O zobecnění kruhové konchoidy.

Jan Vyšín, Úpice.

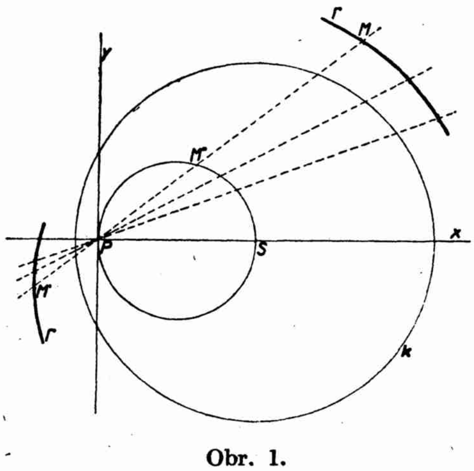
(Došlo dne 28. února 1940.)

V učebnici Klíma-Ingriš: Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálek je na stranách 128 až 130 dokázána věta:

„Řezy libovolné roviny s rotačním hyperboloidem a jeho asymptotickou kuželovou plochou jsou soustředné a homotetické kuželosečky.“

Postup důkazu je tento: Rovina σ řezu protne hyperboloid v křivce k, asymptotickou kuželovou plochu v křivce k', osu o plochy v bodě Q. Oba úseky, vyťaté křivkami k, k' na libovolné přímce svazku o středu Q, jsou stejné. Je-li křivka k' elipsa, je křivka k, mající uvedenou vlastnost, také elipsa, a to soustředná a homotetická s k', jak vidíme, promítneme-li kolmo dvě soustředné kružnice do roviny nakloněné k jejich rovině.

V důkaze se ovšem předpokládá, že křivka k je kuželosečka. Vypustíme-li tento předpoklad, pak křivky k, které mají vzhledem ke kružnici k' uvedenou vlastnost, tvoří skupinu křivek, které budeme v tomto článku zkoumati.



Obr. 1.

V rovině buď dán bod P, t. zv. pól, a kružnice k o středu S. Pravíme, že (reálná) křivka Γ má úsekovou vlastnost vzhledem k pólu P a kružnici k, jestliže ke každému reálnému bodu M křivky Γ existuje na křivce Γ bod M', který je souměrně položený s bodem M podle středu tětivy, vyťaté na přímce MP kružnicí k (viz obr. 1).

Z této definice je zřejmá

Poznámka 1. a) Tětiva, vyťatá na přímce MP kružnicí k, odděluje na úsečce MM' dva úseky stejně dlouhé, nebo naopak úsečka MM' odděluje stejně dlouhé úseky na tětivě.

b) Má-li křivka Γ úsekovou vlastnost vzhledem ke kružnici k, má tutéž vlastnost také ke každé kružnici soustředné s k, neboť geometrické místo středů tětiv, procházejících bodem P, je pro všechny soustředné kružnice totéž.

Při zkoumání křivek s úsekovou vlastností je třeba rozlišovat případy $P \not\equiv S$ a $P \equiv S$; v tomto druhém případě se jedná o křivky středově souměrné, neboť geometrické místo středů tětiv, procházejících bodem P, se redukuje na bod P. V dalším budeme zkoumati hlavně algebraické křivky prvního druhu.

Poznámka 2. Triviální případy křivek s úsekovou vlastností jsou přímky svazku (P) a kružnice soustředné s k. Tyto křivky vylučujeme v dalším ze svých úvah.

Věta 1. Algebraická křivka Γ stupně n s úsekovou vlastností je vytvořena svazkem paprsků (P) a svazkem soustředných kružnic (S) tak, že si elementy obou svazků odpovídají v algebraické korespondenci o indexech

$$\left(\frac{n-h}{2},\ n-r\right),$$

kde h je násobnost křivky Γ v pólu P a r je počet průsečíků křivky s obecnou kružnicí svazku (S) v kruhovém bodě.

Důkaz: 1. Úseková vlastnost se podle definice vztahuje jen na reálné body křivky Γ. Probíhá-li bod M křivku Γ, probíhá bod M_1 souměrně položený s M podle středu tětivy, vyťaté na přímce MP kružnicí k, křivku Γ_1, která se shoduje s Γ ve všech reálných bodech. Poněvadž algebraická křivka je svými reálnými body jednoznačně určena, je $\Gamma_1 \equiv \Gamma$, t. j. úseková vlastnost se vztahuje na všecky body křivky Γ.

2. Obecná přímka svazku (P) protíná křivku Γ mimo pól P v $n-h$ bodech, které lze seskupit v $\frac{n-h}{2}$ dvojic MM', takových, že každou z nich prochází jedna kružnice svazku (S). Obecná kružnice svazku (S) protíná křivku Γ mimo kruhové body v $2n-2r$ průsečících, které lze seskupit do $n-r$ dvojic; z nich každá leží na přímce svazku (P). Touto úvahou docházíme ke skutečné korespondenci vzhledem k poznámce 2.

Věta 2. Pro $P \not\equiv S$ jsou možné tyto korespondence: je-li n liché:

$$\left(\frac{n-1}{2}, 1\right);\ \left(\frac{n-3}{2}, 3\right);\ \ldots;$$

je-li n sudé:

$$\left(\frac{n-2}{2}, 2\right); \left(\frac{n-4}{2}, 4\right); \ldots$$

Důkaz: Zvolme přímku PS za osu x, pól P za počátek soustavy souřadnic. Vytvořující svazky (P), (S) dané křivky Γ mají pak rovnice:

$$\begin{aligned} &(P) \quad y - \lambda x = 0, \\ &(S) \quad x^2 + y^2 - 2sx = \mu, \ S(s, 0), \ s \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Korespondence (α, β) má rovnici:

$$\mu^\alpha \varphi_\beta^{(0)}(\lambda) + \mu^{\alpha-1} \varphi_\beta^{(1)}(\lambda) + \ldots + \varphi_\beta^{(\alpha)}(\lambda) = 0, \tag{2}$$

kde $\varphi_\beta(\lambda)$ jsou polynomy v λ stupně nejvýše β a aspoň jeden z nich je stupně β. Rovnici křivky Γ dostaneme, dosadíme-li do (2) za λ, μ z rovnic (1) a znásobíme x^β. Vyjde:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)^\alpha \psi_\beta^{(0)}(x, y) + (x^2 + y^2 - 2sx)^{\alpha-1} \psi_\beta^{(1)}(x, y) + \ldots + \\ + \psi_\beta^{(\alpha)}(x, y) = 0, \tag{3}$$

kde $\psi_\beta(x, y)$ jsou binární formy stupně β.

Křivka (3) je totožná s danou křivkou Γ. Neboť jinak by obsahovala křivka (3) triviální součásti, t. j. elementy svazků (P), (S), a to takové, kterým neodpovídají v druhém svazku určité elementy, t. j. takové, které obsahují body base druhého svazku. To je však pro svazek (S) jedině kružnice $x^2 + y^2 - 2sx = 0$ a pro svazek (P) dvojice isotropických přímek $x^2 + y^2 = 0$. Je zřejmé, že levá strana rovnice (3) není dělitelná výrazem $x^2 + y^2 - 2sx$ ani (v důsledku nesoudělnosti forem ψ_β) výrazem $x^2 + y^2$.

Platí tedy pro stupeň křivky Γ:

$$n = 2\alpha + \beta.$$

Ježto $\beta \geqq 1$, je $\alpha \leqq \frac{n-1}{2}$. Odtud plyne věta 2.

Analytický výsledek, získaný v důkaze věty 2, je tento:

Věta 3. Křivka Γ, vytvořená svazky:

$$\begin{aligned} &(P) \quad y - \lambda x = 0, \\ &(S) \quad x^2 + y^2 - 2sx = \mu, \end{aligned}$$

mezi nimiž je korespondence (α, β), má rovnici:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)^\alpha \psi_\beta^{(0)} + (x^2 + y^2 - 2sx)^{\alpha-1} \psi_\beta^{(1)} + \ldots + \psi_\beta^{(\alpha)} = 0,$$

kde ψ_β jsou formy stupně β.

Tato křivka je nejobecnější algebraická křivka s úsekovou vlastností pro $P \not\equiv S$.

Věta 4. Pro $P \equiv S$ (křivky středově souměrné) jsou možné tyto korespondence:

je-li n liché:

$$\left(\frac{n-1}{2}+\sigma, 1\right); \left(\frac{n-3}{2}+\sigma, 3\right); \ldots;$$

je-li n sudé:

$$\left(\frac{n-2}{2}+\sigma, 2\right); \left(\frac{n-4}{2}+\sigma, 4\right); \ldots,$$

kde $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$; $2\sigma \leqq \beta \leqq n$.

Důkaz: V tomto případě lze totiž krátiti rovnici (3) výrazem $(x^2 + y^2)^\sigma$ za předpokladu, že formy ψ_β jsou dělitelny vhodnými mocninami dvojčlenu $x^2 + y^2$. Po krácení rovnice (3) výrazem $(x^2 + y^2)^\sigma$ dostaneme rovnici křivky Γ, t. j. pro její stupeň platí:

$$n = 2\alpha - \sigma + \beta.$$

Odtud plyne věta 4 podobně jako věta 2.

Poznámka 3. Jak známo, má křivka středově souměrná podle počátku soustavy souřadné rovnici, v níž se vyskytují jen sudé mocniny homogenisující proměnné z.

Na základě těchto obecných výsledků prozkoumáme v dalším křivky s úsekovou vlastností nízkých stupňů.

Věta 5. Pro $P \not\equiv S$ neexistují kromě kružnic svazku (S) žádné kuželosečky s úsekovou vlastností.

Zřejmé podle věty 2.

Věta 6. Pro $P \not\equiv S$ je kubika s úsekovou vlastností cirkulární a její asymptoty se protínají v pólu, který leží na křivce. Je vytvořena projektivními svazky (P), (S).

Důkaz: Podle věty 2 je pro kubiku jediná možnost korespondence (1, 1). Podle věty 3 má kubika rovnici:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)(ax + by) + cx + dy = 0.$$

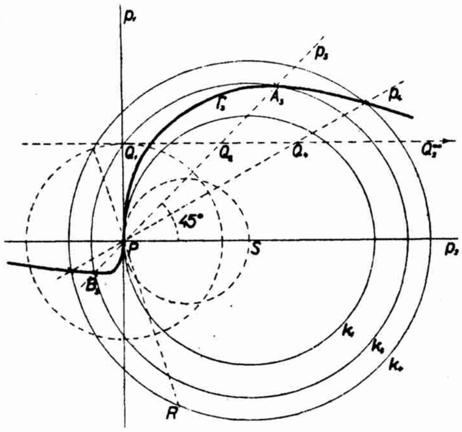
Z jejího rozboru plynou ostatní vlastnosti.

Na obr. 2 je zobrazena kubika Γ_3 s úsekovou vlastností pro $P \not\equiv S$. Přímka PS (osa x) je zvolena za její reálnou asymptotu, osa y za tečnu (inflexní) v bodě P. Dále je kubika dána průsečíky A_3, B_3 přímky p_3 ($\sphericalangle\, p_3x = 45°$) s kružnicí k_3 svazku (S). Ke konstrukci je užito projektivnosti mezi svazky (P), (S), v níž odpovídá ose y kružnice k_1, ose x dvojnásobná nevlastní přímka $k_2{}^\infty$, přímce p_3 kružnice k_3. Libovolné další kružnici k_4 odpovídající přímka p_4 se sestrojí podle rovnosti dvojpoměrů. Platí:

$$(k_1, k_2{}^\infty, k_3, k_4) = \frac{r_3{}^2 - s^2}{r_4{}^2 - s^2},$$

kde r_i je poloměr kružnice k_i. Průsečíkem Q_1 kružnice k_3 s osou y

veďme rovnoběžku s osou x: tato protne přímky p_3, p_4 resp. v bodech Q_3, Q_4. Pak platí:



Obr. 2.

$$(y, x, p_3, p_4) =$$

$$(Q_1, Q_2^\infty, Q_3, Q_4) = \frac{Q_1Q_3}{Q_1Q_4}.$$

Ježto $Q_1Q_3^2 = r_3^2 - s^2$, plyne z rovnosti dvojpoměrů:

$$Q_1Q_4 \, . \, Q_1Q_3 = r_4^2 - s^2.$$

— $(r_4^2 - s^2)$ je mocnost bodu P vzhledem ke kružnici k_4, dále platí $PQ_1 = Q_1Q_3$. Opíšeme tedy ze středu P kružnici $\varkappa$ poloměrem PQ_1. Průsečík kružnic $\varkappa$, k_4 spojíme s pólem P a průsečík této spojnice s kružnicí k_4 je bod R, pro nějž platí $PR = Q_1Q_4$.

Věta 7. Pro $P \neq S$ je kvartika s úsekovou vlastností cirkulární a odpovídá korespondenci (*1, 2*). Pól je dvojnásobný bod kvartiky. Mimoto splňuje křivka jednu z podmínek:

a) její asymptoty (v nesing. bodech) se protínají v pólu;

b) má v kruhových bodech singularity.

Důkaz: Podle věty 2 je jediná možná korespondence (*1, 2*); podle věty 3 je rovnice kvartiky:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)\,\varphi_2 + \psi_2 = 0, \tag{4}$$

kde φ_2, ψ_2 jsou kvadratické formy. Z jejího rozboru plynou další vlastnosti.

Mezi těmito kvartikami jsou konstruktivně zvláště jednoduché ty, které mají v kruhových bodech singularity, neboť přecházejí kruhovou inversí v kuželosečky. Lze je sestrojiti na základě vět 8, 9.

Věta 8. Kvartika Γ_4 s úsekovou vlastností s dvojnásobnými kruhovými body přechází kruhovou inversí o středu P v kuželosečku, pro niž udávají tečny kvartiky v bodě P směry asymptot. Průměr této kuželosečky, procházející pólem P, je polárně sdružený se směrem kolmým k PS.

Důkaz: Rovnice kvartiky je rovnice (4), kde $\varphi_2 = x^2 + y^2$, t. j.

$$(x^2 + y^2 - 2sx)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

Inverse se středem v P a poloměrem r řídicí kružnice převádí kvartiku v kuželosečku:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2r^2sx + r^4 = 0. \qquad (5)$$

Osa y protíná kuželosečku (5) v bodech U, V, souměrně položených podle pólu P, t. j. bodem P prochází průměr sdružený s tětivou U, V.

Věta 9. Budiž v kolmice vedená pólem P ke spojnici PS. Je-li inversní kuželosečka ke kvartice Γ_4 elipsa e, ϱ vzdálenost jejího středu C od pólu P, ω úhel $\sphericalangle\, CPS$, platí:

a) střed C leží na téže straně (na opačné straně) přímky v jako bod S (než bod S), protíná-li elipsa přímku v imaginárně (reálně);

b) délka průměru sdruženého se směrem v je:

$$2m = 2\varrho\sqrt{1 - \frac{r^2}{\varrho s\cos\omega}}.$$

Důkaz: Střed C elipsy e má souřadnice:

$$x_0 = -\frac{r^2sc}{\triangle}, \quad y_0 = \frac{r^2sb}{\triangle}, \qquad (6)$$

kde $\triangle = b^2 - ac < 0$, t. j. sgn $x_0 = +$ sgn c; odtud plyne první část věty.

Je-li (x_1, y_1) jeden krajní bod průměru na CP, dostaneme řešením rovnice (5) s rovnicí $y = -\dfrac{b}{c}x$:

$$x_1 - x_0 = \frac{r^2c}{\triangle}\sqrt{s^2 + \frac{\triangle}{c}},$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{r^2b}{\triangle}\sqrt{s^2 + \frac{\triangle}{c}},$$

t. j.

$$m = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{r^2}{\triangle}\sqrt{b^2 + c^2}\,.\,\sqrt{s^2 + \frac{\triangle}{c}}.$$

Po dosazení za b, c z rovnic (6) vychází:

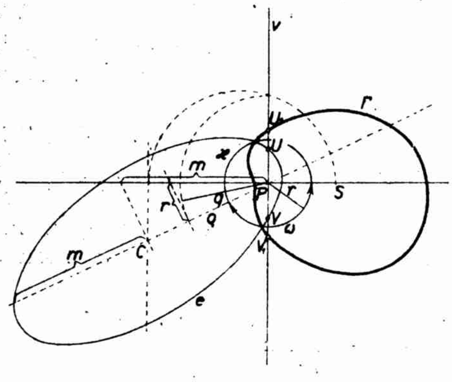
$$m = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,.\,\sqrt{1 - \frac{r^2}{sx_0}}.$$

Tuto rovnici upravíme dosazením:

$$\varrho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad x_0 = \varrho\cos\omega.$$

Podobné věty lze odvoditi i pro inversní hyperbolu a parabolu.

Na obr. 3 je sestrojena kvartika Γ_4, daná imag. tečnami v bodě P a reálnými průsečíky U_1, V_1 s přímkou v. Nejprve se sestrojí průměr CP jako čtvrtý harmonický paprsek k daným tečnám a přímce v. (Tato konstrukce je na obrázku vynechána.) Na tomto průměru zvolíme bod C (viz větu 9a). Podle Euklidovy věty sestrojíme délku:



Obr. 3.

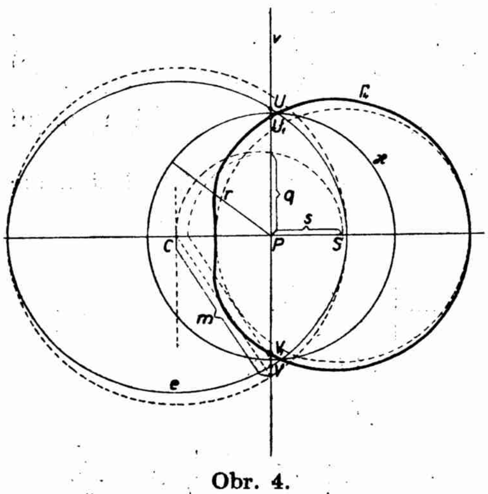
$$q = \sqrt{-s\varrho \cos \omega}.$$

Podle věty 9b platí:

$$m : \varrho = \sqrt{q^2 + r^2} : q.$$

Vyjde nám m, r, jak patrno z obrázku. K bodům U_1, V_1 sestrojíme inversní body U, V. Elipsa je pak určena průměrem a sdruženou tětivou U, V.

Poznámka 4. Ježto při dané inversi závisí délka průměru ležícího v CP jen na poloze středu C (viz větu 9b), je možné, leží-li C na PS, zvoliti body U, V tak, aby elipsa e se libovolně blížila kružnici, sestrojené nad tímto průměrem. Inversní kvartika se pak libovolně málo liší od inversní kružnice (obr. 4).



Obr. 4.

Věta 10. Pro $P \neq S$ je kvartika s úsekovou vlastností vytvořena svazkem kružnic (S), projektivním s involucí paprsků o středu (P). Neboť podle rovnice (4) je vytvoření dáno rovnicemi:

$$x^2 + y^2 - 2sx = \mu,$$

$$\mu\varphi_2 + \psi_2 = 0.$$

Věta 11. Pro $P \neq S$ jsou dva druhy sextik s úsekovou vlastností:

a) sextiky odpovídající korespondenci $(2, 2)$, mající v pólu P bod dvojnásobný;