Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

5. Abhandlung.[1])

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 2. März 1940.)

§ 1. Einleitung.

Im Folgenden sei stets r eine natürliche Zahl,

$$Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} c_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}) \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ und mit der Determinante D. Für reelles b bedeutet ξ^b denjenigen in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen ξ-Ebene regulären Zweig, der für $\xi > 0$ positiv ist. Statt e^ξ schreibe ich auch $\exp \xi$. Mit C bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von Q (d. h. von r und von den $c_{\mu\nu}$) abhängen. Mit B bezeichne ich unterschiedslos komplexe Zahlen, die von beliebigen Parametern abhängen dürfen, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als ein C sind. Sind h, k zwei ganze Zahlen, die nicht beide Null sind, so sei $\{h, k\}$ ihr größter gemeinsamer Teiler (die runde Klammer könnte zu Mißverständnissen führen). Alle vorkommenden Integrationswege in der komplexen Ebene sind geradlinig; für reelles α schreibe ich zur Abkürzung $\int\limits_{\alpha}$ statt $\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}$.

Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(u_1, \ldots, u_r)$ im Ellipsoid $Q(u) \leq x$;

---

[1]) Ältere gleichgenannte Abhandlungen des Verf. sind in der Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 62—84, S. 85—97, **36** (1933), S. 581—617 und im Věstník Král. Č. Sp. Nauk 1931, 17 S. erschienen.

$$\mathsf{P}(x) = A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}, \quad M(x) = \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy. \tag{2}$$

Alle bisher gemachten Verabredungen gelten in der ganzen Arbeit; sonstige Einschränkungen werden wir immer besonders hervorheben.

Es gilt folgender Satz von Cramér-Landau[2]): Es sei $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$ (also $r = 2$); dann gibt es eine positive Konstante K, sodaß

$$M(x) = Kx^{\frac{3}{2}} + O(x^{1+\varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

Ein Blick auf den Beweis lehrt, daß ein analoges Ergebnis für jede Form (1) mit $r = 2$ und ganzzahligen $c_{\mu\nu}$ gilt.

Für $r > 2$ ($r = 1$ ist trivial) werde ich zeigen:

Satz 1. *Es sei $r > 2$ und Q habe ganze Koeffizienten $c_{\mu\nu}$. Dann gibt es eine nur von Q abhängige positive Zahl H, sodaß folgendes gilt:*

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= Hx^2 \log x + O(x^2 \log^{\frac{1}{2}} x) \text{ für } r = 3; \\ M(x) &= Hx^{r-1} + O(g(x)) \text{ für } r > 3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo $g(x) = x^{\frac{5}{2}} \log x$ für $r = 4$, $g(x) = x^3 \log^2 x$ für $r = 5$, $g(x) = x^{r-2}$ für $r > 5$.

Man beachte den besonders interessanten Fall $r = 3$ ($\log x$ im Hauptglied). Eine Darstellung von H wird man am Ende der Arbeit finden. Als Ergänzung zum Satz 1 beweise ich gleich folgenden einfachen Satz, der zeigt, daß die O-Abschätzung im Satz 1 für $r > 5$ definitiv ist:

Satz 2. *Es sei $r > 2$ und Q habe ganze Koeffizienten $c_{\mu\nu}$. Dann ist*

$$M(x) - Hx^{r-1} = \Omega(x^{r-2});$$

allgemeiner ist für jede beliebige von x unabhängige Zahl H_1

$$M(x) - Hx^{r-1} - H_1 x^{r-2} = \Omega(x^{r-2}). \tag{4}$$

Beweis. Für ganzes $n > 0$ und $0 < \delta < 1$ ist $A(n + \delta) = A(n)$, also nach (2), wenn für einen Augenblick

$$\pi^{\frac{r}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{r}{2} + 1\right) = K$$

---

[2]) Vgl. z. B. die Darstellung in E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 2, S. 250—263 (Hirzel, Leipzig 1927) und die Verschärfung des Restgliedes bis zu $O(x \log^3 x)$ bei A. Walfisz, Teilerprobleme, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 66—88.

gesetzt wird,

$$\mathsf{P}(n+\delta) = A(n) - K(n+\delta)^{\frac{r}{2}},$$

$$\int_n^{n+\delta} \mathsf{P}^2(y)\,dy = A^2(n)\delta - 2KA(n)\frac{1}{\frac{r}{2}+1}\left((n+\delta)^{\frac{r}{2}+1} - n^{\frac{r}{2}+1}\right) + \\ + K^2\left((n+\delta)^{r+1} - n^{r+1}\right)\frac{1}{r+1}. \tag{5}$$

Wäre (4) für ein H_1 falsch, so wäre

$$\int_n^{n+\delta} \mathsf{P}^2(y)\,dy = M(n+\delta) - M(n) = H\left((n+\delta)^{r-1} - n^{r-1}\right) + \\ + H_1\left((n+\delta)^{r-2} - n^{r-2}\right) + o(n^{r-2}) \tag{6}$$

bei ganzzahlig wachsendem n und zwar gleichmäßig für $0 < \delta < 1$. Vergleicht man die rechten Seiten von (5), (6), dividiert durch n^{r-2}, entwickelt $(n+\delta)^\beta = n^\beta\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^\beta$ nach Potenzen von $\frac{\delta}{n}$ und beachtet, daß $A(n) = O(n^{\frac{r}{2}})$, so bekommt man

$$H\delta(r-1) - A^2(n)\,.\,n^{-r+2}\,\delta + \\ + 2KA(n)\,n^{-\frac{r}{2}}\left(n^2\delta + \frac{r}{4}n\delta^2 + \frac{r\,(r-2)}{24}\,\delta^3\right) - \\ - K^2\left(n^2\delta + \frac{r}{2}n\delta^2 + \frac{r\,(r-1)}{6}\,\delta^3\right) \to 0$$

für ganzzahlig wachsendes n, gleichmäßig für $0 < \delta < 1$. Also müssen die Koeffizienten von δ, δ^2, δ^3 gegen Null streben (es handelt sich um ein Polynom in δ); betrachtet man die Koeffizienten von δ^2, δ^3, so bekommt man

$$\frac{r}{2}Kn\,(A(n)\,n^{-\frac{r}{2}} - K) \to 0$$

$$\frac{r}{6}K\left(A(n)\,n^{-\frac{r}{2}}\,\frac{r-2}{2} - (r-1)\,K\right) \to 0;$$

wegen $K > 0$ wäre also

$$A(n)\,n^{-\frac{r}{2}} \to K \text{ und gleichzeitig } A(n)\,n^{-\frac{r}{2}} \to \frac{2r-2}{r-2}K,$$

was unmöglich ist.

Schließlich möchte ich folgendes bemerken: *Erstens* habe ich im Jahre 1930 folgendes bewiesen[3]): ist $r \geqq 5$ und hat Q ganze Koeffizienten, so gibt es eine nur von Q abhängige positive Zahl H', sodaß für *ganzzahlig* wachsendes x folgendes gilt:

$$\sum_{n=1}^{x} \mathsf{P}^2(n) = H' x^{r-1} + f(x),$$

wo $f(x) = \Omega(x^{r-2})$ und $f(x) = O(x^{\frac{3}{4}r} \log x)$ für $5 \leqq r \leqq 7$, $f(x) = O(x^{r-2} \log x)$ für $r = 8$, $f(x) = O(x^{r-2})$ für $r > 8$. Man vergleiche dieses Ergebnis mit unserem Satz 1; übrigens war damals, da sich x diskontinuierlich änderte, der Beweis der Ω-Behauptung viel schwieriger als der heutige Satz 2.

Zweitens: Durch Weiterentwicklung einer älteren Methode von mir[4]) ist es Herrn Walfisz gelungen,[5]) den Satz 1 für $r = 4$ mit einem etwas schwächeren Restglied $O(x^{\frac{5}{2}} \log^2 x)$ zu beweisen.[6])

Drittens: Als ich diese Untersuchung begonnen habe, wollte ich hauptsächlich den interessantesten Fall $r = 3$ erledigen; der Leser wird aber sehen, daß es nicht viel mehr Mühe kostet, wenn man gleichzeitig auch die Fälle $r \geqq 4$ behandelt. Methodisch stellt die Arbeit eine Weiterentwicklung der Methoden aus[4]), [5]) dar.

Viertens: Für $r = 3$ und ganze $c_{\mu\nu}$ folgt aus Satz 1

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x),$$

was für $Q(u) = u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2$ vom Herrn Szegö[7]) bewiesen worden ist.

§ 2. Vorbereitende Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei* $a_2 > a_1 > 0$, $b_2 > b_1 > 0$; $\lambda \geqq 1$, $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$; $f(s, s')$ *sei beschränkt und regulär im Bereich*

$$a_1 \leqq \Re s \leqq a_2, \; b_1 \leqq \Re s' \leqq b_2. \tag{7}$$

Dann gelten folgende Gleichungen, in welchen alle sechs Doppelintegrale den Integranden

$$H(s, s') = \frac{f(s, s')}{s^\lambda s'^\mu (s + s')^\nu}$$

---

[3]) Und noch etwas mehr; vgl. V. Jarník, Sur une fonction arithmétique, Věstník Král. Čes. Sp. Nauk 1930, 13 S., Théorème 2, 3.

[4]) V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 62—84.

[5]) A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden VII, Travaux de l'Inst. Mathém. de Tbilissi **5** (1938), S. 1—68.

[6]) Dasselbe Ergebnis hat Herr Walfisz bereits früher mit einer anderen Methode (Heckesche Theorie der Modulformen) bewiesen; vgl. A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden V, Acta Arithmetica **1** (1936), S. 222—283.

[7]) Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome II. Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 388—404.

haben und absolut konvergieren:

$$\int\limits_{a_1}\Big(\int\limits_{b_1}\ldots \mathrm{d}s'\Big)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{a_1}\Big(\int\limits_{b_2}\ldots \mathrm{d}s'\Big)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{b_2}\Big(\int\limits_{a_1}\ldots \mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}s'=$$
$$=\int\limits_{b_2}\Big(\int\limits_{a_2}\ldots \mathrm{d}s\Big)\,\mathrm{d}s'=\int\limits_{a_2}\Big(\int\limits_{b_2}\ldots \mathrm{d}s'\Big)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{a_2}\Big(\int\limits_{b_1}\ldots \mathrm{d}s'\Big)\,\mathrm{d}s\,. \tag{8}$$

Beweis. Im Beweis beschränken wir uns auf den Bereich (7). Dort gilt (mit $t = \Im s,\ t' = \Im s'$)

$$|\,H(s, s')\,| < \frac{G}{(1 + |\,t\,|)\,(1 + |\,t'\,|)\,(1 + |\,t + t'\,|)}, \tag{9}$$

wo $G > 0$ von s, s' unabhängig ist. Daraus folgt erstens nach dem Cauchyschen Satz

$$\int\limits_{a_1} H(s, s')\,\mathrm{d}s = \int\limits_{a_2} H(s, s')\,\mathrm{d}s,\ \int\limits_{b_1} H(s, s')\,\mathrm{d}s' = \int\limits_{b_2} H(s, s')\,\mathrm{d}s'. \tag{10}$$

Zweitens ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'}{(1 + |\,t\,|)\,(1 + |\,t'\,|)\,(1 + |\,t + t'\,|)} \leqq$$
$$\leqq 4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'}{(1 + t)\,(1 + t')\,(1 + |\,t - t'\,|)} =$$
$$= 8\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{t}\frac{\mathrm{d}t'}{(1 + t')\,(1 + t - t')}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1 + t} = 8\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2\log(1 + t)\,\mathrm{d}t}{(1 + t)\,(2 + t)}$$

und das letzte Integral konvergiert. Daher sind die Doppelintegrale in (8) absolut konvergent (also: Vertauschbarkeit der Integrationsfolge) und (8) folgt aus (10).

Im Folgenden gelten stets folgende Bezeichnungen: für $\Re s > 0$ ist

$$\Theta(s) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty}\exp\,(-\,Q(m)\,s),\quad F(s) = \Theta(s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,s^{\frac{r}{2}}}; \tag{11}$$

für $x > 0$ und natürliches n sei

$$M_1(x) = M(x),\ M_n(x) = \int\limits_0^x M_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y\quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

(m) bedeutet dabei das System $m_1, \ldots, m_r$; insbesondere bedeutet (0) das System $0, \ldots, 0$. $\sum\limits_{(m)=-\infty}^{\infty}$ bedeutet $\sum\limits_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{\infty}$ und analog in ähnlichen Fällen.

Hilfssatz 2. *Ist $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, n ganz, so ist*

$$M_n(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a\Bigl(\int\limits_b \frac{F(s)}{s}\frac{F(s')}{s'}\frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n}\,ds'\Bigr)\,ds + \\ + A_{0n} + A_{1n}x + \ldots + A_{n-1,n}x^{n-1}, \tag{13}$$

wo A_{kl} nur von k, l und von Q (also nicht von a, b, x) abhängt.

Beweis. Bekanntlich ist

$$M_1(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a\Bigl(\int\limits_b \frac{F(s)}{s}\frac{F(s')}{s'}\frac{e^{x(s+s')}-1}{s+s'}\,ds'\Bigr)\,ds.$$

Den Beweis findet man l. c.[4]) oder [5]). Dort wird zwar $a = b = x^{-1}$ vorausgesetzt, was aber nach Hfs. 1 keine Einschränkung bedeutet; zweitens wird dort Q einigen Einschränkungen unterworfen (z. B. bei Walfisz $r = 4$, $c_{\mu\nu}$ ganz), die aber im Beweis nicht benutzt werden. Nach Hfs. 1. ist

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a\Bigl(\int\limits_b \frac{F(s)}{s}\frac{F(s')}{s'}\frac{ds'}{s+s'}\Bigr)ds = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_2\Bigl(\int\limits_2 \ldots ds'\Bigr)\,ds = A_{01},$$

sodaß (13) für $n = 1$ gilt. Gilt nun (13) für ein gewisses $n \geqq 1$, so ist (absolute Konvergenz nach Hfs. 1)

$$M_{n+1}(x) = \int\limits_0^x M_n(y)\,dy =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a\Bigl(\int\limits_b \frac{F(s)}{s}\frac{F(s')}{s'}\Bigl(\int\limits_0^x \frac{e^{u(s+s')}}{(s+s')^n}\,du\Bigr)ds'\Bigr)\,ds + \\ + A_{0n}x + \ldots + \frac{1}{n}A_{n-1,n}\,x^n;$$

hierin ist

$$\int\limits_0^x \frac{e^{u(s+s')}}{(s+s')^n}\,du = \frac{e^{x(s+s')}-1}{(s+s')^{n+1}},$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a\Bigl(\int\limits_b \frac{F(s)}{s}\frac{F(s')}{s'}\frac{ds'}{(s+s')^{n+1}}\Bigr)ds = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_2\Bigl(\int\limits_2 \ldots ds'\Bigr)ds = A_{0,n+1},$$

sodaß (13) auch mit $n + 1$ statt n gilt.

Von nun an setzen wir stets voraus, das die $c_{\mu\nu}$ in (1) ganz sind. Sind $h, k, m_1, \ldots, m_r$ ganz, $\{h, k\} = 1$, $k > 0$, so setze man

$$S_{h,k,(m)} = \sum_{(a)=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a) - 2\pi i \frac{a_1 m_1 + \ldots + a_r m_r}{k}\right) \tag{14}$$

und speziell $S_{h,k,(0)} = S_{h,k}$. Offenbar ändert sich $S_{h,k,(m)}$ nicht, wenn man h um ein Vielfaches von k ändert; $S_{h,k}$ und $S_{-h,k}$ sind konjugiert komplex; $S_{h,1,(m)} = 1$.

Hilfssatz 3. A. *Es ist* $S_{h,k,(m)} = Bk^{\frac{r}{2}}$ *und für* $\{k, 2D\} = 1$ *ist* $| S_{h,k,(m)} | = k^{\frac{r}{2}}$.

B. *Es werde*

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{k}{}' \frac{| S_{h,k} |^2}{k^4 h^2} \tag{15}$$

gesetzt, wo der Strich bedeutet, daß nur über die h mit $\{h, k\} = 1$ summiert wird. Dann ist für $r = 3$

$$\mathfrak{S}(x) = G \log x + O(1),$$

wo $G > 0$ nur von Q abhängt.

Beweis. Offenbar ist

$$| S_{h,k,(m)} |^2 =$$

$$\sum_{(b)=1}^{k} \sum_{(a)=1}^{k} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} (Q(a) - Q(a+b)) + 2\pi i \frac{b_1 m_1 + \ldots + b_r m_r}{k}\right)$$

$$= \sum_{(b)=1}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{h}{k} Q(b) + \frac{2\pi i}{k} (b_1 m_1 + \ldots + b_r m_r)\right) \times$$

$$\times \sum_{(a)=1}^{k} \exp\left(\frac{2\pi i h}{k} \sum_{\mu,\nu=1}^{r} 2 c_{\mu\nu} a_\mu b_\nu\right).$$

Hier ist die innere Summe nur dann von Null verschieden, und zwar gleich k^r, wenn

$$1 \leqq b_\mu \leqq k, \quad 2 \sum_{\nu=1}^{r} c_{\mu\nu} b_\nu \equiv 0 \pmod{k} \quad (\mu = 1, \ldots, r), \tag{16}$$

woraus $2Db_\mu \equiv 0 \pmod{k}$, also

$$1 \leqq b_\mu \leqq k, \quad b_\mu \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{k}{\delta}\right) \quad (\mu = 1, \ldots, r) \tag{17}$$

folgt, wenn $\delta = \{k, 2D\}$. Nun hat (17) genau $\delta^r \leqq (2D)^r = B$

Lösungen, also (16) höchstens B Lösungen, so daß $|S_{h,k,(m)}|^2 = Bk^r$. Ist $\delta = 1$, so ist (17) genau für $b_\mu = k$ erfüllt und dann gilt auch (16), also $|S_{h,k,(m)}|^2 = k^r$.

Man setze nun $r = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ voraus. Man setze

$$\delta = \{k, 2D\},\ k = \delta K,\ 2D = \delta\Delta.$$

Dann ist (16) mit

$$1 \leqq b_\mu \leqq k,\quad 2\sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu} b_\nu = l_\mu k \quad (\mu = 1, 2, 3), \tag{18}$$

also mit

$$1 \leqq b_\mu \leqq k,\ b_\mu = \frac{K}{\Delta}\sum_{\nu=1}^{3} l_\nu D_{\mu\nu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{19}$$

äquivalent, wo l_1, l_2, l_3 ganze Zahlen sind und $D_{\mu\nu}$ die Subdeterminanten von D bedeuten. Also ist

$$|S_{h,k}|^2 = k^3 \sum_{(f)} \exp\left(\frac{2\pi i h K}{\delta} Q\left(\frac{f}{\Delta}\right)\right), \tag{20}$$

wo $(f) = (f_1, f_2, f_3)$ alle ganzzahligen Systeme durchläuft, für welche es ganze l_1, l_2, l_3 gibt, sodaß

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} l_\nu D_{\mu\nu},\ 1 \leqq \frac{K}{\Delta} f_\mu \leqq k,\ \frac{K}{\Delta} f_\mu \text{ ganz } (\mu = 1, 2, 3).$$

Das gibt für l_1, l_2, l_3 genau folgende Einschränkungen:

$$1 \leqq \sum_{\nu=1}^{3} l_\nu D_{\mu\nu} \leqq 2D,\ \sum_{\nu=1}^{3} l_\nu D_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

sodaß der Wertevorrat von (f) nur von Q und δ abhängt. Also ist, wenn $Q\left(\frac{f}{\Delta}\right) = q = q(\delta, (f))$ gesetzt wird (q ist ganz!), nach (20), (15)

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{\delta} \frac{1}{\delta} \sum_{(f)} \sum_{h} \sum_{K} \frac{1}{Kh^2} \exp\left(\frac{2\pi i h K q}{\delta}\right); \tag{21}$$

dabei läuft δ über alle positiven Teiler von $2D$, (f) (bei gegebenem δ) über alle eben beschriebenen Systeme, dann h über den Wertevorrat $0 < h \leqq \sqrt{x}$, $\{h, \delta\} = 1$ und K über den Wertevorrat $h \leqq K\delta \leqq \sqrt{x}$, $\{K, h\Delta\} = 1$. Also ist

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{\delta} \frac{1}{\delta} \sum_{(f)} R(\delta, (f)), \tag{22}$$

wenn man die innere Doppelsumme in (21) mit $R(\delta, (f))$ bezeichnet. Ist $h, \delta, (f)$ gegeben, so setze man für ganzes $m \geqq 0$

$$a_m = \exp\left(\frac{2\pi i h m q}{\delta}\right), \text{ wenn } \{m, \varDelta h\} = 1; \text{ sonst } a_m = 0.$$

$$U_m = U_m(h) = U_m(h, \delta, (f)) = \sum_{l=1}^{m} a_l.$$

Offenbar ist $a_{m+\varDelta h\delta} = a_m$, also

$$U_m(h) = \frac{m}{\varDelta h\delta} U_{\varDelta h\delta}(h) + B\varDelta h\delta = \frac{m}{2hD} U_{2hD}(h) + Bh.$$

Man setze $U_{2hD}(h) = \alpha_h = \alpha_h(\delta, (f))$ und bemerke, daß $U_m(h) = Bm$, $\alpha_h = Bh$, $\sum\limits_{h > \sqrt{x}} \alpha_h \cdot h^{-3} = Bx^{-\frac{1}{2}}$ (alles für $x > C$). Setzt man noch $\mu_0 = \left[\frac{h}{\delta}\right]$ für $\delta > 1$; $\mu_0 = h - 1$ für $\delta = 1$, $\mu_1 = \left[\frac{\sqrt{x}}{\delta}\right]$, so ist (der Stern bedeutet, daß nur über die h mit $\{h, \delta\} = 1$ summiert wird):

$$R(\delta, (f)) = \sum_{0 < h \leqq \sqrt{x}}^{*} \frac{1}{h^2} \sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{U_m(h) - U_{m-1}(h)}{m} =$$

$$= \sum_{0 < h \leqq \sqrt{x}}^{*} \frac{1}{h^2} \left(\sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} U_m(h) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{B}{m^3}\right) - \frac{U_{\mu_0}(h)}{\mu_0 + 1} + \frac{U_{\mu_1}(h)}{\mu_1 + 1} \right) =$$

$$= \sum_{0 < h \leqq \sqrt{x}}^{*} \left(\frac{\alpha_h}{2Dh^3} \sum_{\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{1}{m} + \frac{1}{h} \sum_{\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{B}{m^2} + \frac{B}{h^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2D} \sum_{0 < h \leqq \sqrt{x}}^{*} \frac{\alpha_h}{h^3} \log \frac{\sqrt{x}}{h} + B = \frac{\log x}{4D} \sum_{0 < h \leqq \sqrt{x}}^{*} \frac{\alpha_h}{h^3} + B =$$

$$= \frac{\log x}{4D} \sum_{h=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\alpha_h}{h^3} + B.$$

Wegen (22) ist also $\mathfrak{S}(x) = G \log x + B$, wo $G \geqq 0$ nur von Q abhängt. Es ist aber $G > 0$, denn nach **A** ist (Σ'' läuft über alle k mit

$$k \equiv 1 \pmod{2D}, \ 0 < k \leqq \sqrt{x})$$

$$\mathfrak{S}(x) \geqq \sum_k{}'' k^{-4} \, | S_{1,k} |^2 = \sum_k{}'' k^{-1} > C \log x.$$

Hilfssatz 4. *Sind h, k ganz, $k > 0$, $\{h, k\} = 1$, $\Re s > 0$, so ist*

$$\Theta(s) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\, k^r \left(s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)^{\frac{r}{2}}} \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} S_{h,k,(m)} \exp\left(\frac{-\pi^2 Q_1(m)}{k^2\left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)}\right), \tag{23}$$

wo Q_1 die zu Q inverse Form ist.

Beweis. Wird $s = s' + 2\pi i \frac{h}{k}$ gesetzt, so ist

$$\Theta(s) = \sum_{(a)=1}^{k} \sum_{(b)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-Q(a+bk)\left(s' + 2\pi i \frac{h}{k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{(a)=1}^{k} \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} Q(a)\right) \sum_{(b)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-Q\left(\frac{a}{k} + b\right) k^2 s'\right).$$

Wendet man nun die bekannte Formel[8])

$$\sum_{(m)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\, Q(m+z)\, S + 2\pi i\,(w_1 m_1 + \ldots + w_r m_r)\right) =$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} S^{-\frac{r}{2}} \exp\left(-2\pi i\,(z_1 w_1 + \ldots + z_r w_r)\right) \times$$

$$\times \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\, Q_1(m+w)\, S^{-1} - 2\pi i\,(z_1 m_1 + \ldots + z_r m_r)\right)$$

auf die innere Summe mit $S = \pi^{-1} k^2 s'$, $z_j = k^{-1} a_j$, $w_j = 0$ an, so folgt sofort (23) (vgl. (14)).

Von jetzt an sei stets $x > 1$. Wir legen nun auf die reelle Achse alle Brüche $\frac{h}{k}$, wo h, k ganz, $h \gtreqless 0$, $0 < k \leq \sqrt{x}$, $\{h, k\} = 1$ und nennen sie Fareybrüche. Zu jedem Fareybruch $\frac{h}{k}$ gibt es genau ein Paar von Fareybrüchen $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ ($k_j > 0$, $\{h_j, k_j\} = 1$ für $j = 1, 2$) mit $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$, sodaß zwischen $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ genau ein Fareybruch, nämlich $\frac{h}{k}$, liegt. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ das abgeschlossene Interval $\left\langle \frac{h+h_1}{k+k_1}, \frac{h+h_2}{k+k_2} \right\rangle$; bekanntlich ist

[8]) A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (1903), S. 108.

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}} \right\rangle, \ \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_1 \leqq 1, \ \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_2 \leqq 1. \quad (24)$$

Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge reeller Zahlen und γ eine reelle Zahl, so bedeutet $\gamma\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen $\gamma\xi$ mit $\xi \in \mathfrak{M}$. Zur Abkürzung setze man $\mathfrak{C}_{h,k} = 2\pi\mathfrak{B}_{h,k}$. Man setze

$$\varrho = \frac{2\pi}{[\sqrt{x}] + 1}. \quad (25)$$

Die Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ überdecken die ganze reelle Achse und je zwei von ihnen haben höchstens einen gemeinsamen Punkt. Insbesondere ist $\mathfrak{C}_{0,1} = \langle -\varrho, \varrho \rangle$ und die Vereinigungsmenge aller Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ mit

$$h > 0, \ 0 < k \leqq \sqrt{x}, \ \{h, k\} = 1 \quad (26)$$

ist genau das Intervall $\langle \varrho, + \infty)$. Wir werden im Folgenden die Formel (13) stets mit $a = b = x^{-1}$ benutzen; dementsprechend wird stets (mit Ausnahme einer Stelle im Beweis des Hilfssatzes 10) $s = x^{-1} + ti$, $s' = x^{-1} + t'i$ (t, t' reell) gesetzt; statt ds, ds' schreibe ich $i\,\mathrm{d}t$, $i\,\mathrm{d}t'$, sodaß aus (13)

$$4\pi^2 M_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t + O(x^{n-1}) \quad (27)$$

folgt, wo der nicht aufgeschriebene Integrand hier und in den folgenden Formeln

$$\frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^n} \quad (28)$$

ist. Wir brauchen oft folgende Symmetrieeigenschaften: die Funktion (28) ändert sich nicht, wenn man s mit s' (d. h. t mit t') vertauscht; sie geht in den konjugiert komplexen Wert über, wenn man t, t' durch $-t, -t'$ ersetzt. Ebenso geht $F(s)$, s^{-1} und e^{xs} in den konjugiert komplexen Wert über, wenn man t durch $-t$ ersetzt. Es sei $\mathfrak{A}$ der Bereich Min $(|t|, |t'|) \leqq \varrho$ und man setze:

$$S_1 = \iint_{\mathfrak{A}} \dots \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M(h, k, h', k') &= \int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{\mathfrak{C}_{h',k'}} \dots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t + \int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{-\mathfrak{C}_{h',k'}} \dots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t + \\ &+ \int_{-\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{\mathfrak{C}_{h',k'}} \dots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t + \int_{-\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{-\mathfrak{C}_{h',k'}} \dots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t; \end{aligned} \quad (30)$$

$$S_2 = \sum_{h,k,h',k'} M(h, k, h', k'), \quad (31)$$

wo über alle h, k, h', k' mit (26) und

$$h' > 0, \ 0 < k' \leqq \sqrt{x}, \ \{h', k'\} = 1, \ \frac{h'}{k'} \neq \frac{h}{k} \tag{32}$$

summiert wird.

$$N(h, k) = \int_{\mathfrak{C}_{h,k} - \mathfrak{C}_{h,k}} \Big(\int \ldots \mathrm{d}t' \Big) \, \mathrm{d}t, \ P(h, k) = \int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \Big(\int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \ldots \mathrm{d}t' \Big) \, \mathrm{d}t, \tag{33}$$

$$S_3 = \sum_{h,k} P(h, k), \ S_4 = \sum_{h,k} N(h, k), \tag{34}$$

wo über alle h, k mit (26) summiert wird. Nach (27) und den Symmetrieeigenschaften von (28) ist

$$4\pi^2 M_n = S_1 + S_2 + 2\Re S_3 + 2S_4 + O(x^{n-1}). \tag{35}$$

Hilfssatz 5. *Für* $|t| \leqq 2\varrho$ *ist*

$$\frac{F(s)}{s} = Bx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}. \tag{36}$$

Beweis. Wegen $s = x^{-1} + ti$, $\varrho = Bx^{-\frac{1}{2}}$ ist für $|t| \leqq 2\varrho$

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > C,$$

also nach (23) mit $h = 0$, $k = 1$ (wegen $S_{0,1,(m)} = 1$)

$$\left| \frac{1}{s} \left(\Theta(s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\, s^{\frac{r}{2}}} \right) \right| = \left| \frac{C}{s^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{(m) \neq (0)} \exp \frac{-\pi^2 Q_1(m)}{s} \right|$$

$$= \frac{Bx^{\frac{r}{2}+1}}{(1 + x^2t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}} \sum_{(m) \neq (0)} \exp\left(- \frac{Cx}{1 + x^2t^2} (|m_1| + \ldots + |m_r|) \right) =$$

$$= Bx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1 + x^2t^2} \right)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-Cx}{1 + x^2t^2} \right) = Bx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}},$$

da die Funktion $\xi^\alpha e^{-\gamma\xi}$ $(\alpha > 0, \gamma > 0)$ für $0 < \xi < \infty$ beschränkt ist.

Hilfssatz 6. *Gilt* (26) *und ist* $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $x > C$, *so ist*

$$C \frac{h}{k} < t < |s| < C \frac{h}{k}; \tag{37}$$

$$|F(s)| < \frac{Cx^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}} \left(1 + x \left| t - 2\pi \frac{h}{k} \right| \right)^{\frac{r}{2}}}; \tag{38}$$

$$\left|\frac{1}{s^{\frac{r}{2}}}\right| < Cx^{\frac{r}{4}}; \tag{39}$$

$$\left|\Theta(s) - S_{h,k}\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,k^r\left(s-2\pi i\frac{h}{k}\right)^{\frac{r}{2}}}\right| < Cx^{\frac{r}{4}}; \tag{40}$$

$$x^{\frac{r}{4}} < C\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}}\left(1+x\left|t-2\pi\frac{h}{k}\right|\right)^{\frac{r}{2}}}. \tag{41}$$

Beweis (alles für $x > C$). Nach (24) ist $\left|t - 2\pi\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}$; daraus folgt (41) und wegen $\frac{1}{x} < \frac{2\pi}{k\sqrt{x}} < \frac{\pi h}{k}$ auch (37), woraus $s^{-\frac{r}{2}} = Bk^{\frac{r}{2}}h^{-\frac{r}{2}} = Bx^{\frac{r}{4}}$, also (39) folgt. (38) folgt aus (11), (39), (40), (41) und Hilfssatz 3; und (40) ergibt sich so: man setze $2\pi\frac{h}{k} = \beta$; wegen $x\,|\,t-\beta\,| \leqq \frac{2\pi\sqrt{x}}{k}$ ist

$$\Re\frac{1}{k^2(s-i\beta)} = \frac{x}{k^2(1+x^2(t-\beta)^2)} > \frac{Cx}{k^2(1+x\,|\,t-\beta\,|)^2} > C.$$

Nach (23) und Hilfssatz 3 ist also die linke Seite von (40) kleiner als

$$C\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}}(1+x\,|\,t-\beta\,|)^{\frac{r}{2}}}\sum_{(m)\neq(0)}\exp\left(-C\frac{x(|\,m_1\,|+\ldots+|\,m_r\,|)}{k^2(1+x\,|\,t-\beta\,|)^2}\right) <$$

$$< Cx^{\frac{r}{4}}\left(\frac{x}{k^2(1+x\,|\,t-\beta\,|)^2}\right)^{\frac{r}{4}}\exp\left(\frac{-Cx}{k^2(1+x\,|\,t-\beta\,|)^2}\right) < Cx^{\frac{r}{4}},$$

da die Funktion $\xi^{\alpha}e^{-\gamma\xi}$ $(\alpha > 0,\ \gamma > 0)$ für $0 < \xi < \infty$ beschränkt ist.

§ 3. Beweis des Satzes 1.

Bis zum Schluß der Abhandlung sei $r \geqq 3$ und $n = 2$ für $r = 3$, $n = 1$ für $r > 3$. Für $r > 3$ sei $g(x)$ wie im Satz 1 definiert, für $r = 3$ sei $g(x) = x^3$. Außerdem werden freilich die $c_{\mu\nu}$ ganzzahlig vorausgesetzt. Wegen $s = x^{-1} + ti$, $s' = x^{-1} + t'i$ ist

$$\frac{1}{s+s'} = \frac{Bx}{1+x\,|\,t+t'\,|}, \quad e^{u(s+s')} = B \text{ für } 0 \leqq u \leqq x. \tag{42}$$

Sind h, k bzw. h', k' mit (26), (32) gegeben, so setze man zur Abkürzung $\beta = 2\pi\frac{h}{k}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{h,k}$, bzw. $\beta' = 2\pi\frac{h'}{k'}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_{h',k'}$.

Hilfssatz 7. $S_1 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Aus Symmetriegründen genügt es offenbar (vgl. (28), (29)), diese Abschätzung für die Integrale

$$I_1 = \int_{-2\varrho}^{2\varrho} (\int_{-2\varrho}^{2\varrho} \ldots \mathrm{d}t')\,\mathrm{d}t, \quad I_2 = \int_{-\varrho}^{\varrho} (\int_{2\varrho}^{\infty} \ldots \mathrm{d}t')\,\mathrm{d}t$$

mit dem Integranden

$$\left| \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n} \right|$$

zu beweisen. Nach (42) und Hilfssatz 5 ist

$$I_1 = Bx^{\frac{r}{2}+1} \int_{-2\varrho}^{2\varrho} \left(\int_{-2\varrho}^{2\varrho} \frac{x^n\,\mathrm{d}t'}{(1+x\,|\,t+t'\,|)^n} \right) \mathrm{d}t = .$$

$$= Bx^{\frac{r}{2}+n} \int_{0}^{2\varrho} \left(\int_{0}^{t} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x\,(t-t'))^n} \right) \mathrm{d}t;$$

$$I_1 = Bx^{\frac{7}{2}} \int_{0}^{2\varrho} \mathrm{d}t = Bx^3 \text{ für } r = 3,$$

$$I_1 = Bx^{\frac{r}{2}+1} \int_{0}^{2\varrho} \log(1+xt)\,\mathrm{d}t = Bx^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x = O(g(x)) \text{ für } r > 3.$$

Im Integrationsbereich von I_2 ist $t' \geqq 2\,|\,t\,|$, also nach (42) und Hilfssatz 5, 6 (Summationsbereich: (26))

$$I_2 = B \int_{-\varrho}^{\varrho} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \sum_{h,k} \left(\int_{\mathfrak{C}} \left| \frac{F(s')}{s'} \right| \frac{\mathrm{d}t'}{t'^n} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= B \int_{-\varrho}^{\varrho} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \left(\sum_{h,k} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}}} \left(\frac{k}{h}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x\,|\,t'-\beta\,|)^{\frac{r}{2}}} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= Bx^{\frac{3r}{4}-1} \sum_{h,k} h^{-n-1}\,k^{-\frac{r}{2}+n+1} = O(g(x)),$$

wie man sofort nachrechnet.

Hilfssatz 8. $S_3 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Im Integrationsbereich von $P(h, k)$ ist (vgl. (33), (34)) nach Hilfssatz 6 $t > Chk^{-1}$, $t' > Chk^{-1}$, also $|s + s'| > Chk^{-1}$, also nach (42) und Hilfssatz 6 (Summationsbereich: (26))

$$S_3 = B\sum_{h,k}\left(\frac{k}{h}\right)^{n+2}\int_{\mathfrak{C}}\int_{\mathfrak{C}}\frac{x^{r-2}\,x\,dt\,x\,dt'}{k^r\,(1+x\,|t-\beta|)^{\frac{r}{2}}\,(1+x\,|t'-\beta|)^{\frac{r}{2}}} =$$

$$= Bx^{r-2}\sum_{h,k} h^{-2}\,k^{n+2-r} = O(g(x)),$$

wie man sofort nachrechnet.

Hilfssatz 9. $S_2 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Ersetzt man t, t' im zweiten Integral (30) durch $t, -t'$, im dritten durch $-t, t'$, im vierten durch $-t, -t'$, so wird das Integrationsgebiet in allen vier Integralen $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $t' \in \mathfrak{C}_{h',k'}$, und $|t + t'|$ geht in $|t \pm t'|$ über; für $t > 0$, $t' > 0$ ist aber $|t + t'| > |t - t'|$. Nach den Symmetrieeigenschaften von (28), nach (42) und nach Hilfssatz 6 ist also

$$S_2 = B\sum_{h,k,h',k'}\frac{k}{h}\,\frac{k'}{h'}\int_{\mathfrak{C}}\left(\int_{\mathfrak{C}'}\frac{x^{r-2}\,x\,dt'}{k'^{\frac{r}{2}}\,(1+x\,|t'-\beta'|)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{x}+|t-t'|\right)^{n}}\right)\times$$

$$\times\frac{x\,dt}{k^{\frac{r}{2}}\,(1+x\,|t-\beta|)^{\frac{r}{2}}}. \tag{43}$$

(Summationsbereich: (26), (32)). Aus Symmetriegründen genügt es, die Teilsumme T aller Glieder der rechten Seite von (43) mit

$$k' \geqq k \tag{44}$$

zu betrachten. Wir setzen $T = T_1 + T_2$, wo T_1 die Glieder mit

$$0 < \left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right| \leqq \frac{4}{k\sqrt{x}}, \tag{45}$$

T_2 die Glieder mit

$$\left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right| > \frac{4}{k\sqrt{x}} \tag{46}$$

enthält.

In jedem Glied von T_1 ist

$$\frac{1}{kk'} \leqq \left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right| \leqq \frac{4}{k\sqrt{x}}, \tag{47}$$

also $\frac{1}{4}\sqrt{x} \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ und $\frac{h'}{k'} > C\,\frac{h}{k}$ $\left(\text{denn } \frac{h}{k} \geqq \frac{1}{k} > \frac{8}{k\sqrt{x}}\right)$; weiter folgt aus (47)

$$|\,hk' - h'k\,| \leqq 4;\ hk' \equiv a \pmod{k},\ |\,a\,| \leqq 4. \tag{48}$$

Bei gegebenen h, k hat also k' höchstens 9 Möglichkeiten modulo k, also höchstens $C\sqrt{x}\,k^{-1}$ Möglichkeiten überhaupt. Bei gegebenen h, k, k' hat h' nach (48) höchstens C Möglichkeiten.

Ist $r \neq 5$, so ersetze man in (43) den Faktor $(1 + x\,|\,t - t'\,|)^n$ durch 1; das Doppelintegral in (43) ist also gleich

$$Bx^{r-2+n}\,k^{-\frac{r}{2}}\,k'^{-\frac{r}{2}}.$$

Für $r = 5$ beachte man, daß stets

$$(1 + x\,|\,t - \beta\,|)\,(1 + x\,|\,t' - \beta'\,|)\,(1 + x\,|\,t - t'\,|) >$$
$$x\,(|\,\beta - t\,| + |\,t - t'\,| + |\,t' - \beta'\,|) \geqq x\,|\,\beta - \beta'\,| \geqq \frac{2\pi x}{kk'} \geqq \frac{2\pi\sqrt{x}}{k};$$

also ist das Doppelintegral in (43) gleich

$$Bx^{r-2+n}\,k^{-\frac{r}{2}}\,k'^{-\frac{r}{2}}\cdot\frac{k}{\sqrt{x}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t\,.\,x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|\,t - \beta\,|)^{\frac{3}{2}}\,(1 + x\,|\,t' - \beta'\,|)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= Bx^{r-2+n}\,k^{-\frac{r}{2}}\,k'^{-\frac{r}{2}}\,.\,kx^{-\frac{1}{2}}.$$

Beachtet man nun, was nach (47), (48) über den Wertevorrat von h', k' bei gegebenen h, k gesagt wurde, so folgt nach (43) (wenn $a = 1$ für $r = 5$, $a = 0$ sonst)

$$T_1 = Bx^{r-2+n}\sum_{h,k,h',k'}\frac{k}{h}\,\frac{k'}{h'}\,k^{-\frac{r}{2}}\,k'^{-\frac{r}{2}}\,(kx^{-\frac{1}{2}})^a =$$
$$= Bx^{r-2+n}\sum_{h,k}k^2h^{-2}\,k^{-\frac{r}{2}}\,x^{-\frac{r}{4}}\,.\,\sqrt{x}\,k^{-1}\,(kx^{-\frac{1}{2}})^a =$$
$$= Bx^{\frac{3}{4}r-\frac{3}{2}+n-\frac{1}{2}a}\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}}k^{-\frac{r}{2}+1+a},$$

und das gibt sofort in allen Fällen

$$T_1 = O(g(x)). \tag{49}$$

T_2 ist schwieriger. In jedem Glied von T_2 ist wegen (46), (44)

$$|\,\beta - \beta'\,| > \frac{8\pi}{k\sqrt{x}} \geqq 2\left(\frac{2\pi}{k\sqrt{x}} + \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}}\right). \tag{50}$$

Für $t \in \mathfrak{C}$, $t' \in \mathfrak{C}'$ ist nach (24)

$$|t-\beta| \leqq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}, \quad |t'-\beta'| \leqq \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}},$$

also nach (50)

$$\frac{1}{x}+|t-t'|>|t-t'|>\frac{1}{2}|\beta-\beta'|=\pi\left|\frac{h}{k}-\frac{h'}{k'}\right|,$$

also nach (43)

$$T_2 = B\sum_{h,k,h',k'} \frac{k}{h}\cdot\frac{k'}{h'}\cdot\frac{x^{r-2}}{k^{\frac{r}{2}}k'^{\frac{r}{2}}}\cdot\frac{k^n k'^n}{|hk'-h'k|^n}$$

mit dem Summationsbereich (26), (32), (44) (die Bedingung (46) lassen wir weg). Bei gegebenen h, k sei

$$U = U(h,k) = \sum_{h',k'} \frac{1}{h'k'^{\frac{r}{2}-1-n}\,|hk'-h'k|^n} \tag{51}$$

(Summationsbereich: (32), (44)), also

$$T_2 = B\sum_{h,k}\frac{x^{r-2}\,U(h,k)}{hk^{\frac{r}{2}-1-n}}. \tag{52}$$

(Summationsbereich: (26)). Man teile U in zwei Teilsummen $U = U_1 + U_2$, wo U_1 die Glieder mit $hk'-h'k>0$, U_2 diejenigen mit $hk'-h'k<0$ enthält.

In U_1 setze man mit ganzen a, b

$$hk' = h'k + a + bk \quad (0 < a \leqq k,\ b \geqq 0), \tag{53}$$

also

$$h' = \frac{hk'-a-bk}{k} \geqq 1,\ hk' \equiv a \pmod{k}; \tag{54}$$

also ist

$$U_1(h,k) = \sum_a \sum_{k'} k'^{\,n-\frac{r}{2}+1}\,V_1, \tag{55}$$

wo

$$V_1 = V_1(h,k,a,k') = \sum_b \frac{k}{(hk'-a-bk)\,(a+bk)^n}. \tag{56}$$

In U_2 setze man mit ganzen a, b

$$h'k = hk' + a + bk \quad (0 < a \leqq k,\ b \geqq 0), \tag{57}$$

also

$$h' = \frac{hk' + a + bk}{k}, \quad hk' \equiv -a \pmod{k}; \tag{58}$$

also ist

$$U_2(h, k) = \sum_a \sum_{k'} k'^{\,n - \frac{r}{2} + 1} V_2, \tag{59}$$

wo

$$V_2 = V_2(h, k, a, k') = \sum_b \frac{k}{(hk' + a + bk)(a + bk)^n}. \tag{60}$$

Für die folgenden Abschätzungen benutzen wir folgende wohlbekannte Tatsache: ist $\alpha < \gamma$, $f(u)$ monoton und $0 \leqq f(u) \leqq K$ für $\alpha \leqq u \leqq \gamma$, so ist

$$\sum_{\alpha \leqq m \leqq \gamma} f(m) \leqq \int_\alpha^\gamma f(u)\, du + K.$$

Nach (56), (60) ist (es wird über b summiert)

$$V_1 = B \sum_{a+bk \leqq \frac{hk'}{2}} \frac{k}{hk'\,(a + bk)^n} + B \sum_{a+bk > \frac{hk'}{2}} \frac{k}{(hk' - a - bk)\, h^n k'^n}; \tag{61}$$

$$V_2 = B \sum_{a+bk \leqq \frac{hk'}{2}} \frac{k}{hk'\,(a + bk)^n} + B \sum_{a+bk > \frac{hk'}{2}} \frac{k}{(a + bk)^{n+1}}. \tag{62}$$

Die erste Summe in (61), (62) ist (wegen $0 < a \leqq k$, $b \geqq 0$)

$$B \frac{k}{hk'} \left(\frac{1}{a^n} + \sum_{1 \leqq b \leqq \frac{hk'}{2k}} \frac{1}{b^n k^n} \right). \tag{63}$$

In der zweiten Summe von (61) läuft $hk' - a - bk$ nach (54) über positive Vielfache von k, welche $< hk'$ sind; also ist diese Summe

$$B \frac{k}{h^n k'^n} \sum_{1 \leqq \lambda < \frac{hk'}{k}} \frac{1}{\lambda k} = B \frac{\log \frac{2hk'}{k}}{h^n k'^n}. \tag{64}$$

Die zweite Summe in (62) ist endlich

$$Bk \left(\frac{1}{h^{n+1} k'^{n+1}} + \int_{a+uk > \frac{hk'}{2}} \frac{du}{(a + uk)^{n+1}} \right) = \frac{B}{h^n k'^n} = B \frac{\log \frac{2hk'}{k}}{h^n k'^n}. \tag{65}$$

Nach (63), (64), (65) ist also für $j = 1, 2$

$$V_j = \frac{B}{hk'}\left(\frac{k}{a} + \log\frac{2hk'}{k}\right) \text{ für } r > 3 \tag{66}$$

und $\left(\text{wegen } 0 < a \leqq k,\ \log\frac{2hk'}{k} = Bhk'\right)$

$$V_j = \frac{B}{hk'}\left(\frac{k}{a^2} + \frac{\log\frac{2hk'}{k}}{hk'}\right) = \frac{B}{hk'}\left(\frac{k}{a^2} + 1\right) \text{ für } r = 3. \tag{67}$$

Nach (55), (59), (66), (67) ist also für $j = 1,\ 2$:

$$U_j(h, k) = \frac{B}{h}\sum_{a=1}^{k}\sum_{k'}\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-1}}\left(\frac{k}{a} + \log\frac{2hk'}{k}\right) \text{ für } r > 3, \tag{68}$$

$$U_j(h, k) = \frac{B}{h}\sum_{a=1}^{k}\sum_{k'}\frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}}\left(\frac{k}{a^2} + 1\right) \text{ für } r = 3. \tag{69}$$

Bei gegebenem a läuft k' in (68), (69) über ganze Zahlen $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$, welche nach (54), (58) einer bestimmten Klasse modulo k angehören; d. h. k' nimmt nur Werte von der Gestalt $q + mk$ an, wo m ganz, $k \leqq q + mk \leqq \sqrt{x}$ und wo die ganze Zahl q nur von h, k, a, j abhängt. Nun ist

$$\sum_{k \leqq q+mk \leqq \sqrt{x}} (q + mk)^{\frac{1}{2}} = B\Big(x^{\frac{1}{4}} + \int\limits_{k \leqq q+uk \leqq \sqrt{x}} (q + uk)^{\frac{1}{2}}\, du\Big) = \\ = B(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{4}}k^{-1}) = Bx^{\frac{3}{4}}k^{-1}. \tag{70}$$

Für $r > 3$ ist

$$\sum_{k \leqq q+mk \leqq \sqrt{x}} (q + mk)^{-\frac{r}{2}+1} = B\Big(k^{-\frac{r}{2}+1} + \int\limits_{k \leqq q+uk \leqq \sqrt{x}} (q + uk)^{-\frac{r}{2}+1} du\Big); \tag{71}$$

das gibt

$$Bk^{-\frac{r}{2}+1} \text{ für } r > 4, \tag{72}$$

$$B\left(k^{-1} + k^{-1}\log\frac{\sqrt{x}}{k}\right) = Bk^{-1}\log\frac{2\sqrt{x}}{k} \text{ für } r = 4. \tag{73}$$

Wird schließlich

$$f(u) = \frac{\log\frac{q + uk}{k}}{(q + uk)^{\frac{r}{2}-1}}$$

$(r > 3)$ gesetzt, so ist

$$\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{k}{(q+uk)^{\frac{r}{2}}}\left(-\left(\frac{r}{2}-1\right)\log\frac{q+uk}{k}+1\right).$$

Im Intervall $k \leqq q + uk < \infty$ ist also die Funktion $f(u)$ nicht negativ, steigt bis zu $q + uk = k\exp\left(\frac{2}{r-2}\right)$, wo sie einen Wert $Ck^{-\frac{r}{2}+1}$ annimmt und fällt dann. Setzt man also zur Abkürzung

$$L = \sum_{k \leqq q+mk \leqq \sqrt{x}} \frac{\log\frac{q+mk}{k}}{(q+mk)^{\frac{r}{2}-1}}, \tag{74}$$

so ist

$$\begin{aligned} L &= B\left(\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}} + \int\limits_{k \leqq q+uk \leqq \sqrt{x}} f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}}\left(1 + \int_1^{\frac{\sqrt{x}}{k}} \frac{\log w}{w^{\frac{r}{2}-1}}\,\mathrm{d}w\right) = \\ &= \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}}\left(1 + \left(\log\frac{\sqrt{x}}{k}\right)^{2\varepsilon}\right) = \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}}\left(\log\frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^{2\varepsilon}, \end{aligned} \tag{75}$$

wo $\varepsilon = 1$ für $r = 4$, $\varepsilon = 0$ für $r > 4$.

Daher gilt nach (68), (69), (70), (71), (72), (73), (74), (75), (52):

A. Für $r = 3$:

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 &= \frac{B}{h}\sum_{a=1}^{k}\sum_{k'} k'^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{a^2}+1\right) = \\ &= \frac{B}{h}\sum_{a=1}^{k} x^{\frac{3}{4}}k^{-1}\left(\frac{k}{a^2}+1\right) = \frac{Bx^{\frac{3}{4}}}{h}; \end{aligned}$$

$$T_2 = B\sum_{h,k} x^{\frac{7}{4}}k^{\frac{3}{2}}h^{-2} = O(x^3).$$

B. Für $r > 3$:

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 &= \frac{B}{h}\sum_{a=1}^{k} k^{-\frac{r}{2}+1}\left(\log\frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^{2\varepsilon}\left(\frac{k}{a} + \log 2h + 1\right) = \\ &= \frac{B}{hk^{\frac{r}{2}-2}}\left(\log\frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^{2\varepsilon}(\log 2h + \log k). \end{aligned} \tag{76}$$

Daraus folgt für $r > 4$

$$T_2 = Bx^{r-2} \sum_{h,k} \frac{\log 2h + \log k}{h^2 k^{r-4}},$$

und das ist Bx^{r-2} für $r > 5$, $Bx^{r-2} \log^2 x$ für $r = 5$. Für $r = 4$ ist aber nach (76), (52)

$$T_2 = Bx^2 \sum_{h,k} \frac{\log 2h + \log k}{h^2} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^2 =$$

$$= Bx^2 \log x \,.\, \sum_k \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^2.$$

$$\sum_k \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k}\right)^2 = B\left(\log^2 x + \int_1^{\sqrt{x}} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{u}\right)^2 du\right) =$$

$$= B\left(\log^2 x + \sqrt{x} \int_1^{\sqrt{x}} (\log 2v)^2 \,.\, \frac{dv}{v^2}\right) = B\sqrt{x},$$

also $T_2 = Bx^{\frac{5}{2}} \log x$. Damit haben wir auch für T_2 die gewünschte Abschätzung erhalten.

Hilfssatz 10. *Für* $h > 0$, $k > 0$, $\{h, k\} = 1$ *sei*

$$Z(h, k) = \frac{|S_{h,k}|^2 \pi^r}{k^{2r-2} h^2 D}; \tag{77}$$

dann ist

$$S_4 = \sum_{h,k} Z(h, k) \,.\, \frac{x^3}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})} + O(g(x)) \text{ für } r = 3,$$

$$S_4 = \sum_{h,k} Z(h, k) \,.\, \frac{x^{r-1}}{(r-1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} + O(g(x)) \text{ für } r > 3.$$

(*Summationsbereich:* (26).)

Beweis (für $x > C$). Man denke sich für einen Augenblick zwei Zahlen h, k mit (26) gegeben und man setze (wo sich die oberen und unteren Zeichen entsprechen)

$$f_1^{\pm}(s) = \frac{F(s)}{s} - \frac{S_{\pm h,k}\, \pi^{\frac{r}{2}}}{s k^r \sqrt{D}\, (s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}};$$

$$f_2^{\pm}(s) = \frac{S_{\pm h,k}\,\pi^{\frac{r}{2}}}{k^r\sqrt{D}\,(s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}}\left(\frac{1}{s} \mp \frac{1}{i\beta}\right);$$

$$f_3^{\pm}(s) = \pm\frac{1}{i\beta}\,\frac{S_{\pm h,k}\,\pi^{\frac{r}{2}}}{k^r\sqrt{D}\,(s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}},$$

also $s^{-1} F(s) = f_1^{\pm}(s) + f_2^{\pm}(s) + f_3^{\pm}(s)$.

Weiter setze man

$$V = V(h, k) = \int\limits_{\mathfrak{C}}\left(\int\limits_{-\mathfrak{C}} f_3^{+}(s)\, f_3^{-}(s')\,\frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n}\,dt'\right) dt,$$

$$W = W(h, k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots\, dt'\Big)\, dt \text{ (derselbe Integrand wie in } V).$$

Für $t \in \pm\,\mathfrak{C}$ ist

$$\frac{1}{s} \mp \frac{1}{i\beta} = \frac{\mp s + i\beta}{si\beta} = B\,\frac{k^2}{h^2}\left(\frac{1}{x} + |\,t \mp \beta\,|\right) = B\,\frac{k}{h},$$

also

$$f_1^{\pm}(s) = Bx^{\frac{r}{4}}\,\frac{k}{h},\quad f_2^{\pm}(s) = B\,\frac{k^2}{h^2}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}}\,(1 + x\,|\,t \mp \beta\,|)^{\frac{r}{2}-1}},$$

$$|\,f_1^{\pm}(s)\,| + |\,f_2^{\pm}(s)\,| + |\,f_3^{\pm}(s)\,| = B\,\frac{k}{h}\,\frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}}\,(1 + x\,|\,t \mp \beta\,|)^{\frac{r}{2}}}.$$

(Für das obere Zeichen folgen diese Beziehungen direkt aus (24), Hfs. 3 und 6; für das untere muß man noch zum konjugiert komplexen s übergehen.) Also ist (wenn man t' durch $-t'$ und daher das Integrationsintervall $-\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}$ ersetzt)

$$N(h, k) - V(h, k) =$$

$$= B \int\limits_{\mathfrak{C}}\int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{k^2}{h^2}\,\frac{x^{\frac{r}{2}+n-2}\,x\,dt\,x\,dt'}{k^{\frac{r}{2}}\,(1 + x\,|\,t - \beta\,|)^{\frac{r}{2}}\,(1 + x\,|\,t - t'\,|)^n} \times$$

$$\times\left(x^{\frac{r}{4}} + \frac{k}{h}\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}}\,(1 + x\,|\,t' - \beta\,|)^{\frac{r}{2}-1}}\right) =$$

$$= B\,\frac{x^{\frac{r}{2}+n-2}}{h^2\,k^{\frac{r}{2}-2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x^{\frac{r}{4}}\int\limits_{-\frac{4\pi}{k\sqrt{x}}}^{\frac{4\pi}{k\sqrt{x}}}\frac{x\,\mathrm{d}v}{(1+x\,|\,v\,|)^n}+\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}}\int\limits_{-\frac{2\pi}{k\sqrt{x}}}^{\frac{2\pi}{k\sqrt{x}}}\frac{x\,\mathrm{d}v}{(1+x\,|\,v\,|)^{\frac{r}{2}-1}}\right)\times$$

$$\times\,\frac{x\,\mathrm{d}t}{(1+x\,|\,t-\beta\,|)^{\frac{r}{2}}}.$$

Das ergibt für $r = 3$

$$N(h,k)-V(h,k) = B\,\frac{x^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{1}{2}}}{h^2}\left(x^{\frac{3}{4}}+\frac{x^{\frac{3}{4}}}{k}\right) = Bx^{\frac{9}{4}}\,k^{\frac{1}{2}}\,h^{-2} \tag{78}$$

und für $r > 3$

$$N(h,k)-V(h,k) = B\,\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{h^2\,k^{\frac{r}{2}-2}}\left(x^{\frac{r}{4}}\log x+\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}}\log^{\varepsilon} x\right), \tag{79}$$

wo wieder $\varepsilon = 1$ für $r = 4$, $\varepsilon = 0$ für $r > 4$. Nun bezeichne man mit $\mathfrak{L}$ die Menge aller reellen Zahlen, die nicht in $\mathfrak{C}_{h,k}$ liegen; dann ist nach Hilfssatz 3

$$V(h,k)-W(h,k) = \frac{Bk^2\,x^{r+n-2}}{k^r\,h^2}\,(I_1+I_2), \tag{80}$$

wo (man ersetzt t' durch $-t'$)

$$I_1 = \int\limits_{\mathfrak{C}}\left(\int\limits_{\mathfrak{L}}\frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x\,|\,t-\beta\,|)^{\frac{r}{2}}\,(1+x\,|\,t'-\beta\,|)^{\frac{r}{2}}\,(1+x\,|\,t-t'\,|)^n}\right)x\,\mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int\limits_{\mathfrak{L}}\left(\int\limits_{\mathfrak{L}}\frac{x\,\mathrm{d}t'}{\cdots\cdots}\right)x\,\mathrm{d}t \text{ (derselbe Nenner wie in } I_1).$$

Man beachte, daß nach (24) für $t \in \mathfrak{C}$ gilt $|\,t-\beta\,| \leqq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}$; für $t \in \mathfrak{L}$ gilt $|\,t-\beta\,| > \frac{\pi}{k\sqrt{x}}$. Ersetzt man $1 + x\,|\,t-t'\,|$ durch 1, so folgt

$$I_1 = B\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r}{2}-1}, \quad I_2 = B\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-2}. \tag{81}$$

Für $r = 5$ bemerke man noch, daß im Integrationsgebiet von I_1 gilt $|\,t'-\beta\,| > \frac{\pi}{k\sqrt{x}}$; also ist entweder $|\,t-\beta\,| > \frac{\pi}{2k\sqrt{x}}$ oder $|\,t-t'\,| > \frac{\pi}{2k\sqrt{x}}$, also stets $(1+x\,|\,t-\beta\,|)\,(1+x\,|\,t-t'\,|) >$

$> \frac{\pi\sqrt{x}}{2k}$, also

$$I_1 = B\frac{k}{\sqrt{x}}\int_{\mathfrak{C}}\left(\int_{\mathfrak{L}}\frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x\mid t-\beta\mid)^{\frac{3}{2}}(1+x\mid t'-\beta\mid)^{\frac{5}{2}}}\right)x\,\mathrm{d}t = B\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{82}$$

Nach (80), (81), (82) und wegen $0 < k \leqq \sqrt{x}$ ist also für $r \geqq 3$

$$V(h,k) - W(h,k) = B\frac{k^2 x^{r+n-2}}{k^r h^2}\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r}{2}-1+\eta}, \tag{83}$$

wo $\eta = 1$ für $r = 5$, $\eta = 0$ sonst.

Wegen $S_{h,k}S_{-h,k} = \mid S_{h,k}\mid^2$, $\beta = \frac{2\pi h}{k}$ ist nach (77)

$$W(h,k) = \frac{Z(h,k)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{x(s+s')}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'}{(s-i\beta)^{\frac{r}{2}}(s'+i\beta)^{\frac{r}{2}}(s+s')^n}.$$

Schreibt man nun $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$ statt $i\,\mathrm{d}t$, $i\,\mathrm{d}t'$, führt neue Variablen s, s' statt $s-i\beta$, $s'+i\beta$ ein und benutzt Hilfssatz 1, so bekommt man (wenn von nun an ausnahmsweise $s = 2+ti$, $s' = 2+t'i$ gesetzt wird)

$$4\pi^2\,W(h,k) = -Z(h,k)\int_2\int_2\frac{e^{x(s+s')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{s^{\frac{r}{2}}s'^{\frac{r}{2}}(s+s')^n}. \tag{84}$$

Nun ist bekanntlich für $u > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_2\frac{e^{us}}{s^{\frac{r}{2}}}\,\mathrm{d}s = \frac{u^{\frac{r}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Also ist (absolute Konvergenz nach Hilfssatz 1, also Vertauschbarkeit der Integrationsfolge)

$$\frac{x^{r-1}}{(r-1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^x\left(\int_2\int_2\frac{e^{u(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}}s'^{\frac{r}{2}}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_2\int_2\frac{e^{x(s+s')}-1}{s^{\frac{r}{2}}s'^{\frac{r}{2}}(s+s')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_2\int_2\frac{e^{x(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}}s'^{\frac{r}{2}}(s+s')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' + B$$

und durch nochmalige Integration ebenso

$$\frac{x^r}{r\,(r-1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^x \left(\int_2\int_2 \frac{e^{u(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}}\, s'^{\frac{r}{2}}\,(s+s')}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}u + Bx =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_2\int_2 \frac{e^{x(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}}\, s'^{\frac{r}{2}}\,(s+s')^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' + B + Bx\,.$$

Also ist nach (84), wenn man bemerkt, daß aus Hilfssatz 3

$$Z(h, k) = Bh^{-2}k^{-r+2} \tag{85}$$

folgt,

$$W(h, k) = Z(h, k)\,\frac{x^3}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})} + B\frac{x}{h^2 k} \quad \text{für } r = 3 \tag{86}$$

$$W(h, k) = Z(h, k)\,\frac{x^{r-1}}{(r-1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} + Bh^{-2}k^{-r+2} \quad \text{für } r > 3. \tag{87}$$

Aus (78), (83), (86) bzw. (79), (83), (87) folgt (Summationsbereich: (26)) für $r = 3$

$$\begin{aligned} S_4 = \sum_{h,k} N(h, k) = \frac{1}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})}\, x^3 \sum_{h,k} Z(h, k) \,+ \\ + B\sum_{h,k}\left(x^{\frac{9}{4}} k^{\frac{1}{2}} h^{-2} + x^{\frac{11}{4}} k^{-\frac{1}{2}} h^{-2} + xk^{-1}h^{-2}\right) \end{aligned} \tag{88}$$

und für $r > 3$

$$\begin{aligned} S_4 = \sum_{h,k} N(h, k) = \frac{1}{(r-1)\,\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)}\, x^{r-1} \sum_{h,k} Z(h, k) + B\sum_{h,k} \frac{1}{h^2\, k^{\frac{r}{2}-2}} \times \\ \times \left(x^{\frac{3}{4}r-1} \log x + \frac{x^{r-2}}{k^{\frac{r}{2}-1}} \log^{\varepsilon} x + \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r}{2}-1+\eta} \frac{x^{r+n-2}}{k^{\frac{r}{2}}} + \frac{1}{k^{\frac{r}{2}}}\right). \end{aligned} \tag{89}$$

Der Koeffizient von B in (88) ist Bx^3; der Koeffizient von B in (89) ist $Bx^{\frac{5}{2}} \log x$ für $r = 4$, $Bx^3 \log x$ für $r = 5$, Bx^{r-2} für $r > 5$.

Beweis des Satzes 1. Σ' bedeute, daß die entsprechende Summationsvariable nur über solche Werte läuft, die zu k teilerfremd sind. Nach (77) und Hilfssatz 3 ist für $r > 3$

$$x^{r-1} \sum_{k>\sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty}{}' Z(h, k) = Bx^{r-1} \sum_{k>\sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-2} k^{-r+2} = O(g(x));$$

nach Hilfssatz 7, 8, 9, 10 und nach (35) ist also

$$M(x) = \frac{x^{r-1}}{2\pi^2 (r-1)\, \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty}{}' Z(h, k) + O(g(x)),$$

womit Satz 1 für $r > 3$ mit

$$H = \frac{\pi^{r-2}}{2D (r-1)\, \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{| S_{h,k} |^2}{k^{2r-2} h^2} \tag{90}$$

bewiesen ist.

Es sei nun $r = 3$. Es ist

$$\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty}{}' Z(h, k) = \frac{\pi^3}{D} \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} k^{-4} \sum_{a=1}^{k}{}' | S(a, k) |^2 \sum_{b=0}^{\infty} (a + bk)^{-2}.$$

Aber $\sum\limits_{b=0}^{\infty} (a + bk)^{-2} = a^{-2} + B \sum\limits_{b=1}^{\infty} b^{-2} k^{-2} = a^{-2} + Bk^{-2}$; nach Hilfssatz 3 und (15) ist also

$$\sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty}{}' Z(h, k) = \frac{\pi^3}{D} \mathfrak{S}(x) + B \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \,.\, k \,.\, k^3 \,.\, k^{-2}$$

und das letzte Glied ist B. Aus (35) folgt also nach Hilfssatz 7, 8, 9, 10 und wegen $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$M_2(x) = \frac{x^3}{3D} \mathfrak{S}(x) + Bx^3. \tag{91}$$

Es ist (alles für $x > C$)

$$\mathfrak{S}(x) = B \sum_{0<k\leqq\sqrt{x}} k^{-4} \sum_{a=1}^{k} k^3 a^{-2} = B \log x, \tag{92}$$

$$\mathfrak{S}(x) - \mathfrak{S}\left(\frac{x}{2}\right) = B \sum_{\sqrt{\frac{x}{2}}<k\leqq\sqrt{x}} k^{-1} \sum_{a=1}^{k} a^{-2} = B\,. \tag{93}$$

Man setze nun $\lambda = (\log x)^{-\frac{1}{2}}$ und beachte, daß $M(x) = M_1(x)$ und $\mathfrak{S}(x)$ nichtabnehmende Funktionen von x sind. Also ist nach (91), (92), (93)

$$\lambda x\, M_1(x) \geqq \int_{x(1-\lambda)}^{x} M_1(y)\, \mathrm{d}y = M_2(x) - M_2(x\,(1-\lambda)) =$$