \int\limits_S [\mathrm{d}\sigma(\beta) \int\limits_{\alpha\in\Gamma\beta^{-1}} \mathrm{d}\tau(\alpha)] = \int\limits_S \tau(\Gamma\beta^{-1})\,\mathrm{d}\sigma(\beta).$$

On montre également qu'il doit exister un $\beta \in S$ tel qu'on ait $\tau(\Gamma\beta^{-1}) \leqq \frac{I}{\sigma(S)}$. Dans le cas contraire on aurait comme dans le cas précédent

$$\int\limits_S \tau(\Gamma\beta^{-1})\,\mathrm{d}\sigma(\beta) > \int\limits_S \frac{I}{\sigma(S)}\,\mathrm{d}\sigma(\beta) = I.$$

De ces deux relations il suit qu'il existe $\alpha \in S$, $\beta \in S$ tels que

$$\tau(S)\,\sigma(\alpha^{-1}\Gamma) \geqq I \geqq \sigma(S)\,\tau(\Gamma\beta^{-1})$$

c. q. f. d.

Théorème 2. *Soient remplies les suppositions du théorème 1. Soit $\sigma(\Gamma\alpha) = \sigma(\Gamma)$ pour chaque $\alpha \in S$ et pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien. Pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien il existe alors $\beta, \beta' \in S$ tels que*

$$\tau(\beta\Gamma) \leqq \frac{\tau(S)\,\sigma(\Gamma)}{\sigma(S)} \leqq \tau(\beta'\Gamma). \qquad (3)$$

La démonstration est évidente.

Théorème 3. *Soit R un espace métrique, séparable. Soient $\nu(M)$, $\mu(M)$ deux mesures définies pour tous les $M \subset R$ boreliens. Soit $0 < \nu(R) < \infty$, $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un certain groupe transitif de homéomorphies de R en R. Supposons

1. *qu'il existe un $a \in R$ ($\xi_i \in S$ pour $i = 1, 2, \ldots$) tel que $\xi_i a \to a$ entraîne $\xi_i x \to x$ pour chaque $x \in R$ et $\xi_i^{-1} a \to a$,*

2. *que* $\mu(\alpha M) = \mu(M)$ *pour chaque* $\alpha \in S$ *et pour chaque* $M \subset R$ *borelien,*

3. *qu'il existe un* $b \in R$ *tel que l'égalité* $\mu(\Gamma b) = \mu(\Gamma^{-1} b)$ *est vraie pour chaque* $\Gamma \subset S$ *pour lequel* Γb, $\Gamma^{-1} b$ *sont boreliens dans* R.

Alors, pour chaque $M \subset R$ *borelien il existe* $\beta, \beta' \in S$ *tels que*

$$\nu(\beta M) \leq \frac{\nu(R)\, \mu(M)}{\mu(R)} \leq \nu(\beta' M). \tag{4}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 2. Etablissons d'abord la métrique dans le groupe S. On sait qu'il existe un $a \in R$ jouissant de la propriété 1. Faisons correspondre à chaque $\alpha \in S$ le point $f(\alpha) = \alpha a \in R$. La transformation $f(\alpha)$ transforme S en R (transitivité du groupe S) et elle est biunivoque. En effet, si $\alpha a = \beta a$ $(\alpha, \beta \in S)$ on a $\beta^{-1}\alpha a = a$ donc $\xi_i a \to a$ pour $\xi_i = \beta^{-1}\alpha$, donc $\beta^{-1}\alpha x = x$ pour $x \in R$, $\beta^{-1}\alpha = 1$, $\alpha = \beta$. D'une façon plus générale, $\alpha x = \beta x$ pour certain $x \in R$ entraîne $\alpha = \beta$.

Définissons dans S la distance par $\varrho(\alpha, \beta) = \varrho[f(\alpha), f(\beta)]$. La transformation $f(\alpha)$ est alors une homéomorphie et l'espace S est donc séparable. Soit $\alpha \in S$. Pour $\xi_i \to \xi$ $[\xi_i, \xi \in S]$ on a $f(\xi_i) \to f(\xi)$, donc $\xi_i a \to \xi a$, donc $\alpha\xi_i a \to \alpha\xi a$, $\alpha\xi_i \to \alpha\xi$. Alors $\alpha\xi$ est une transformation continue en ξ.

Pour $\xi_i \to \xi$ on a $\xi_i a \to \xi a$, donc $\xi^{-1}\xi_i a \to a$, donc (d'après la supposition 1) $\xi^{-1}\xi_i\xi^{-1}a \to \xi^{-1}a$, $\xi_i\xi^{-1}a \to a$, $\xi\xi_i^{-1}a \to a$, $\xi_i^{-1}a \to \to \xi^{-1}a$, $\xi_i^{-1} \to \xi^{-1}$.

Alors ξ^{-1} représente une homéomorphie de S en S. $\xi\alpha$ est également une transformation continue en ξ, car $\xi\alpha = (\alpha^{-1}\xi^{-1})^{-1}$ ($\xi\alpha$ est donc une homéomorphie de S en S). Si Γ est borelien dans S, évidemment Γ^{-1} est aussi borelien dans S et il y en a de même avec $\Gamma(x)$ dans R pour chaque $x \in R$, car $x = \alpha a$ entraîne $\Gamma(x) = \Gamma\alpha a = f(\Gamma\alpha)$ où $\Gamma\alpha$ est borelien dans S.

On sait qu'il existe un $b \in R$ jouissant de la propriété 3. Posons $\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma b)$, $\tau(\Gamma) = \nu(\Gamma b)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien.

σ, τ sont évidemment deux mesures dans S. On a $\sigma(S) = \mu(Sb) = \mu(R)$ et également $\tau(S) = \nu(R)$. Soit $\alpha \in S$, $\Gamma \subset S$ borelien. Alors on a

$$\sigma(\Gamma\alpha) = \mu(\Gamma\alpha b) = \mu(\alpha^{-1}\Gamma^{-1} b) = \mu(\Gamma^{-1} b) = \mu(\Gamma b) = \sigma(\Gamma).$$

Soit M borelien dans R et soit Γ l'ensemble de tous les $\xi \in S$ pour lesquels $\xi b \in M$, donc $\Gamma b = M$. Γ est donc évidemment borelien dans S. D'après le théorème 2 il existe alors $\beta, \beta' \in S$ tels que

$$\tau(\beta\Gamma) \leq \frac{\nu(R)\, \sigma(\Gamma)}{\mu(R)} \leq \tau(\beta'\Gamma).$$

D'après

$$\sigma(\Gamma) = \mu(M), \quad \tau(\beta\Gamma) = \nu(\beta\Gamma b) = \nu(\beta M), \quad \tau(\beta'\Gamma) = \nu(\beta' M)$$

on obtient immédiatement la thèse du notre théorème.

Si le groupe S est commutatif on peut supprimer la supposition 3 dans le théorème précédent. En effet, on a

Théorème 4. *Soient $\nu(M)$, $\mu(M)$ deux mesures définies pour tous les M boreliens dans l'espace métrique séparable R. Soit $0 < \nu(R) < \infty$, $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif et commutatif de homéomorphies de R en R. Supposons que $\mu(\alpha M) = \mu(M)$ pour chaque $\alpha \in S$ et pour chaque $M \subset R$ borelien.

Pour chaque $M \subset R$ borelien il existe alors β, $\beta' \in S$ tels que

$$\nu(\beta M) \leqq \frac{\nu(R)\,\mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\beta' M). \tag{4}$$

Démonstration. On prouve d'une façon tout-à-fait analogue à celle de la démonstration du théorème précédent que $f(\alpha) = \alpha a \in R$ est une transformation biunivoque de S en R (a étant un point quelconque de R). Ensuite on établira la même métrique qu'auparavant. Le groupe S étant commutatif il en résulte que non seulement $\alpha\xi$ mais aussi $\xi\alpha$ est une transformation continue en ξ (α, $\xi \in S$).

Posons $\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma a)$, $\tau(\Gamma) = \nu(\Gamma a)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien.

Alors on a $\sigma(\Gamma\alpha) = \mu(\Gamma\alpha a) = \mu(\alpha\Gamma a) = \mu(\Gamma a) = \sigma(\Gamma)$. Notre thèse s'en suit immédiatement.

Remarque. On peut aisément étendre le théorème 2 aussi au cas $\tau(S) = \infty$ [mais $\sigma(S) < \infty$]. En parcourant la démonstration du théorème 1 on voit facilement que la thèse (3) du théorème 2 jouit dans ce cas de la forme suivante:

Pour chaque $\Gamma \subset S$ borelien [$\sigma(\Gamma) > 0$] et pour chaque λ réel il existe un $\beta \in S$ tel que $\tau(\beta\Gamma) > \lambda$. Il en est de même pour la thèse du théorème 3 et 4 dans le cas $\nu(R) = \infty$.

Soit $R = R_n$ l'espace cartésien à n dimensions ($n \geqq 1$, entier). Pour ses points et pour les opérations avec eux on va se servir des notations habituelles dans le calcul vectoriel. Nous désignerons par $\mathfrak{G}(\eta)$ l'ensemble de points $(i_1\eta, i_2\eta, \ldots, i_n\eta)$ $(\eta > 0)$ où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ parcourent tous les nombres entiers. Si l'on a $a - b \in \mathfrak{G}(\eta)$ on appelle a congruent avec b modulo η [$a \equiv b \pmod{\eta}$]. Désignons par $H_\eta{}^\circ$ l'ensemble de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour lesquels $-\frac{1}{2}\eta \leqq x_i < \frac{1}{2}\eta$; $i = 1, 2, \ldots, n$. C'est un cube au centre 0 et à arête η. Soit $H_\eta{}^a = H_\eta{}^\circ + a$ (un cube au centre a et à arête η). Les cubes $H_\eta{}^{a_i}$ où a_i parcourt tous les points $\mathfrak{G}(\eta)$ sont disjoints et couvrent R. Soit $m(M)$ la mesure lebesguienne de l'ensemble $M \subset R$.

Théorème 5. *Soit $\eta > 0$. Soit $\nu(M)$ une mesure définie pour tous les $M \subset R$ boreliens. Supposons*

$$\nu(M + x) = \nu(M) \tag{5}$$

pour chaque $x \equiv 0 \pmod{\eta}$. Soit $0 < \nu(H_\eta{}^\circ) < \infty$.

Pour chaque $M \subset R$ borné et borelien il existe alors $a, a' \in R$ tels que

$$\nu(M + a) \leqq \frac{\nu(H^\circ_\eta)\, m(M)}{\eta^n} \leqq \nu(M + a').$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 4. Choisissons un $r > 0$ impair tel que $M \subset H^\circ_{r\eta}$ (on va supprimer l'indice $r\eta$ jusqu'à la fin de la démonstration). Construisons l'espace $\bar{R}$ en identifiant tous les points congruents mod $r\eta$.

Pour $a, b \in \bar{R}$ définissons la distance par l'égalité suivante: $\bar{\varrho}(a, b) = \min\limits_{\substack{x \equiv a \\ y \equiv b}} \varrho(x, y)$ [$\varrho(x, y)$ étant la distance en R]. Il uffit de prouver l'inégalité $\bar{\varrho}(a, b) \leqq \bar{\varrho}(a, c) + \bar{\varrho}(c, b)$. D'après la définition il existe $x \equiv a$, $y \equiv b$, $z_1 \equiv z_2 \equiv c$ tels que $\bar{\varrho}(a, c) = \varrho(x, z_1)$, $\bar{\varrho}(c, b) = \varrho(z_2, y) = \varrho(z_1, y + z_1 - z_2)$.

Donc

$$\bar{\varrho}(a, b) \leqq \varrho(x, y + z_1 - z_2) \leqq \varrho(x, z_1) + \varrho(z_1, y + z_1 - z_2) = \\ = \bar{\varrho}(a, c) + \bar{\varrho}(c, b).$$

L'espace $\bar{R}$ est évidemment séparable (même compact).

Nous allons dire que l'ensemble $A \subset R$ appartient à $\bar{R}$ ($A \subset \bar{R}$) lorsque $x \in A$, $y \equiv x \Rightarrow y \in A$. Lorsque $A \subset \bar{R}$ et lorsque A est borelien dans R, il est aussi borelien dans $\bar{R}$.

Si A est borelien dans $\bar{R}$ posons $\mu(A) = m(A \,.\, H^\circ)$, $\bar{\nu}(A) = \nu(A \,.\, H^\circ)$.

Ce sont évidemment des mesures dans l'espace $\bar{R}$. Dorénavant a_i va parcourir tous les points d'ensemble $\mathfrak{G}(r\eta)$. Soit $N = \sum\limits_i (M + a_i)$. Cette somme possède des termes disjoints, car $M \subset H^\circ$. Alors N est évidemment borelien dans $\bar{R}$. Pour $a \in R$ on a

$$\bar{\nu}(N + a) = \nu[H^\circ \,.\, \sum_i (M + a_i + a)] = \nu[\sum_i H^\circ \,.\, (M + a_i + a)] =$$

$$= \sum_i \nu[H^\circ \,.\, (M + a_i + a)] = \sum_i \nu[H^{-a_i} \,.\, (M + a) + a_i] =$$

$$= \sum_i \nu[H^{-a_i} \,.\, (M + a)] = \nu \sum_i H^{-a_i} \,.\, (M + a) = \nu[(M + a) \,.\, R].$$

Donc

$$\bar{\nu}(N + a) = \nu(M + a) \tag{6}$$

et également

$$\mu(N + a) = m(M + a) = m(M). \tag{7}$$

Ensuite on a

$$\mu(\bar{R}) = m(H^\circ \,.\, R) = m(H^\circ) = (r\eta)^n. \tag{8}$$

Les points b_i parcourent l'ensemble $\mathfrak{G}(\eta)$. On a (r est impair)

$$\bar{\nu}(\bar{R}) = \nu(H^\circ) = \nu\sum_i H_\eta{}^{b_i} . H^\circ = \nu \sum_{b_i \epsilon H^\circ} H_\eta{}^{b_i} = \sum_{b_i \epsilon H^\circ} \nu(H_\eta{}^{b_i}) =$$

$$= \sum_{b_i \epsilon H^\circ} \nu(H^\circ{}_\eta) = r^n \nu(H^\circ{}_\eta).$$

Donc

$$\bar{\nu}(\bar{R}) = r^n \nu(H^\circ{}_\eta). \tag{9}$$

Soit S le groupe de toutes les translations dans R. Deux points congruents se transforment par une translation en points congruents eux-même. S est évidemment transitif et commutatif.

Pour chaque A borelien dans $\bar{R}$ et pour chaque $a \epsilon R$ on a

$$\mu(A + a) = m[H^\circ . (A + a)] = m(H^{-a} . A + a) = m(H^{-a} . A) =$$

$$= m(H^{-a} . A . \sum_i H^{a_i}) = \sum_i m(H^{-a} . H^{a_i} . A) =$$

$$= \sum_i m[H^{-a-a_i} . H^\circ . (A - a_i)] = \sum_i m(H^{-a-a_i} . H^\circ . A) =$$

$$= m\sum_i H^\circ . A . H^{-a-a_i} = m(H^\circ . A) = \mu(A).$$

Donc la supposition du théorème 4 est remplie. Il existe alors $a, a' \epsilon R$ tels que

$$\bar{\nu}(N + a) \leqq \frac{\bar{\nu}(\bar{R})\, \mu(N)}{\mu(\bar{R})} \leqq \bar{\nu}(N + a').$$

Donc [d'après (6), (7), (8), (9)]

$$\nu(M + a) \leqq \frac{r^n \nu(H_\eta{}^\circ)\, m(M)}{r^n \eta^n} \leqq \nu(M + a')$$

cqfd.

Lemme 1. Soit $a \epsilon R$, $\eta > 0$. Soit $\nu(M)$ une mesure définie pour tous les $M \subset R$ boreliens. Soit $\nu(H) < \infty$ pour chaque cube $H \subset R$.

Il existe alors une mesure $\bar{\nu}(M)$ définie pour tous les $M \subset R$ boreliens telle que $M \subset H_\eta{}^a \Rightarrow \bar{\nu}(M) = \nu(M)$ et telle que $\bar{\nu}(M + x) = \bar{\nu}(M)$ pour chaque $x \epsilon \mathfrak{G}(\eta)$ et pour chaque M borelien.

Démonstration. Le point a_i va parcourir l'ensemble $\mathfrak{G}(\eta)$. Pour $M \subset R$ borelien posons $\bar{\nu}(M) = \sum_i \nu(M . H_\eta{}^{a-a_i} + a_i)$.

Evidemment $\bar{\nu}(M)$ est une mesure dans R. Si $M \subset H_\eta{}^a$ on ne peut avoir $M . H_\eta{}^{a-a_i} \neq \emptyset$ que pour $a_i = 0$. Alors on a $\bar{\nu}(M) = \nu(M . H_\eta{}^a + 0) = \nu(M)$. Ensuite pour $x \epsilon \mathfrak{G}(\eta)$ on a

$$\bar{\nu}(M + x) = \sum_i \nu[(M + x) . H^{a-a_i} + a_i] =$$

$$= \sum_i \nu[M . H^{a-a_i-x} + (a_i + x)] = \sum_i \nu(M . H^{a-a_i} + a_i) = \bar{\nu}(M).$$

Démonstration du théorème de M. Visser. On va appliquer le théorème 5. Soit M borelien dans R, soit $0 < m(M) < \infty$. Choisissons un λ' tel que $h > \lambda' > \lambda > 0$. Evidemment $\lim_{i \to \infty} M . H_i^\circ = M$.

Choisissons i assez grand pour que

$$m(M_i) > \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\, m(M) \tag{10}$$

où

$$M_i = M . H_i^\circ \tag{11}$$

Choisissons ensuite a et $\eta > 0$ tels que

$$\frac{\eta^n}{(\eta + 3i)^n} > \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}, \quad \frac{\nu(H_\eta^a)}{\eta^n} > \lambda'. \tag{12}$$

Pour $A \subset R$ borelien posons

$$\nu'(A) = \nu(A . H_\eta^a). \tag{13}$$

Evidemment ν' est une mesure dans R et $\nu'(R) < \infty$.

D'après le lemme 1 il existe une mesure $\bar{\nu}(A)$ telle que (pour $A \subset R$ borelien)

$$\bar{\nu}(A) = \nu'(A) \quad \text{pour} \quad A \subset H^a_{\eta + 3i}$$

et telle que (14)

$$\bar{\nu}(A + x) = \bar{\nu}(A) \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{G}(\eta + 3i).$$

On a [a_k parcourt $\mathfrak{G}(\eta + 3i)$, l'indice $\eta + 3i$ est suprimé]

$$\bar{\nu}(H^\circ_{\eta+3i}) = \sum_k \bar{\nu}(H^\circ . H^{a+a_k}) = \sum_k \bar{\nu}(H^{-a_k} . H^a) =$$
$$= \bar{\nu}(H^a) = \nu'(H^a) = \nu(H_\eta^a).$$

Alors on a

$$0 < \nu(H^\circ_{\eta+3i}) < \infty.$$

D'après le théorème 5 il existe un $x \in R$ tel que [voir (10), (11), (12)]

$$\bar{\nu}(M_i + x) \geq \frac{\nu(H_\eta^a) . m(M_i)}{(\eta + 3i)^n} > \lambda' \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}} . \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}\, m(M)$$

donc tel que

$$\bar{\nu}(M_i + x) > \lambda . m(M). \tag{15}$$

Pour un point $u \in \mathfrak{G}(\eta + 3i)$ convenable on a donc $\bar{\nu}[(M_i + x) . H^{a+u}] > 0$. Ensuite on a [voir (13), (14)]

$$\bar{\nu}[(M_i + x) . H^{a+u}] =$$
$$= \bar{\nu}[(M_i + x - u) . H^a] = \nu'[(M_i + x - u) . H^a] =$$
$$= \nu[(M_i + x - u) . H_\eta^a] > 0.$$

Donc $(M_i + x - u) . H_\eta^a \neq 0$. Puisque $M_i \subset H_i^\circ$ on a $M_i + x - u \subset H_i^{x-u}$. Donc $H_i^{x-u} . H_\eta^a \neq \emptyset$ et $H_i^{x-u} \subset H^a_{\eta+3i}$. Donc $M_i + x - u \subset H^a_{\eta+3i}$, donc d'après (14), (13)

$$\bar{\nu}(M_i + x - u) = \nu'(M_i + x - u) =$$
$$= \nu[H_\eta^a . (M_i + x - u)] \leqq \nu(M_i + x - u) \leqq \nu(M + x - u).$$

Alors on a d'après (15)

$$\nu(M + x - u) \geqq \bar{\nu}(M_i + x - u) = \bar{\nu}(M_i + x) > \lambda . m(M)$$

cqfd.

Dans le cas où $\nu(M)$ est une fonction additive spéciale du théorème de M. Jessen on peut supprimer quelques suppositions des théorèmes 1, 2, 3, 4.

Dans les théorèmes suivants R signifie un espace fixé et S un groupe de transformations biunivoques de R en R. Dans l'espace R soient donnés h points: $a_1, a_2, \ldots, a_h$. A étant un sousensemble de R, $\nu(A)$ *signifie le nombre de points* a_i *contenus dans* A. Alors on a $\nu(R) = h$. *Si* $a \in R$, $A \subset R$, *alors* $\Gamma(a, A)$ *signifie l'ensemble de tous les* $\alpha \in S$ *tels que* $\alpha^{-1}a \in A$.

Théorème 6. *Soit* $\sigma(\Gamma)$ *une mesure définie pour tous les* Γ *d'une famille d'ensembles additive* $\mathfrak{S}$ *de groupe* S. *Soit* $0 < \sigma(S) < \infty$.

Soit $M \subset R$. *Soit* $\Gamma(x, M)$ σ*-mesurable pour tous les* $x \in R$ *et le nombre* $\sigma[\Gamma(x, M)] = |M|$ *soit indépendent de* x.

Alors il existe $\alpha, \alpha' \in S$ *tels que*

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h . |M|}{\sigma(S)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{16}$$

Démonstration. Supposons que l'inégalité

$$\nu(\alpha M) > \frac{h . |M|}{\sigma(S)} = h'$$

soit vraie pour tous les $\alpha \in S$.

Soit Γ_i l'ensemble de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels αM contient le point a_i; soit $\Gamma_i^* = S - \Gamma_i$. L'ensemble de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels αM contient exactement s points $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}$ du système $\{a_r\}$, est évidemment donné par la formule

$$\Gamma_{i_1} . \Gamma_{i_2} \ldots \Gamma_{i_s} . \Gamma_{i_{s+1}}^* \ldots \Gamma_{i_h}^*. \tag{Γ}$$

Cet ensemble est σ-mesurable, car $\Gamma_i = \Gamma(a_i, M)$. Par $\mathfrak{L}$ nous allons désigner le système de tous ces ensembles (Γ) disjoints couvrant S. On a donc

$$h\,|M| = \sum_{i=1}^{h} \sigma(\Gamma_i) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{\Gamma \subset \Gamma_i \\ \Gamma \in \mathfrak{L}}} \sigma(\Gamma) =$$

$$= \sum_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \sigma(\Gamma) \sum_{\Gamma \subset \Gamma_i} 1 > \sum_{\Gamma \in \mathfrak{L}} \sigma(\Gamma) . h' = h'\sigma(S) = h|M|.$$

On aboutit ainsi à une contradiction.

On peut prouver l'autre part de l'inégalité (16) d'une manière tout-à-fait analogue.

Théorème 7. *Soit $\mu(M)$ une mesure définie pour tous les M d'une famille additive d'ensembles de R. Soit $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif de transformations biunivoques de R en R. Supposons

1. *que $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ pour chaque A μ-mesurable et pour chaque $\alpha \in S$,*

2. *qu'il existe un $a \in R$ tel que $\alpha \in S$, $\alpha a = a \Rightarrow \alpha = 1$ (identité) et tel que, Γ étant un sousensemble de S et Γa étant en outre un ensemble μ-mesurable, il en est de même pour $\Gamma^{-1}a$ et on a*

$$\mu(\Gamma a) = \mu(\Gamma^{-1}a).$$

Pour chaque M μ-mesurable il existe alors $\alpha, \alpha' \in S$ tels que

$$\nu(\alpha M) \leqq \frac{h \cdot \mu(M)}{\mu(R)} \leqq \nu(\alpha' M). \tag{17}$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 6. Soit a le point mentionné dans la supposition 2. A parcourant la μ-famille additive, $\Gamma(a, A) \subset S$ parcourt aussi une famille additive $\mathfrak{S}$. ξ parcourant le groupe S, ξa représente une transformation biunivoque de S en R. Alors, pour que Γ soit un élément de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que $\Gamma^{-1}a$ soit μ-mesurable. Pour ces $\Gamma = \Gamma(a, A)$ posons [transitivité]

$$\sigma(\Gamma) = \mu(\Gamma a) = \mu(\Gamma^{-1}a) = \mu(A).$$

Evidemment $\Gamma(a, R) = S$, donc

$$\sigma(S) = \mu(R). \tag{18}$$

Soit $x \in R$. Soit $x = \xi a$. Soit M μ-mesurable dans R. Comme l'on sait $\Gamma(x, M)$ signifie l'ensemble de tous les $\gamma \in S$ pour lesquels on a $\gamma^{-1}\xi a \in M$. Pour cela il faut et il suffit que $(\gamma^{-1}\xi)^{-1} \in \Gamma(a, M)$, donc que $\xi^{-1}\gamma \in \Gamma(a, M)$, c. à. d. $\gamma \in \xi\Gamma(a, M)$. On a donc $\Gamma(x, M) = \xi\Gamma(a, M)$. $\Gamma(x, M)$ est donc σ-mesurable car $M = \Gamma^{-1}(a, M)\, a$, donc $\Gamma(a, M) \,.\, a$ et par conséquence $\xi\Gamma(a, M)\, a$ sont μ-mesurables. On a

$$\begin{aligned}\sigma[\Gamma(x, M)] &= \sigma(\xi\Gamma(a, M)] = \mu[\xi\Gamma(a, M)\, a] = \\ &= \mu[\Gamma(a, M)\, a] = \mu[\Gamma^{-1}(a, M)\, a] = \mu(M).\end{aligned}$$

D'après ces relations et d'après (16), (18), il résulte (17).

Théorème 8. *Soit $\mu(M)$ une mesure définie pour tous les M d'une famille additive d'ensembles de R. Soit $0 < \mu(R) < \infty$.*

Soit S un groupe transitif, commutatif de transformations biunivoques de R en R. Soit $\mu(\alpha A) = \mu(A)$ pour chaque A μ-mesurable et pour tous $\alpha \in S$.