

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0069|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

8
ROČNÍK 69.



SEŠIT 3-4.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ,
V. KNICHAL, V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER,
K. RYCHLÍK, J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, ST.
TEPLÝ, FRANT. VYČICHLO, AL. WANGLER,
FR. ZÁVIŠKA, AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1940

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 K

Obsah

ČÁST VĚDECKÁ

Část matematická

Eugen Bunický, Praha VIII-1236: O jedné soustavě kongruencí, související s větou Wilsonovou — Über ein System von Kongruenzen, welches mit dem Wilsonschen Satz zusammenhängt	97
Jan Vyšín, reál. gymn., Úpice: O zobecnění kruhové konchoidy — Über eine Verallgemeinerung der Kreiskonchoide	110
Harry Levy, Urbana (Illinois): Conformal Invariants in Two Dimensions II — Konformní invarianty ve dvou dimensích II	118
Štefan Schwarz, Bratislava, Vazova 1: Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée — O počtu kořenů a nerozložitelných faktorů danej kongruencie	128
Štefan Schwarz, Bratislava, Vazova 1: Über einen Satz von S. Lubelski — O jednej wete S. Lubelského	146
Vojtěch Jarník, Praha XVIII, Pevnostní 1: Über die Mittelpunktsätze der Gitterpunkte. 5. Abhandlung — Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 5. pojednání	148

Část fyzikální

Vladimír Guth, Praha XVI, Presslova 11, a František Link, Praha II, Sokolská 25: Messungen der atmosphärischen Absorption auf terrestrischer Basis — Měření atmosférické absorpce na pozemské základně	175
Václav Dolejšek, Praha XIII, Jablonského 27, a Jar. Ježek, Praha: O separování slabých nediagramových čar K-serie — Über die Trennung schwacher Nichtdiagrammlinien der K-Serie	180
Mirko Jahoda, Praha XI, Husinecká 33, a J. Šimon, Praha: Užití sodíkového světla pro Ramanův zjev — Verwendung des Natriumlichtes für Ramaneffekt	187
A. Kochanovská-J. Brož, Praha: Metoda bez šterbiny o velké světelnosti ke studiu polykrystalitů paprsky X — Methode ohne Spalt großer Lichtstärke zum Studium der Polykrystallite durch Röntgenstrahlen	191
J. Šimonová-Čeřovská, Praha: Závislost modulu pružnosti oceli a niklu na teplotě — Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls von Stählen und Nickel	197
Titulní list a obsah.	

ČÁST MATEMATICKÁ

O jedné soustavě kongruencí, související
s Wilsonovou větou.

E. Bunleky, Praha.

(Došlo dne 3. února 1940.)

§ 1. Budeme častěji vyšetřovati základní symetrické funkce $s_1, s_2, \dots, s_{m-1}$ čísel

$$1, 2, \dots, m-1, \quad (1)$$

kdež m je jisté celé kladné číslo, t. j. součet s_1 čísel (1), součty $s_2, s_3, \dots, s_{m-2}$ všech součinů čísel (1) po dvou, po třech, $\dots$, po $m-2$ a konečně součin $(m-1)! = s_{m-1}$. Symbol s_ν značí v následujícím vždy základní symetrickou funkci řady čísel tvaru (1) (při čemž index ν jest roven některému členu řady (1)), definovanou číslem ν , jež musí býti dáno v každém jednotlivém případě. Tvar řady (1), jež obsahuje všechna přirozená čísla menší než m , naznačuje, že m má býti větší než 1. Přes to, užíváme-li výrazů s_ν , jest vhodno, zdůrazniti výslovně nerovnost $m > 1$, zvláště vzhledem k tomu, že se v kombinatorických vzorcích připisuje symbolu $(m-1)! = s_{m-1}$ pro $m = 1$ hodnota $0! = 1$.

Je známo, že kongruence

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

vyjadřuje — podle Wilsonovy věty — nutnou a postačující podmínku, aby číslo p , celé a větší než 1, bylo prvočíslem (v čemž jest zahrnuto i sudé prvočíslo 2). Můžeme tedy říci, že kongruence (2) charakterizuje všechna prvočísla. Z kongruence

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

platné identicky, když p je prvočíslo, je dále patrné, že každé *liché* prvočíslo p splňuje vedle kongruence (2) ještě také soustavu kongruencí

$$s_1 \equiv 0 \pmod{p}, s_2 \equiv 0 \pmod{p}, \dots, s_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3)$$

kde výrazy $s_1, s_2, \dots, s_{p-2}$ jsou vytvořeny pro řadu čísel $1, 2, \dots$

..., $p-1$. Tato soustava se redukuje na jedinou kongruenci tehdy a jen tehdy, je-li $p=3$.

Dokažme nyní tuto větu: *soustava kongruencí (3) charakterizuje všechna lichá prvočísla, to jest: tato soustava vyjadřuje podmínku nutnou a postačující k tomu, aby celé číslo p , větší než 1, bylo lichým prvočíslem*. Předně každé liché prvočíslu p vyhovuje soustavě kongruencí (3). Budiž za druhé p celé číslo větší než 1, splňující soustavu (3). Podle první kongruence této soustavy je podíl $s_1 : p = \frac{1}{2}p(p-1) : p = \frac{1}{2}(p-1)$ číslo celé, takže p je liché. Vyšetřujeme nyní kongruenci

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) \equiv 0 \pmod{p}, \quad (4)$$

kteřou lze psáti ve tvaru

$$x^{p-1} - s_1 x^{p-2} + s_2 x^{p-3} - \dots + (-1)^k s_k x^{p-k-1} + \dots + (-1)^{p-2} s_{p-2} x + (-1)^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv 0 \pmod{p},$$

nebo, přihlížíme-li k soustavě kongruencí (3) a k okolnosti, že p je liché, v ekvivalentním tvaru

$$x^{p-1} + (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4')$$

Kongruence (4), a tedy i ekvivalentní kongruence (4'), má zřejmě kořen $x=1$, z čehož plyne $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Liché číslo p je tedy prvočíslem, čímž věta dokázána.

§ 2. Zjistíme za chvíli, že jest možno, nahraditi soustavu (3) soustavou kongruencí, která jest pouze částí soustavy (3), a která přes to charakterizuje všechna lichá prvočísla. Napřed však dokážeme tuto větu¹⁾: *Každé číslo celé M , větší než 1, splňuje vztah*

$$2s_{2k+1} \equiv 0 \pmod{M}, \quad (5)$$

kdež k je celé nezáporné číslo a $2k+1$ je kterékoliv liché kladné číslo, jež není větší než $M-1$; při tom značí s_{2k+1} základní symetrickou funkci čísel

$$1, 2, \dots, M-1, \quad (6)$$

definovanou indexem $2k+1$.

Předpokládejme napřed, že jest $1 < 2k+1 < M-1$, čili, což značí totéž, $0 < k < \frac{1}{2}(M-2)$. V tomto případě značí s_{2k+1} součet všech součinů po $2k+1$ z čísel (6). Budiž

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} \quad (7)$$

součin $2k+1$ různých čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k+1}$, vybraných libovolně mezi čísly (6). Výraz

$$(M - \alpha_1)(M - \alpha_2) \dots (M - \alpha_{2k+1}) \quad (7')$$

¹⁾ Tato věta byla dokázána autorem v článku „Zamečáníje po povodu teoremy Wilsona“, Učenyja Zapisky, Praha 1925.

je také jedním z těchto součinů, a systém všech výrazů (7'), příslušných ke všem součinům (7), je zřejmě totožný se systémem všech součinů (7). Následkem toho jest

$$s_{2k+1} = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} = \Sigma (M - \alpha_1) (M - \alpha_2) \dots (M - \alpha_{2k+1}),$$

kdež součty Σ se vztahují ke všem $\binom{M}{2k+1}$ kombinacím čísel (6) po $2k+1$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} = \Sigma (M - \alpha_1) (M - \alpha_2) \dots (M - \alpha_{2k+1}) \equiv \\ &\equiv (-1)^{2k+1} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} = -s_{2k+1} \pmod{M}, \end{aligned}$$

čímž kongruence (5) dokázána. Podobně se dokáže kongruence (5) v obou krajních případech, kdy jest buďto $2k+1=1$, t. j. $k=0$ nebo $1 < 2k+1 = M-1$, t. j. $0 < k = \frac{1}{2}(M-2)$. V prvním případě stačí nahraditi $\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1}$ a $\Sigma (M - \alpha_1) \dots (M - \alpha_{2k+1})$ výrazy $\Sigma \alpha$ resp. $\Sigma (M - \alpha)$, kdež se počítá přes všechna čísla řady (6). V druhém krajním případě nahradíme součty

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} \text{ a } \Sigma (M - \alpha_1) (M - \alpha_2) \dots (M - \alpha_{2k+1}) \text{ resp.} \\ \text{součiny } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k+1} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{M-1} \text{ a } (M - \alpha_1) (M - \alpha_2) \dots \\ \dots (M - \alpha_{2k+1}) = (M - \alpha_1) (M - \alpha_2) \dots (M - \alpha_{M-1}), \end{aligned}$$

kdež řada čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M-1}$ splývá s řadou (6).

Poznámka. Předpoklad $1 < 2k+1 < M-1$ čili $0 < k < \frac{1}{2}(M-2)$ je splnitelný pouze pro $M > 2$ a předpoklad $1 < 2k+1 = M-1$ čili $0 < k = \frac{1}{2}(M-2)$ je splnitelný pouze pro M sudé a větší než 2.

Je-li M liché, můžeme nahraditi kongruenci (5) ekvivalentní kongruencí

$$s_{2k+1} \equiv 0 \pmod{M}. \quad (5')$$

Tím dostáváme větu: Každé celé liché číslo M větší než 1 splňuje kongruenci (5'), kde index $2k+1$ probíhá všechny liché hodnoty 1, 3, 5, ..., $M-2$ a kde symetrické funkce s_{2k+1} jsou vytvořeny pro řadu čísel 1, 2, ..., $M-1$. Této pomocné věty užijeme k důkazu následující věty.

Věta I. a) Buďte $s_1, s_2, \dots, s_{p-1}$ základní symetrické funkce $p-1$ čísel

$$1, 2, \dots, p-1. \quad (8)$$

Vyšetřujeme systém kongruencí

$$s_1 \equiv 0, s_2 \equiv 0, s_4 \equiv 0, \dots, s_{2l} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3')$$

kde p je celé číslo větší než 1 a kde indexy 2, 4, ..., $2l$ probíhají všechny sudé hodnoty, ležící v uzavřeném intervalu $\langle 2, 2l \rangle$, kde $2l$

je největší sudé číslo splňující nerovnost

$$2l < p - 1. \quad (9)$$

Pro $p = 2$ a pro $p = 3$ redukuje systém (3') na první kongruenci $s_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Jest dokázati, že systém (3') dává nutnou a postačující podmínku pro to, aby číslo p , větší než 1, bylo lichým prvočíslem; jinak řečeno, systém kongruencí (3') charakterizuje všechna lichá prvočísla.

b) Vyhovuje-li celé číslo p , větší než 1, systému (3'), je p liché, a systém (3'), je-li $p > 3$, splývá se systémem kongruencí

$$s_1 \equiv 0, s_2 \equiv 0, s_4 \equiv 0, \dots, s_{p-3} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3^*)$$

Dokažme tvrzení a); současně obdržíme během důkazu tvrzení b). Podmínky (3') jsou nutné, aby p bylo liché prvočíslo. Vskutku, je-li p liché prvočíslo větší než 3, vyhovuje kongruencím (3) a v tomto případě největší sudé číslo $2l$, vyhovující nerovnosti (9), je $p - 3$; tedy systém (3') splývá se systémem (3*). Dále prvočíslo $p > 3$ vyhovuje jistě systému (3*), jehož všechny kongruence patří k systému (3). Ale systémy (3*), (3') jsou totožné. Tedy každé liché prvočíslo větší než 3 vyhovuje systému (3'). Liché prvočíslo $p = 3$ vyhovuje kongruenci $s_1 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{p = 3}$, na kterou se redukuje v tomto případě systém (3) a tedy, podle naší úmluvy, učiněné ve znění věty I, číslo $p = 3$ vyhovuje systému kongruencí (3'). Tedy všechna lichá prvočísla p vyhovují systému (3').

Budiž za druhé p celé číslo větší než 1, vyhovující systému (3'). Podle první z těchto kongruencí je číslo p liché a tedy větší než 2. Je-li liché číslo p větší než 3, potom největší sudé číslo $2l$ hovící nerovnosti (9) je $p - 3$ a tedy systém (3') nabývá pro takové p tvaru (3*); tím je tvrzení b) dokázáno. Vraťme se k tvrzení a). Celé číslo $p > 1$, vyhovující systému (3'), je, jak jsme viděli, liché; je tedy buďto $p > 3$ nebo $p = 3$. Je-li $p > 3$, potom systém (3'), kterému p podle předpokladu vyhovuje, má tvar (3*), jak jsme seznali. Podle poslední pomocné věty vyhovuje liché číslo p také všem kongruencím $s_3 \equiv 0, s_5 \equiv 0, \dots, s_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$, které dohromady se systémem (3*) dávají právě celý systém (3). Tedy vyšetřované číslo p , vyhovující systému (3') a větší než 3, vyhovuje také všem kongruencím systému (3) a tedy je číslo p liché prvočíslo. Zbývá případ $p = 3$. Číslo $p = 3$ vyhovuje systému (3'), který se v tomto případě redukuje na jedinou kongruenci $s_1 \equiv 0 \pmod{p = 3}$ a vedle toho je $p = 3$ liché prvočíslo. Tedy platí ve všech případech: jestliže celé číslo $p > 1$ vyhovuje systému (3'), je p liché prvočíslo.²⁾

²⁾ Formálně lze systém (3') napsati pro každé celé číslo $p > 1$. Ale pro sudé prvočíslo 2 a pro složená čísla není tento systém splněn; je právě splněn pouze pro lichá prvočísla.

§ 3. Je možno si položit otázku, zda není možno vynechat z systému (3') některé kongruence tak, aby zbývající systém stále ještě charakterisoval všechna lichá prvočísla. Nerozřešíme úplně tuto otázku, budeme však vyšetřovati některé zvláštní případy. Napřed dokážeme některé pomocné věty. Buďte s_ϱ ($\varrho = 1, 2, \dots, n$) základní symetrické funkce n čísel

$$1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

kde n je jakékoliv celé číslo větší než 1. Položme nadto $s_\varrho = \sigma(\varrho, n)$, abychom jasněji vyznačili závislost funkcí s_ϱ na obou parametrech ϱ, n . Funkce $\sigma(\varrho, n)$ vyhovují zřejmě vztahům

$$\sigma(k+1, n+1) = \sigma(k+1, n) + (n+1) \sigma(k, n) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

kteřé lze psát ve tvaru³⁾

$$\Delta \sigma(k+1, n) = (n+1) \sigma(k, n) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (11)$$

kde znamení diferenční Δ se vztahuje na proměnnou n , jež má obdržeti přírůstek 1. Označme znakem $(n+1)^{l+1}$ faktoriál

$$(n+1)n(n-1)\dots(n+1-(l-1)) = (n+1)n(n-1)\dots(n-l+2),$$

kde l je libovolné celé kladné číslo. Pro tento faktoriál platí

$$(n+1)(n+1)^{l+1} = l(n+1)^{l+1} + (n+1)^{l+1+1}. \quad (12)$$

Ze známé formule

$$\sigma(1, n) = \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2}(n+1)^{2+1} \quad (13)$$

a ze vztahu (12) můžeme počítati postupně výrazy $\sigma(2, n), \sigma(3, n), \dots, \sigma(k, n)$ ($k \leq n$), užívající rovnice (11). Tak jest

$$\begin{aligned} \Delta \sigma(2, n) &= (n+1) \sigma(1, n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1)^{2+1} = \\ &= \frac{1}{2}(2(n+1)^{2+1} + (n+1)^{3+1}). \end{aligned}$$

$$\text{čili} \quad \Delta \sigma(2, n) = (n+1)^{2+1} + \frac{1}{2}(n+1)^{3+1}.$$

Sčítáme-li obě strany, dostaneme

$$\sigma(2, n) = \frac{1}{6}(n+1)^{3+1} + \frac{1}{6}(n+1)^{4+1} + c,$$

kde c je konstanta; pro $n = 2$ obdržíme (poznamenejme, že $(n+1)^{l+1}$ vymizí pro $n = 0, 1, 2, \dots, l-2$)

$$\sigma(2, 2) = 2! = \frac{1}{6}3^{4+1} + \frac{1}{6}3^{3+1} + c = 2! + c,$$

odkud $c = 0$ a

³⁾ Můžeme potlačit podmínku $n > 1$ a připustiti pro n všechna celá kladná čísla, klademe-li $\sigma(0, n) = 1$ pro každé n . Tato úmluva dovoluje psát rovnici (11) pro $k = 0$ ve tvaru $\Delta \sigma(1, n) = n+1$, i když $n = 1$. Sečteme-li obě strany a použijeme rovnice $\sigma(1, 1) = 1$, obdržíme známý vzorec (13).

$$\sigma(2, n) = \frac{1}{8}(n+1)^{3|1} + \frac{1}{8}(n+1)^{4|1} = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}. \quad (14)$$

Podobně obdržíme postupně

$$\begin{aligned} \Delta\sigma(3, n) &= (n+1)\sigma(2, n) = (n+1)\left[\frac{1}{8}(n+1)^{3|1} + \frac{1}{8}(n+1)^{4|1}\right] = \\ &= (n+1)^{3|1} + \frac{1}{8}(n+1)^{4|1} + \frac{1}{2}(n+1)^{4|1} + \frac{1}{8}(n+1)^{5|1} = \\ &= (n+1)^{3|1} + \frac{5}{8}(n+1)^{4|1} + \frac{1}{8}(n+1)^{5|1}, \\ \sigma(3, n) &= \frac{1}{4}(n+1)^{4|1} + \frac{1}{6}(n+1)^{5|1} + \frac{1}{48}(n+1)^{6|1} + c. \end{aligned}$$

Položíme-li $n = 3$, obdržíme

$$\sigma(3, 3) = 3! = \frac{1}{4}4! + c = 3! + c, \quad c = 0,$$

odkudž

$$\begin{aligned} \sigma(3, n) &= \frac{1}{4}(n+1)^{4|1} + \frac{1}{6}(n+1)^{5|1} + \frac{1}{48}(n+1)^{6|1} = \\ &= \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n^2-3n+2). \end{aligned} \quad (15)$$

Dokážeme, že se funkce $\sigma(k, n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) dá vyjádřití mnohočlenem v n stupně $2k$ tvaru

$$\begin{aligned} \sigma(k, n) &= a_{k,k+1}(n+1)^{k+1|1} + \sum_{v=k+2}^{2k-1} a_{k,v}(n+1)^{v|1} + \\ &+ a_{k,2k}(n+1)^{2k|1}, \end{aligned} \quad (16)$$

kde $a_{k,l}$ ($l = k+1, k+2, \dots, 2k-1, 2k$) jsou racionální konstanty. První a poslední z těchto koeficientů jsou dány rovnicemi

$$a_{k,k+1} = \frac{1}{k+1}, \quad (17)$$

$$a_{k,2k} = \frac{1}{2^k \cdot k!}, \quad (17')$$

ostatní koeficienty jsou, pro $k > 1$, dány rekurentním vzorcem

$$a_{k+1,v} = \frac{(v-1)a_{k,v-1} + a_{k,v-2}}{v} \quad (18)$$

$$(k > 1; v = k+3, k+4, \dots, 2k, 2k+1).$$

Abychom tyto vzorce dokázali, poznamenejme především, že vzorce (16), (17), (17') jsou podle rovnic (14), (15) správné pro $k = 2$ a $k = 3$. Zůstávají správnými též pro $k = 1$: neboť v tomto případě podle (13) platí $a_{1,2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}$. Pro $k = 1$ a $k = 2$ stačí vzorce (17), (17') k určení koeficientů $a_{k,v}$; pro $k = 3$ potřebujeme vedle vzorců (17), (17') ještě $a_{3,5}$; příslušná rovnice (18) se redukuje na $a_{3,5} = \frac{1}{5}(4a_{2,4} + a_{2,3})$, kterážto je správná, neboť $a_{2,5} = \frac{1}{6}$, $a_{2,4} = \frac{1}{8}$, $a_{2,3} = \frac{1}{8}$. Předpokládejme tedy,

že vzorce (16), (17), (17') platí pro jistou hodnotu k , kde $3 \leq k < n$, a dokažme, že tyto formule platí i tehdy, píšeme-li $k+1$ místo k a že koeficienty $a_{k+1,\nu}$ ($\nu = k+3, k+4, \dots, 2k+1$) vyhovují vztahům (18). K tomu cíli dosadíme do rovnice (11) místo $\sigma(k, n)$ pravou stranu rovnice (16). Obdržíme postupně, užívající vztahu (12),

$$\begin{aligned}\Delta\sigma(k+1, n) &= (n+1) \sum_{\lambda=k+1}^{2k} a_{k,\lambda} (n+1)^{\lambda|1} = \\ &= \sum_{\lambda=k+1}^{2k} a_{k,\lambda} (\lambda(n+1)^{\lambda|1} + (n+1)^{\lambda+1|1}), \\ \Delta\sigma(k+1, n) &= (k+1) a_{k,k+1} (n+1)^{k+1|1} + \\ &+ \sum_{\varrho=k+2}^{2k} (\varrho a_{k,\varrho} + a_{k,\varrho-1}) (n+1)^{\varrho|1} + a_{k,2k} (n+1)^{2k+1|1}.\end{aligned}$$

Sčítáme-li na obou stranách, obdržíme

$$\begin{aligned}\sigma(k+1, n) &= \frac{k+1}{k+2} a_{k,k+1} (n+1)^{k+2|1} + \\ &+ \sum_{\varrho=k+2}^{2k} \frac{\varrho a_{k,\varrho} + a_{k,\varrho-1}}{\varrho+1} \cdot (n+1)^{\varrho+1|1} + \frac{a_{k,2k}}{2k+2} (n+1)^{2k+2|1} + c,\end{aligned}$$

kde c je konstanta. Položíme-li $n = k+1$, užijeme-li vzorce (17) a vynecháme členy, které se rovnají nule pro $n = k+1$, obdržíme

$$\begin{aligned}\sigma(k+1, k+1) &= (k+1)! = \frac{k+1}{k+2} a_{k,k+1} (k+2)! + c = \\ &= (k+1)! + c, \text{ takže } c = 0. \text{ Dále máme podle vzorců (17), (17')}\end{aligned}$$

$$\frac{k+1}{k+2} a_{k,k+1} = \frac{1}{k+2}, \quad \frac{a_{k,2k}}{2k+2} = \frac{1}{2^{k+1} \cdot (k+1)!}.$$

Položíme-li tedy $\varrho+1 = \nu$, vychází

$$\begin{aligned}\sigma(k+1, n) &= \frac{1}{k+2} (n+1)^{k+2|1} + \sum_{\nu=k+3}^{2k+1} \frac{(\nu-1) a_{k,\nu-1} + a_{k,\nu-2}}{\nu} \cdot \\ &\cdot (n+1)^{\nu|1} + \frac{1}{2^{k+1} \cdot (k+1)!} (n+1)^{2k+2|1}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy psát $\sigma(k+1, n)$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma(k+1, n) &= a_{k+1,k+2} (n+1)^{k+2|1} + \sum_{\nu=k+3}^{2k+1} a_{k+1,\nu} (n+1)^{\nu|1} + \\ &+ a_{k+1,2k+2} (n+1)^{2k+2|1},\end{aligned} \quad (19)$$

kde koeficienty $a_{k+1,\lambda}$ ($\lambda = k+2, k+3, \dots, 2k+2$) vyhovují

rovnícím

$$\begin{aligned} a_{k+1,k+2} &= \frac{1}{k+2}, & a_{k+1,2k+2} &= \frac{1}{2^{k+1} \cdot (k+1)!}, \\ a_{k+1,\nu} &= \frac{(\nu-1) a_{k,\nu-1} + a_{k,\nu-2}}{\nu} \quad (\nu = k+3, k+4, \dots, 2k+1). \end{aligned} \quad (19')$$

Z toho je patrné, že vzorce (16), (17), (17'), (18) platí obecně. Neboť podle (19), (19') obdržíme obecný tvar funkce $\sigma(k+1, n)$ a výrazy pro první a poslední koeficient na pravé straně, nahradíme-li ve vzorcích (16), (17), (17') (jež pro naši hodnotu k považujeme za správné) číslo k číslem $k+1$; mimo to, podle poslední rovnice (19'), vyhovují koeficienty $a_{k+1,\nu}$ ($\nu = k+3, k+4, \dots, 2k+1$) rekurentním relacím (18).

Poznamenejme, že pravá strana vzorce (16) je dělitelná mnohočlenem $(n+1)^{k+1}$. Z toho plyne

$$\sigma(k, n) = \frac{(n+1)^{k+1} \psi_{k-1}(n)}{\delta_k}$$

nebo

$$\sigma(k, n) = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)\psi_{k-1}(n)}{\delta_k}, \quad (20)$$

kde $\psi_{k-1}(n)$ je polynom stupně $k-1$ v proměnné n s celými součiniteli, kteří mají pro danou hodnotu k hodnoty úplně určené rovnicemi (17), (17'), (18) a kde δ_k je celé kladné číslo, které podle vzorců (16), (17') je násobkem čísla $2 \cdot 4 \dots 2k = 2^k \cdot k!$. Ježto celistvé číslo k je nejmeně rovno jedné, lze psát rovnici (20) pro všechny přípustné hodnoty $1, 2, \dots, n$ čísla k ve tvaru

$$\sigma(k, n) = \frac{(n+1)n\eta_{2k-2}(n)}{\delta_k}, \quad (20^*)$$

kde $\eta_{2k-2}(n)$ je mnohočlen stupně $2k-2$ v proměnné n , s celistvými koeficienty, určenými pro každou hodnotu čísla k .

§ 4. Věta II. a) Žádná kongruence tvaru

$$s_k \equiv 0 \pmod{p}, \quad (21)$$

kde k je dané celé kladné číslo a kde s_k značí základní symetrickou funkci čísel

$$1, 2, \dots, p-1, \quad (8')$$

nemůže charakterisovati všechna prvočísla p , hovící nerovnosti

$$p > k+1. \quad (22)$$

b) Budiž m celé číslo větší než 1, libovolně dané. Žádný systém kongruencí

$$s_{k,\nu} \equiv 0 \pmod{p} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m), \quad (23)$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_m$ je m různých celých kladných čísel a kde s_k značí základní symetrické funkce čísel (8'), nemůže charakterisovati všechna prvočísla p , hovící nerovnosti

$$p > \text{maximum}(k_1, k_2, \dots, k_m) + 1. \quad (22')$$

Poznámka. Podle definice funkce $s_k = \sigma(k, p-1)$ je $k \leq p-1$. Ale rovnost $k = p-1$ je v části a) věty II nemožná, neboť pro prvočíslu p a pro $k = p-1$ by platil místo kongruence (21), jež má tvar $s_k = s_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, vztah $s_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Je tedy nutno omeziti číslo p podmínkou $k < p-1$, t. j. nerovností (22). Podobně je p v části b) omezeno analogickou nerovností (22').

Důkaz. Abychom dokázali tvrzení a), stačí, najdeme-li složené číslo p , které vyhovuje kongruenci (21) a nerovnosti (22). Položíme-li⁴⁾ ve vzorci (20*) $n = p-1$ a označíme $\eta_{2k-2}(p-1)$ znakem $f(p)$, kde $f(p)$ je stejně jako $\eta_{2k-2}(p-1)$ mnohočlen v p s celistvými součiniteli, můžeme psáti kongruenci (21) ve tvaru

$$\frac{p(p-1)f(p)}{\delta_k} \equiv 0 \pmod{p}, \text{ čili } (p-1)f(p) \equiv 0 \pmod{\delta_k}.$$

Tato kongruence má kořen $p \equiv 1 \pmod{\delta_k}$. Položíme-li tedy $p = (1 + \delta_k)^e$, kde e je libovolné celé číslo větší než 1, bude $p \equiv 1 \pmod{\delta_k}$. Takto sestrojené číslo p je složené. Za druhé, ježto δ_k je násobkem součinu $2 \cdot 4 \dots 2k$, je $p = (1 + \delta_k)^e > \delta_k + 1 > k + 1$. Tedy $p = (1 + \delta_k)^e$ je číslo složené, vyhovující kongruenci (21) a nerovnosti (22).

b) Abychom dokázali tvrzení b), sestrojme složené číslo p , které vyhovuje systému (23) a nerovnosti (22'). Podle rovnice (20*) lze psáti systém (23) ve tvaru

$$s_{k_v} = \sigma(k_v, p-1) = \frac{p(p-1)f_v(p)}{\delta_{k_v}} \equiv 0 \pmod{p} \quad (23')$$

($v = 1, 2, \dots, m$),

čili jednodušeji

$$(p-1)f_v(p) \equiv 0 \pmod{\delta_{k_v}} \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad (23'')$$

kde $f_v(p)$ jsou jisté mnohočleny v p s celistvými součiniteli a kde čísla δ_{k_v} závisí pouze na daných číslech k_v ($v = 1, 2, \dots, m$). Označme znakem δ nejmenší společný násobek čísel $\delta_{k_1}, \dots, \delta_{k_m}$. Čísla p , vyhovující kongruenci $p \equiv 1 \pmod{\delta}$, vyhovují zřejmě systému (23'') čili ekvivalentnímu systému (23'). Speciálně lze

⁴⁾ Položíme-li $n = p-1$ a užijeme vzorce (20*) z paragrafu 3., můžeme podržeti předpoklad $n > 1$. Vskutku, ježto číslo k je celé kladné, je číslo p vzhledem k (22) nejmeně rovno 3, takže $p-1 = n > 1$.

zvoliti $p = (1 + \delta)^e$, kde e je celé číslo větší než 1, jinak libovolné. Takové číslo p je složené číslo, vyhovující systému (23'). Ježto δ_k je násobkem čísla $2 \cdot 4 \dots 2k$, je

$$p = (1 + \delta)^e > \delta + 1 \geq \delta_{k_v} + 1 > k_v + 1 \quad (v = 1, 2, \dots, m).$$

Tedy složené číslo $p = (1 + \delta)^e$, vyhovující systému (23') a tedy i ekvivalentnímu systému (23), splňuje nerovnosti $p > k_v + 1$ ($v = 1, 2, \dots, m$) a tedy i nerovnost (22').

Poznámka. Místo volby $p = (1 + \delta_k)^e$ resp. $p = (1 + \delta)^e$ mohli jsme voliti obecněji na př. $p = \prod_{i=1}^e (1 + t_i \delta_k)$ (resp. $p = \prod_{i=1}^e (1 + t_i \delta)$), kde e je libovolné celé číslo větší než 1 a čísla t_i jsou libovolná celá kladná čísla.

§ 5. **Věta III.** a) *Kongruence tvaru*

$$s_{p-k} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (24)$$

kde k je dané celé číslo větší než 1 a kde s_{p-k} je základní symetrická funkce čísel (8') s indexem $p - k$, nemůže charakterisovati všechna prvočísla p , vyhovující nerovnosti

$$p > k. \quad (25)$$

b) *Budiž m celé číslo větší než 1. Žádný systém kongruencí*

$$s_{p-k_v} \equiv 0 \pmod{p} \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad (26)$$

kde k_v jsou navzájem různá celá čísla, větší než 1, a kde s_{p-k_v} značí základní symetrickou funkci čísel (8'), definovanou indexem $p - k_v$, nemůže charakterisovati všechna prvočísla p , vyhovující nerovnosti

$$p > \text{maximum } (k_1, k_2, \dots, k_m). \quad (25')$$

Poznámka. Celé číslo k (resp. každé z čísel k_v) nemůže býti rovno 1, neboť pro prvočíselné p jest $s_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Dále musí číslo p býti větší než k (resp. než každé k_v), ježto podle definice symbolu s_{p-k} má index $p - k$ býti kladný.

Důkaz. a) Abychom dokázali tvrzení a), stačí sestrojiti složené číslo p , vyhovující kongruenci (24) a nerovnosti (25). K tomu cflí položíme $p = 2^{k+2}$. Pro takovou hodnotu p řada čísel (8') má tvar

$$1, 2, 3, \dots, 2^{k+2} - 1 = p - 1. \quad (8'')$$

Ježto podle předpokladu je k celé a větší než 1, je $k \geq 2$, odkud $2^{k+1} - k > 1 + (k + 1) + \frac{1}{2}k(k + 1) - k \geq 2 + k + \frac{1}{2}k(k - 1) > k + 2$.

Tedy je

$$2^{k+1} - k > k + 2 \quad (27)$$

a tedy $p - k = 2^{k+2} - k > 2^{k+1} - k > k + 2 \geq 4$,

$$p - k > 4. \quad (28)$$

Symetrická funkce s_{p-k} čísel (8'') je součet *součinů* těchto čísel po $p - k$. Řada $2, 4, \dots, 2^{k+2} - 2$ obsahuje všechny sudé členy řady (8''). Následkem toho počet všech sudých členů řady (8'') je roven $(2^{k+2} - 2) : 2 = 2^{k+1} - 1$. Z toho plyne, že každý součin $p - k = p - 1 - (k - 1)$ čísel řady (8'') obsahuje nejméně $2^{k+1} - 1 - (k - 1) = 2^{k+1} - k$ sudých činitelů; tedy každý takový součin je dělitelný číslem $2^{2^{k+1}-k}$ a tedy, podle (27), tím spíše dělitelný číslem $p = 2^{k+2}$. Tedy také součet s_{p-k} všech těchto součinů je dělitelný číslem $p = 2^{k+2}$. Tedy $p = 2^{k+2}$ je číslo složené, které vyhovuje kongruenci (24) a vzhledem k nerovnosti (28) také nerovnosti (25).

b) Abychom dokázali tvrzení b), sestrojme jako svrchu složené číslo p , vyhovující systému kongruencí (26) a nerovnosti (25'). Předpokládejme, že je

$$k_1 = \text{maximum } (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad (29)$$

čehož lze vždy dosáhnouti přechíslováním čísel k_v . Položme $p = 2^{k_1+2}$. Podle důkazu tvrzení a) vyhovuje toto číslo p kongruenci $s_{p-k_1} \equiv 0 \pmod{p}$ a nerovnosti

$$p > k_1. \quad (30)$$

Mimo to, jak bylo dokázáno v důkazu tvrzení a), každý součin $p - k_1$ čísel řady

$$1, 2, 3, \dots, 2^{k_1+2} - 1 = p - 1 \quad (8^*)$$

je dělitelný číslem $p = 2^{k_1+2}$. Vzhledem k nerovnostem $k_1 > k_v$ ($v = 2, 3, \dots, m$) je $p - k_v > p - k_1$ ($v = 2, 3, \dots, m$). Tedy každý součin $p - k_v$ čísel řady (8*) je dělitelný jistým součinem $p - k_1$ takových čísel a tento součin je dělitelný, jak jsme zjistili, číslem $p = 2^{k_1+2}$. Tedy každý součin $p - k_v$ ($v = 1, 2, \dots, m$) čísel řady (8*) je dělitelný číslem p a tedy i všechny součty s_{p-k_v} ($v = 1, 2, \dots, m$) jsou dělitelné číslem p , čili tyto součty splňují kongruence (26). Tedy složené číslo $p = 2^{k_1+2}$ vyhovuje systému kongruencí (26) a vzhledem ke vztahům (29), (30) též nerovnosti (25').

Poznámka. Ve větách IIa, IIb jsou čísla k , resp. $k_1, k_2, \dots, k_m$ celá kladná; tedy v každém z těchto tvrzení dává nerovnost (22) resp. (22') $p > 2$. Ve větách IIIa, IIIb čísla k , resp. $k_1, k_2, \dots, k_m$ jsou celá čísla větší než 1. Nerovnost (25) resp. (25') dává opět $p > 2$. Ve všech tvrzeních IIa, IIb, IIIa, IIIb jde tedy jen o lichá prvočísla p .

Über ein System von Kongruenzen, welches mit dem Wilsonschen Satz zusammenhängt.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen, p ist stets > 1 ; $\sigma(k, n)$ ist die k -te elementarsymmetrische Funktion der Größen $1, 2, \dots, n$ ($1 \leq k \leq n$). Im § 3 der tschechischen Originalarbeit wird gezeigt, daß sich $\sigma(k, n)$ in der Gestalt

$$\sigma(k, n) = \frac{(n+1)n \eta_{2k-2}(n)}{d_k} \quad (1)$$

schreiben läßt, wo $\eta_{2k-2}(n)$ ein Polynom in n mit ganzen, nur von k abhängigen Koeffizienten ist; auch d_k hängt nur von k ab (vgl. dort die Formeln (16), (17), (17'), (18), (20), (20*)).

1. Genau dann ist p eine Primzahl, wenn

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

(Wilsonscher Satz; alle folgenden Kongruenzen sind auch mod p zu verstehen.)

2. Hier sei $p > 2$; ist p Primzahl, so ist identisch

$$(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) \equiv x^{p-1} - 1, \quad (3)$$

also

$$\sigma(1, p-1) \equiv \sigma(2, p-1) \equiv \dots \equiv \sigma(p-2, p-1) \equiv 0. \quad (4)$$

Gilt umgekehrt (4), so ist $\frac{1}{2}p(p-1) \equiv 0$, p ungerade und die Kongruenz (3) ist mit

$$x^{p-1} + (p-1)! \equiv x^{p-1} - 1 \quad (5)$$

identisch. Da (3) die Wurzel 1 hat, so folgt aus (5) mit $x = 1$ die Kongruenz (2), also ist p eine ungerade Primzahl. Unter den $p > 2$ sind also die Primzahlen durch (4) charakterisiert.

3. Zu dieser Charakterisierung ungerader Primzahlen genügt bereits folgendes System:

$$\sigma(1, p-1) \equiv 0, \sigma(2l, p-1) \equiv 0 \quad (2l < p-1). \quad (6)$$

Denn die erste Kongruenz charakterisiert ungerade Zahlen p ; ist aber p ungerade, so ist

$$\begin{aligned} \sigma(2k-1, p-1) &= \Sigma \alpha_1 \dots \alpha_{2k-1} = \Sigma (p-\alpha_1) \dots (p-\alpha_{2k-1}) \\ &\equiv -\sigma(2k-1, p-1), \text{ also } 2\sigma(2k-1, p-1) \equiv 0, \end{aligned}$$

$\sigma(2k-1, p-1) \equiv 0$; daraus und aus (6) folgt also (4).

4. Sind m und $k_1, \dots, k_m$ gegeben, so genügt weder das System

$$\sigma(k_v, p-1) \equiv 0 \quad (v = 1, \dots, m) \quad (7)$$

noch das System

$$\sigma(p - k_v, p - 1) \equiv 0 \quad (v = 1, \dots, m) \quad (8)$$

zur Charakterisierung aller hinreichend großen Primzahlen p , d. h. es gibt beliebig große zusammengesetzte p , welche dem System (7) bzw. (8) genügen (für das System (8) kommen nach dem Wilsonschen Satz nur $k_v > 1$ in Betracht). Beweis: benutzt man (1), so sieht man, daß die zusammengesetzte Zahl $p = (1 + d_{k_1} \dots d_{k_m})^r$ ($r > 1$) den Kongruenzen (7) genügt. Ist zweitens $p = 2^r$ ($r > 1$), so beachte man, daß die Reihe $1, 2, \dots, 2^r - 1$ genau $2^{r-1} - 1$ gerade Glieder enthält; also ist $\sigma(p - k_v, p - 1)$ durch $2^{2^r-1-(k_v-1)}$ teilbar; für hinreichend großes r ist aber $2^r - 1 - (k_v - 1) \geq r$; daher gelten die Kongruenzen (8) für $p = 2^r$, wenn r hinreichend groß ist.

O zobecnění kruhové konchoidy.

Jan Vyšín, Úpice.

(Došlo dne 28. února 1940.)

V učebnici Klíma-Ingriš: Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. třídu reálků je na stranách 128 až 130 dokázána věta:

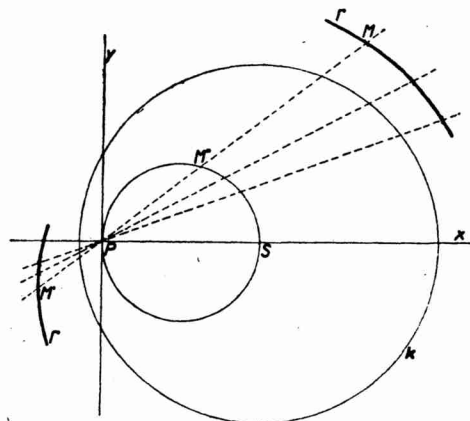
„Řezy libovolné roviny s rotačním hyperboloidem a jeho asymptotickou kuželovou plochou jsou soustředné a homotetické kuželosečky.“

Postup důkazu je tento: Rovina σ řezu protne hyperboloid v křivce k , asymptotickou kuželovou plochu v křivce k' , osu o plochy v bodě Q . Oba úseky, vyřáté křivkami k, k' na libovolné přímce svazku o středu Q , jsou stejné. Je-li křivka k' elipsa, je křivka k , mající uvedenou vlastnost, také elipsa, a to soustředná a homotetická s k' , jak vidíme, promítneme-li kolmo dvě soustředné kružnice do roviny nakloněné k jejich rovině.

V důkaze se ovšem předpokládá, že křivka k je kuželosečka. Vypustíme-li tento předpoklad, pak křivky k , které mají vzhledem ke kružnici k' uvedenou vlastnost, tvoří skupinu křivek, které budeme v tomto článku zkoumati.

V rovině buď dán bod P , t. zv. pól, a kružnice k o středu S . Pravíme, že (reálná) křivka Γ má úsekovou vlastnost vzhledem k pólu P a kružnici k , jestliže ke každému reálnému bodu M křivky Γ existuje na křivce Γ bod M' , který je souměrně položený s bodem M podle středu tětiny, vyřáté na přímce MP kružnicí k (viz obr. 1).

Z této definice je zřejmá



Obr. 1.

poznámka 1. a) Tětiva, vyřatá na přímce MP kružnicí k , odděluje na úsečce MM' dva úseky stejně dlouhé, nebo naopak úsečka MM' odděluje stejně dlouhé úseky na tětivě.

b) Má-li křivka Γ úsekovou vlastnost vzhledem ke kružnici k , má tutéž vlastnost také ke každé kružnici soustředné s k , neboť geometrické místo středů tětiv, procházejících bodem P , je pro všechny soustředné kružnice totéž.

Při zkoumání křivek s úsekovou vlastností je třeba rozlišovat případy $P \equiv S$ a $P \neq S$; v tomto druhém případě se jedná o křivky středově souměrné, neboť geometrické místo středů tětiv, procházejících bodem P , se redukuje na bod P . V dalším budeme zkoumat hlavně algebraické křivky prvního druhu.

Poznámka 2. Triviální případy křivek s úsekovou vlastností jsou přímky svazku (P) a kružnice soustředné s k . Tyto křivky vylučujeme v dalším ze svých úvah.

Věta 1. Algebraická křivka Γ stupně n s úsekovou vlastností je vytvořena svazkem paprsků (P) a svazkem soustředných kružnic (S) tak, že si elementy obou svazků odpovídají v algebraické korespondenci o indexech

$$\left(\frac{n-h}{2}, n-r\right),$$

kde h je násobnost křivky Γ v pólu P a r je počet průsečíků křivky s obecnou kružnicí svazku (S) v kruhovém bodě.

Důkaz: 1. Úseková vlastnost se podle definice vztahuje jen na reálné body křivky Γ . Probíhá-li bod M křivku Γ , probíhá bod M_1 souměrně položený s M podle středu tětivy, vyřaté na přímce MP kružnicí k , křivku Γ_1 , která se shoduje s Γ ve všech reálných bodech. Poněvadž algebraická křivka je svými reálnými body jednoznačně určena, je $\Gamma_1 \equiv \Gamma$, t. j. úseková vlastnost se vztahuje na všechny body křivky Γ .

2. Obecná přímka svazku (P) protíná křivku Γ mimo pól P v $n-h$ bodech, které lze seskupit v $\frac{n-h}{2}$ dvojic MM' , takových, že každou z nich prochází jedna kružnice svazku (S) . Obecná kružnice svazku (S) protíná křivku Γ mimo kruhové body v $2n-2r$ průsečících, které lze seskupit do $n-r$ dvojic; z nich každá leží na přímce svazku (P) . Touto úvahou docházíme ke skutečné korespondenci vzhledem k poznámce 2.

Věta 2. Pro $P \neq S$ jsou možné tyto korespondence: je-li n liché:

$$\left(\frac{n-1}{2}, 1\right); \left(\frac{n-3}{2}, 3\right); \dots;$$

je-li n sudé:

$$\left(\frac{n-2}{2}, 2\right); \left(\frac{n-4}{2}, 4\right); \dots$$

Důkaz: Zvolme přímku PS za osu x , pól P za počátek soustavy souřadnic. Vytvořující svazky (P) , (S) dané křivky Γ mají pak rovnice:

$$\begin{aligned} (P) \quad y - \lambda x &= 0, \\ (S) \quad x^2 + y^2 - 2sx &= \mu, \quad S(s, 0), \quad s \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Korespondence (α, β) má rovnici:

$$\mu^\alpha \varphi_\beta^{(0)}(\lambda) + \mu^{\alpha-1} \varphi_\beta^{(1)}(\lambda) + \dots + \varphi_\beta^{(\alpha)}(\lambda) = 0, \quad (2)$$

kde $\varphi_\beta(\lambda)$ jsou polynomy v λ stupně nejvýše β a aspoň jeden z nich je stupně β . Rovnici křivky Γ dostaneme, dosadíme-li do (2) za λ, μ z rovnic (1) a znásobíme x^β . Vyjde:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)^\alpha \psi_\beta^{(0)}(x, y) + (x^2 + y^2 - 2sx)^{\alpha-1} \psi_\beta^{(1)}(x, y) + \dots + \psi_\beta^{(\alpha)}(x, y) = 0, \quad (3)$$

kde $\psi_\beta(x, y)$ jsou binární formy stupně β .

Křivka (3) je totožná s danou křivkou Γ . Neboť jinak by obsahovala křivka (3) triviální součásti, t. j. elementy svazků (P) , (S) , a to takové, kterým neodpovídají v druhém svazku určité elementy, t. j. takové, které obsahují body base druhého svazku. To je však pro svazek (S) jediné kružnice $x^2 + y^2 - 2sx = 0$ a pro svazek (P) dvojice isotropických přímek $x^2 + y^2 = 0$. Je zřejmé, že levá strana rovnice (3) není dělitelná výrazem $x^2 + y^2 - 2sx$ ani (v důsledku nesoudělnosti forem ψ_β) výrazem $x^2 + y^2$.

Platí tedy pro stupeň křivky Γ :

$$n = 2\alpha + \beta.$$

Ježto $\beta \geq 1$, je $\alpha \leq \frac{n-1}{2}$. Odtud plyne věta 2.

Analytický výsledek, získaný v důkaze věty 2, je tento:

Věta 3. Křivka Γ , vytvořená svazky:

$$\begin{aligned} (P) \quad y - \lambda x &= 0, \\ (S) \quad x^2 + y^2 - 2sx &= \mu, \end{aligned}$$

mezi nimiž je korespondence (α, β) , má rovnici:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)^\alpha \psi_\beta^{(0)} + (x^2 + y^2 - 2sx)^{\alpha-1} \psi_\beta^{(1)} + \dots + \psi_\beta^{(\alpha)} = 0,$$

kde ψ_β jsou formy stupně β .

Tato křivka je nejobecnější algebraická křivka s úsekovou vlastností pro $P \equiv S$.

Věta 4. Pro $P \equiv S$ (křivky středově souměrné) jsou možné tyto korespondence:

je-li n liché:

$$\left(\frac{n-1}{2} + \sigma, 1\right); \left(\frac{n-3}{2} + \sigma, 3\right); \dots;$$

je-li n sudé:

$$\left(\frac{n-2}{2} + \sigma, 2\right); \left(\frac{n-4}{2} + \sigma, 4\right); \dots,$$

kde $\sigma = 0, 1, 2, \dots; 2\sigma \leq \beta \leq n$.

Důkaz: V tomto případě lze totiž krátiti rovnici (3) výrazem $(x^2 + y^2)^\sigma$ za předpokladu, že formy ψ_β jsou dělitelný vhodnými mocninami dvojčlenu $x^2 + y^2$. Po krácení rovnice (3) výrazem $(x^2 + y^2)^\sigma$ dostaneme rovnici křivky Γ , t. j. pro její stupeň platí:

$$n = 2\alpha - \sigma + \beta.$$

Odtud plyne věta 4 podobně jako věta 2.

Poznámka 3. Jak známo, má křivka středově souměrná podle počátku soustavy souřadné rovnici, v níž se vyskytují jen sudé mocniny homogenisující proměnné z .

Na základě těchto obecných výsledků prozkoumáme v dalším křivky s úsekovou vlastností nízkých stupňů.

Věta 5. Pro $P \equiv S$ neexistují kromě kružnic svazku (S) žádné kuželosečky s úsekovou vlastností.

Zřejmé podle věty 2.

Věta 6. Pro $P \equiv S$ je kubika s úsekovou vlastností cirkulární a její asymptoty se protínají v pólu, který leží na křivce. Je vytvořena projektivními svazky (P) , (S) .

Důkaz: Podle věty 2 je pro kubiku jediná možnost korespondence (1, 1). Podle věty 3 má kubika rovnici:

$$(x^2 + y^2 - 2sx)(ax + by) + cx + dy = 0.$$

Z jejího rozboru plynou ostatní vlastnosti.

Na obr. 2 je zobrazena kubika Γ_3 s úsekovou vlastností pro $P \equiv S$. Přímka PS (osa x) je zvolena za její reálnou asymptotu, osa y za tečnu (inflexní) v bodě P . Dále je kubika dána průsečíky A_3, B_3 přímky p_3 ($\angle p_3x = 45^\circ$) s kružnicí k_3 svazku (S) . Ke konstrukci je užito projektivnosti mezi svazky (P) , (S) , v níž odpovídá ose y kružnice k_1 , ose x dvojnásobná nevlastní přímka k_2^∞ , přímce p_3 kružnice k_3 . Libovolné další kružnici k_4 odpovídající přímce p_4 se sestrojí podle rovnosti dvojpoměrů. Platí:

$$(k_1, k_2^\infty, k_3, k_4) = \frac{r_3^2 - s^2}{r_4^2 - s^2},$$

kde r_i je poloměr kružnice k_i . Průsečíkem Q_1 kružnice k_3 s osou y

Inverse se středem v P a poloměrem r řídící kružnice převádí kvartiku v kuželosečku:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2r^2sx + r^4 = 0. \quad (5)$$

Osa y protíná kuželosečku (5) v bodech U, V , souměrně položených podle pólu P , t. j. bodem P prochází průměr sdružený s tětivou UV .

Věta 9. Budiž v kolmice vedená pólem P ke spojnici PS . Je-li inverzní kuželosečka ke kvartice Γ_4 elipsa e , ϱ vzdálenost jejího středu C od pólu P , ω úhel $\angle CPS$, platí:

a) střed C leží na téže straně (na opačné straně) přímky v jako bod S (než bod S), protíná-li elipsa přímku v imaginárně (reálně);

b) délka průměru sdruženého se směrem v je:

$$2m = 2\varrho \sqrt{1 - \frac{r^2}{\varrho s \cos \omega}}.$$

Důkaz: Střed C elipsy e má souřadnice:

$$x_0 = -\frac{r^2 sc}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{r^2 sb}{\Delta}, \quad (6)$$

kde $\Delta = b^2 - ac < 0$, t. j. $\operatorname{sgn} x_0 = + \operatorname{sgn} c$; odtud plyne první část věty.

Je-li (x_1, y_1) jeden krajní bod průměru na CP , dostaneme řešením rovnice (5) s rovnicí $y = -\frac{b}{c}x$:

$$x_1 - x_0 = \frac{r^2 c}{\Delta} \sqrt{s^2 + \frac{\Delta}{c}},$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{r^2 b}{\Delta} \sqrt{s^2 + \frac{\Delta}{c}},$$

t. j.

$$m = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{r^2}{\Delta} \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{s^2 + \frac{\Delta}{c}}.$$

Po dosazení za b, c z rovnic (6) vychází:

$$m = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{sx_0}}.$$

Tuto rovnici upravíme dosazením:

$$\varrho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad x_0 = \varrho \cos \omega.$$

Podobné věty lze odvoditi i pro inverzní hyperbolu a parabolu.

Na obr. 3 je sestrojena kvartika Γ_4 , daná imag. tečnami

v bodě P a reálnými průsečky U_1, V_1 s přímkou v . Nejprve se sestrojí průměr CP jako čtvrtý harmonický paprsek k daným

tečnám a přímce v . (Tato konstrukce je na obrázku vynechána.) Na tomto průměru zvolíme bod C (viz větu 9a). Podle Euklidovy věty sestrojíme délku:

$$q = \sqrt{-sq \cos \omega}.$$

Podle věty 9b platí:

$$m : q = \sqrt{q^2 + r^2} : q.$$

Vyjde nám m, r , jak patrně z obrázku. K bodům U_1, V_1 sestrojíme inverzní body U, V . Elipsa je pak určena průměrem a sdruženou tětivou U, V .

Poznámka 4. Ježto při dané inverzi závisí délka průměru ležícího v CP jen na poloze středu C (viz větu 9b), je možné, leží-li C na PS , zvoliti body U, V tak, aby elipsa e se libovolně blížila kružnici, sestrojené nad tímto průměrem. Inverzní kvartika se pak libovolně málo liší od inverzní kružnice (obr. 4).

Věta 10. Pro $P \neq S$ je kvartika s úsekovou vlastností vytvořena svazkem kružnic (S) , projektivním involucí

paprsků o středu (P) . Neboť podle rovnice (4) je vytvoření dáno

$$x^2 + y^2 - 2sx = \mu,$$

$$\mu\varphi_2 + \psi_2 = 0.$$

Věta 11. Pro $P \neq S$ jsou dva druhy sextik s úsekovou vlastností:

a) sextiky odpovídající korespondenci $(2, 2)$, mající v pólu P bod dvojnásobný;

b) sextiky odpovídající korespondenci (1, 4), mající v pólu bod čtyřnásobný.

Tato věta plyne z vět 2, 3. Rovnice sextik jsou:

$$a) (x^2 + y^2 - 2sx)^2 \varphi_2 + (x^2 + y^2 - 2sx) \varphi_2 + \chi_2 = 0,$$

$$b) (x^2 + y^2 - 2sx) \varphi_4 + \psi_4 = 0.$$

Do první skupiny patří kruhová konchoida jako křivka s úsekovou vlastností vzhledem k pólu P a kružnici k o poloměru r , při čemž úseky, o nichž je řeč v poznámce 1a, mají konstantní délku d . Je-li $r = s$ (pól leží na kružnici k) a $d = 2r$, rozpadá se konchoida v kardioidu a kružnici, což dává příklad dvojice algebraických křivek, jež dohromady tvoří křivku s úsekovou vlastností.

Kreslil J. Vyšín. Archiv JČMF.

*

Über eine Verallgemeinerung der Kreiskonchoide.

(Inhalt des vorgehenden Artikels.)

In der Ebene sei ein Punkt P und eine Kreislinie k (mit Mittelpunkt S) gegeben. Man sagt, daß eine Kurve Γ die Abschnittseigenschaft mit Bezug auf den Pol P und die Kreislinie k hat, wenn zu jedem ihrem (reellen) Punkte M ein Punkt M' auf dieser Kurve Γ existiert, so daß M' und M zum Mittelpunkt der Sehne, die auf der Geraden MP und in der Kreislinie k liegt, symmetrische Punkte sind.

In diesem Artikel bestimmt man alle algebraischen Kurven mit der erwähnten Abschnittseigenschaft in Fällen, wo P und S identische oder verschiedene Punkte sind. Man beweist den folgenden Satz:

Die algebraische Kurve Γ der Ordnung n mit der Abschnittseigenschaft wird erzeugt als Ort des Durchschnittspunktes des Strahles im Bündel (P) mit der Kreislinie, die den Punkt S zum Mittelpunkte hat und dem Strahle in der algebraischen Korrespondenz $\left(\frac{n-h}{2}, n-r\right)$ entspricht.

Dabei bedeuten: h die Multiplizität der Kurve Γ im Pol P und r die Zahl der Durchschnittspunkte der Kurve mit der allgemeinen Kreislinie des Bündels (S) im Kreispunkte.

Besonders im Falle, wo $P \equiv S$, sind die Kurven der dritten, vierten und sechsten Ordnung behandelt worden.

Conformal Invariants in Two Dimensions II.

Harry Levy, Urbana, Illinois.

(Received April 19, 1938.)

In a previous paper¹⁾ the author studied conformal properties of two or three curves on a surface. Here we continue that investigation obtaining a series of functions determined by a one parameter family of curves on an arbitrary surface. These functions are relative invariants under transformations of coordinates and absolute invariants under conformal transformations. In § 2 we obtain some relations between these functions; in § 3 we obtain the main theorems of this paper, necessary and sufficient conditions, expressed in terms of the invariants, that a given transformation be conformal, and that given one parameter families of curves (or given orthogonal nets) be conformally equivalent.

1. Let $\{C_1\}$ be a one parameter family of curves on a surface V and let $\{C_2\}$ be its orthogonal trajectories. We can orient the normal to any curve intrinsically by requiring that the positive normal lie on the same side of the tangent geodesic as does the curve itself.²⁾ The tangent to a curve admits of no intrinsic orientation. But for an orthogonal net we are able to orient the tangents intrinsically by parametrizing the curves of each congruence so that the positive tangents of each congruence coincides with the positive normals to the other. With this convention, the Frenet equations become

$$\begin{aligned} D_1\lambda_1^i &= k_1\lambda_2^i & D_1\lambda_2^i &= -k_1\lambda_1^i \\ D_2\lambda_1^i &= -k_2\lambda_2^i & D_2\lambda_2^i &= k_2\lambda_1^i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

where D_α represents the covariant differential operator along $\{C_\alpha\}$, and k_α is the (geodesic) curvature of $\{C_\alpha\}$.

If V' is a second surface in conformal correspondence with V , and if the correspondence is established by pairing those points

¹⁾ Conformal Invariants in Two Dimensions I, Časopis. We shall refer to this paper as I.

²⁾ Cf. I, § 4, and Hlavatý, *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*.

on the two surfaces which have equal coordinates, the fundamental tensors are related by the equations

$$g'_{ij} = \sigma g_{ij}. \quad (2)$$

Let $\lambda'_\alpha{}^i$ be the oriented unit components of the family on V' corresponding to $\{C_\alpha\}$, so that

$$\lambda'_\alpha{}^i = e_\alpha \sigma^{-1/2} \lambda_\alpha{}^i \quad (3)$$

where $\sigma^{1/2}$ is the positive square root and where e_α are each numerically equal to unity³.)

$$e_\alpha = \pm 1. \quad (4)$$

From (3) (for $\alpha = 1$) we obtain by differentiation that

$$k'_1 \lambda'_2{}^i = \sigma^{-1} (k_1 \lambda_2{}^i + \sigma_j \lambda_1{}^j \lambda_1{}^i - \sigma^i), \quad (5)$$

where $\sigma_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \log \sigma$ and from (3) itself it follows that

$$k'_1 = e_2 \sigma^{-1/2} (k_1 - \lambda_2{}^j \sigma_j) \quad (6)$$

and the analogous relation obtained from $\{C_2\}$

$$k'_2 = e_1 \sigma^{-1/2} (k_2 - \lambda_1{}^j \sigma_j). \quad (7)$$

Let us designate directional differentiation along $\{C_1\}$ and $\{C_2\}$ by the subscripts S and N respectively, so that for example

$$f_S = \lambda_1{}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad f_N = \lambda_2{}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Then equations (6) and (7) may be written

$$\begin{aligned} \sigma_S &= k_2 - e_1 \sigma^{1/2} k'_2, \\ \sigma_N &= k_1 - e_2 \sigma^{1/2} k'_1. \end{aligned} \quad (8)$$

We shall have occasion to refer to the well known integrability conditions.⁴)

$$f_{SN} - f_{NS} = k_1 f_S - k_2 f_N. \quad (9)$$

Finally we observe, if we indicate with S' and N' the corresponding differentiation in V' , that

$$f_{S'} = e_1 \sigma^{-1/2} f_S, \quad f_{N'} = e_2 \sigma^{-1/2} f_N. \quad (10)$$

If we differentiate equations (8) with respect to N and S respectively, eliminate σ_S and σ_N by means of (8) themselves

³) If we assign a (non-intrinsic) positive direction of rotation on each surface by defining the directed angle from C_1 to C_2 by $\sin \Theta = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \lambda_1{}^1 & \lambda_2{}^1 \\ \lambda_1{}^2 & \lambda_2{}^2 \end{vmatrix}$, it follows that the given correspondence is directly or inversely conformal according as $e_1 e_2 = 1$ or -1 .

⁴) Graustein, Invariant Methods in Classical Differential Geometry, Bulletin, Am. Math. Soc. 36 (1930), p. 497.

and apply the integrability conditions (9), we obtain by an immediate calculation (in which we must also use (10)) that

$$e_1 e_2 \{(k'_1)_{S'} - (k'_2)_{N'}\} = \sigma^{-1} \{(k_1)_S - (k_2)_N\}. \quad (11)$$

Since

$$g' = \sigma^2 g \quad (12)$$

there follows our previous result,⁵⁾ that

$$\sqrt{g} \{(k_1)_S - (k_2)_N\}$$

is an absolute conformal invariant for directly conformal transformations while for inversely conformal transformations

$$\sqrt{g'} \{(k'_1)_{S'} - (k'_2)_{N'}\} = -\sqrt{g} \{(k_1)_S - (k_2)_N\}.$$

If we designate by $\Delta_2 \lambda$ the invariant analogous to Beltrami's second differential parameter

$$\Delta_2 \lambda = \lambda_{i,j} g^{ij}$$

it follows that

$$k_2 = -\Delta_2 \lambda_1$$

and consequently $\sqrt{g} \{(k_1)_S - (k_2)_N\}$ is expressed explicitly in terms of the family $\{C_1\}$ alone. The above equations thus interpreted give us a conformal invariant of a single congruence (or semi-invariant, if $e_1 e_2 = -1$).

Although we shall speak throughout the remainder of this paper of the conformal invariants of an orthogonal net we must bear in mind that the invariant is determined completely by a single one parameter family of curves.

2. From the invariant of the preceeding section we can develop a sequence of invariants in the following way. Suppose F and F' , functions referred to V and V' respectively, satisfy the equations

$$F' = \sigma^{-n} F. \quad (13)$$

If we differentiate with respect to S or N , make use of (10), and eliminate the derivatives of σ by means of (8) we obtain that

$$e_1 F'_1 = \sigma^{-n-1} F_1, \quad (14)$$

$$e_2 F'_2 = \sigma^{-n-1} F_2, \quad (15)$$

where

$$F_1 = F_S - 2n F k_2, \quad F_2 = F_N - 2n F k_1$$

and F'_1 and F'_2 are the same functions of the primes.

Let us define a sequence of functions

$$f = (k_1)_S - (k_2)_N, \quad (16)$$

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_r 1} = (f_{\alpha_1 \dots \alpha_r})_S - (r+2) k_2 f_{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad (17)$$

⁵⁾ Cf. I, § 4 and the references there given to Kasner.

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_r 2} = (f_{\alpha_1 \dots \alpha_r})_N - (r+2) k_1 f_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (18)$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r = 1, 2$; $r = 0, 1, 2, \dots$ and $f'_{\alpha \dots \beta}$ is defined by (17) and (18) written with primes. Then

$$e_1^{p+1} e_2^{q+1} g^{\frac{r+2}{4}} f'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = g^{\frac{r+2}{4}} f_{\alpha_1 \dots \alpha_r}, \quad (19)$$

where p is the number of subscripts 1, q of 2 in the set $\alpha_1 \dots \alpha_r$, $p + q = r$.

From (19) we see that the functions $f_{\alpha \dots \beta}$ as thus defined are conformal invariants of the net (except possibly for sign), and therefore of a single congruence. They are not all algebraically independent. For if we express $f_{\alpha \dots \beta 12}$ and $f_{\alpha \dots \beta 21}$ in terms of $f_{\alpha \dots \beta}$ and its derivatives and make use of the integrability conditions (9) we obtain at once that

$$f_{\alpha \dots \beta 12} - f_{\alpha \dots \beta 21} = (r+2) f f_{\alpha \dots \beta}, \quad (20)$$

where r is the number of indices $\alpha \dots \beta$. Moreover from (20) itself we obtain by differentiation that

$$f_{\alpha \dots \beta 12\gamma} - f_{\alpha \dots \beta 21\gamma} = (r+2) (f f_{\alpha \dots \beta \gamma} + f_{\gamma} f_{\alpha \dots \beta}). \quad (21)$$

By induction it consequently follows

$$f_{\alpha \dots \beta} = f_{1 \dots 1 2 \dots 2} + *,$$

where $*$ represents f 's with fewer indices than appear in $f_{\alpha \dots \beta}$ and $1 \dots 1 2 \dots 2$ is a permutation of $\alpha \dots \beta$.

From (20) we observe that if all the functions $f_{\alpha \dots \beta}$ with a given number of subscripts are equal, their common value must be zero and that finally f itself must be zero. Likewise if $f_{\alpha \dots \beta 1} = 0$ and $f_{\alpha \dots \beta 2} = 0$ we obtain by applying the integrability conditions (9) that $f_{\alpha \dots \beta}$ must vanish.

3. In this section we shall seek sufficient conditions that a given point correspondence between two surfaces be conformal and that given orthogonal nets be conformally equivalent. Let us recall that in any point correspondence between two surfaces there necessarily exists on each surface an orthogonal net whose transform is also orthogonal. We shall call any such net a Tissot net of the correspondence. We can associate with a pair of corresponding Tissot nets two numbers e_1 and e_2 ($e_1^2 = e_2^2 = 1$) in the following way: let the Tissot nets be parametric on each surface and let the directions of increasing parameter on one surface be the intrinsic orientations of the tangent vectors of the net. Then on the second surface the intrinsic orientations determined by its net may differ in sign from the directions of increasing parameter. Let e_1 and e_2 indicate these differences in sign. With

this agreement the functions f and f' are completely determined; we shall proceed to prove the following theorem:

If, in a point correspondence between two surfaces, for a pair of corresponding Tissot nets

$\sqrt{g'} e_1 e_2 \{k'_1\}_{S'} - \{k'_2\}_{N'}\}$ is equal to $\sqrt{g} \{(k_1)_S - (k_2)_N\}$ the two nets are conformally equivalent.

The linear elements of the two surfaces may be written

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \quad (22)$$

and

$$ds'^2 = ET_1^2 du^2 + GT_2^2 dv^2, \quad T_1 > 0, \quad T_2 > 0. \quad (23)$$

The curvatures of the parametric curves of (22) are given by⁶⁾

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{E}, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} \quad (24)$$

so that

$$\sqrt{g'} f = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \sqrt{\frac{G}{E}}. \quad (25)$$

On the surface with fundamental form (23) we will have

$$\lambda_1^1 = \frac{e_1}{T_1 \sqrt{E}}, \quad \lambda_2^2 = \frac{e_2}{T_2 \sqrt{G}}$$

so that we obtain in place of (24) and (25)

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{-e_2}{T_2 \sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \log (T_1 \sqrt{E}), \\ k'_2 &= \frac{-e_1}{T_1 \sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \log (T_2 \sqrt{G}) \end{aligned} \quad (26)$$

and consequently

$$e_1 e_2 \sqrt{g'} f' = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left(\frac{T_2}{T_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \right). \quad (27)$$

By virtue of our hypothesis the left hand sides of (25) and (27) are equal; comparing the right hand sides it follows that

$$\log T_1 - \log T_2 = \varphi_1(u) - \varphi_2(v).$$

Consequently

$$T_1 = T_2 \frac{U}{V}$$

⁶⁾ Cf. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Pisa (1922), p. 267. When we take geodesic curvatures as necessarily positive the formulas of Bianchi are valid only if the directions of increasing direction coincide with the intrinsic directions of the net. Cf. Hlavatý, *l. c.*

where $U(V)$ is a function of $u(v)$ alone. Substituting this value of T_1 in (23) we obtain that

$$ds^2 = \frac{T_2^2}{V^2} (EU^2 du^2 + GV^2 dv^2). \quad (28)$$

Now the transformation

$$\bar{u} = \int U du, \quad \bar{v} = \int V dv$$

which represents only a change in the parametrization of the curves of the net shows that the parametric net on (28) is conformally equivalent to the given net on (22).

The linear element (28) shows that a transformation which leaves $\sqrt{g}f$ invariant (except possibly for sign) is not necessarily conformal. We are able however to obtain sufficient conditions that a transformation be conformal. The theorem follows:

If in a correspondence between two surfaces, $g^1 f$, $g_1 f_1$, and $g_1 f_2$ formed for a Tissot net on one surface are equal respectively to $e_1 e_2 g'^1 f'$, $e_2 g'^1 f'_1$, and $e_1 g'^1 f'_2$ formed for the corresponding net and if $f \neq 0$ the correspondence is conformal.

To prove this theorem it is sufficient to prove it for the linear elements given by (22) and

$$ds^2 = EU^2 du^2 + GV^2 dv^2 \quad (29)$$

(where U and V are functions of u and v alone) since the correspondence from (28) to (29) is already conformal and corresponding invariants for (28) and (29) are equal.

From (24) and (25) it follows that for the parametric net of (22) we have

$$g^1 f_1 = \left(\frac{G}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial^3 M}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{\partial M}{\partial u} \right\} \quad (30)$$

and

$$g^1 f_2 = \left(\frac{E}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial^3 M}{\partial u \partial v^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{\partial M}{\partial v} \right\}, \quad (31)$$

where

$$M = \log \sqrt{\frac{G}{E}}. \quad (32)$$

If we compute f'_1 and f'_2 for the parametric net of (29) the equations corresponding to the hypotheses of the theorem become the following

$$\frac{dU}{du} = -\sqrt{E} \frac{f_1}{f} \frac{U}{\sqrt{V}} (\sqrt{U} - \sqrt{V}) \quad (33)$$

and

$$\frac{dV}{dv} = \sqrt{G} \frac{f_2 V}{f \sqrt{U}} (\sqrt{U} - \sqrt{V}). \quad (34)$$

We shall show that functions U and V satisfying these equations are necessarily equal (and therefore constant), so that (29) is conformal to (22). If we differentiate (33) and (34) with respect to v and u respectively and eliminate the derivatives of U and V by means of (33) and (34) themselves, we obtain

$$\begin{aligned} (\sqrt{U} - \sqrt{V}) \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{E} f_1}{f} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{EG} f_1 f_2}{f^2} \right) &= 0, \\ (\sqrt{U} - \sqrt{V}) \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{G} f_2}{f} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{EG} f_1 f_2}{f^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

By expanding the second factor in each of these equations and making use of the defining equations (17) and (18) we find they are reducible to

$$2ff_{12} - 3f_1 f_2, \quad 2ff_{21} - 3f_1 f_2$$

respectively. If these quantities were zero it would follow from (20) that f would necessarily vanish. But this is contrary to our hypotheses and therefore the first factor in (35), namely $\sqrt{U} - \sqrt{V}$ must be zero.

4. It is well known that the vanishing of f is a necessary and sufficient condition that a net be isothermal.⁷⁾ In this section we propose to give some examples of nets for which $f_1 = 0$, $f \neq 0$. Let us take a linear element in the form

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 \quad (36)$$

and then it follows from (25) and (30) that

$$\sqrt{G} f_1 = R_{uv} + R_{uv} R_u, \quad (37)$$

where

$$R = \log \sqrt{G} \quad (38)$$

and where the subscripts indicate partial differentiation. If (36)

were Euclidean, $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sqrt{G}$ would be zero and it would easily follow that the vanishing of f_1 implies the vanishing of f , so that there exists no family of curves in the plane with rectilinear orthogonal trajectories and such that $f_1 = 0$, $f \neq 0$. We can however find other examples of curves for which $f_1 = 0$. We obtain from (37) that a necessary and sufficient condition is that

$$R_{uv} + R_{uv} R_u = 0. \quad (39)$$

⁷⁾ Cf. Hlavatý, l. c.

Multiply by e^R and integrate with respect to u , obtaining

$$R_{uv} = V e^{-R}, \quad V = V(v). \quad (40)$$

If we multiply (39) in turn by R_u and $\frac{1}{V} R_v$ (which is possible since the vanishing of V implies that f also is zero) we obtain

$$\frac{\partial}{\partial v} (R_u)^2 = -2 \frac{\partial}{\partial u} (e^{-R} V), \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{V} (R_v)^2 = -2 \frac{\partial}{\partial v} e^{-R}. \quad (42)$$

By making use of (40) we can integrate (41) with respect to v and (42) with respect to u obtaining

$$\begin{aligned} R_{uu} &= \frac{1}{2} U - R_u^2, & U &= U(u), \\ R_{vv} &= -\frac{1}{2} R_v^2 + R_v \frac{V'}{V} + \frac{1}{2} V V_1, & (V_1 &= V_1(v)). \end{aligned} \quad (43)$$

We can show that for any choice of the arbitrary functions U, V, V_1 , (40) and (43) are completely integrable and consequently the system (40) and (42) is equivalent to (39).

Let us now define a function $a(u)$ as a solution of

$$a'' = \frac{1}{2} (U - (a')^2) \quad (44)$$

and let us denote by $\bar{R}$

$$\bar{R} = R - a. \quad (45)$$

The first of (43) then becomes

$$\bar{R}_{uu} = -\frac{1}{2} \bar{R}_u^2 - \bar{R}_u a'. \quad (46)$$

Since $\bar{R}_u$ cannot be zero we obtain by one integration that

$$e^{\frac{1}{2} \bar{R}} \bar{R}_u = 2e^{\frac{1}{2} \alpha - a}$$

and integrating a second time it follows that

$$\bar{R} = \alpha + 2 \log \left\{ \int e^{-a} du + \beta \right\}, \quad (47)$$

where α and β are arbitrary functions of v . Returning to (40) and the second of (43) we find that for R to be a solution the arbitrary functions already introduced must satisfy the following conditions

$$V = -2e^{\alpha} \beta', \quad (48)$$

$$\alpha'' + \frac{1}{2} (\alpha')^2 - \frac{V'}{V} \alpha' - \frac{1}{2} V V_1 = 0. \quad (49)$$

Finally since $G = e^{2R}$, it follows that

$$G = e^{2(\alpha+a)} (\int e^{-a} du + \beta)^4.$$

Conversely if we select arbitrary functions $\alpha(v)$, $\beta(v)$, and $a(u)$ (subject to the restriction that $\beta' \neq 0$) and if we define V by (48) it follows that $f_1 = 0$, $f \neq 0$. If we introduce new parameters along the net by the transformation $\bar{u} = \int e^{-a} du$, $\bar{v} = \int e^a dv$ we obtain the canonical form

$$ds^2 = du^2 + (u + \beta)^4 dv^2.$$

The invariant f_1 consequently vanishes for the parametric curves of the linear element

$$ds^2 = \frac{1}{1 + (u + \beta)^4} (du^2 + (u + \beta)^4 dv^2). \quad (50)$$

But here the parametric curves are the bisectors of a net of Tchebychef in which the angle ω of the net is given by⁸⁾

$$\tan \frac{1}{2}\omega = (u + \beta)^2.$$

We can find an example of such a net in the plane by requiring (50) to have zero Gaussian curvature. One solution is $\beta = v$; then one family of the net of Tchebychef consists of parallel straight lines and the other family is generated by the curves whose parametric equations referred to Cartesian coordinates is⁹⁾

$$x = \int \frac{1 + 16\alpha^4}{1 - 16\alpha^4} d\alpha \quad y = \int \frac{8\alpha^2}{1 + 16\alpha^4} d\alpha.$$

More generally we can show by direct computation, the following: let a net of Tchebychef in the plane be generated by a straight line l and a curve C ; its bisectors form an orthogonal net for which $f_1 = 0$ if and only if the angle ω between C and the lines parallel to l satisfies the equation

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \sin \omega (a + a \cos \omega + b \sin \omega),$$

where a , b are arbitrary constants and s is the arc of C .

As a last example we consider a net for which $f_1 \dots f_m = 0$, where the number of indices is m . If the linear element referred to the net is $E du^2 + G dv^2$ then $f_1 \dots f_m$ will still be zero for the parametric net on a surface with linear element $\frac{E}{G} du^2 + dv^2$.

⁸⁾ Cf. Bianchi, l. c., p. 153.

⁹⁾ Cf. Bianchi, l. c., p. 161.

But here the curves $du = 0$ are geodesics, and therefore $k_2 = 0$; then $f_1 \dots_1 = 0$ becomes $(k_1)_{ss \dots s} = 0$ so that a net for which $f_1 \dots_1$ (m indices) vanishes is equivalent to a net of geodesics and their geodesic parallels in which the latter have curvature whose $(m + 1)^{th}$ derivative is zero.

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., and University of Illinois, Urbana, Illinois.

*

Konformní invarianty ve dvou dimensích II.

(Obsah předešlého článku.)

Autor rozšiřuje výsledky předešlé práce (stejně pojmenované) na studium konformních invariantů kongruencí křivek na plochách. Nalézá systém hustot, jež jsou absolutními konformními invarianty, udává jejich vzájemné vztahy a používá jich k řešení problému konformní ekvivalence kongruencí.

*

Konforminvarianten in zwei Dimensionen II.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Der Verfasser verallgemeinert die Resultate seiner vorigen gleich benannten Arbeit auf die Konforminvarianten der Kongruenzkurven auf einer Fläche. Er findet ein System von Dichten auf, welche absolute Konforminvarianten sind, untersucht ihre gegenseitige Beziehungen und benützt die erhaltenen Resultate, um das Problem der Äquivalenz von zwei Kongruenzen zu lösen.

Sur le nombre des racines et des facteurs irréductibles d'une congruence donnée.

Štefan Schwarz, Praha.

Publié avec le concours de la Fondation Masaryk du Conseil national des recherches.

(Reçu le 1 décembre 1938.)

Soit

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

une congruence de degré n , à coefficients entiers, ayant un discriminant $D \not\equiv 0 \pmod{p}$. p soit un nombre premier.

On entend sous une racine x_i de la congruence (1) un nombre entier pour lequel la congruence (1) est vérifiée. Par j_i ($i = 1, \dots, n$) nous désignons les imaginaires de Galois [c'est-à-dire les solutions imaginaires de la congruence (1)], qui sont toutes contenues dans une extension convenable du corps des restes $(\text{mod } p)$.¹⁾

Posons la question quel est le nombre des racines de la congruence (1). Notre but est de déterminer ce nombre en fonction des coefficients de (1), ou en fonction des expressions, qui sont étroitement liées aux coefficients.

Beaucoup d'auteurs se sont occupés de ce problème, mais la plupart des travaux se rattache aux diverses congruences spécialisées.²⁾

Quant aux considérations générales les résultats peuvent être partagés en deux groupes. Le premier groupe se rapporte aux travaux des M. M. König, Rados, Kronecker et Gegenbauer et son résultat principal est le théorème suivant: La congruence

$$f(x) = a_0x^{p-2} + a_1x^{p-1} + \dots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p} \quad (a)$$

¹⁾ On peut se borner à la plus petite extension dans laquelle le polynôme $f(x)$ se décompose totalement $(\text{mod } p)$.

²⁾ On trouve une liste complète de tous ces travaux dans le livre bien connu L. E. Dickson: History of the Theory of Numbers, New York 1934, Vol. I., p. 224—233.

³⁾ On doit se rendre compte qu'on peut écrire chaque congruence, avec $p-2 > n$ dans la forme (a) pourvu qu'on pose quelques a_k ($k = 0, 1, \dots$) égaux à zéro. Si $n > p-2$ on peut au moyen de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, qui a lieu pour chaque racine de (a), réduire le degré n au degré $p-2$.

[avec un discriminant $D \not\equiv 0 \pmod{p}$] a précisément $s \pmod{p}$ différentes racines, si le rang de la matrice cyclique de l'ordre $(p-1)$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{p-2} & a_0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & a_1 & \dots & a_{p-4} & a_{p-3} \end{pmatrix}$$

est $p-1-s$.⁴⁾

Une seconde formule a été donnée par A. Hurwitz⁵⁾ par une méthode, qui est tout-à fait différente des méthodes du premier groupe. Le nombre r_1 des racines de la congruence

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \equiv 0 \pmod{p}$$

est donné par la relation

$$r_1 + 1 \equiv (p-1)! \cdot \sum \frac{a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1}}{\alpha_0! \alpha_1!} \dots \frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \pmod{p}, \quad (b)$$

la somme étant étendue à toutes les solutions non négatives de

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= p-1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n &\equiv 0 \pmod{p-1}. \end{aligned}$$

Ce théorème a été de même généralisé par M. Dickson⁷⁾ et Cipolla.⁸⁾

Je donne une solution nouvelle du problème posé et je résous un problème plus général, c'est-à-dire, je donne des formules pour le nombre des facteurs du seconde, troisième etc. degré de la congruence (1). À la fin nous ferons voir l'importance des résultats obtenus en traitant quelques applications.

1. La formule pour le nombre des racines de la congruence (1).

Nous partons du théorème suivant de M. K. Petr.⁹⁾

Construisons au moyen de la congruence (1) — en l'élevant successivement aux puissances diverses — les expressions

$$x^{kp} \equiv c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + \dots + c_{k,n-1}x^{n-1} \pmod{p} \quad (2)$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

⁴⁾ On trouve la démonstration de ce théorème dans les travaux cités chez Dickson et surtout dans les: „Vorlesungen über Zahlentheorie“ de Kronecker (éd. par K. Hensel, 1901) p. 388—415.

⁵⁾ A. Hurwitz: Archiv Math. Phys. (3), 5, 1903, 17—27.

⁶⁾ D'après le théorème de Wilson on peut écrire — 1 au lieu de $(p-1)!$ La congruence (1) a au plus n racines. La formule (b) nous donne la classe $\pmod{p}$ dans laquelle se trouve r_1 ; donc, si $p > n$ la détermination de r_1 par (b) est unique.

⁷⁾ Bull. Amer. Math. Soc. 14, 1907—8, p. 313.

⁸⁾ Periodico di Mat., 22, 1907, p. 36—41.

⁹⁾ K. Petr, Časopis 66, (1937), p. 85—94.

Si le polynôme $f(x)$ possède (mod p) une décomposition en m facteurs irréductibles des degrés $l_1, l_2, \dots, l_m$, l'équation caractéristique de la matrice $(c_{i,k})$ peut être écrite sous la forme

$$(-1)^n \cdot (\lambda^{l_1} - 1) \dots (\lambda^{l_m} - 1),$$

c'est-à-dire, il est

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} - \lambda & c_{0,1} & \dots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} - \lambda & \dots & c_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} - \lambda \end{vmatrix} \equiv (-1)^n \cdot (\lambda^{l_1} - 1) \dots (\lambda^{l_m} - 1) \pmod{p}. \quad (3)$$

On voit aisément que sous la condition $p > n$ (mais aussi pour quelques autres cas) la décomposition à droite est déterminée d'une manière unique, c'est-à-dire, il n'existe pas deux décompositions de la forme $\prod_i (\lambda^{q_i} - 1)^{r_i}$ et $\prod_i (\lambda^{q'_i} - 1)^{r'_i}$, sauf le cas $q_i = q'_i$ et $r_i = r'_i$.¹⁰⁾

Nous démontrerons tout d'abord

Lemme 1. *Le nombre des racines de la congruence (1) est donné par la relation*

$$r_1 \equiv c_{0,0} + c_{1,1} + \dots + c_{n-1,n-1} \pmod{p}. \quad (4)$$

Démonstration. Soit r_k le nombre des facteurs irréductibles (mod p) du degré k . On peut alors mettre la décomposition de (3) sous la forme

$$(-1)^n \cdot (\lambda - 1)^{r_1} \cdot (\lambda^2 - 1)^{r_2} \cdot (\lambda^3 - 1)^{r_3} \dots, \quad (4')$$

$$\text{où} \quad r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \dots = n. \quad (4'')$$

Le coefficient de λ^{n-1} dans le déterminant de (3) est

$$(-1)^{n-1} \cdot (c_{0,0} + c_{1,1} + \dots + c_{n-1,n-1}).$$

De la décomposition (4'), qui peut être mise sous la forme

$$(-1)^n \left\{ \lambda^{r_1} - \binom{r_1}{1} \lambda^{r_1-1} + \dots \right\} (\lambda^2 - 1)^{r_2} \cdot (\lambda^3 - 1)^{r_3} \dots,$$

on obtient pour le coefficient de $\lambda^{n-1} = \lambda^{(r_1-1)+2r_2+3r_3+\dots}$ la valeur

$$(-1)^n \cdot - \binom{r_1}{1}.$$

Alors

$$(-1)^{n-1} \cdot (c_{0,0} + c_{1,1} + \dots + c_{n-1,n-1}) \equiv (-1)^n \cdot - \binom{r_1}{1} \pmod{p},$$

d'où la congruence (4) résulte.

¹⁰⁾ Voir d'ailleurs l. c.⁹⁾. Un exemple: pour $n = p$ il est $(\lambda^p - 1) \equiv (\lambda - 1)^p \pmod{p}$, pour $p = n - 1$ on a $(\lambda - 1)^n \equiv (\lambda^{n-1} - 1)(\lambda - 1)$ etc.; mais pour $p > n$ cela est impossible. Je rappelle que même dans les cas, où il existe plusieurs décompositions on peut donner au produit envisagé toujours la forme de (3).

Il nous faut alors trouver les expressions $c_{k,k}$ dans la relation (4).

Lemme 2. Soit (1) la congruence donnée. Soient s_k ($k=0, 1, 2, \dots$) les sommes des puissances k -ièmes des solutions imaginaires de (1).¹¹⁾ Soit $m > n$. Construisons au moyen de la congruence (1) — en l'élevant successivement aux puissances $(n+1), (n+2) \dots$ et en réduisant les puissances $> (n-1)$ à l'aide de (1) — l'expression

$$x^m \equiv c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} \pmod{p}. \quad (5)$$

La congruence que nous avons ainsi obtenue

$$x^m - c_{n-1} x^{n-1} - c_{n-2} x^{n-2} - \dots - c_0 \equiv 0 \pmod{p} \quad (6)$$

est de la forme

$$\frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_m & s_{m+1} & \dots & s_{m+n-1} & x^m \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (7)$$

Le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{0,0} & s_{0,1} & \dots & s_{0,n-1} \\ s_{1,0} & s_{1,1} & \dots & s_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1,0} & s_{n-1,1} & \dots & s_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

est le discriminant de la congruence (1).

Démonstration. La congruence (5) resp. (6) est déterminée par la congruence (1) d'une manière unique. C'est une congruence de degré m à coefficients entiers, dans laquelle les coefficients de $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots, x^n$ sont égaux à zéro et qui est vérifiée (dans un élargissement convenable) par toutes les solutions de la congruence (1) de degré n . Il n'existe qu'une seule congruence de ce genre. Soient en effet dans la congruence (6), qui est de la forme considérée, les coefficients c_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) des grandeurs inconnues. La condition que (6) soit vérifiée par toutes les imaginaires de Galois j_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) donne n congruences linéaires pour c_i .

$$c_0 + c_1 j_i + c_2 j_i^2 + \dots + c_{n-1} j_i^{n-1} \equiv j_i^m \pmod{p} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et en vertu de la supposition $D \not\equiv 0 \pmod{p}$ ce système a une solution et une seule. Pour démontrer alors que (6) et (7)

¹¹⁾ Il est alors $s_k \equiv j_1^k + j_2^k + \dots + j_n^k \pmod{p}$. On sait que c'est un nombre entier.

sont identiques, il suffit de démontrer que chaque solution j_i ($i = 0, \dots, n-1$) de (1) vérifie la congruence (7). Il résulte d'abord de la congruence (5) pour les sommes s_k prises de la congruence (1)

$$s_{m+k} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_{i+k} \pmod{p} \quad (8)$$

pour chaque $k \geq 0$. Posons dans (7) $x = j_i$ ($1 \leq i \leq n$). En multipliant la première ligne par c_0 , la seconde par c_1 , etc. et en soustrayant de la dernière, on obtient — en vue de (5) et (8) — sur toutes les places dans la dernière ligne des zéros et alors (7) est égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 1. *Le nombre des racines de la congruence (1) vérifie la relation*

$$r_1 \equiv \frac{1}{D} (D^{(0)} + D^{(1)} + \dots + D^{(n-1)}) \pmod{p}, \quad (9)$$

où l'on obtient $D^{(k)}$ du discriminant D , si l'on y remplace les éléments de la $(k+1)$ -ième ligne ($k = 0, \dots, n-1$) par les expressions $s_{kp}, s_{kp+1}, \dots, s_{kp+n-1}$,¹²⁾ c'est à dire¹³⁾

$$D^{(k)} \equiv \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+n-2} \\ s_{kp} & s_{kp+1} & s_{kp+2} & \dots & s_{kp+n-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & s_{k+3} & \dots & s_{k+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \pmod{p}.$$

Démonstration. Si l'on pose dans (7) $m = kp$ on obtient d'après le lemme 2 la relation (2). Le coefficient de x^k est

$$\begin{aligned} c_{k,k} &\equiv -(-1)^{n-1+k+1} \cdot \frac{1}{D} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \dots & s_{k+n-2} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{kp} & s_{kp+1} & \dots & s_{kp+n-1} \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv (-1)^{n+k+1} \cdot \frac{1}{D} \cdot D_k \cdot (-1)^{n-1-k} \equiv \frac{D_k}{D} \pmod{p}. \end{aligned}$$

En substituant cela en (4) on obtient la formule cherchée (9).

¹²⁾ On trouve aisément $s_{kp} \equiv s_k \pmod{p}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Cela vient du fait bien connu, que j_i^p est, en même temps que j_i , une solution de (1).

¹³⁾ Dans notre notation $D^{(0)} = D$.

Remarques. 1. Pour $p > n$, la formule (9), comme nous l'avons remarqué sub 6), détermine le nombre r_1 d'une manière unique.

2. Si l'on désigne par $D_{i,k}$ le mineur de D relatif à l'élément $s_{i,k}$, on peut écrire (9) dans une forme plus simple

$$r_1 \equiv \frac{1}{D} \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ l=0,1,\dots,n-1}} s_{pk+l} D_{k,l} \pmod{p}. \quad (9')$$

2. Une autre démonstration de la formule (9).

On peut vérifier maintenant la formule (9) d'une manière formelle plus simple. Nous nous servirons plusieurs fois de cette méthode dans ce qui suit.

Multiplions la relation (2) $x^{kp} \equiv \sum_{v=0}^{n-1} c_{k,v} x^v \pmod{p}$ par x^l ; par l'addition des n relations de cette forme, où l'on pose successivement $x = j_1, j_2, \dots, j_n$, on obtient

$$s_{kp+l} \equiv \sum_{v=0}^{n-1} c_{k,v} s_{v+l} \quad (k, l = 0, 1, \dots, n-1). \quad (10)$$

On a

$$D^{(k)} \equiv \begin{vmatrix} \dots & s_l & \dots & \dots \\ \dots & s_{l+1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & s_{kp+l} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & s_{l+n-1} & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \dots & s_l & \dots & \dots \\ \dots & s_{l+1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \sum_{v=0}^{n-1} c_{k,v} s_{v+l} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & s_{l+n-1} & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Si nous soustrayons de la $(k+1)$ -ième ligne, la ligne $(i+1)$ -ième multipliée par $c_{k,i}$, pour tous les $i \neq k$ le dernier déterminant se réduit à $c_{k,k} \cdot D$. Alors $D^{(k)} = c_{k,k} \cdot D$ et l'on obtient à l'aide de (4) la formule (9).

3. La seconde formule pour le nombre des racines de la congruence (1).

Outre le discriminant $D = |s_{i-1+k-1}| \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n \end{matrix}$ considérons le déterminant $d = |s_{(i-1)p+k-1}| \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, n \end{matrix}$, c'est-à-dire

$$d = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \dots & s_{p+n-1} \\ s_{2p} & s_{2p+1} & s_{2p+2} & \dots & s_{2p+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{(n-1)p} & s_{(n-1)p+1} & s_{(n-1)p+2} & \dots & s_{(n-1)p+n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d est en relation étroite avec le discriminant D .
Il est en effet

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots, & s_{n-1}, \\ s_p, & s_{p+1}, & \dots, & s_{p+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{(n-1)p}, & s_{(n-1)p+1}, & \dots, & s_{(n-1)p+n-1} \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_1^{n-1}, & j_2^{n-1}, & \dots, & j_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, \\ j_1^p, & j_2^p, & \dots, & j_n^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_1^{(n-1)p}, & j_2^{(n-1)p}, & \dots, & j_n^{(n-1)p} \end{vmatrix} \\ &\equiv \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1, \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_1^{n-1}, & j_2^{n-1}, & \dots, & j_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j_1^{n-1}, & j_2^{n-1}, & \dots, & j_n^{n-1} \end{vmatrix}^p \equiv \\ &\equiv |j_k^{i-1}|^{p+1} \equiv D^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Pour obtenir la formule cherchée il nous faut comparer les coefficients de λ dans la relation (3).

On voit que dans l'expression

$$\begin{aligned} &(-1)^n (\lambda - 1)^{r_1} \cdot (\lambda^2 - 1)^{r_2} (\lambda^3 - 1)^{r_3} \dots = \\ &= (-1)^n \left\{ \lambda^{r_1} - \binom{r_1}{1} \lambda^{r_1-1} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{r_1-1} \binom{r_1}{1} \lambda + (-1)^{r_1} \right\} (\lambda^2 - 1)^{r_2} \dots \end{aligned}$$

le coefficient de λ est égal au nombre

$$\begin{aligned} &(-1)^n \cdot (-1)^{r_1-1} \binom{r_1}{1} \cdot (-1)^{r_2+r_3+\dots} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot r_1 \cdot (-1)^{r_1+r_2+\dots} = (-1)^{n+v+1} \cdot r_1, \end{aligned}$$

si l'on désigne par v le nombre de tous les facteurs irréductibles de $f(x) \pmod{p}$.

Le coefficient de λ dans le déterminant à gauche de la relation (3) est donné par la somme négative de n mineurs princi-

paux de l'ordre $n - 1$, c'est-à-dire — si l'on désigne par $C_{i,k}$ le mineur de la matrice $(c_{i,k})$ relatif à l'élément $c_{i,k}$ —

$$-(C_{0,0} + C_{1,1} + \dots + C_{n-1,n-1}).$$

Alors

$$(-1)^{n+v} \cdot r_1 \equiv C_{0,0} + C_{1,1} + \dots + C_{n-1,n-1} \pmod{p}. \quad (12)$$

Les nombres $C_{i,i}$ sont de nouveau en relation étroite avec d resp. D . Soit $d^{(k)}$ le déterminant formé du déterminant d , si l'on y remplace les éléments de la $(k + 1)$ -ième ligne par les éléments $s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+n-1}$. D'après la formule (10) on a

$$d^{(k)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots, & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p(k-1)}, & s_{p(k-1)+1}, & \dots, & s_{p(k-1)+n-1} \\ s_k, & s_{k+1}, & \dots, & s_{k+n-1} \\ s_{p(k+1)}, & s_{p(k+1)+1}, & \dots, & s_{p(k+1)+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{pn}, & s_{pn+1}, & \dots, & s_{pn+n-1} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \sum_{v=0}^{n-1} c_{0,v} s_v, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{0,v} s_{v+1}, & \dots, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{0,v} s_{v+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{v=0}^{n-1} c_{k-1,v} s_v, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{k-1,v} s_{v+1}, & \dots, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{k-1,v} s_{v+n-1} \\ s_k, & s_{k+1}, & \dots, & s_{k+n-1} \\ \sum_{v=0}^{n-1} c_{k+1,v} s_v, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{k+1,v} s_{v+1}, & \dots, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{k+1,v} s_{v+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{v=0}^{n-1} c_{n-1,v} s_v, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{n-1,v} s_{v+1}, & \dots, & \sum_{v=0}^{n-1} c_{n-1,v} s_{v+n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir la relation énoncée on doit soustraire de la ligne $(i + 1)$ -ième la ligne $(k + 1)$ -ième multipliée par $c_{i,k}$ (pour tous les $i \neq k$). Développons le déterminant ainsi transformé suivant les éléments de la $(k + 1)$ -ième ligne. On a

$$s_k \cdot S_{k,0} + s_{k+1} S_{k,1} + \dots + s_{k+n-1} S_{k,n-1},$$

où $S_{k,l}$ désigne le mineur du déterminant considéré relatif à l'élément s_{k+l} . Mais chaque $S_{k,l}$ est un produit de deux déterminants: du déterminant $C_{k,k}$ et du déterminant $D_{k,l}$ (mineur du déterminant D relatif à l'élément $s_{k,l}$). Alors

$$d_k \equiv s_k S_{k,0} + \dots + s_{k+n-1} S_{k,n-1} \equiv C_{k,k} (s_k D_{k,0} + s_{k+1} D_{k,1} + \dots + s_{k+n-1} D_{k,n}) \equiv C_{k,k} \cdot D \pmod{p}.$$

En substituant cette expression dans (12) on a enfin:

Théorème 2. *Le nombre des racines de la congruence (1) r_1 et le nombre de tous les facteurs irréductibles v sont liés par la relation*

$$r_1 \equiv (-1)^{n+v} \frac{1}{D} (d^{(0)} + d^{(1)} + \dots + d^{(n-1)}) \pmod{p}, \quad (13)$$

où D est le discriminant de (1) et $d^{(k)}$ est le déterminant formé de d si l'on y remplace les éléments de la $(k+1)$ -ième ligne par $s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+n-1}$.

Remarque. Soit $d_{k,l}$ le mineur de d relatif à l'élément s_{k+l} ; avec cette notation on peut écrire (13) sous la forme plus simple

$$r_1 \equiv (-1)^{n+v} \frac{1}{D} \cdot \sum_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ l=0,1,\dots,n-1}} s_{k+l} d_{k,l} \pmod{p}.$$

4. Les coefficients du polynôme (4').

On voit maintenant la voie, qui nous rend possible de calculer les nombres $r_2, r_3, \dots$ etc. Il nous faut déterminer d'abord les coefficients du polynôme (4').

Soit

$$(-1)^n \cdot (\lambda - 1)^{r_1} (\lambda^2 - 1)^{r_2} \dots = \tau_n \lambda^n + \tau_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots \quad (14)$$

$$\dots + \tau_1 \lambda + \tau_0.$$

Il est

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \dots = n.$$

Dans 1 et 3 nous avons trouvé

$$\tau_{n-1} = (-1)^{n+1} \binom{r_1}{1}, \quad \tau_1 = (-1)^{n+v+1} \binom{r_1}{1}.$$

Pour trouver τ_2 écrivons (14) sous la forme

$$(-1)^n \left\{ \lambda^{r_1} - \dots + (-1)^{r_1-1} \binom{r_1}{1} \lambda + (-1)^{r_1} \right\} \cdot \left\{ \lambda^{2r_2} - \dots + (-1)^{r_2-1} \binom{r_2}{1} \lambda^2 + (-1)^{r_2} \right\} (\lambda^3 - 1)^{r_3} \dots$$

et il s'ensuit

$$\tau_2 = (-1)^{n+r_2+r_3+\dots} \left\{ (-1)^{r_1-2} \binom{r_1}{2} (-1)^{r_1} + (-1)^{r_1} \cdot (-1)^{r_2-1} \binom{r_2}{1} \right\} = (-1)^{n+v} \cdot \left\{ -\binom{r_2}{1} + \binom{r_1}{2} \right\}.$$

D'une manière analogue on obtient

$$\begin{aligned}\tau_3 &= (-1)^{n+v} \left\{ -\binom{r_3}{1} + \binom{r_2}{1} \binom{r_1}{1} - \binom{r_1}{3} \right\}, \\ \tau_4 &= (-1)^{n+v} \left\{ -\binom{r_4}{1} + \binom{r_3}{1} \binom{r_1}{1} + \binom{r_2}{2} + \binom{r_1}{4} \right\}\end{aligned}$$

et par l'induction

$$\tau_k = (-1)^{n+v} \sum (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_l} \binom{r_{i_1}}{k_1} \binom{r_{i_2}}{k_2} \dots \binom{r_{i_l}}{k_l},$$

la somme se rapportant à toutes les solutions entières, non-négatives de l'équation $i_1 k_1 + i_2 k_2 + \dots + i_l k_l = k$, où $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \dots$

Le polynôme (4') est évidemment réciproque, par conséquent, il en résulte immédiatement la relation

$$\tau_{n-k} = (-1)^v \tau_k \text{ (pour chaque } k = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

5. Détermination du nombre des facteurs irréductibles du second degré de la congruence (1).

Le coefficient de λ^2 dans le polynôme (4') est

$$\tau_2 = (-1)^{n+v} \cdot \left\{ -\binom{r_2}{1} + \binom{r_1}{2} \right\}. \quad (15')$$

D'après (15) le coefficient de λ^{n-2} est

$$\tau_{n-2} = (-1)^v \tau_2 = (-1)^n \cdot \left\{ -\binom{r_2}{1} + \binom{r_1}{2} \right\}.$$

Nous obtiendrons comme précédemment deux formules.

a)

Dans le déterminant caractéristique (3) le coefficient de λ^{n-2} est égal à la somme de tous les mineurs principaux du seconde degré, qui sont au nombre $\binom{n}{2}$, alors

$$\tau_{n-2} \equiv (-1)^{n-2} \sum_{\substack{i=0, \dots, n-2 \\ k=1, \dots, n-1 \\ i < k}} \begin{vmatrix} c_{i,i} & c_{i,k} \\ c_{k,i} & c_{k,k} \end{vmatrix} \pmod{p}. \quad (16)$$

Mais on peut exprimer, comme précédemment, ces déterminants à l'aide du discriminant D . Soit $D^{(i,k)}$ le déterminant formé de D si l'on y remplace les éléments de la $(i+1)$ -ième ligne par les nombres $s_{ip}, s_{ip+1}, \dots, s_{ip+n-1}$ et les éléments de la $(k+1)$ -ième ligne par $s_{kp}, s_{kp+1}, \dots, s_{kp+n-1}$. On a

$$D^{(i,k)} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{ip} & s_{ip+1} & \dots & s_{ip+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{kp} & s_{kp+1} & \dots & s_{kp+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Remplaçons les éléments $s_{ip}, \dots, s_{kp}, \dots$, par les sommes (10). Multiplions dans le déterminant ainsi obtenu la première ligne par $c_{i,0}$, la seconde par $c_{i,1}$ etc. [excepté la ligne $(i+1)$ -ième et $(k+1)$ -ième] et soustrayons de la ligne $(i+1)$ -ième, puis multiplions la première ligne par $c_{k,0}$, la deuxième par $c_{k,1}$ etc. et soustrayons de la ligne $(k+1)$ -ième.

Nous développons maintenant ce nouveau déterminant d'après la règle de Laplace, suivant les lignes $(i+1)$ -ième et $(k+1)$ -ième. On a

$$D^{(i,k)} \equiv \sum \begin{vmatrix} c_{i,i}s_l + c_{i,k}s_q & c_{i,i}s_r + c_{i,k}s_t \\ c_{k,i}s_l + c_{k,k}s_q & c_{k,i}s_r + c_{k,k}s_t \end{vmatrix} \cdot S_{(r,t)}^{(l,q)},$$

où $S_{(r,t)}^{(l,q)}$ est le sous-déterminant complémentaire de $\begin{vmatrix} s_l & s_q \\ s_r & s_t \end{vmatrix}$ dans D .

$$D^{(i,k)} \equiv \begin{vmatrix} c_{i,i} & c_{i,k} \\ c_{k,i} & c_{k,k} \end{vmatrix} \cdot \sum \begin{vmatrix} s_l & s_q \\ s_r & s_t \end{vmatrix} \cdot S_{(r,t)}^{(l,q)} \equiv \begin{vmatrix} c_{i,i} & c_{i,k} \\ c_{k,i} & c_{k,k} \end{vmatrix} \cdot D.$$

D'après (16)

$$\tau_{n-2} \equiv (-1)^{n-2} \sum_{\substack{i=0, \dots, n-2 \\ k=1, \dots, n-1 \\ i < k}} \frac{D^{(i,k)}}{D} \equiv (-1)^n \left\{ -\binom{r_2}{1} + \binom{r_1}{2} \right\} \pmod{p}.$$

Enfin nous obtenons

Théorème 3. *Le nombre des facteurs irréductibles du second degré de la congruence (1) r_2 est donné par la formule*

$$-r_2 + \binom{r_1}{2} \equiv \frac{1}{D} \sum_{\substack{i=0, \dots, n-2 \\ k=1, \dots, n-2 \\ i < k}} D^{(i,k)} \pmod{p},$$

où r_1 est le nombre des facteurs linéaires, D le discriminant de la congruence donnée et la somme se rapporte à $\binom{n}{2}$ déterminants $D^{(i,k)}$ de la forme (17).

b)

Dans le déterminant caractéristique (3) le coefficient de λ^2 est égal à la somme de tous les mineurs principaux de la matrice

$(c_{i,k})$ de degré $n - 2$. On détermine ces sous-déterminants de la manière suivante. Attribuons à la lettre $d^{(i,k)}$ une signification analogue à celle de $D^{(i,k)}$, c'est à dire $d^{(i,k)}$ soit le déterminant formé de d , si l'on y remplace les éléments de la $(i + 1)$ -ième ligne par $s_i, s_{i+1}, \dots$ et les éléments de la $(k + 1)$ -ième ligne par $s_k, s_{k+1}, \dots$. Nous portons les valeurs correspondantes d'après la formule (10) dans toutes les lignes du déterminant $d^{(i,k)}$ excepté les lignes $(i + 1)$ -ième et $(k + 1)$ -ième. Puis nous soustrayons des autres lignes un multiple convenable des lignes $(i + 1)$ -ième et $(k + 1)$ -ième. On peut écrire le déterminant, qu'on obtient ainsi, comme produit de deux déterminants, du discriminant D et du sous-déterminant principal d'ordre $n - 2$, qui est complémentaire au sous-déterminant $\begin{vmatrix} c_{i,i} & c_{i,k} \\ c_{k,i} & c_{k,k} \end{vmatrix}$ du déterminant $|c_{i,k}|$. Le coefficient de λ^2 est alors

$$\frac{1}{D} \sum_{\substack{i=0, \dots, n-2 \\ k=1, \dots, n-1 \\ i < k}} d^{(i,k)}.$$

Tenant compte de (15') on a

Théorème 4. *Le nombre des facteurs irréductibles de la congruence (1) v , le nombre des facteurs linéaires r_1 et le nombre des facteurs du seconde degré r_2 sont liés par la relation*

$$-r_2 + \binom{r_1}{2} \equiv (-1)^{n+v} \cdot \frac{1}{D} \sum d^{(i,k)} \pmod{p},$$

où la somme se rapporte à toutes les $\binom{n}{2}$ combinaisons des i, k ($i \neq k$).

6. Le résultat général.

Il est maintenant facile de généraliser les résultats que nous avons obtenus. Tenant compte des résultats de 4 on peut énoncer le

Théorème 5. *Soit k un nombre entier, $0 < k \leq n$; soit r_κ ($\kappa = 1, 2, \dots, n$) le nombre des facteurs irréductibles de la congruence (1) de degré κ . Soit v le nombre de tous les facteurs irréductibles. Désignons par $D^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}$ le déterminant formé du discriminant D , si l'on y remplace les lignes $(\lambda_1 + 1)$ -ième, $(\lambda_2 + 1)$ -ième, $\dots$, $(\lambda_k + 1)$ -ième par les éléments $s_{\lambda_1 p}, s_{\lambda_1 p + 1}, \dots, s_{\lambda_1 p + n - 1}$, etc. Par analogie désignons par $d^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}$ le déterminant formé de d , si l'on y remplace les lignes $(\lambda_1 + 1)$ -ième etc. par les éléments $s_{\lambda_1}, s_{\lambda_1 + 1}, \dots, s_{\lambda_1 + n - 1}$ etc.*

Entre les grandeurs ainsi définies les relations suivantes ont lieu

$$\sum_{\substack{i_1 k_1 + \dots + i_l k_l = k \\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \dots}} (-1)^{k_1 + \dots + k_l} \binom{r_{i_1}}{k_1} \dots \binom{r_{i_l}}{k_l} \equiv (-1)^k \cdot \frac{1}{D} \cdot \sum D^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} \pmod{p}, \quad (18)$$

$$\sum_{\substack{i_1 k_1 + \dots + i_l k_l = k \\ i_1 + i_2 + \dots + i_l = l}} (-1)^{k_1 + \dots + k_l} \binom{r_{i_1}}{k_1} \dots \binom{r_{i_l}}{k_l} \equiv (-1)^{n+v+k} \cdot \frac{1}{D} \sum_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} d^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} \pmod{p}, \quad (19)$$

où la somme à droite se rapporte à toutes les $\binom{n}{k}$ combinaisons de la k -ième classe des nombres $1, 2, \dots, n$.

Les formules (18), (19) peuvent être considérées comme des relations récurrentes; en effet, si l'on y pose $k = 1, 2, 3, \dots$, on détermine successivement $r_1, r_2, r_3, \dots$.

Applications.

a) La congruence quadratique.

Soit $x^2 + ax + b \equiv 0 \pmod{p}$ la congruence donnée.

D'après (9) on a pour le nombre des racines

$$r_1 \equiv \frac{1}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_p & s_{p+1} \end{vmatrix} \right\} \pmod{p}.$$

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 1 + \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_p & s_{p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}} \equiv 1 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1^p & j_2^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}^2} \equiv 1 + \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}^p}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}} \equiv \\ &\equiv 1 + \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \right|^{p-1} \pmod{p}.^{14)} \end{aligned}$$

Donc, pour $p > 2$: $r_1 \equiv 1 + D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 + \left(\frac{D}{p}\right) \pmod{p}$.

Pour $p = 2$: $r_1 \equiv 1 + j_2 - j_1 \equiv 1 + j_1 + j_2 \equiv 1 + a \pmod{2}$.¹⁵⁾

C'est un résultat bien connu.

Théorème 6. La congruence $x^2 + ax + b \equiv 0 \pmod{p}$, $p > 2$ a deux ou n'a aucune racine suivant qu'il est $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$ ou $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$,

où D est le discriminant de la congruence donnée et $\left(\frac{D}{p}\right)$ le symbole de Legendre.

b) La congruence cubique.¹⁶⁾

¹⁴⁾ Quant à la signification de j_1, j_2 , voir 1.

¹⁵⁾ (Mod 2) il n'existe que deux congruences avec $D \not\equiv 0 \pmod{2}$; ce sont $x^2 + x + 1 \equiv 0$, $x^2 + x \equiv 0$; on y vérifie aisément notre résultat.

¹⁶⁾ On trouve chez Dickson l. c. ²⁾ p. 252—256 tous les résultats connus pour la congruence cubique. Quelques de ces résultats sont contenus en (21).

Soit
$$x^3 + ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p} \quad (20)$$

la congruence donnée. D'après (9) on a

$$r_1 \equiv \frac{1}{D} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_{2p} & s_{2p+1} & s_{2p+2} \end{vmatrix} \right\} \pmod{p}. \quad (21)$$

D'après (13) on obtient aussi

$$r_1 \equiv (-1)^{3+v} \cdot \frac{1}{D} \left\{ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} \\ s_{2p} & s_{2p+1} & s_{2p+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_{2p} & s_{2p+1} & s_{2p+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_p & s_{p+1} & s_{p+2} \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \right\} \pmod{p}, \quad (21')$$

$$v = r_1 + r_2 + r_3.$$

On peut trouver facilement de ces deux expressions pour r_1 une relation intéressante entre le nombre des racines de la congruence (20) et le caractère quadratique du discriminant D .

La somme du deuxième et du troisième déterminant dans (21) est égale à la même somme dans (21'). Nous la désignons par δ ; alors — tenant compte de (11) — on a

$$r_1 \cdot D \equiv D + \delta$$

$$r_1 \cdot D \cdot (-1)^{3+v} \equiv D^{\frac{p+1}{2}} + \delta \pmod{p}.$$

En éliminant δ on obtient

$$r_1 \cdot [1 - (-1)^{3+r_1+r_2+r_3}] \equiv 1 - D^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}. \quad (22)$$

Ici seulement trois cas existent

$$\alpha) r_3 = 1, r_2 = r_1 = 0, \text{ il suit de (22) } \left(\frac{D}{p} \right) = +1,$$

$$\beta) r_3 = 0, r_2 = r_1 = 1, \text{ il suit de (22) } \left(\frac{D}{p} \right) = -1,$$

$$\gamma) r_3 = 0, r_2 = 0, r_1 = 3, \text{ il suit de (22) } \left(\frac{D}{p} \right) = 1.$$

Il s'ensuit

Théorème 7. *Si la congruence cubique (20) possède trois ou ne possède aucune racine, le discriminant de cette congruence D est*

résidu quadratique (mod p). Au contraire, si (20) n'a qu'une racine, D est non-résidu quadratique (mod p).¹⁷⁾

c) La théorie des congruences binomes.

On obtient de la formule (9) par des considérations simples toute la théorie des congruences binomes.

Posons la question quel est le nombre des racines r_1 de la congruence

$$x^n - a \equiv 0, \quad n < p \pmod{p}. \quad (23)$$

Il suit de (23) que $s_0 = n, s_1 = s_2 = \dots = s_{n-1} = 0, s_n = an$; de manière plus générale $s_k = a^\tau n$, pour $k = n\tau, \tau$ entier; $s_k = 0$, pour les autres k .

$$D = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_n \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & s_n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot n \cdot (an)^{n-1}.$$

Posons $D_k = D^{(k)}$. Le déterminant D_k ne diffère du discriminant D que par la propriété, que la $(k+1)$ -ième ligne contient les éléments $s_{kp}, s_{kp+1}, \dots, s_{kp+n-1}$. Soit $k > 0$ (pour $k=0, D_0 = D$). Parmi les n nombres entiers $kp, kp+1, \dots, kp+n-1$ il y a un et seulement un qui est divisible par n . Si le nombre s_l de la $(k+1)$ -ième ligne avec l'indice l divisible par n ne se trouve pas dans le déterminant D_k sur la même place, où se trouve dans D la somme s_n , il est clair, qu'un tel D_k est égal à zéro.

L'élément de la $(k+1)$ -ième ligne, qui se trouve dans D_k sur la place occupée par s_n dans D est

$$s_{kp+n-k}.$$

Autrement dit, le déterminant D_k ne sera différent de nul, que pour les k , pour lesquels

$$\begin{aligned} kp + n - k &\equiv 0 \pmod{n}, \\ k \cdot (p-1) &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned}$$

Posons $\delta = (p-1, n)$, les nombres k cherchés sont alors

$$0, \frac{n}{\delta}, 2\frac{n}{\delta}, \dots, (\delta-1)\frac{n}{\delta}.$$

¹⁷⁾ Ce théorème est bien connu. On voit dans la littérature que ce théorème a été plusieurs fois démontré; récemment par M. Th. Skolem, Norske Vid. Selsk. Forh. 10, p. 89—92, 1937 [Voir Zentralblatt 18, 1938, p. 343]. Il est aussi une conséquence du théorème 9 que nous démontrerons dans ce qui suit.

Au nombre $l \cdot \frac{n}{\delta}$ correspond

$$s_{l \cdot \frac{n}{\delta} p + n - l \cdot \frac{n}{\delta}} = s_{\left\{l \cdot \frac{p-1}{\delta} + 1\right\} n} = n \cdot a^{l \cdot \frac{p-1}{\delta} + 1}.$$

Le déterminant D_k correspondant au nombre $k = l \cdot \frac{n}{\delta}$ est alors

$$D_{l \cdot \frac{n}{\delta}} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n \cdot (an)^{n-2} \cdot n \cdot a^{l \cdot \frac{p-1}{\delta} + 1}.$$

Le nombre des racines de la congruence (23) est donné par

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \frac{1}{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n (an)^{n-1}} \cdot \sum_{l=0}^{\delta-1} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n (an)^{n-2} \cdot \\ &\quad \cdot n \cdot a^{l \cdot \frac{p-1}{\delta} + 1} \pmod{p}. \\ r_1 &\equiv \sum_{l=0}^{\delta-1} a^{l \cdot \frac{p-1}{\delta}} \pmod{p}. \end{aligned} \quad (24)$$

Soit $a^{\frac{p-1}{\delta}} \not\equiv 1 \pmod{p}$. La somme à droite est la somme d'une série géométrique

$$r_1 \equiv \frac{a^{\frac{p-1}{\delta}} - 1}{a^{\frac{p-1}{\delta}} - 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

La congruence (23) n'a pas des racines.

Soit $a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$. En ce cas, il résulte directement de (24)

$$r_1 \equiv \sum_{l=0}^{\delta-1} \left(a^{\frac{p-1}{\delta}}\right)^l \equiv \sum_{l=0}^{\delta-1} 1 \equiv \delta \pmod{p}.$$

Alors, nous avons démontré le

Théorème 8. *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence (23) admette des racines est qu'on ait*

$$a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

où $\delta = (p-1, n)$. Cette condition étant satisfaite la congruence (23) a exactement δ racines.¹⁸⁾

¹⁸⁾ Notre démonstration du théorème 8 est intéressante aussi au point de vue méthodique. La théorie classique des congruences binomes est basée sur la théorie des indices, mais — comme on voit — dans notre déduction nous n'avons pas eu besoin de cette théorie.

d) **Théorème 9.** (La formule de Pellet-Voronoï-Stickelberger).¹⁹⁾ Le nombre v des facteurs irréductibles (mod p) de la congruence (1) à discriminant $D \not\equiv 0 \pmod{p}$, vérifie l'équation

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n+v},$$

où $\left(\frac{D}{p}\right)$ est le symbole de Legendre.

Démonstration. Il résulte des formules (18) et (19) du théorème 5 que pour chaque k , ($0 < k \leq n$)

$$(-1)^k \cdot \frac{1}{D} \sum D^{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \equiv (-1)^{n+v+k} \frac{1}{D} \cdot \sum d^{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \pmod{p}$$

$$\sum D^{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \equiv (-1)^{n+v} \sum d^{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}.$$

Posons $k = n$; on a:

$$D^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = D^{(0, 1, 2, \dots, n-1)} \equiv d \pmod{p},$$

$$d^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = d^{(0, 1, \dots, n-1)} \equiv D \pmod{p}.$$

Alors $d \equiv (-1)^{n+v} \cdot D \pmod{p}$.

Tenant compte de (11), on a

$$D^{\frac{p+1}{2}} \equiv (-1)^{n+v} \cdot D$$

$$\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n+v}, \text{ c. q. f. d.}$$

*

O počtu koreňov a nerozložiteľných faktorov danej kongruencie.

(Obsah predošlého článku.)

Nech je daná kongruencia $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}$. Koreňom takejto kongruencie budeme volať celé číslo x_i , ktoré tejto kongruencii vyhovuje. Označme počet nerozložiteľných faktorov danej kongruencie stupňa k -tého znakom r_k ; počet koreňov je teda r_1 . Konečne nech značí D diskriminant poly-

¹⁹⁾ Pellét: Comptes Rendus, 1878, p. 1071—2. — Voronoï: Verhandl. d. III. Math. Kongress, Heidelberg (Leipzig 1904). Cette formule a été récemment trouvée de nouveau par M. S. Lubelski, Acta Arithmetica 1, p. 169—183, (1935). — Voir aussi: K. Hensel, Crelles Journal 129, 1905, p. 68—86 et Hensel-Mirimanoff ibid p. 87—88, où les auteurs donnent à l'aide de ce théorème une démonstration extraordinairement simple de la loi de réciprocité.

nomu $f(x)$ a v počet všetkých ireducibilných faktorov všetkých stupňov.

V článku sme dokázali: Pre počet koreňov r_1 platí vzťah (9), alebo analogický vzťah (13). Rovnako pre r_k najdeme dva rekurentné vzťahy (18) a (19), z ktorých možno $r_2, r_3, \dots$ po rade vypočítať.

V druhej časti podali sme niekoľko aplikácií výsledkov, ktoré sme obdržali. A to predovšetkým na kvadratickú a kubickú kongruenciu; potom sme na niekoľkých riadkach odvodili celú teóriu binomických kongruencií a na koniec sme dokázali vzťah vyslovený vo vete 9, týkajúci sa kvadratického charakteru diskriminantu polynomu $f(x)$.

*

Über die Anzahl der Wurzeln und der irreduziblen Faktoren einer gegebenen Kongruenz.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Die vorgelegte Kongruenz sei

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Als Wurzel dieser Kongruenz wird jede ganze Zahl x_i bezeichnet, welche dieser Kongruenz genügt. Die Anzahl der irreduziblen Faktoren der gegebenen Kongruenz vom Grad k werde mit r_k bezeichnet; also ist r_1 die Anzahl der Wurzeln. Endlich sei D die Diskriminante von $f(x)$ und v die Anzahl aller irreduziblen Faktoren überhaupt.

Im Artikel wurde bewiesen: Für die Anzahl der Wurzeln r_1 gilt die Beziehung (9), oder die analoge Beziehung (13). Ebenso findet man für r_k zwei rekurrente Beziehungen (18), (19), aus welchen man der Reihe nach $r_2, r_3, \dots$ berechnen kann.

Im zweiten Teile haben wir einige Anwendungen der erhaltenen Resultate gegeben, und zwar zunächst auf die quadratische und kubische Kongruenz; dann haben wir auf einigen Zeilen die Theorie der binomischen Kongruenzen abgeleitet und endlich haben wir im Satz 9 eine Beziehung abgeleitet, welche den quadratischen Charakter der Diskriminante von $f(x)$ betrifft.

Über einen Satz von S. Lubelski.

Štefan Schwarz, Bratislava.

(Eingegangen am 10. Januar 1940.)

Es handelt sich um einen äußerst kurzen und von den Hilfsätzen des Verfassers¹⁾ freien Beweis des folgenden interessanten Satzes:

Es sei $f(x)$ ein ganzes, ganzzahliges, nicht normales, irreduzibles Polynom. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine Galoissche Resolvente von $f(x)$, D die Diskriminante von $\varphi(x)$ und p eine rationale Primzahl, für die $(D, p) = 1$. Dann ist $\varphi(x) \bmod p$ zerlegbar.

Beweis: Es sei K der Körper der rationalen Zahlen. Weiter $K' = K(\Theta)$, $K'' = K(\vartheta)$, wo Θ resp. ϑ den Gleichungen $f(\Theta) = 0$ resp. $\varphi(\vartheta) = 0$ genügen. Also

$$K \subset K' \subset K''.$$

Es sei weiter $\mathfrak{G}$ die Galoissche Gruppe von K'' bezüglich K , $\mathfrak{H}$ die zu K' gehörige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$ die Einheitsgruppe:

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{H} \supset \mathfrak{E}.$$

Da K'' normal ist, ist sein Grad zugleich Ordnung von $\mathfrak{G}$. Er sei durch n bezeichnet.

Um die Behauptung zu beweisen, schließen wir folgendermassen. Ist $\varphi(x) \bmod p$ irreduzibel, so ist p in K'' unzerlegbar und der Grad des Primideals (p) ist n . Für jede ganze Zahl ω aus K'' gilt dann

$$\omega^{p^n} \equiv \omega \pmod{p}.$$

Die Substitution σ_p aus $\mathfrak{G}$, für die (unabhängig von ω) die Relation

$$\omega^p \equiv \sigma_p \omega \pmod{p},$$

für jedes ganze ω aus K'' gilt, ist bekanntlich die Erzeugende der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ zu p .²⁾ Die Zerlegungsgruppe ist offenbar

¹⁾ Vgl. S. Lubelski: Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie, *Acta Arithmetica* 1 (1936). S. 169—183; 2 (1937). S. 250—261.

²⁾ Vgl. z. B. R. Fricke: *Lehrbuch der Algebra* III, S. 175.

zyklisch und ihre Ordnung ist gleich dem Grad von p , also n . Da aber auch die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gleich n ist, gilt $\mathfrak{G}_z = \mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}$ ist danach zyklisch. Da jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe wieder zyklisch ist, ist auch $\mathfrak{H}$ zyklisch, also Normalteiler. Der zugehörige Körper K' ist also normal, entgegen der Voraussetzung. Die Annahme, daß $\varphi(x) \bmod p$ unzerlegbar ist, ist falsch; w. z. b. w.

Anmerkung: Es ist auch leicht einzusehen, daß dieser Satz und sein Beweis allgemeiner für Polynome $f(x)$ aus einem beliebigen Körper K und dessen Primideale $\mathfrak{p}$ gilt.

*

O jednej vete S. Lubelského.

(Obsah predošlého článku.)

V článku je podaný krátky dôkaz tejto vety.

Nech je $f(x)$ celočíselný, nie normálny, nerozložiteľný mnohočlen. Nech je $\varphi(x)$ Galoisovou resolventou $f(x)$, ďalej D diskriminant mnohočlenu $\varphi(x)$ a p racionálne prvočíslo, pre ktoré platí $(D, p) = 1$. Potom je $\varphi(x) \bmod p$ rozložiteľné.

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

5. Abhandlung.¹⁾

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 2. März 1940.)

§ 1. Einleitung.

Im Folgenden sei stets r eine natürliche Zahl,

$$Q(u) = \sum_{\mu, \nu=1}^r c_{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} \quad (c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}) \quad (1)$$

eine positiv definite quadratische Form mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ und mit der Determinante D . Für reelles b bedeutet ξ^b denjenigen in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen ξ -Ebene regulären Zweig, der für $\xi > 0$ positiv ist. Statt e^{ξ} schreibe ich auch $\exp \xi$. Mit C bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von Q (d. h. von r und von den $c_{\mu\nu}$) abhängen. Mit B bezeichne ich unterschiedslos komplexe Zahlen, die von beliebigen Parametern abhängen dürfen, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als ein C sind. Sind h, k zwei ganze Zahlen, die nicht beide Null sind, so sei $\{h, k\}$ ihr größter gemeinsamer Teiler (die runde Klammer könnte zu Mißverständnissen führen). Alle vorkommenden Integrationswege in der komplexen Ebene sind geradlinig; für reelles α schreibe ich

zur Abkürzung $\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty}$ statt $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}$.

Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(u_1, \dots, u_r)$ im Ellipsoid $Q(u) \leq x$;

¹⁾ Ältere gleichgenannte Abhandlungen des Verf. sind in der Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 62—84, S. 85—97, **36** (1933), S. 581—617 und im Věstník Král. Č. Sp. Nauk 1931, 17 S. erschienen.

$$P(x) = A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}, \quad M(x) = \int_0^x P^2(y) dy. \quad (2)$$

Alle bisher gemachten Verabredungen gelten in der ganzen Arbeit; sonstige Einschränkungen werden wir immer besonders hervorheben.

Es gilt folgender Satz von Cramér-Landau²⁾: Es sei $Q(u) = u_1^2 + u_2^2$ (also $r = 2$); dann gibt es eine positive Konstante K , sodaß

$$M(x) = Kx^{\frac{3}{2}} + O(x^{1+\varepsilon}) \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

Ein Blick auf den Beweis lehrt, daß ein analoges Ergebnis für jede Form (1) mit $r = 2$ und ganzzahligen $c_{\mu\nu}$ gilt.

Für $r > 2$ ($r = 1$ ist trivial) werde ich zeigen:

Satz 1. *Es sei $r > 2$ und Q habe ganze Koeffizienten $c_{\mu\nu}$. Dann gibt es eine nur von Q abhängige positive Zahl H , sodaß folgendes gilt:*

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= Hx^2 \log x + O(x^2 \log^{\frac{1}{2}} x) \text{ für } r = 3; \\ M(x) &= Hx^{r-1} + O(g(x)) \text{ für } r > 3, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo $g(x) = x^{\frac{5}{2}} \log x$ für $r = 4$, $g(x) = x^3 \log^2 x$ für $r = 5$, $g(x) = x^{r-2}$ für $r > 5$.

Man beachte den besonders interessanten Fall $r = 3$ ($\log x$ im Hauptglied). Eine Darstellung von H wird man am Ende der Arbeit finden. Als Ergänzung zum Satz 1 beweise ich gleich folgenden einfachen Satz, der zeigt, daß die O -Abschätzung im Satz 1 für $r > 5$ definitiv ist:

Satz 2. *Es sei $r > 2$ und Q habe ganze Koeffizienten $c_{\mu\nu}$. Dann ist*

$$M(x) - Hx^{r-1} = O(x^{r-2});$$

allgemeiner ist für jede beliebige von x unabhängige Zahl H_1

$$M(x) - Hx^{r-1} - H_1 x^{r-2} = O(x^{r-2}). \quad (4)$$

Beweis. Für ganzes $n > 0$ und $0 < \delta < 1$ ist $A(n + \delta) = A(n)$, also nach (2), wenn für einen Augenblick

$$\pi^{\frac{r}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{r}{2} + 1\right) = K$$

²⁾ Vgl. z. B. die Darstellung in E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 2, S. 250—263 (Hirzel, Leipzig 1927) und die Verschärfung des Restgliedes bis zu $O(x \log^3 x)$ bei A. Walfisz, Teilerprobleme, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 66—88.

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} P(n + \delta) &= A(n) - K(n + \delta)^{\frac{r}{2}}, \\ \int_n^{n+\delta} P^2(y) dy &= A^2(n)\delta - 2KA(n) \frac{1}{\frac{r}{2} + 1} ((n + \delta)^{\frac{r}{2}+1} - n^{\frac{r}{2}+1}) + \\ &\quad + K^2((n + \delta)^{r+1} - n^{r+1}) \frac{1}{r + 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Wäre (4) für ein H_1 falsch, so wäre

$$\begin{aligned} \int_n^{n+\delta} P^2(y) dy &= M(n + \delta) - M(n) = H((n + \delta)^{r-1} - n^{r-1}) + \\ &\quad + H_1((n + \delta)^{r-2} - n^{r-2}) + o(n^{r-2}) \end{aligned} \quad (6)$$

bei ganzzahlig wachsendem n und zwar gleichmäßig für $0 < \delta < 1$. Vergleicht man die rechten Seiten von (5), (6), dividiert durch n^{r-2} ,

entwickelt $(n + \delta)^\beta = n^\beta \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^\beta$ nach Potenzen von $\frac{\delta}{n}$ und

beachtet, daß $A(n) = O(n^{\frac{r}{2}})$, so bekommt man

$$\begin{aligned} H\delta(r-1) - A^2(n) \cdot n^{-r+2} \delta + \\ + 2KA(n) n^{-\frac{r}{2}} \left(n^2 \delta + \frac{r}{4} n \delta^2 + \frac{r(r-2)}{24} \delta^3 \right) - \\ - K^2 \left(n^2 \delta + \frac{r}{2} n \delta^2 + \frac{r(r-1)}{6} \delta^3 \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für ganzzahlig wachsendes n , gleichmäßig für $0 < \delta < 1$. Also müssen die Koeffizienten von $\delta, \delta^2, \delta^3$ gegen Null streben (es handelt sich um ein Polynom in δ); betrachtet man die Koeffizienten von δ^2, δ^3 , so bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} K n (A(n) n^{-\frac{r}{2}} - K) &\rightarrow 0 \\ \frac{r}{6} K \left(A(n) n^{-\frac{r}{2}} \frac{r-2}{2} - (r-1) K \right) &\rightarrow 0; \end{aligned}$$

wegen $K > 0$ wäre also

$$A(n) n^{-\frac{r}{2}} \rightarrow K \text{ und gleichzeitig } A(n) n^{-\frac{r}{2}} \rightarrow \frac{2r-2}{r-2} K,$$

was unmöglich ist.

Schließlich möchte ich folgendes bemerken: *Erstens* habe ich

im Jahre 1930 folgendes bewiesen³⁾: ist $r \geq 5$ und hat Q ganze Koeffizienten, so gibt es eine nur von Q abhängige positive Zahl H' , sodaß für ganzzahlig wachsendes x folgendes gilt:

$$\sum_{n=1}^x \mathbf{P}^2(n) = H' x^{r-1} + f(x),$$

wo $f(x) = O(x^{r-2})$ und $f(x) = O(x^{\frac{3}{4}r} \log x)$ für $5 \leq r \leq 7$, $f(x) = O(x^{r-2} \log x)$ für $r = 8$, $f(x) = O(x^{r-2})$ für $r > 8$. Man vergleiche dieses Ergebnis mit unserem Satz 1; übrigens war damals, da sich x diskontinuierlich änderte, der Beweis der Ω -Behauptung viel schwieriger als der heutige Satz 2.

Zweitens: Durch Weiterentwicklung einer älteren Methode von mir⁴⁾ ist es Herrn Walfisz gelungen,⁵⁾ den Satz 1 für $r = 4$ mit einem etwas schwächeren Restglied $O(x^{\frac{5}{2}} \log^2 x)$ zu beweisen.⁶⁾

Drittens: Als ich diese Untersuchung begonnen habe, wollte ich hauptsächlich den interessantesten Fall $r = 3$ erledigen; der Leser wird aber sehen, daß es nicht viel mehr Mühe kostet, wenn man gleichzeitig auch die Fälle $r \geq 4$ behandelt. Methodisch stellt die Arbeit eine Weiterentwicklung der Methoden aus⁴⁾, ⁵⁾ dar.

Viertens: Für $r = 3$ und ganze $c_{\mu\nu}$ folgt aus Satz 1

$$\mathbf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} x),$$

was für $Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ vom Herrn Szegő⁷⁾ bewiesen worden ist.

§ 2. Vorbereitende Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es sei $a_2 > a_1 > 0$, $b_2 > b_1 > 0$; $\lambda \geq 1$, $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$; $f(s, s')$ sei beschränkt und regulär im Bereich

$$a_1 \leq \Re s \leq a_2, \quad b_1 \leq \Re s' \leq b_2. \quad (7)$$

Dann gelten folgende Gleichungen, in welchen alle sechs Doppelintegrale den Integranden

$$H(s, s') = \frac{f(s, s')}{s^\lambda s'^\mu (s + s')^\nu}$$

³⁾ Und noch etwas mehr; vgl. V. Jarník, Sur une fonction arithmétique, Věstník Král. Čes. Sp. Nauk 1930, 13 S., Théorème 2, 3.

⁴⁾ V. Jarník, Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre I, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 62—84.

⁵⁾ A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden VII, Travaux de l'Inst. Mathém. de Tbilissi **5** (1938), S. 1—68.

⁶⁾ Dasselbe Ergebnis hat Herr Walfisz bereits früher mit einer anderen Methode (Heckesche Theorie der Modulformen) bewiesen; vgl. A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden V, Acta Arithmetica **1** (1936), S. 222—283.

⁷⁾ Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome II. Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 388—404.

haben und absolut konvergieren:

$$\begin{aligned} \int_{a_1} \left(\int_{b_1} \dots ds' \right) ds &= \int_{a_1} \left(\int_{b_2} \dots ds' \right) ds = \int_{b_2} \left(\int_{a_1} \dots ds \right) ds' = \\ &= \int_{b_2} \left(\int_{a_2} \dots ds \right) ds' = \int_{a_2} \left(\int_{b_2} \dots ds' \right) ds = \int_{a_2} \left(\int_{b_1} \dots ds' \right) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Beweis. Im Beweis beschränken wir uns auf den Bereich (7). Dort gilt (mit $t = \Im s$, $t' = \Im s'$)

$$|H(s, s')| < \frac{G}{(1 + |t|)(1 + |t'|)(1 + |t + t'|)}, \quad (9)$$

wo $G > 0$ von s, s' unabhängig ist. Daraus folgt erstens nach dem Cauchyschen Satz

$$\int_{a_1} H(s, s') ds = \int_{a_2} H(s, s') ds, \quad \int_{b_1} H(s, s') ds' = \int_{b_2} H(s, s') ds'. \quad (10)$$

Zweitens ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt dt'}{(1 + |t|)(1 + |t'|)(1 + |t + t'|)} &\leq \\ &\leq 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt dt'}{(1 + t)(1 + t')(1 + |t - t'|)} = \\ &= 8 \int_0^{\infty} \left(\int_0^t \frac{dt'}{(1 + t')(1 + t - t')} \right) \frac{dt}{1 + t} = 8 \int_0^{\infty} \frac{2 \log(1 + t) dt}{(1 + t)(2 + t)} \end{aligned}$$

und das letzte Integral konvergiert. Daher sind die Doppelintegrale in (8) absolut konvergent (also: Vertauschbarkeit der Integrationsfolge) und (8) folgt aus (10).

Im Folgenden gelten stets folgende Bezeichnungen: für $\Re s > 0$ ist

$$\Theta(s) = \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} \exp(-Q(m)s), \quad F(s) = \Theta(s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D} s^{\frac{r}{2}}}; \quad (11)$$

für $x > 0$ und natürliches n sei

$$M_1(x) = M(x), \quad M_n(x) = \int_0^x M_{n-1}(y) dy \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (12)$$

(m) bedeutet dabei das System $m_1, \dots, m_r$; insbesondere bedeu-

tet (0) das System $0, \dots, 0$. $\sum_{(m)=-\infty}^{\infty}$ bedeutet $\sum_{m_1, \dots, m_r=-\infty}^{\infty}$ und analog in ähnlichen Fällen.

Hilfssatz 2. Ist $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, n ganz, so ist

$$M_n(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \left(\int \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n} ds' \right) ds + A_{0n} + A_{1n}x + \dots + A_{n-1,n}x^{n-1}, \quad (13)$$

wo A_{kl} nur von k, l und von Q (also nicht von a, b, x) abhängt.

Beweis. Bekanntlich ist

$$M_1(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \left(\int \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s+s'} ds' \right) ds.$$

Den Beweis findet man l. c.⁴⁾ oder ⁵⁾. Dort wird zwar $a = b = x^{-1}$ vorausgesetzt, was aber nach Hfs. 1 keine Einschränkung bedeutet; zweitens wird dort Q einigen Einschränkungen unterworfen (z. B. bei Walfisz $r = 4$, $c_{\mu\nu}$ ganz), die aber im Beweis nicht benutzt werden. Nach Hfs. 1. ist

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \left(\int \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{ds'}{s+s'} \right) ds = \frac{1}{4\pi^2} \int_2^x \left(\int_2^{\dots} ds' \right) ds = A_{01},$$

sodaß (13) für $n = 1$ gilt. Gilt nun (13) für ein gewisses $n \geq 1$, so ist (absolute Konvergenz nach Hfs. 1)

$$\begin{aligned} M_{n+1}(x) &= \int_0^x M_n(y) dy = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \left(\int \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \left(\int_0^x \frac{e^{u(s+s')}}{(s+s')^n} du \right) ds' \right) ds + \\ &\quad + A_{0n}x + \dots + \frac{1}{n} A_{n-1,n} x^n; \end{aligned}$$

hierin ist

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{e^{u(s+s')}}{(s+s')^n} du &= \frac{e^{x(s+s')} - 1}{(s+s')^{n+1}}, \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_a^b \left(\int \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{ds'}{(s+s')^{n+1}} \right) ds &= \frac{1}{4\pi^2} \int_2^x \left(\int \dots ds' \right) ds = A_{0,n+1}, \end{aligned}$$

sodaß (13) auch mit $n + 1$ statt n gilt.

Von nun an setzen wir stets voraus, das die $c_{\mu\nu}$ in (1) ganz sind. Sind $h, k, m_1, \dots, m_r$ ganz, $\{h, k\} = 1, k > 0$, so setze man

$$S_{h,k,(m)} = \sum_{(a)=1}^k \exp \left(-\frac{2\pi i h}{k} Q(a) - 2\pi i \frac{a_1 m_1 + \dots + a_r m_r}{k} \right) \quad (14)$$

und speziell $S_{h,k,(0)} = S_{h,k}$. Offenbar ändert sich $S_{h,k,(m)}$ nicht, wenn man h um ein Vielfaches von k ändert; $S_{h,k}$ und $S_{-h,k}$ sind konjugiert komplex; $S_{h,1,(m)} = 1$.

Hilfssatz 3. A. Es ist $S_{h,k,(m)} = Bk^{\frac{r}{2}}$ und für $\{k, 2D\} = 1$ ist $|S_{h,k,(m)}| = k^{\frac{r}{2}}$.

B. Es werde

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^k \frac{|S_{h,k}|^2}{k^4 h^2} \quad (15)$$

gesetzt, wo der Strich bedeutet, daß nur über die h mit $\{h, k\} = 1$ summiert wird. Dann ist für $r = 3$

$$\mathfrak{S}(x) = G \log x + O(1),$$

wo $G > 0$ nur von Q abhängt.

Beweis. Offenbar ist

$$\begin{aligned} |S_{h,k,(m)}|^2 &= \sum_{(b)=1}^k \sum_{(a)=1}^k \exp \left(-2\pi i \frac{h}{k} (Q(a) - Q(a+b)) + 2\pi i \frac{b_1 m_1 + \dots + b_r m_r}{k} \right) \\ &= \sum_{(b)=1}^k \exp \left(2\pi i \frac{h}{k} Q(b) + \frac{2\pi i}{k} (b_1 m_1 + \dots + b_r m_r) \right) \times \\ &\quad \times \sum_{(a)=1}^k \exp \left(\frac{2\pi i h}{k} \sum_{\mu, \nu=1}^r 2c_{\mu\nu} a_\mu b_\nu \right). \end{aligned}$$

Hier ist die innere Summe nur dann von Null verschieden, und zwar gleich k^r , wenn

$$1 \leq b_\mu \leq k, \quad 2 \sum_{\nu=1}^r c_{\mu\nu} b_\nu \equiv 0 \pmod{k} \quad (\mu = 1, \dots, r), \quad (16)$$

woraus $2Db_\mu \equiv 0 \pmod{k}$, also

$$1 \leq b_\mu \leq k, \quad b_\mu \equiv 0 \pmod{\frac{k}{\delta}} \quad (\mu = 1, \dots, r) \quad (17)$$

folgt, wenn $\delta = \{k, 2D\}$. Nun hat (17) genau $\delta^r \leq (2D)^r = B$.

Lösungen, also (16) höchstens B Lösungen, so daß $|S_{h,k,(m)}|^2 = Bk^r$. Ist $\delta = 1$, so ist (17) genau für $b_\mu = k$ erfüllt und dann gilt auch (16), also $|S_{h,k,(m)}|^2 = k^r$.

Man setze nun $r = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ voraus. Man setze

$$\delta = \{k, 2D\}, \quad k = \delta K, \quad 2D = \delta \Delta.$$

Dann ist (16) mit

$$1 \leq b_\mu \leq k, \quad 2 \sum_{\nu=1}^3 c_{\mu\nu} b_\nu = l_\mu k \quad (\mu = 1, 2, 3), \quad (18)$$

also mit

$$1 \leq b_\mu \leq k, \quad b_\mu = \frac{K}{\Delta} \sum_{\nu=1}^3 l_\nu D_{\mu\nu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (19)$$

äquivalent, wo l_1, l_2, l_3 ganze Zahlen sind und $D_{\mu\nu}$ die Subdeterminanten von D bedeuten. Also ist

$$|S_{h,k}|^2 = k^3 \sum_{(f)} \exp\left(\frac{2\pi i h K}{\delta} Q\left(\frac{f}{\Delta}\right)\right), \quad (20)$$

wo $(f) = (f_1, f_2, f_3)$ alle ganzzahligen Systeme durchläuft, für welche es ganze l_1, l_2, l_3 gibt, sodaß

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^3 l_\nu D_{\mu\nu}, \quad 1 \leq \frac{K}{\Delta} f_\mu \leq k, \quad \frac{K}{\Delta} f_\mu \text{ ganz} \quad (\mu = 1, 2, 3).$$

Das gibt für l_1, l_2, l_3 genau folgende Einschränkungen:

$$1 \leq \sum_{\nu=1}^3 l_\nu D_{\mu\nu} \leq 2D, \quad \sum_{\nu=1}^3 l_\nu D_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

sodaß der Wertevorrat von (f) nur von Q und δ abhängt. Also ist,

wenn $Q\left(\frac{f}{\Delta}\right) = q = q(\delta, (f))$ gesetzt wird (q ist ganz!), nach (20), (15)

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{\delta} \frac{1}{\delta} \sum_{(f)} \sum_h \sum_K \frac{1}{K h^2} \exp\left(\frac{2\pi i h K q}{\delta}\right); \quad (21)$$

dabei läuft δ über alle positiven Teiler von $2D$, (f) (bei gegebenem δ) über alle eben beschriebenen Systeme, dann h über den Wertevorrat $0 < h \leq \sqrt{x}$, $\{h, \delta\} = 1$ und K über den Wertevorrat $h \leq K\delta \leq \sqrt{x}$, $\{K, h\Delta\} = 1$. Also ist

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_{\delta} \frac{1}{\delta} \sum_{(f)} R(\delta, (f)), \quad (22)$$

wenn man die innere Doppelsumme in (21) mit $R(\delta, (f))$ bezeichnet. Ist $h, \delta, (f)$ gegeben, so setze man für ganzes $m \geq 0$

$$a_m = \exp\left(\frac{2\pi i h m q}{\delta}\right), \text{ wenn } \{m, \Delta h\} = 1; \text{ sonst } a_m = 0.$$

$$U_m = U_m(h) = U_m(h, \delta, (f)) = \sum_{l=1}^m a_l.$$

Offenbar ist $a_{m+\Delta h\delta} = a_m$, also

$$U_m(h) = \frac{m}{\Delta h\delta} U_{\Delta h\delta}(h) + B\Delta h\delta = \frac{m}{2hD} U_{2hD}(h) + Bh.$$

Man setze $U_{2hD}(h) = \alpha_h = \alpha_h(\delta, (f))$ und bemerke, daß $U_m(h) = Bm$, $\alpha_h = Bh$, $\sum_{h \leq \sqrt{x}} \alpha_h \cdot h^{-3} = Bx^{-\frac{1}{2}}$ (alles für $x > C$). Setzt

man noch $\mu_0 = \left\lfloor \frac{h}{\delta} \right\rfloor$ für $\delta > 1$, $\mu_0 = h - 1$ für $\delta = 1$, $\mu_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{x}}{\delta} \right\rfloor$, so ist (der Stern bedeutet, daß nur über die h mit $\{h, \delta\} = 1$ summiert wird):

$$\begin{aligned} R(\delta, (f)) &= \sum_{0 < h \leq \sqrt{x}}^* \frac{1}{h^2} \sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{U_m(h) - U_{m-1}(h)}{m} = \\ &= \sum_{0 < h \leq \sqrt{x}}^* \frac{1}{h^2} \left(\sum_{m=\mu_0+1}^{\mu_1} U_m(h) \left(\frac{1}{m^2} + \frac{B}{m^3} \right) - \frac{U_{\mu_0}(h)}{\mu_0+1} + \frac{U_{\mu_1}(h)}{\mu_1+1} \right) = \\ &= \sum_{0 < h \leq \sqrt{x}}^* \left(\frac{\alpha_h}{2Dh^3} \sum_{\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{1}{m} + \frac{1}{h} \sum_{\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{B}{m^2} + \frac{B}{h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2D} \sum_{0 < h \leq \sqrt{x}}^* \frac{\alpha_h}{h^3} \log \frac{\sqrt{x}}{h} + B = \frac{\log x}{4D} \sum_{0 < h \leq \sqrt{x}}^* \frac{\alpha_h}{h^3} + B = \\ &= \frac{\log x}{4D} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h}{h^3} + B. \end{aligned}$$

Wegen (22) ist also $\mathfrak{S}(x) = G \log x + B$, wo $G \geq 0$ nur von Q abhängt. Es ist aber $G > 0$, denn nach **A** ist $(\Sigma''$ läuft über alle k mit

$$k \equiv 1 \pmod{2D}, \quad 0 < k \leq \sqrt{x}$$

$$\mathfrak{S}(x) \geq \sum_k'' k^{-4} |S_{1,k}|^2 = \sum_k'' k^{-1} > C \log x.$$

Hilfssatz 4. Sind h, k ganz, $k > 0$, $\{h, k\} = 1$, $\Re s > 0$, so ist

$$\Theta(s) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D} k^r \left(s - 2\pi i \frac{h}{k}\right)^{\frac{r}{2}}} \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} S_{h,k,(m)} \exp\left(\frac{-\pi^2 Q_1(m)}{k^2 \left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)}\right), \quad (23)$$

wo Q_1 die zu Q inverse Form ist.

Beweis. Wird $s = s' + 2\pi i \frac{h}{k}$ gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \sum_{(a)=1}^k \sum_{(b)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-Q(a+bk) \left(s' + 2\pi i \frac{h}{k}\right)\right) = \\ &= \sum_{(a)=1}^k \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} Q(a)\right) \sum_{(b)=-\infty}^{\infty} \exp\left(-Q\left(\frac{a}{k} + b\right) k^2 s'\right). \end{aligned}$$

Wendet man nun die bekannte Formel⁸⁾

$$\begin{aligned} \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi Q(m+z) S + 2\pi i (w_1 m_1 + \dots + w_r m_r)) &= \\ &= D^{-\frac{1}{2}} S^{-\frac{r}{2}} \exp(-2\pi i (z_1 w_1 + \dots + z_r w_r)) \times \\ &\times \sum_{(m)=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi Q_1(m+w) S^{-1} - 2\pi i (z_1 m_1 + \dots + z_r m_r)) \end{aligned}$$

auf die innere Summe mit $S = \pi^{-1} k^2 s'$, $z_j = k^{-1} a_j$, $w_j = 0$ an, so folgt sofort (23) (vgl. (14)).

Von jetzt an sei stets $x > 1$. Wir legen nun auf die reelle Achse alle Brüche $\frac{h}{k}$, wo h, k ganz, $h \equiv 0$, $0 < k \leq \sqrt{x}$, $\{h, k\} = 1$ und nennen sie Fareybrüche. Zu jedem Fareybruch $\frac{h}{k}$ gibt es genau ein Paar von Fareybrüchen $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ ($k_j > 0$, $\{h_j, k_j\} = 1$ für $j = 1, 2$) mit $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$, sodaß zwischen $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}$ genau ein Fareybruch, nämlich $\frac{h}{k}$, liegt. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ das abgeschlossene Intervall $\left\langle \frac{h+h_1}{k+k_1}, \frac{h+h_2}{k+k_2} \right\rangle$; bekanntlich ist

⁸⁾ A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (1903), S. 108.

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}} \right\rangle, \quad \frac{1}{2} \leq \vartheta_1 \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq \vartheta_2 \leq 1. \quad (24)$$

Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge reeller Zahlen und γ eine reelle Zahl, so bedeutet $\gamma\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen $\gamma\xi$ mit $\xi \in \mathfrak{M}$. Zur Abkürzung setze man $\mathfrak{C}_{h,k} = 2\pi\mathfrak{B}_{h,k}$. Man setze

$$\varrho = \frac{2\pi}{[\sqrt{x}] + 1}. \quad (25)$$

Die Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ überdecken die ganze reelle Achse und je zwei von ihnen haben höchstens einen gemeinsamen Punkt. Insbesondere ist $\mathfrak{C}_{0,1} = \langle -\varrho, \varrho \rangle$ und die Vereinigungsmenge aller Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ mit

$$h > 0, \quad 0 < k \leq \sqrt{x}, \quad \{h, k\} = 1 \quad (26)$$

ist genau das Intervall $\langle \varrho, +\infty \rangle$. Wir werden im Folgenden die Formel (13) stets mit $a = b = x^{-1}$ benutzen; dementsprechend wird stets (mit Ausnahme einer Stelle im Beweis des Hilfssatzes 10) $s = x^{-1} + ti$, $s' = x^{-1} + t'i$ (t, t' reell) gesetzt; statt ds, ds' schreibe ich $i dt, i dt'$, sodaß aus (13)

$$4\pi^2 M_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt' \right) dt + O(x^{n-1}) \quad (27)$$

folgt, wo der nicht aufgeschriebene Integrand hier und in den folgenden Formeln

$$\frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n} \quad (28)$$

ist. Wir brauchen oft folgende Symmetrieeigenschaften: die Funktion (28) ändert sich nicht, wenn man s mit s' (d. h. t mit t') vertauscht; sie geht in den konjugiert komplexen Wert über, wenn man t, t' durch $-t, -t'$ ersetzt. Ebenso geht $F(s), s^{-1}$ und e^{xs} in den konjugiert komplexen Wert über, wenn man t durch $-t$ ersetzt. Es sei $\mathfrak{A}$ der Bereich $\text{Min}(|t|, |t'|) \leq \varrho$ und man setze:

$$S_1 = \iint_{\mathfrak{A}} \dots dt dt'; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M(h, k, h', k') = & \int_{\mathfrak{C}_{h,k} \mathfrak{C}_{h',k'}} \left(\int \dots dt' \right) dt + \int_{\mathfrak{C}_{h,k} - \mathfrak{C}_{h',k'}} \left(\int \dots dt' \right) dt + \\ & + \int_{-\mathfrak{C}_{h,k} \mathfrak{C}_{h',k'}} \left(\int \dots dt' \right) dt + \int_{-\mathfrak{C}_{h,k} - \mathfrak{C}_{h',k'}} \left(\int \dots dt' \right) dt; \end{aligned} \quad (30)$$

$$S_2 = \sum_{h,k,h',k'} M(h, k, h', k'), \quad (31)$$

wo über alle h, k, h', k' mit (26) und

$$h' > 0, 0 < k' \leq \sqrt{x}, \{h', k'\} = 1, \frac{h'}{k'} \neq \frac{h}{k} \quad (32)$$

summiert wird.

$$N(h, k) = \int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \dots dt' \right) dt, \quad P(h, k) = \int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \left(\int_{\mathfrak{C}_{h,k}} \dots dt' \right) dt, \quad (33)$$

$$S_3 = \sum_{h,k} P(h, k), \quad S_4 = \sum_{h,k} N(h, k), \quad (34)$$

wo über alle h, k mit (26) summiert wird. Nach (27) und den Symmetrieeigenschaften von (28) ist

$$4\pi^2 M_n = S_1 + S_2 + 2\Re S_3 + 2S_4 + O(x^{n-1}). \quad (35)$$

Hilfssatz 5. Für $|t| \leq 2\varrho$ ist

$$\frac{F(s)}{s} = Bx^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Beweis. Wegen $s = x^{-1} + ti$, $\varrho = Bx^{-\frac{1}{2}}$ ist für $|t| \leq 2\varrho$

$$\Re \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{x}{1 + x^2 t^2} > C,$$

also nach (23) mit $h = 0, k = 1$ (wegen $S_{0,1,(m)} = 1$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \left(\Theta(s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D} s^{\frac{r}{2}}} \right) \right| &= \left| \frac{C}{s^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{(m) \neq (0)} \exp \frac{-\pi^2 Q_1(m)}{s} \right| \\ &= \frac{Bx^{\frac{r}{2}+1}}{(1 + x^2 t^2)^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}} \sum_{(m) \neq (0)} \exp \left(-\frac{Cx}{1 + x^2 t^2} (|m_1| + \dots + |m_r|) \right) \\ &= Bx^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1 + x^2 t^2} \right)^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}} \exp \left(\frac{-Cx}{1 + x^2 t^2} \right) = Bx^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

da die Funktion $\xi^\alpha e^{-\gamma \xi}$ ($\alpha > 0, \gamma > 0$) für $0 < \xi < \infty$ beschränkt ist.

Hilfssatz 6. Gilt (26) und ist $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $x > C$, so ist

$$C \frac{h}{k} < t < |s| < C \frac{h}{k}; \quad (37)$$

$$|F(s)| < \frac{Cx^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}} \left(1 + x \left| t - 2\pi \frac{h}{k} \right| \right)^{\frac{r}{2}}}; \quad (38)$$

$$\left| \frac{1}{\frac{r}{s^2}} \right| < C x^{\frac{r}{4}}; \quad (39)$$

$$\left| \Theta(s) - S_{h,k} \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D} k' \left(s - 2\pi i \frac{h}{k} \right)^{\frac{r}{2}}} \right| < C x^{\frac{r}{4}}; \quad (40)$$

$$x^{\frac{r}{4}} < C \frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}} \left(1 + x \left| t - 2\pi \frac{h}{k} \right| \right)^{\frac{r}{2}}}. \quad (41)$$

Beweis (alles für $x > C$). Nach (24) ist $\left| t - 2\pi \frac{h}{k} \right| \leq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}$; daraus folgt (41) und wegen $\frac{1}{x} < \frac{2\pi}{k\sqrt{x}} < \frac{\pi h}{k}$ auch (37), woraus $s^{-\frac{r}{2}} = B k^{\frac{r}{2}} h^{-\frac{r}{2}} = B x^{\frac{r}{4}}$, also (39) folgt. (38) folgt aus (11), (39), (40), (41) und Hilfssatz 3; und (40) ergibt sich so: man setze $2\pi \frac{h}{k} = \beta$; wegen $x |t - \beta| \leq \frac{2\pi\sqrt{x}}{k}$ ist

$$\Re \frac{1}{k^2 (s - i\beta)} = \frac{x}{k^2 (1 + x^2 (t - \beta)^2)} > \frac{Cx}{k^2 (1 + x |t - \beta|)^2} > C.$$

Nach (23) und Hilfssatz 3 ist also die linke Seite von (40) kleiner als

$$C \frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t - \beta|)^{\frac{r}{2}}} \sum_{(m) \neq (0)} \exp \left(-C \frac{x (|m_1| + \dots + |m_r|)}{k^2 (1 + x |t - \beta|)^2} \right) < \\ < C x^{\frac{r}{4}} \left(\frac{x}{k^2 (1 + x |t - \beta|)^2} \right)^{\frac{r}{4}} \exp \left(\frac{-Cx}{k^2 (1 + x |t - \beta|)^2} \right) < C x^{\frac{r}{4}},$$

da die Funktion $\xi^\alpha e^{-\gamma \xi}$ ($\alpha > 0$, $\gamma > 0$) für $0 < \xi < \infty$ beschränkt ist.

§ 3. Beweis des Satzes 1.

Bis zum Schluß der Abhandlung sei $r \geq 3$ und $n = 2$ für $r = 3$, $n = 1$ für $r > 3$. Für $r > 3$ sei $g(x)$ wie im Satz 1 definiert, für $r = 3$ sei $g(x) = x^3$. Außerdem werden freilich die $c_{\mu r}$ ganzzahlig vorausgesetzt. Wegen $s = x^{-1} + ti$, $s' = x^{-1} + t'i$ ist

$$\frac{1}{s+s'} = \frac{Bx}{1+x|t+t'|}, \quad e^{u(s+s')} = B \text{ für } 0 \leq u \leq x. \quad (42)$$

Sind h, k bzw. h', k' mit (26), (32) gegeben, so setze man zur Abkürzung $\beta = 2\pi \frac{h}{k}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{h,k}$, bzw. $\beta' = 2\pi \frac{h'}{k'}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_{h',k'}$.

Hilfssatz 7. $S_1 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Aus Symmetriegründen genügt es offenbar (vgl. (28), (29)), diese Abschätzung für die Integrale

$$I_1 = \int_{-2\varrho}^{2\varrho} \left(\int_{-2\varrho}^{2\varrho} \dots dt' \right) dt, \quad I_2 = \int_{-\varrho}^{\varrho} \left(\int_{2\varrho}^{\infty} \dots dt' \right) dt$$

mit dem Integranden

$$\left| \frac{F(s)}{s} \frac{F(s')}{s'} \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n} \right|$$

zu beweisen. Nach (42) und Hilfssatz 5 ist

$$\begin{aligned} I_1 &= Bx^{\frac{r}{2}+1} \int_{-2\varrho}^{2\varrho} \left(\int_{-2\varrho}^{2\varrho} \frac{x^n dt'}{(1+x|t+t'|)^n} \right) dt = \\ &= Bx^{\frac{r}{2}+n} \int_0^{2\varrho} \left(\int_0^t \frac{x dt'}{(1+x(t-t'))^n} \right) dt; \end{aligned}$$

$$I_1 = Bx^{\frac{r}{2}} \int_0^{2\varrho} dt = Bx^3 \text{ für } r = 3,$$

$$I_1 = Bx^{\frac{r}{2}+1} \int_0^{2\varrho} \log(1+xt) dt = Bx^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \log x = O(g(x)) \text{ für } r > 3.$$

Im Integrationsbereich von I_2 ist $t' \geq 2|t|$, also nach (42) und Hilfssatz 5, 6 (Summationsbereich: (26))

$$\begin{aligned} I_2 &= B \int_{-\varrho}^{\varrho} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \sum_{h,k} \left(\int_{\mathfrak{C}} \left| \frac{F(s')}{s'} \right| \frac{dt'}{t'^n} \right) dt = \\ &= B \int_{-\varrho}^{\varrho} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}} \left(\sum_{h,k} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}}} \left(\frac{k}{h} \right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dt'}{(1+x|t'-\beta|)^{\frac{r}{2}}} \right) dt = \\ &= Bx^{\frac{3r}{4}-1} \sum_{h,k} h^{-n-1} k^{-\frac{r}{2}+n+1} = O(g(x)), \end{aligned}$$

wie man sofort nachrechnet.

Hilfssatz 8. $S_3 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Im Integrationsbereich von $P(h, k)$ ist (vgl. (33), (34)) nach Hilfssatz 6 $t > Chk^{-1}$, $t' > Chk^{-1}$, also $|s + s'| > Chk^{-1}$, also nach (42) und Hilfssatz 6 (Summationsbereich: (26))

$$\begin{aligned} S_3 &= B \sum_{h,k} \left(\frac{k}{h}\right)^{n+2} \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{x^{r-2} x \, dt \, dt'}{k^r (1 + x |t - \beta|)^{\frac{r}{2}} (1 + x |t' - \beta|)^{\frac{r}{2}}} = \\ &= B x^{r-2} \sum_{h,k} h^{-2} k^{n+2-r} = O(g(x)), \end{aligned}$$

wie man sofort nachrechnet.

Hilfssatz 9. $S_2 = O(g(x))$.

Beweis (für $x > C$). Ersetzt man t, t' im zweiten Integral (30) durch $t, -t'$, im dritten durch $-t, t'$, im vierten durch $-t, -t'$, so wird das Integrationsgebiet in allen vier Integralen $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $t' \in \mathfrak{C}_{h',k'}$, und $|t + t'|$ geht in $|t \pm t'|$ über; für $t > 0$, $t' > 0$ ist aber $|t + t'| > |t - t'|$. Nach den Symmetrieeigenschaften von (28), nach (42) und nach Hilfssatz 6 ist also

$$\begin{aligned} S_2 &= B \sum_{h,k,h',k'} \frac{k}{h} \frac{k'}{h'} \int_{\mathfrak{C}} \left(\int_{\mathfrak{C}} \frac{x^{r-2} x \, dt'}{k'^{\frac{r}{2}} (1 + x |t' - \beta'|)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{x} + |t - t'| \right)^n} \right) \times \\ &\quad \times \frac{x \, dt}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t - \beta|)^{\frac{r}{2}}} \quad (43) \end{aligned}$$

(Summationsbereich: (26), (32)). Aus Symmetriegründen genügt es, die Teilsumme T aller Glieder der rechten Seite von (43) mit

$$k' \geq k \quad (44)$$

zu betrachten. Wir setzen $T = T_1 + T_2$, wo T_1 die Glieder mit

$$0 < \left| \frac{h}{k} - \frac{h'}{k'} \right| \leq \frac{4}{k\sqrt{x}}, \quad (45)$$

T_2 die Glieder mit

$$\left| \frac{h}{k} - \frac{h'}{k'} \right| > \frac{4}{k\sqrt{x}} \quad (46)$$

enthält.

In jedem Glied von T_1 ist

$$\frac{1}{kk'} \leq \left| \frac{h}{k} - \frac{h'}{k'} \right| \leq \frac{4}{k\sqrt{x}} \quad (47)$$

also $\frac{1}{4}\sqrt{x} \leq k' \leq \sqrt{x}$ und $\frac{h'}{k'} > C \frac{h}{k}$ (denn $\frac{h}{k} \geq \frac{1}{k} > \frac{8}{k\sqrt{x}}$); weiter folgt aus (47)

$$|hk' - h'k| \leq 4; \quad hk' \equiv a \pmod{k}, \quad |a| \leq 4. \quad (48)$$

Bei gegebenen h, k hat also k' höchstens 9 Möglichkeiten modulo k , also höchstens $C\sqrt{x}k^{-1}$ Möglichkeiten überhaupt. Bei gegebenen h, k, k' hat h' nach (48) höchstens C Möglichkeiten.

Ist $r \neq 5$, so ersetze man in (43) den Faktor $(1 + x|t - t'|)^n$ durch 1; das Doppelintegral in (43) ist also gleich

$$Bx^{r-2+n} k^{-\frac{r}{2}} k'^{-\frac{r}{2}}.$$

Für $r = 5$ beachte man, daß stets

$$(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t' - \beta'|)(1 + x|t - t'|) > \\ x(|\beta - t| + |t - t'| + |t' - \beta'|) \geq x|\beta - \beta'| \geq \frac{2\pi x}{kk'} \geq \frac{2\pi\sqrt{x}}{k},$$

also ist das Doppelintegral in (43) gleich

$$Bx^{r-2+n} k^{-\frac{r}{2}} k'^{-\frac{r}{2}} \cdot \frac{k}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dt \cdot x dt'}{(1 + x|t - \beta|)^{\frac{3}{2}} (1 + x|t' - \beta'|)^{\frac{3}{2}}} = \\ = Bx^{r-2+n} k^{-\frac{r}{2}} k'^{-\frac{r}{2}} \cdot kx^{-\frac{1}{2}}.$$

Beachtet man nun, was nach (47), (48) über den Wertevorrat von h', k' bei gegebenen h, k gesagt wurde, so folgt nach (43) (wenn $a = 1$ für $r = 5$, $a = 0$ sonst)

$$T_1 = Bx^{r-2+n} \sum_{h,k,h',k'} \frac{k}{h} \frac{k'}{h'} k^{-\frac{r}{2}} k'^{-\frac{r}{2}} (kx^{-\frac{1}{2}})^a = \\ = Bx^{r-2+n} \sum_{h,k} k^2 h^{-2} k^{-\frac{r}{2}} x^{-\frac{r}{4}} \cdot \sqrt{x} k^{-1} (kx^{-\frac{1}{2}})^a = \\ = Bx^{\frac{3}{4}r - \frac{3}{2} + n - \frac{1}{2}a} \sum_{0 < k \leq \sqrt{x}} k^{-\frac{r}{2} + 1 + a},$$

und das gibt sofort in allen Fällen

$$T_1 = O(g(x)). \quad (49)$$

T_2 ist schwieriger. In jedem Glied von T_2 ist wegen (46), (44)

$$|\beta - \beta'| > \frac{8\pi}{k\sqrt{x}} \geq 2 \left(\frac{2\pi}{k\sqrt{x}} + \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}} \right). \quad (50)$$

Für $t \in \mathfrak{C}$, $t' \in \mathfrak{C}'$ ist nach (24)

$$|t - \beta| \leq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}, \quad |t' - \beta'| \leq \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}},$$

also nach (50)

$$\frac{1}{x} + |t - t'| > |t - t'| > \frac{1}{2} |\beta - \beta'| = \pi \left| \frac{h}{k} - \frac{h'}{k'} \right|,$$

also nach (43)

$$T_2 = B \sum_{h,k,h',k'} \frac{k}{h} \cdot \frac{k'}{h'} \cdot \frac{x^{r-2}}{k^{\frac{r}{2}} k'^{\frac{r}{2}}} \cdot \frac{k^n k'^n}{|hk' - h'k|^n}$$

mit dem Summationsbereich (26), (32), (44) (die Bedingung (46) lassen wir weg). Bei gegebenen h, k sei

$$U = U(h, k) = \sum_{h',k'} \frac{1}{h'k'^{\frac{r}{2}-1-n} |hk' - h'k|^n} \quad (51)$$

(Summationsbereich: (32), (44)), also

$$T_2 = B \sum_{h,k} \frac{x^{r-2} U(h, k)}{hk^{\frac{r}{2}-1-n}}. \quad (52)$$

(Summationsbereich: (26)). Man teile U in zwei Teilsummen $U = U_1 + U_2$, wo U_1 die Glieder mit $hk' - h'k > 0$, U_2 diejenigen mit $hk' - h'k < 0$ enthält.

In U_1 setze man mit ganzen a, b

$$hk' = h'k + a + bk \quad (0 < a \leq k, b \geq 0), \quad (53)$$

also

$$h' = \frac{hk' - a - bk}{k} \geq 1, \quad hk' \equiv a \pmod{k}; \quad (54)$$

also ist

$$U_1(h, k) = \sum_a \sum_{k'} k'^{n-\frac{r}{2}+1} V_1, \quad (55)$$

wo

$$V_1 = V_1(h, k, a, k') = \sum_b \frac{k}{(hk' - a - bk)(a + bk)^n}. \quad (56)$$

In U_2 setze man mit ganzen a, b

$$h'k = hk' + a + bk \quad (0 < a \leq k, b \geq 0), \quad (57)$$

also

$$h' = \frac{hk' + a + bk}{k}, \quad hk' \equiv -a \pmod{k}; \quad (58)$$

also ist

$$U_2(h, k) = \sum_a \sum_{k'} k'^{n - \frac{r}{2} + 1} V_2, \quad (59)$$

wo

$$V_2 = V_2(h, k, a, k') = \sum_b \frac{k}{(hk' + a + bk)(a + bk)^n}. \quad (60)$$

Für die folgenden Abschätzungen benutzen wir folgende wohlbekannte Tatsache: ist $\alpha < \gamma$, $f(u)$ monoton und $0 \leq f(u) \leq K$ für $\alpha \leq u \leq \gamma$, so ist

$$\sum_{\alpha \leq m \leq \gamma} f(m) \leq \int_{\alpha}^{\gamma} f(u) du + K.$$

Nach (56), (60) ist (es wird über b summiert)

$$V_1 = B \sum_{a+bk \leq \frac{hk'}{2}} \frac{k}{hk' (a + bk)^n} + B \sum_{a+bk > \frac{hk'}{2}} \frac{k}{(hk' - a - bk) h^n k'^n}; \quad (61)$$

$$V_2 = B \sum_{a+bk \leq \frac{hk'}{2}} \frac{k}{hk' (a + bk)^n} + B \sum_{a+bk > \frac{hk'}{2}} \frac{k}{(a + bk)^{n+1}}. \quad (62)$$

Die erste Summe in (61), (62) ist (wegen $0 < a \leq k$, $b \geq 0$)

$$B \frac{k}{hk'} \left(\frac{1}{a^n} + \sum_{1 \leq b \leq \frac{hk'}{2k}} \frac{1}{b^n k^n} \right). \quad (63)$$

In der zweiten Summe von (61) läuft $hk' - a - bk$ nach (54) über positive Vielfache von k , welche $< hk'$ sind; also ist diese Summe

$$B \frac{k}{h^n k'^n} \sum_{1 \leq \lambda < \frac{hk'}{k}} \frac{1}{\lambda k} = B \frac{\log \frac{2hk'}{k}}{h^n k'^n}. \quad (64)$$

Die zweite Summe in (62) ist endlich

$$Bk \left(\frac{1}{h^{n+1} k'^{n+1}} + \int_{a+uk > \frac{hk'}{2}} \frac{du}{(a + uk)^{n+1}} \right) = \frac{B}{h^n k'^n} = B \frac{\log \frac{2hk'}{k}}{h^n k'^n}. \quad (65)$$

Nach (63), (64), (65) ist also für $j = 1, 2$

$$V_j = \frac{B}{hk'} \left(\frac{k}{a} + \log \frac{2hk'}{k} \right) \text{ für } r > 3 \quad (66)$$

und (wegen $0 < a \leq k$, $\log \frac{2hk'}{k} = Bhk'$)

$$V_j = \frac{B}{hk'} \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\log \frac{2hk'}{k}}{hk'} \right) = \frac{B}{hk'} \left(\frac{k}{a^2} + 1 \right) \text{ für } r = 3. \quad (67)$$

Nach (55), (59), (66), (67) ist also für $j = 1, 2$:

$$U_j(h, k) = \frac{B}{h} \sum_{a=1}^k \sum_{k' \atop k'^{\frac{r}{2}-1}} \frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-1}} \left(\frac{k}{a} + \log \frac{2hk'}{k} \right) \text{ für } r > 3, \quad (68)$$

$$U_j(h, k) = \frac{B}{h} \sum_{a=1}^k \sum_{k' \atop k'^{\frac{r}{2}-2}} \frac{1}{k'^{\frac{r}{2}-2}} \left(\frac{k}{a^2} + 1 \right) \text{ für } r = 3. \quad (69)$$

Bei gegebenem a läuft k' in (68), (69) über ganze Zahlen $k \leq k' \leq \sqrt{x}$, welche nach (54), (58) einer bestimmten Klasse modulo k angehören; d. h. k' nimmt nur Werte von der Gestalt $q + mk$ an, wo m ganz, $k \leq q + mk \leq \sqrt{x}$ und wo die ganze Zahl q nur von h, k, a, j abhängt. Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq q + mk \leq \sqrt{x}} (q + mk)^{\frac{1}{2}} &= B(x^{\frac{1}{4}} + \int (q + uk)^{\frac{1}{2}} du) = \\ &= B(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{4}} k^{-1}) = Bx^{\frac{3}{4}} k^{-1}. \end{aligned} \quad (70)$$

Für $r > 3$ ist

$$\sum_{k \leq q + mk \leq \sqrt{x}} (q + mk)^{-\frac{r}{2}+1} = B(k^{-\frac{r}{2}+1} + \int (q + uk)^{-\frac{r}{2}+1} du); \quad (71)$$

das gibt

$$Bk^{-\frac{r}{2}+1} \text{ für } r > 4, \quad (72)$$

$$B \left(k^{-1} + k^{-1} \log \frac{\sqrt{x}}{k} \right) = Bk^{-1} \log \frac{2\sqrt{x}}{k} \text{ für } r = 4. \quad (73)$$

Wird schließlich

$$f(u) = \frac{\log \frac{q + uk}{k}}{(q + uk)^{\frac{r}{2}-1}}$$

($r > 3$) gesetzt, so ist

$$\frac{df(u)}{du} = \frac{k}{(q + uk)^{\frac{r}{2}}} \left(-\left(\frac{r}{2} - 1\right) \log \frac{q + uk}{k} + 1 \right).$$

Im Intervall $k \leq q + uk < \infty$ ist also die Funktion $f(u)$ nicht negativ, steigt bis zu $q + uk = k \exp\left(\frac{2}{r-2}\right)$, wo sie einen Wert $Ck^{-\frac{r}{2}+1}$ annimmt und fällt dann. Setzt man also zur Abkürzung

$$L = \sum_{k \leq q + mk \leq \sqrt{x}} \frac{\log \frac{q + mk}{k}}{(q + mk)^{\frac{r}{2}-1}}, \quad (74)$$

so ist

$$\begin{aligned} L &= B \left(\frac{1}{k^{\frac{r}{2}-1}} + \int_{k \leq q + uk \leq \sqrt{x}} f(u) du \right) = \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}} \left(1 + \int_1^{\frac{\sqrt{x}}{k}} \frac{\log w}{w^{\frac{r}{2}-1}} dw \right) = \\ &= \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}} \left(1 + \left(\log \frac{\sqrt{x}}{k} \right)^{2\varepsilon} \right) = \frac{B}{k^{\frac{r}{2}-1}} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^{2\varepsilon}, \end{aligned} \quad (75)$$

wo $\varepsilon = 1$ für $r = 4$, $\varepsilon = 0$ für $r > 4$.

Daher gilt nach (68), (69), (70), (71), (72), (73), (74), (75), (52):

A. Für $r = 3$:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = \frac{B}{h} \sum_{a=1}^k \sum_{k'} k'^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{a^2} + 1 \right) = \\ &= \frac{B}{h} \sum_{a=1}^k x^{\frac{3}{4}} k^{-1} \left(\frac{k}{a^2} + 1 \right) = \frac{Bx^{\frac{3}{4}}}{h}; \\ T_2 &= B \sum_{h,k} x^{\frac{7}{4}} k^{\frac{3}{2}} h^{-2} = O(x^3). \end{aligned}$$

B. Für $r > 3$:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 = \frac{B}{h} \sum_{a=1}^k k^{-\frac{r}{2}+1} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^{2\varepsilon} \left(\frac{k}{a} + \log 2h + 1 \right) = \\ &= \frac{B}{hk^{\frac{r}{2}-2}} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^{2\varepsilon} (\log 2h + \log k). \end{aligned} \quad (76)$$

Daraus folgt für $r > 4$

$$T_2 = Bx^{r-2} \sum_{h,k} \frac{\log 2h + \log k}{h^2 k^{r-4}},$$

und das ist Bx^{r-2} für $r > 5$, $Bx^{r-2} \log^2 x$ für $r = 5$. Für $r = 4$ ist aber nach (76), (52)

$$\begin{aligned} T_2 &= Bx^2 \sum_{h,k} \frac{\log 2h + \log k}{h^2} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^2 = \\ &= Bx^2 \log x \cdot \sum_k \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^2 = \\ \sum_k \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{k} \right)^2 &= B \left(\log^2 x + \int_1^{\sqrt{x}} \left(\log \frac{2\sqrt{x}}{u} \right)^2 du \right) = \\ &= B \left(\log^2 x + \sqrt{x} \int_1^{\sqrt{x}} (\log 2v)^2 \cdot \frac{dv}{v^2} \right) = B\sqrt{x}, \end{aligned}$$

also $T_2 = Bx^{\frac{5}{2}} \log x$. Damit haben wir auch für T_2 die gewünschte Abschätzung erhalten.

Hilfssatz 10. Für $h > 0$, $k > 0$, $\{h, k\} = 1$ sei

$$Z(h, k) = \frac{|S_{h,k}|^2 \pi^r}{k^{2r-2} h^2 D}; \quad (77)$$

dann ist

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{h,k} Z(h, k) \cdot \frac{x^3}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})} + O(g(x)) \text{ für } r = 3, \\ S_4 &= \sum_{h,k} Z(h, k) \cdot \frac{x^{r-1}}{(r-1)\Gamma^2(\frac{r}{2})} + O(g(x)) \text{ für } r > 3. \end{aligned}$$

(Summationsbereich: (26).)

Beweis (für $x > C$). Man denke sich für einen Augenblick zwei Zahlen h, k mit (26) gegeben und man setze (wo sich die oberen und unteren Zeichen entsprechen)

$$f_1^\pm(s) = \frac{F(s)}{s} - \frac{S_{\pm h, k} \pi^{\frac{r}{2}}}{sk^r \sqrt{D} (s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}};$$

$$f_2^\pm(s) = \frac{S_{\pm h, k} \pi^{\frac{r}{2}}}{k^r \sqrt{D} (s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}} \left(\frac{1}{s} \mp \frac{1}{i\beta} \right);$$

$$f_3^\pm(s) = \pm \frac{1}{i\beta} \frac{S_{\pm h, k} \pi^{\frac{r}{2}}}{k^r \sqrt{D} (s \mp i\beta)^{\frac{r}{2}}},$$

also $s^{-1} F(s) = f_1^\pm(s) + f_2^\pm(s) + f_3^\pm(s)$.

Weiter setze man

$$V = V(h, k) = \int_{\mathfrak{C}} \left(\int_{-\mathfrak{C}} f_3^+(s) f_3^-(s') \frac{e^{x(s+s')}}{(s+s')^n} dt' \right) dt,$$

$$W = W(h, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt' \right) dt \text{ (derselbe Integrand wie in } V \text{)}.$$

Für $t \in \pm \mathfrak{C}$ ist

$$\frac{1}{s} \mp \frac{1}{i\beta} = \frac{\mp s + i\beta}{si\beta} = B \frac{k^2}{h^2} \left(\frac{1}{x} + |t \mp \beta| \right) = B \frac{k}{h},$$

also

$$f_1^\pm(s) = B x^{\frac{r}{4}} \frac{k}{h}, \quad f_2^\pm(s) = B \frac{k^2}{h^2} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t \mp \beta|)^{\frac{r}{2}-1}},$$

$$|f_1^\pm(s)| + |f_2^\pm(s)| + |f_3^\pm(s)| = B \frac{k}{h} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t \mp \beta|)^{\frac{r}{2}}}.$$

(Für das obere Zeichen folgen diese Beziehungen direkt aus (24), Hfs. 3 und 6; für das untere muß man noch zum konjugiert komplexen s übergehen.) Also ist (wenn man t' durch $-t'$ und daher das Integrationsintervall $-\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}$ ersetzt)

$$N(h, k) - V(h, k) =$$

$$= B \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{C}} \frac{k^2}{h^2} \frac{x^{\frac{r}{2}+n-2} x dt x dt'}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t - \beta|)^{\frac{r}{2}} (1 + x |t - t'|)^n} \times \\ \times \left(x^{\frac{r}{4}} + \frac{k}{h} \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}} (1 + x |t' - \beta|)^{\frac{r}{2}-1}} \right) =$$

$$= B \frac{x^{\frac{r}{2}+n-2}}{h^2 k^{\frac{r}{2}-2}} \int_{-\infty}^{\frac{4\pi}{k\sqrt{x}}} \left(x^{\frac{r}{4}} \int_{-\frac{4\pi}{k\sqrt{x}}}^{\frac{4\pi}{k\sqrt{x}}} \frac{x dv}{(1+x|v|)^n} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}} \int_{-\frac{2\pi}{k\sqrt{x}}}^{\frac{2\pi}{k\sqrt{x}}} \frac{x dv}{(1+x|v|)^{\frac{r}{2}-1}} \right) \times \\ \times \frac{x dt}{(1+x|t-\beta|)^{\frac{r}{2}}}$$

Das ergibt für $r = 3$

$$N(h, k) - V(h, k) = B \frac{x^{\frac{3}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{h^2} \left(x^{\frac{3}{4}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{k} \right) = B x^{\frac{3}{4}} k^{\frac{1}{2}} h^{-2} \quad (78)$$

und für $r > 3$

$$N(h, k) - V(h, k) = B \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{h^2 k^{\frac{r}{2}-2}} \left(x^{\frac{r}{4}} \log x + \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{k^{\frac{r}{2}-1}} \log^\varepsilon x \right), \quad (79)$$

wo wieder $\varepsilon = 1$ für $r = 4$, $\varepsilon = 0$ für $r > 4$. Nun bezeichne man mit $\mathfrak{Q}$ die Menge aller reellen Zahlen, die nicht in $\mathfrak{C}_{h,k}$ liegen; dann ist nach Hilfssatz 3

$$V(h, k) - W(h, k) = \frac{B k^2 x^{r+n-2}}{k^r h^2} (I_1 + I_2), \quad (80)$$

wo (man ersetzt t' durch $-t'$)

$$I_1 = \int_{\mathfrak{C}} \left(\int_{\mathfrak{C}} \frac{x dt'}{(1+x|t-\beta|)^{\frac{r}{2}} (1+x|t'-\beta|)^{\frac{r}{2}} (1+x|t-t'|)^n} \right) x dt, \\ I_2 = \int_{\mathfrak{C}} \left(\int_{\mathfrak{C}} \frac{x dt'}{\dots\dots\dots} \right) x dt \text{ (derselbe Nenner wie in } I_1 \text{)}.$$

Man beachte, daß nach (24) für $t \in \mathfrak{C}$ gilt $|t-\beta| \leq \frac{2\pi}{k\sqrt{x}}$; für $t \in \mathfrak{Q}$ gilt $|t-\beta| > \frac{\pi}{k\sqrt{x}}$. Ersetzt man $1+x|t-t'|$ durch 1, so folgt

$$I_1 = B \left(\frac{k}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{r}{2}-1}, \quad I_2 = B \left(\frac{k}{\sqrt{x}} \right)^{r-2}. \quad (81)$$

Für $r = 5$ bemerke man noch, daß im Integrationsgebiet von I_1 gilt $|t'-\beta| > \frac{\pi}{k\sqrt{x}}$; also ist entweder $|t-\beta| > \frac{\pi}{2k\sqrt{x}}$ oder $|t-t'| > \frac{\pi}{2k\sqrt{x}}$, also stets $(1+x|t-\beta|)(1+x|t-t'|) >$

$> \frac{\pi\sqrt{x}}{2k}$, also

$$I_1 = B \frac{k}{\sqrt{x}} \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{C}} \frac{x dt'}{(1+x|t-\beta|)^{\frac{3}{2}} (1+x|t'-\beta|)^{\frac{3}{2}}} \right) x dt = B \left(\frac{k}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (82)$$

Nach (80), (81), (82) und wegen $0 < k \leq \sqrt{x}$ ist also für $r \geq 3$

$$V(h, k) - W(h, k) = B \frac{k^2 x^{r+n-2}}{k^r h^2} \left(\frac{k}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{r}{2}-1+\eta}, \quad (83)$$

wo $\eta = 1$ für $r = 5$, $\eta = 0$ sonst.

Wegen $S_{h,k} S_{-h,k} = |S_{h,k}|^2$, $\beta = \frac{2\pi h}{k}$ ist nach (77)

$$W(h, k) = \frac{Z(h, k)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(s+s')} dt dt'}{(s-i\beta)^{\frac{r}{2}} (s'+i\beta)^{\frac{r}{2}} (s+s')^n}.$$

Schreibt man nun ds, ds' statt $i dt, i dt'$, führt neue Variablen s, s' statt $s-i\beta, s'+i\beta$ ein und benutzt Hilfssatz 1, so bekommt man (wenn von nun an ausnahmsweise $s = 2 + ti$, $s' = 2 + t'i$ gesetzt wird)

$$4\pi^2 W(h, k) = -Z(h, k) \int_2^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{e^{x(s+s')} ds ds'}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}} (s+s')^n}. \quad (84)$$

Nun ist bekanntlich für $u > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_2^{\infty} \frac{e^{us}}{s^{\frac{r}{2}}} ds = \frac{u^{\frac{r}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Also ist (absolute Konvergenz nach Hilfssatz 1, also Vertauschbarkeit der Integrationsfolge)

$$\begin{aligned} \frac{x^{r-1}}{(r-1) \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^x \left(\int_2^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{e^{u(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}}} ds ds' \right) du = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_2^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{e^{x(s+s')} - 1}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}} (s+s')} ds ds' = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_2^{\infty} \int_2^{\infty} \frac{e^{x(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}} (s+s')} ds ds' + B \end{aligned}$$

und durch nochmalige Integration ebenso

$$\begin{aligned} \frac{x^r}{r(r-1)\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^x \left(\int_2^{\frac{x}{s}} \int_2^{\frac{x}{s'}} \frac{e^{u(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}} (s+s')} ds ds' \right) du + Bx = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_2^{\frac{x}{2}} \int_2^{\frac{x}{s}} \frac{e^{x(s+s')}}{s^{\frac{r}{2}} s'^{\frac{r}{2}} (s+s')^2} ds ds' + B + Bx. \end{aligned}$$

Also ist nach (84), wenn man bemerkt, daß aus Hilfssatz 3

$$Z(h, k) = Bh^{-2}k^{-r+2} \quad (85)$$

folgt,

$$W(h, k) = Z(h, k) \frac{x^3}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})} + B \frac{x}{h^2 k} \text{ für } r = 3 \quad (86)$$

$$W(h, k) = Z(h, k) \frac{x^{r-1}}{(r-1)\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} + Bh^{-2}k^{-r+2} \text{ für } r > 3. \quad (87)$$

Aus (78), (83), (86) bzw. (79), (83), (87) folgt (Summationsbereich: (26)) für $r = 3$

$$\begin{aligned} S_4 = \sum_{h,k} N(h, k) &= \frac{1}{6\Gamma^2(\frac{3}{2})} x^3 \sum_{h,k} Z(h, k) + \\ &+ B \sum_{h,k} (x^{\frac{3}{2}} k^{\frac{1}{2}} h^{-2} + x^{\frac{11}{4}} k^{-\frac{1}{2}} h^{-2} + xk^{-1} h^{-2}) \end{aligned} \quad (88)$$

und für $r > 3$

$$\begin{aligned} S_4 = \sum_{h,k} N(h, k) &= \frac{1}{(r-1)\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} x^{r-1} \sum_{h,k} Z(h, k) + B \sum_{h,k} \frac{1}{h^2 k^{\frac{r}{2}-2}} \times \\ &\times \left(x^{\frac{3}{4}r-1} \log x + \frac{x^{\frac{r-2}{2}}}{k^{\frac{r}{2}-1}} \log^e x + \left(\frac{k}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{r}{2}-1+n} \frac{x^{r+n-2}}{k^{\frac{r}{2}}} + \frac{1}{k^{\frac{r}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Der Koeffizient von B in (88) ist Bx^3 ; der Koeffizient von B in (89) ist $Bx^{\frac{3}{2}} \log x$ für $r = 4$, $Bx^3 \log x$ für $r = 5$, Bx^{r-2} für $r > 5$.

Beweis des Satzes 1. Σ' bedeute, daß die entsprechende Summationsvariable nur über solche Werte läuft, die zu k teilerfremd sind. Nach (77) und Hilfssatz 3 ist für $r > 3$

$$x^{r-1} \sum_{k > \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} Z(h, k) = Bx^{r-1} \sum_{k > \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-2} k^{-r+2} = O(g(x));$$

nach Hilfssatz 7, 8, 9, 10 und nach (35) ist also

$$M(x) = \frac{x^{r-1}}{2\pi^2 (r-1) \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} Z(h, k) + O(g(x)),$$

womit Satz 1 für $r > 3$ mit

$$H = \frac{\pi^{r-2}}{2D (r-1) \Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2} h^2} \quad (90)$$

bewiesen ist.

Es sei nun $r = 3$. Es ist

$$\sum_{0 < k \leq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} Z(h, k) = \frac{\pi^3}{D} \sum_{0 < k \leq \sqrt{x}} k^{-4} \sum_{a=1}^k |S(a, k)|^2 \sum_{b=0}^{\infty} (a + bk)^{-2}.$$

Aber $\sum_{b=0}^{\infty} (a + bk)^{-2} = a^{-2} + B \sum_{b=1}^{\infty} b^{-2} k^{-2} = a^{-2} + Bk^{-2}$; nach

Hilfssatz 3 und (15) ist also

$$\sum_{0 < k \leq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} Z(h, k) = \frac{\pi^3}{D} \mathfrak{S}(x) + B \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \cdot k \cdot k^3 \cdot k^{-2}$$

und das letzte Glied ist B . Aus (35) folgt also nach Hilfssatz 7, 8, 9, 10 und wegen $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$M_2(x) = \frac{x^3}{3D} \mathfrak{S}(x) + Bx^3. \quad (91)$$

Es ist (alles für $x > C$)

$$\mathfrak{S}(x) = B \sum_{0 < k \leq \sqrt{x}} k^{-4} \sum_{a=1}^k k^3 a^{-2} = B \log x, \quad (92)$$

$$\mathfrak{S}(x) - \mathfrak{S}\left(\frac{x}{2}\right) = B \sum_{\frac{\sqrt{x}}{2} < k \leq \sqrt{x}} k^{-1} \sum_{a=1}^k a^{-2} = B. \quad (93)$$

Man setze nun $\lambda = (\log x)^{-\frac{1}{2}}$ und beachte, daß $M(x) = M_1(x)$ und $\mathfrak{S}(x)$ nichtabnehmende Funktionen von x sind. Also ist nach (91), (92), (93)

$$\lambda x M_1(x) \geq \int_{x(1-\lambda)}^x M_1(y) dy = M_2(x) - M_2(x(1-\lambda)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3D} (x^3 \mathfrak{S}(x) - x^3 (1 - \lambda)^3 (\mathfrak{S}(x) + B)) + Bx^3 = \\
&= \frac{1}{3D} 3x^3 \lambda \mathfrak{S}(x) + B\lambda^2 x^3 \mathfrak{S}(x) + Bx^3, \\
\lambda x M_1(x) &\leq \int_x^{x(1+\lambda)} M_1(y) dy \leq \frac{x^3 \lambda}{D} \mathfrak{S}(x) + B\lambda^2 x^3 \mathfrak{S}(x) + Bx^3.
\end{aligned}$$

Daraus und aus der Behauptung **B** des Hilfssatzes 3 ergibt sich

$$M_1(x) = \frac{x^2}{D} \mathfrak{S}(x) + B\lambda x^2 \mathfrak{S}(x) + B\lambda^{-1} x^2,$$

$$M(x) = x^2 \frac{G}{D} \log x + Bx^2 \log^{\frac{1}{2}} x;$$

damit ist Satz 1 auch für $r = 3$ bewiesen und zwar mit

$$H = \frac{G}{D} = \frac{1}{4D^2} \sum_{\delta} \frac{1}{\delta} \sum_{(f)} \sum_{h=1}^{\infty} * \frac{\alpha_h(\delta, (f))}{h^3},$$

wo die Bedeutung der rechten Seite aus dem Beweise des Hilfssatzes 3 abzulesen ist.

Es ist noch zu bemerken, daß Herr Walfisz⁵⁾ im Falle $r = 4$ den Ausdruck (90) für H gefunden und in zahlreichen Spezialfällen ausgewertet hat.

*

Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů.

5. pojednání.

(Obsah předešlého článku.)

Budiž $P(x)$ mřížový zbytek pro elipsoid

$$\sum_{\mu, \nu=1}^r c_{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} \leq x \quad (x > 0, r \geq 3, c_{\mu\nu} \text{ celá}).$$

Potom existuje kladné číslo H , závislé jen na $r, c_{\mu\nu}$ tak, že platí

$$\int_0^x P^2(y) dy = Hx^2 \log x + O(x^2 \log^{\frac{1}{2}} x) \quad \text{pro } r = 3,$$

$$\int_0^x P^2(y) dy = Hx^{r-1} + O(g(x)) \quad \text{pro } r > 3,$$

kde $g(x) = x^{\frac{3}{2}} \log x$ pro $r = 4$, $g(x) = x^3 \log^2 x$ pro $r = 5$, $g(x) = x^{r-2}$ pro $r > 5$.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Messungen der atmosphärischen Absorption auf terrestrischer Basis.

(Vorläufige Mitteilung.)

V. Guth — F. Link, Praha.

(Eingegangen am 30. Oktober 1939.)

Es gibt zwei Methoden, die Absorption des Lichtes durch die Atmosphäre zu bestimmen. Die erste Methode ist die astronomische, die aus den Helligkeitsbestimmungen der Sonne oder der Gestirne in verschiedenen Höhen über dem Horizonte besteht. Die Lichtstrahlen müssen durch verschieden mächtige Luftmassen durchdringen und wir sind so im Stande den Absorptionskoeffizienten auf 1 km zu bestimmen. Bei der zweiten Methode — der terrestrischen — messen wir die Helligkeit einer konstanter Lichtquelle (einer Lampe) aus zwei recht verschiedenen aber bekannten Distanzen; wir können dann den Absorptionskoeffizienten für die betreffende Meereshöhe berechnen.

Jede von diesen Methoden hat ihre Vorzüge und ihre Nachteile. Bei der astronomischen Methode haben wir die Bahnlängen bis zu 300 km zur Verfügung, aber die Berechnung dieser Bahnen hängt von der Struktur der Atmosphäre ab und ist für die Schichten in der Nähe des Horizontes recht unsicher. Die Messungen können nur bei klarem Wetter ausgeführt werden und verlangen verhältnismäßig viel Zeit, während deren sich die Absorption ändern kann. Die terrestrische Methode ist eigentlich eine Laboratorium-Methode in großem Maaßstabe. Da die 1 km Luftschicht nur einige Prozente der Strahlung absorbiert, sind wir gezwungen, große Distanzen zu benutzen; bei diesen aber wird die Schwächung der Strahlung durch die Divergenz der Strahlen (nach dem Quadrat-Gesetz) weit die Absorption übertreffen. Eine Benutzung von Spiegel oder Linsen zur Mäßigung dieser Verluste ist nicht gut durchführbar.

Für unsere terrestrischen Messungen benutzten wir eine elektrische Philips-Lampe, die einen Verbrauch von 5000 Watt bei

horizontaler Lichtstärke von 16.000 Kerzen hatte. Hinter der Lampe befand sich ein kegelförmiger Reflektor, dessen Innenfläche mit Asbest belegt war; damit erhöhte sich die Lichtstärke um 75%; da aber die Lampe nur mit 90% Leistung arbeitete, kompensierte sich beinahe diese Erhöhung. Die Lichtstärke wurde mittels eines Präzisionsampèremeters und Rheostats auf gleicher Höhe gehalten. Bei den photometrischen Messungen benutzten wir einen photographischen Spektralphotometer der von F. Link projiziert und konstruiert wurde (1). Seine Einrichtung ist aus

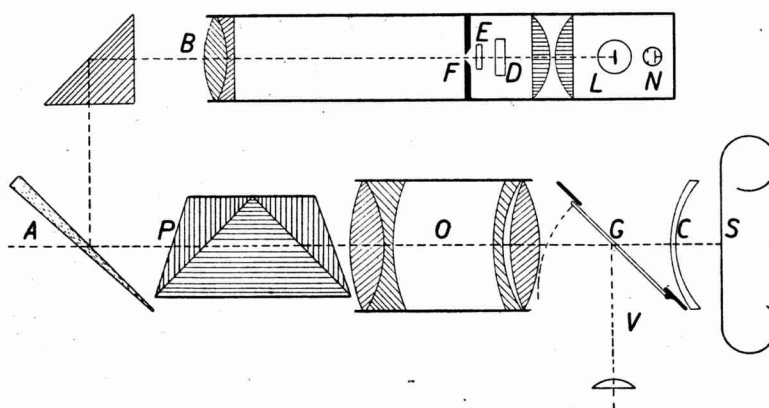


Abb. 1. Photographischer Spektralphotometer von F. Link.

der 1. Abb. ersichtlich: Die Strahlen kommen von der entfernten Lichtquelle in der Richtung AS und nachdem sie das Objektivprisma P und das Objektiv O passiert haben, erzeugen sie das Spektrum der Lichtquelle auf dem lichtempfindlichen Filme S . Die Zylinderlinse C verbreitet das fadenförmige Spektrum. Der kippbare Spiegel G dient einerseits als Verschuß, andererseits in Verbindung mit der Lupe V als Sucher. Mit Hilfe der Keilglasplatte A wird sogleich das Spektralbild des Spaltes F , der sich im Brennpunkte des Kollimators B befindet, neben dem Spektrum der Lichtquelle abgebildet. Der Spalt ist durch einen Stufenfilter E auf 6 Teile verschiedener Dichte, die zur photometrischen Eichung des Filmes dienen, aufgeteilt. Der Spalt ist durch eine kleine elektrische Lampe L beleuchtet, deren Lichtstärke auf konstantem Werte gehalten wird. Eine Neon-Lampe N dient zur Eichung der Dispersion des Spektrographen. Da das Prisma P durch das Objektiv O nicht vollkommen gedeckt ist, entsteht auf dem Filme neben den Spektren auch das direkte Bild der Lichtquelle, das wir als Ausgangspunkt für die Wellenlängenmessungen

benutzen können. Um die Helligkeiten der Vergleichspektern dem beobachteten Spektrum in größerem Maaße anpassen zu können, ist es möglich, einen Zusatzfilter in dem Strahlengang bei *A* oder *D* beizufügen.

Konstruktionsangaben des Spektrographen: *O* Ross-Petzval Objektiv $\varnothing$ 84 mm, $f = 244$ mm. *P* geradsichtiges Objektiv-

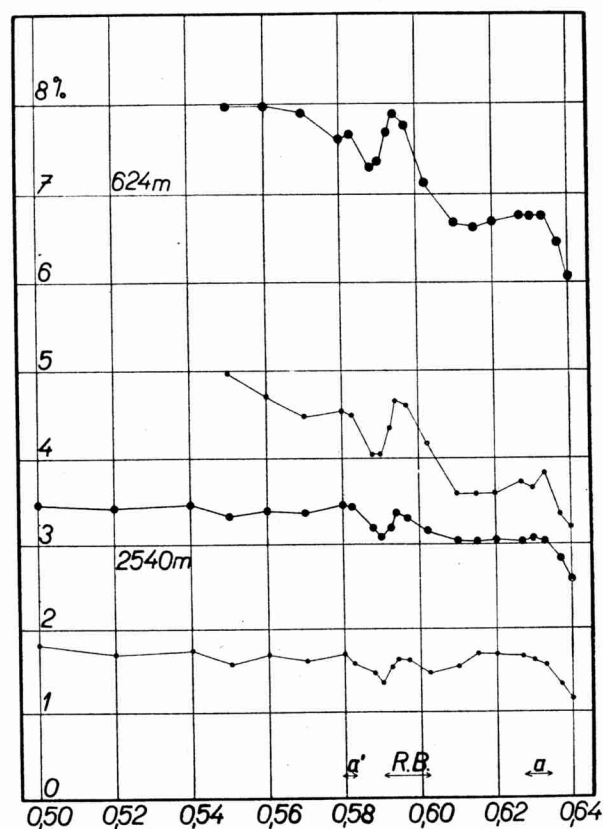


Abb. 2. Absorption von 1 km Luftschicht in den Höhen 624 m und 2540 m.

prisma (für K-Linie); Dispersion für $0,45 \mu - 0,65 \mu$ ist $2,96^\circ$, d. h. mit dem Objektiv *O* ist sie auf der Platte 12,5 mm gleich.

Die Eichung des Spektrographen und die Messungen der Aufnahmen mit dem Microphotometer (2) wurden in dem Laboratorium der Prager Sternwarte ausgeführt.

Die Theorie der Absorptionsmessungen auf terrestrischer Basis

ist wie folgt: Wir finden die Intensität einer konstanten Lichtquelle, aus der kleineren Entfernung r_1 gemessen, auf I_1 , aus der größeren Entfernung r_2 , auf I_2 . Wir nehmen an, daß im ersten Falle der Absorptionskoeffizient a_1 , im zweiten Falle a_2 war. Das Verhältnis beider Intensitäten ist dann folgendes:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot 10^{a_2 r_2 - a_1 r_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot 10^{a_2(r_2 - r_1) + (a_2 - a_1) \cdot r_1}.$$

Aus diesem Ausdrucke bekommen wir für den Absorptionskoeffizienten a_2 auf der Strecke r_2 :

$$a_2 = \frac{\log \frac{I_1}{I_2} - 2 \log \frac{r_2}{r_1}}{r_2 - r_1} - \frac{a_2 - a_1}{r_2 - r_1} \cdot r_1,$$

wo $r_2 \gg r_1$, und da auch der Unterschied $a_2 - a_1$ gering ist, können wir uns nur auf das erste Glied beschränken.

Die Messungen wurden in einer Höhe von 2540 m auf der Strecke von 62 km einerseits, und in einer Höhe von 624 m auf der Strecke von 35 km anderseits im September 1938 und im August 1939 ausgeführt.

Die Mittelwerte der Absorptionskoeffizienten a , sowie die Minimalwerte $a_{\min}$, als auch die theoretischen Werte a_t , für die betreffenden Höhen sind in der Tabelle I angegeben. Dabei sind alle a Werte in 0,0001 auf 1 km Einheiten angeführt.

Tabelle I.

Höhe:	2540 m	624 m		2540 m	624 m
λ Å	a $a_{\min}$ a_t	a $a_{\min}$ a_t	λ Å	a $a_{\min}$ a_t	a $a_{\min}$ a_t
5000	153 80 59	.	5940	149 72 29	358 207 35
5200	151 75 50	.	5970	146 72 28	352 205 34
5400	153 77 43	.	6020	139 65 28	321 185 34
5500	147 70 40	361 222 50	6100	134 68 26	301 159 33
5600	150 75 37	361 210 46	6150	134 75 25	298 159 30
5700	149 72 34	358 199 43	6200	135 75 24	301 159 29
5800	153 75 32	344 202 40	6270	134 74 23	304 165 27
5825	152 70 32	347 199 39	6300	135 72 23	304 162 27
5880	141 65 31	330 179 38	6330	134 69 22	304 170 27
5900	136 60 30	332 179 37	6370	125 59 22	290 148 26
5925	149 68 30	349 193 36	6400	114 51 22	272 142 26

Die theoretischen Koeffizienten sind nach der Rayleigh-Cabannes Formel berechnet und zeigen sich vielfach kleiner als

die beobachteten Minimalwerte. Die Ursache ist in Anwesenheit des Staubes zu suchen. Der Unterschied $a_{\min} - a_t$ zeigt sich auch für die niedrigere Station größer.

Die Resultate sind auch in der Abb. 2 graphisch wiedergegeben (große Kreise für Mittelwerte, kleine für Minimalwerte). Aus den Messungen ist auch die Anwesenheit der O_2 , α' Banden in der Umgebung von $5810 \text{ \AA}$, und des Wassers H_2O bei $5950 \text{ \AA}$ und bei $6300 \text{ \AA}$ ersichtlich.

Eine eingehende Analyse der a -Werte mit der Wetterlage wird später folgen.

Wir wollen nicht diese Gelegenheit versäumen, um unseren besten Dank allen, die uns bei dieser Arbeit geholfen haben, insbesondere dem Čechischen Nationalforschungsrat der eine finanzielle Unterstützung bewilligt hat, auszusprechen.

Prager Sternwarte.

*

Měření atmosférické absorpce na pozemské základně.

(Obsah předešlého článku.)

Článek obsahuje předběžné sdělení o výsledcích měření atmosférické absorpce na vodorovné základně 62 km dlouhé ve výši 2540 m n. m. a na základně 35 km dlouhé ve výši 624 m n. m. Měření byla vykonána fotograficky spektrálním fotometrem (viz obr. 1). Výsledky měření jsou znázorněny graficky na obr. 2 a jsou uvedeny v tabulce I. Podrobnější rozbor v souvislosti s meteorologickou situací bude uveřejněn později.

Literatur:

1. F. Link: Trans. Int. Astr. Un., **6** (1939), 368.
 2. F. Link: Čas. mat. a fys., Praha, **68** (1939), 198.
- Kreslil F. Link. Archiv JČMF.

O separování slabých nediagramových čar K-serie.

(Nová metoda a výsledky.)

V. Dolejšek a Jar. Ježek, Praha.

(Došlo 12. února 1940.)

V práci je učiněn pokus zvýšiti rozlišovací mohutnost při stanovení slabých čar zvýšením délkové disperse a zvýšením gradace jako součtu několika gradačních křivek. Za účelem zvýšení délkové disperse bylo použito aparatury o celkovém chodu X paprsků 6 m (při níž záření procházelo trubicemi plněnými vodíkem, aby se snížila absorpce). Za účelem zvýšení gradace byly snímky „přefotografovány“ způsobem v práci uvedeným.

Výsledky u CuK serie ukázaly, že tímto způsobem lze nejen bezpečně rozlišiti dublet $\text{CuK}\alpha_{3,4}$, nýbrž i naléztí dosud nezjištěnou strukturu čáry α_4 a dosud nepozorovanou čáru α' . Na rozdíl od výsledků získaných krystalem NaCl bylo u krystalu ZnS bezpečně zjištěno, že nedává reflexi čáry α_3 , ač všechny ostatní nové čáry souhlasí s výsledky na krystalu NaCl. Uspokojící výklad tohoto fakta nelze z dosavadních výsledků podati.

Celkový výsledek ukazuje, že fokusační metoda použitá uvedeným způsobem převyšuje metody ionizační i metody používající počítače.

Intensita nediagramových čar převyšuje jen o málo povšechné černání na fotografické desce způsobené spojitým zářením a difusí X-paprsků na krystalech i na ostatních částech spektrografu. Jak výsledky ukazují, je tento podklad, který se objevuje při dlouhých exposicích, velmi silný zvláště při nedokonalých krystalech a není rovnoměrný, což ukazuje na různý „stupeň nedokonalosti“ na jednotlivých místech krystalu. Výsledky různých autorů ukázaly, že s některými krystaly, které byly dokonalé na určitém místě, tedy pro určitou vlnovou délku, bylo možno naléztí novou čáru, kterou řada jiných autorů s jinými krystaly najítí nemohla. Ukázalo se zvláště, že řadu nových nediagramových čar je možno zjistiti metodami fokusačními. V tom směru poukazujeme na práci jednoho z autorů a V. Vranského¹⁾ uveřejněnou v tomto Časopise, v níž Kunzlova fokusační metoda²⁾ s plasticky deformovaným krystalem (v symetrickém uspořádání podle Bačkovského³⁾ značně zvýšila

¹⁾ V. Dolejšek, V. Vranský, Čas. mat. a fys. **69** (1940), 61.

²⁾ V. Kunzl, Comptes Rendus **201** (1935), 656.

³⁾ J. Bačkovský, Nature **141** (1938), 872.

rozpoznatelnost čar a dovolila najít všechny kvadrupolové a zakázané přechody i řadu nediagramových čar. Toto uspořádání je jedním z nejsvětelnějších, neboť jeho symetrie podle Bačkovského dovoluje použití mosaikových krystalů, jichž reflektivní mohutnost je velmi značná a souvisí s velikostí mosaiky, jak jsme ukázali ve společné práci s Jahodou a Rozsívalem.⁴⁾ Mosaiková vada $\Delta\sigma$ se totiž ukázala jako rozhodující činitel převládající všechny ostatní faktory při reflektivní mohutnosti. Při symetrickém uspořádání spektrografu se ukázalo, že je možno psát přímou úměrnost mezi reflektivní mohutností a mosaikou krystalu:

$$R = R_c \Delta\sigma$$

a že tedy v tomto uspořádání je mnohem výhodnější použití mosaikových krystalů, jichž $\Delta\sigma$ se pohybuje v mezích několika minut (sůl kamenná, sfalerit, kassiterit), nežli krystalů „dokonalých“ (lept. křemen) o mosaikové vadě $\Delta\sigma$ několika vteřin. Poněvadž ke studiu slabých nediagramových čar je třeba zvlášť světelné aparatury, je velmi výhodné použití k tomuto studiu krystalů o velké mosaice.

Pokud se týče reflexe při zjišťování slabých čar výsledky ukazují, že fotografická registrace dává nejlepší výsledky, neboť byl jí zjištěn největší počet nejslabších čar. Ačkoliv se udává, že metody ionizační a metody používající počítače jsou daleko citlivější a světelnější, nebylo jimi dosaženo v žádném případě těch výsledků jako metodami fotografickými. Metod s počítačem nebylo však dosud použito ve spojení s metodami fokusačními. Pokus o spojení metod fokusačních s metodou počítače učinili Dolejšek a Brandejský,⁵⁾ v jejichž práci bylo docíleno velmi dobrých výsledků při zjišťování slabých čar, jichž vlnové délky se od sebe nepatrně liší. Zde se ukázala pravděpodobně výhoda možnosti měnit gradaci a výhoda velké citlivosti. Naproti tomu se Richtmyerovi a Taylorovi⁶⁾ podařilo ionizační metodou zjistit a odlišit čáry Cu $K\alpha_{3,4}$ teprve umělým obratem: Když od celkové ionizační křivky odečtli předpokládanou křivku pro Cu $K\alpha_1$.

Jak z předchozího vysvítá, mají metody fotografické i ionizační své výhody i nevýhody. Metody fotografické mají při dlouhých expozicích čar, jichž vlnové délky se od sebe málo liší, tu nevýhodu, že ve fotografické desce nastává rozptyl X-paprsků resp. rozptyl elektronů vyražených X-paprsky z desky, takže při zjišťování slabých stop se pak snižuje rozeznatelnost čar blízko sebe ležících. Kromě toho obor křivky gradace při takových expozicích

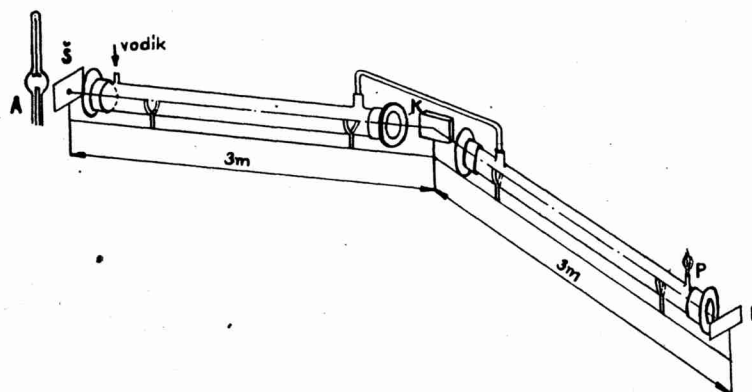
⁴⁾ V. Dolejšek, M. Jahoda, J. Ježek, M. Rozsival, *Nature* **142** (1938), 253.

⁵⁾ V. Dolejšek, A. Brandejský, v tisku.

⁶⁾ F. K. Richtmyer, L. S. Taylor, *Phys. Rev.* **36**, 1044.

je nevýhodný a není možno jej měnit. Možnost změny křivky-odpovídající křivce gradace je velkou výhodou metod ionizačních. Naproti tomu práce Dolejšek-Brandejský⁵⁾ a Dolejšek-Vranský¹⁾ ukázaly, že nevýhodou metod ionizačních a metod s počítačem je, že jednotlivé vady rozložené po délce krystalu se sčítají, neboť registrační zařízení ukazuje statistický střed záření odraženého po celé délce krystalu, aniž by bylo patrné, že jde o vady na jednotlivých místech.

Abychom fotografické metody přiblížili výhodám metod ionizačních, pokusili jsme se odstraniti oba škodlivé činitele (vliv



Obr. 1.

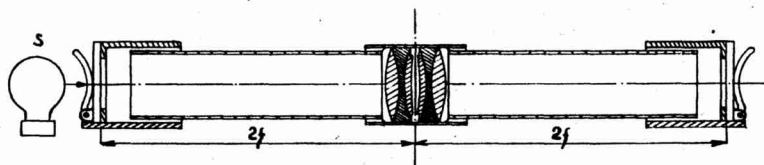
rozptýleného záření a nevýhodný obor gradace). Za účelem odstranění škodlivého vlivu rozptýleného záření použili jsme velkých vzdáleností štěrbina—krystal—fotografická deska. Rozlišovací mohutnost a úhlová disperze zůstala ovšem stejná, ale zvýšila se disperse lineární, takže na př. při použití krystalu NaCl odlehlost čar Cu $K\alpha_{1,2}$ činila 4,5 mm a při krystalu ZnS dokonce 6,8 mm. Rozšíření vlivem rozptylu záření na desce zůstalo stejné, takže se při docílené velké dispersi neprojevovalo rušivě a rozlišitelnost čar se tím zvýšila. Když v tomto uspořádání byla studována závislost rozlišovací mohutnosti na šířce štěrbin, ukázalo se, že zatím co (vzhledem k velkým vzdálenostem) vliv rozšíření štěrbin na šířku čar se projevoval velmi zvolna, zkracovaly se velmi rychle doby expozice. Tak na př. při užití štěrbin o šířce několika setin milimetrů byly k dosažení hlavních čar Cu $K\alpha_{1,2}$ nutné expozice 2 až 3 hodin, kdežto při štěrbině několika desetín milimetru stačila expozice 3 až 5 minut (čary Cu $K\alpha_{1,2}$ byly ve vzdálenosti 6 m justovány na fluorescenčním stínítku). Naproti tomu rozlišovací mohutnost při rozšiřování štěrbin zůstala prakticky stejná a dosahovala

nejkrajnějších hodnot, jak ukázaly výsledky v dřívější naší práci.⁷⁾ Použitá aparatura je znázorněna na obr. 1.

Byl to symetrický spektrograf, kde vzdálenost štěrby od krystalu $\equiv SK$ byla stejná jako vzdálenost krystalu od fotografické desky KF a činila 300 cm. Při tak velkých vzdálenostech nastávala ovšem i pro střední vlnové délky značná absorpce X-paprsků ve vzduchu. Proto bylo záření posíláno trubicemi naplněnými vodíkem. K vůli kontrole a bezpečnosti procházel slabý proud vodíku neustále trubicemi a byl zapálen u místa P . K reflexi bylo použito krystalů NaCl a ZnS , jichž velká mosaika (pro NaCl $\Delta\sigma = 60''$, pro ZnS $\Delta\sigma = 120''$) podmiňovala velkou světelnost aparatury, takže expozice k získání $\text{Cu K}\alpha_{1,2}$ obnášely 3 až 5 minut a expozice nutné k získání čar $\text{Cu K}\alpha_{3,4}$ činily pouzý 3 až 4 hodiny. Tato aparatura byla tedy vzhledem k velké rozlišovací mohutnosti a velké světelnosti zvláště výhodná pro studium slabých čar. Provedli jsme měření ve skupině $\text{Cu K}\alpha$. Výsledky tohoto studia jsou sestaveny v tab. I.

Abychom také křivku gradační učinili výhodnější, užili jsme reprodukční techniky podle návrhu prof. V. Vojtěcha. Zvýšení gradace snímku cestou fotografickou bylo docíleno tímto způsobem: Snímky získané na aparatuře jsme přefotografovali ve stejné velikosti, při čemž z originálu jsme zhotovili dva negativy na fotografické desce. Oba negativy jsme přiložili vrstevami k sobě a opět přefotografovali jako originál. Negativy byly ovšem vůči sobě stočeny o 180° . Toto stočení však při spektrálních čarách nevádí a někdy se tím i do jisté míry vyrovnají určité nepravidelnosti způsobené vadami krystalu. Tento pochod lze několikrát opakovati, což zatím nebylo možno provésti. Jako objektivu k přefotografování jsme použili dvojanastigmatu o ohniskové délce $f = 13,5$ cm.

Uspořádání je patrné z obr. 2.



Obr. 2.

Již po prvním přefotografování byly získány pozitivní kopie I. stupně, na nichž je patrné zvýšení gradace. Zatím co na originálním snímku s vybraným krystalem NaCl lze výsledky uvedené v tab. I zjistiti pouze odborným pozorováním lupou, je na kopii I. stupně i pouhým okem dobře patrné rozlišení čar $\alpha_{3,4}$ i nová dosud neměřená čára α' . Stejně je tomu u snímků získaných krystalem ZnS , které již bohužel nebyly všechny přefotografovány.

⁷⁾ V. Dolejšek, J. Ježek, Comptes Rendus 207, (1938), 985.

Tabulka I.
Výsledky měření.

Číslo snímku	Krytal	$\alpha_2 - \alpha_1$ mm	Δ mm	$\Delta\lambda$ X. J.	Šířka čáry $d\lambda$	
			měřeno od α_1		mm	X. J.
2751	NaCl	4,5*)	4,9	4,2		
			6,7	5,5	0,9	0,8
			7,8	6,5	0,9	0,8
			8,6	7,2		
2768	NaCl	4,5	4,8	4,0		
			6,7	5,6	0,9	0,8
			7,9	6,55	0,9	0,8
			8,6	7,2		
2702	ZnS	6,8**)	7,0	3,9		
			12,0	6,7	1,2	0,7
2704	ZnS	6,8	7,1	4,0		
			11,8	6,6		
2705	ZnS	6,8	7,0	3,9		
			11,8	6,6		
2801	ZnS	6,8	7,0	3,9		
			12,0	6,7	1,4	0,8
			13,0	7,2		

Tabulka II.
Srovnání dosavadních výsledků v CuK α serii.

Autor	$\alpha_1 - \alpha'$ X. J.	$\alpha_1 - \alpha_3$ X. J.	$\alpha_1 - \alpha_4$ X. J.	$\alpha_2 - \alpha'_4$ X. J.	$d\lambda$ X. J.	
					α_3	α_4
A. Dauvillier ⁸⁾	—	6,0	7,0	—	—	—
Dolejšek, Engelmannová 1929 ⁹⁾	—	6,15	7,1	—	—	—
Richtmyer, Taylor ¹⁰⁾	—	6,15	7,15	—	—	—
Dolejšek, Engelmannová 1932 ¹¹⁾	—	6,25	7,2	—	—	—
Naše měření	4,0	5,6	6,6	7,2	0,8	0,8
		$\Delta\lambda = 1,0$ X. J.				

*) Diference $\Delta\lambda$ ($\alpha_2 - \alpha_1$) je přesně změřena a činí 3,8 X. J.; tedy v tomto případě na 1 X. J. připadá 1,2 mm.

**) Na 1 X. J. připadá 1,8 mm.

⁸⁾ A. Dauvillier, Comptes Rendus 443, (1922), 174.

⁹⁾ V. Dolejšek, M. Engelmannová, Comptes Rendus 318, (1929), 188.

¹⁰⁾ F. K. Richtmyer, L. S. Taylor, l. c.

¹¹⁾ V. Dolejšek, M. Engelmannová, Čas. JČMF 61, (1932), 301.

Výsledky tohoto studia nediagramových čar ve skupině Cu K α přinášejí některé nové poznatky. Rozdíl $\Delta\lambda(\alpha_3 - \alpha_4)$ souhlasí s rozdílem dříve měřeným (t. j. činí přibližně 1 X. J.). Naproti tomu se ukazuje, že rozdíl $\alpha_1 - \alpha_3$ a $\alpha_1 - \alpha_4$ v této práci se jeví o 0,5 X. J. menší než v dřívějších pracích. Tento rozdíl, jenž odpovídá 0,6 mm, je nad meze pozorovacích chyb, které zde činí maximálně 1 až 2 desetiny X. J. Důležité je, že na krystalu soli i sfaleritu byly získány tytéž hodnoty. Bližší studium na řadě snímků ukázalo, že tento rozdíl proti dřívějším pracím je způsoben tím, že rozlišovací mohutnost uspořádání námi užitého je tak velká, že od čáry α_4 oddělila ještě určitou složku směrem ke krátkým vlnám, kterou dřívější autoři neodlišili. Výhodnost našeho uspořádání ukazuje dále skutečnost, že na snímcích je mezi čarami α_1 a $\alpha_{3,4}$ taková odlehlost, že přexpozice referenčního dubletu $\alpha_{1,2}$, které se normálně nelze vyhnouti, nevadí. To znamená, že halace při přexpozici nejen nepůsobí rušivě na dublet $\alpha_{3,4}$, nýbrž mezi α_1 a $\alpha_{3,4}$ je dobře patrna další čára, kterou lze pravděpodobně označiti za α' měřenou u nižších prvků.

Snímky se sfaleritem ukázaly neočekávaný výsledek. Nejevila se na nich čára α_3 . Dřívější autoři nemohli tohoto výsledku dosáhnouti, neboť rozdělení těchto čar nebylo nikdy tak bezpečné. V naší práci samotná šířka čáry α_4 činí 1,4 mm, což odpovídá 0,8 X. J., kdežto při uspořádání dřívějších autorů, kdy poloměr spektrografu nepřesahoval obvykle 20 cm, šířka čáry by byla 0,1 mm a celá šířka dubletu Cu K $\alpha_{3,4}$ — 2 X. J. — odpovídala 0,2 mm, naproti 4 mm v naší práci. Záměna obou čar je vyloučena, neboť jejich odlehlost činí 1,8 mm. Je tedy výsledek nalezený u použitého sfaleritu nezvratným faktem. Pokud by tento fakt příslušel všem krystalům sfaleritu (nemohli jsme již použití různých krystalů ZnS a tento zajímavý zjev dále sledovati) znamenalo by to, že vznik čar Cu K $\alpha_{3,4}$ je ovlivňován strukturou různých krystalů a že výklad těchto čar, který není dosud dosti bezpečný, je nutno hledati v krystalech. Ověření těchto faktů zatím není možné. Zbývá jen jeden málo pravděpodobný výklad, že neexistence linie α_3 při reflexi na sfaleritu je způsobena selektivní absorbcí L_{III} hrany vzácné zeminy holmia. Tato vzácná zemina se může ve sfaleritu vyskytovat. Je tedy možné, že uvedená selektivní absorpce anuluje čáru α_3 , ovšem jen v tom případě, jestliže se projeví jako absorpční čára. Kdyby se tato selektivní absorpce projevila jako normální absorpční hrana, nutně by scházela i čára α_4 .

Uspořádání použité v práci se podle výsledků ukázalo velmi slibným pro studium slabých čar u dalších prvků. Práce, která měla všechny nalezené výsledky verifikovati studiem příslušné skupiny čar u sousedního prvku Ni, nebyla zatím skončena. Výsledky docílené ve skupině Cu K α ukazují, že v tomto směru metoda

fotografická ve spojení se zvýšením gradace převyšuje citlivost i rozlišovací mohutnost dosavadních metod ionizačních i metod s počítačem.

Praha, Spektroskopický ústav Karlovy university.

*

Über die Trennung schwacher Nichtdiagrammlinien der K-Serie. (Eine neue Methode und ihre Resultate.)

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Es wurde der Versuch gemacht, das Auflösungsvermögen bei Feststellung schwacher Linien durch Vergrößerung der Längendispersion und Steigerung der Gradation durch Summierung mehrerer Gradationskurven zu erhöhen. Zur Steigerung der Längendispersion wurde eine Apparatur benutzt, bei der Gesamtweg der X-Strahlen 6 m betrug (dabei ging die Strahlung durch wasserstoffgefüllte Röhren, um die Absorption herabzusetzen). Zwecks Erhöhung der Gradation wurden die Aufnahmen „umfotografiert“ nach einer im Artikel angegebenen Methode.

Die Resultate bei der Cu-K-Serie zeigten, daß sich auf diese Art nicht nur das Dublett $\text{Cu K}\alpha_{3,4}$ einwandfrei trennen läßt, sondern daß auch die bisher nicht festgestellte Struktur von $\text{Cu K}\alpha_4$ und eine bis jetzt nicht beobachtete Linie α' bestimmt werden kann. Im Gegensatz zu den mit NaCl-Kristallen gewonnenen Resultaten wurde beim ZnS-Kristall einwandfrei festgestellt, daß er die Linie α_3 nicht reflektiert, obwohl alle anderen Linien mit den Resultaten an NaCl übereinstimmen. Eine befriedigende Erklärung dieser Tatsache läßt sich auf Grund der bisherigen Resultate nicht geben.

Das Gesamtergebn zeigt, daß die fotografische Methode, wenn sie auf die angegebene Art angewandt wird, die Ionisations- und Zählmethoden übertrifft.

Kreslil V. Dolejšek a J. Ježek. Archiv JČMF.

Užití sodíkového světla pro Ramanův zjev.

M. Jahoda a I. Šimon, Praha.

(Došlo 10. dubna 1940.)

Byl hledán zdroj pro buzení Ramanových čar ve žlutém oboru vlnových délek. Na-plamen v Lundegardhově uspořádání ukázal se málo intenzivní, naproti tomu vhodným zdrojem se ukázala technická lampa Osram Na-300. Docílená přesnost v určení Ramanových čar byla ukázána na spektru CCl_4 a srovnána s přesností dosavadních měření s Hg-lampou. Identifikace snímků na trinitrofenolu (kyselina pikrová) ukázala, že jest obtížné vyloučiti čáry neonu, přítomného v technické Na-lampě. Zkoušíme užití Na-lampy plněné heliem místo neonu.

Pro vzbuzení Ramanových čar se dnes užívá modrých nebo fialových čar rtuti (4046 Å, 4358 Å); ve výjimečných případech bylo užito také čar dlouhovlnných (zelené, žluté). Pro Ramanův zjev je nutné použití jednak monochromatických, jednak intenzivních světelných zdrojů vzhledem k malé světelnosti zjevu. Fialových nebo modrých čar rtuťových se používá proto, že intenzita Ramanových čar stoupá se čtvrtou mocninou kmitočtu budícího světla. Z tohoto důvodu bylo by výhodnější užití ultrafialových čar, avšak ty jeví již u většiny látek fotochemické účinky a jsou jimi značně absorbovány. Proto je užití zmíněných čar rtuti poměrně nejvýhodnější. V okolí těchto čar se však vyskytuje řada slabších čar, které při dlouhých expozicích mohou vzbuditi silné čáry Ramanovy.

Kromě rtuťového oblouku použil R. W. Wood¹⁾ zdroje heliového. Jako filtru užil skla barveného kysličníkem nikelnatým a propustného pro čáru 3889 Å. P. Krishnamurti²⁾ užil kadmiového oblouku se silnými čarami 4800, 5086 a 6439 Å. Studoval sírany Fe a Ni, při nichž se buzením rtuťovým Ramanovy čáry absorbují.

Z podobného důvodu, abychom totiž mohli zkoumati i látky absorbující modré paprsky, použili jsme světla sodíkového. Teoreticky má sice býti expozice $(5893/4358)^4 \doteq 3,3$ krát delší pro žluté sodíkové světlo než pro modrou čáru rtuťovou. Nevýhoda je ovšem vyvážena tím, že na žlutý sodíkový dublet připadá téměř

všechna energie viditelného spektra, zatím co při užití rtuti se světelná energie dělí na větší počet silných čar. Z toho na příklad připadá na část žlutou pouze asi 11% veškeré energie.

Ve viditelném sodíkovém světle je značně nejsilnější žlutý dublet (5889,97 a 5895,93 Å), který leží poměrně daleko od velmi

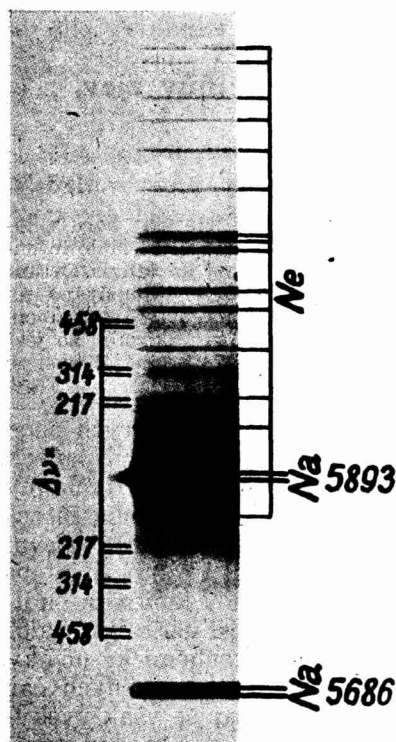
slabého zeleného dubletu 5682,8 a 5687,3 Å a také daleko od velmi slabého dubletu na straně červené 6154,4 a 6160,8 Å. Tím také odpadá pro čisté sodíkové světlo použití filtrů. Pro systematicku Ramanova zjevu má žluté budící světlo značný význam, neboť mezi organickými sloučeninami nalézáme právě žlutých látek mnoho.

Užití normální osvětlovací sodíkové lampy je však spojeno s obtížemi, že velmi četné čáry neonové náplně padají právě do oboru Ramanových čar (viz obr. 1.). Proto pokračujeme v další práci se sodíkovou lampou plněnou heliem.

Zkoušeli jsme i užití sodíkového plamene podle Lundegardha, avšak expozice jsou nejméně dvacetkrát delší než při technické lampě Osram Na-300.

K posouzení nové aparatury pro Ramanova spektra bývá brána některá z látek s dobře definovaným a intenzivním Ramanovým spektrem.

K posouzení principiální užitelnosti sodíkového světla pro



Obr. 1. Ramanovo spektrum CCl_4 v sodíkovém světle.

Ramanova spektra užili jsme řadou autorů proměřené látky CCl_4 .

Pro nejintenzivnější čáry Ramanova spektra CCl_4 jsou uvedeny v literatuře hodnoty, sestavené Kohlrauschem³⁾ v tabulku pro vlnočtové rozdíly $\Delta\nu$:

Bylo užito normální sodíkové osvětlovací lampy typu Osram Na-300 (56 W), která svou osou ležela v ohniskové přímce válcového eliptického reflektoru. V jeho druhé ohniskové přímce se nacházela vodou chlazená trubice se zkoumanou kapalinou. Štěrbina a osa užitého Hilgerova spektrografu byly pokračováním osy

Tabulka I.

Autoři	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Střed
$\Delta\nu_1$	217	219	210	216	216	216	219	214	219	217	218	217
$\Delta\nu_2$	315	312	310	313	313	313	314	315	379	313	313	316
$\Delta\nu_3$	458	457	460	460	457	459	459	459	453	459	460	458

1. Pringsheim-Rosen, ZS. f. Phys., 50 (1928), 741.
2. Raman-Krishnan, Proc. Roy. Soc. Lond., 122 (1929), 23.
3. Daure, C. R., 187 (1928), 940.
4. Wood, Phil. Mag., 6 (1928), 1282.
5. Dadiou-Kohlrausch, Wien. Ber., 138 (1929), 41.
6. Ganesen-Venkateswaran, Ind. Journ. of Phys., 4 (1929), 196.
7. Langer-Meggers, Bur. of Stand. Journ. of Res., 4 (1930), 711.
8. Bhagavantam-Venkateswaran, Proc. Roy. Soc. Lond., 127 (1930), 360.
9. Reynolds-Williams, Journ. Frankl. Inst., 210 (1930), 41.
10. Bhagavantam, Ind. Journ. of Phys., 5 (1930).
11. Dabadghao, Ind. Journ. of Phys., 5 (1930), 207.

trubice s kapalinou. Disperse ve žluté části spektra je přibližně 60 Å/mm a expoziční doby vzhledem k poměrně malé světelnosti užitého spektrografu nejméně 24 hod. pro CCl_4 .

Při buzení Ramanových čar žlutým natriovým dubletem budí každá z obou stejně intenzivních čar příslušnou Ramanovu čáru, které tedy při dostatečné dispersi tvoří také dublety, jak je patrné z obr. 1. To je výhodné i pro rozpoznávání Ramanových čar a také při proměřování dostáváme — přihlížíme-li k t. zv. anti-stokesovým čarám — pro každou Ramanovu čáru čtyři hodnoty vlnočtů. Tímto způsobem získané vlnočtové rozdíly $\Delta\nu$ jsou uvedeny v tabulce II.

Tabulka II.

Čára	Č. 1.	Č. 2.	Č. 3.
$\Delta\nu$	216,2	312,5	458,8
	—	314,3	457,3
	218,0	315,7	459 0
	217,1	313,9	458,6
Střed	217,1	314,1	458,4

Snímek byl proměřován ze zvětšenin a místo za deseti-nou tečkou je v mezích chyb měření. K tomu lze uvést, že při

t. zv. precisních měření, na př. u benzenu, uvádějí někteří autoři $\Delta\nu$ až na zaručené setiny, zatím co údaje různých autorů se liší často až i v jednotkách. Při všech našich měřeních s uvedenou aparaturou jeví se průměrný rozptyl v $\Delta\nu$ asi $\pm 1,5 \text{ \AA}$. Tato přesnost jest obvyklá při vyčíslování Ramanových spekter a výsledek ukazuje, že užití sodíkového zdroje dovoluje docíliti určité téže přesnosti, jaká je udávána autory při užití světla rtuťového.

Snímky, které jsme obdrželi pro jiné žlutě zbarvené látky, na příklad pro trinitrofenol (kyselina pikrová), nemohli jsme dosud bezpečně proměřiti, vzhledem k rušivým čarám neonu. Proto budeme měření opakovati se sodíkovou lampou, plněnou heliem místo neonem.

Za umožnění práce, za cenné rady a pokyny, za zapůjčení pokusných zařízení děkujeme srdečně panu prof. Dr. V. Dolejškovi, řediteli Spektroskopického ústavu Karlovy university v Praze.

Literatura.

1. R. W. Wood: Phil. Mag., 7 (1929), 858.
2. P. Krishnamurti: Ind. Journ. of Phys., 5 (1930), 588.
3. K. V. F. Kohlrausch: Der Smekal-Raman Effekt (1932).

Spektroskopický ústav Karlovy university.

*

Verwendung des Natriumlichtes für Ramaneffekt.

(Inhalt des vorstehenden Artikels.)

In vorliegender Arbeit wird die Möglichkeit, gelbes monochromatisches Natriumlicht zur Erregung von Ramanspektren zu verwenden, versucht. Gewonnene Wellenzahldifferenzen für CCl_4 werden mit Resultaten, die von mehreren Autoren unter Verwendung des blauen Hg-Lichtes gewonnen wurden, verglichen und die Genauigkeit neu gemessener Werte erwiesen. Das neue Verfahren eignet sich besonders zur Ermittlung von Ramanfrequenzen intensiv gelbgefärbter Stoffe die im Blauen und Violetten starke Absorption besitzen.

Kreslil M. Jahoda. Archiv JČMF.

Metoda bez štěrby o velké světelnosti ke studiu polykrystalitů paprsky X.

A. Kochanovská a J. Brož, Praha.

(Došlo 10. dubna 1940.)

Je popsána metoda o velké světelnosti ke studiu jemné struktury polykrystalitů paprsky X. Tato metoda záleží v tom, že místo štěrby se použije přímo čarového ohniska technické X-trubice. Rovinná reflexní plocha zkoumaného polykrystalitu se umístí do středu kruhového spektrografu, na jehož obvodu se nachází ohnisko X-trubice a fotografický film. Úhel dopadu středového paprsku primárního svazku se volí roven Braggovu úhlu příslušné Debyeovy čáry. Metoda se hodí pro krátkost expozicních dob (1 vt. při 16 MA a 40 KV) k registrování změn struktury a zrna polykrystalitů při chemických a fyzikálních pochodech.

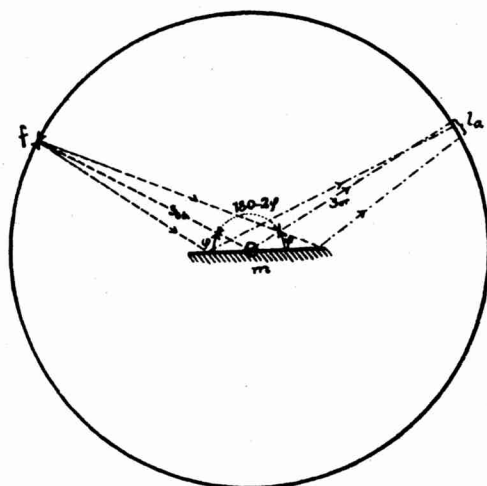
Jeden z nás¹⁾ udal metodu o velké světelnosti k získání Debye-Sherrerových snímků polykrystalických materiálů. Tato metoda na rozdíl od metod dosud běžných, pracujících se svazkem rovnoběžných paprsků X, používá mírně rozbíhavého primárního svazku vymezeného jedinou čarovou štěrbinou. Vhodným uspořádáním polohy štěrby, zkoumaného polykrystalitu a fotografického filmu se pak docílí fokusace rozbíhavých odražených svazků paprsků, odpovídajících jednotlivým Debyeovým čarům.

V citované práci je teoretickým výpočtem i experimentálně prokázáno, že Debyeova čára je nejostřejší, t. j. fokusace nejlepší, je-li reflektující rovinná plocha polykrystalitu umístěna právě ve středu kruhového spektrografu, na jehož obvodu se nachází lineární štěrbina a fotografický film, takže platí rovnost vzdáleností štěrbina — materiál a materiál — film, a dále je-li úhel dopadu středového paprsku primárního svazku právě roven příslušnému Braggovu úhlu dotyčné Debyeovy čáry. Tento nejvýhodnější případ je znázorněn v obr. 1. Diskuse ostatních možných případů jest uvedena v citované práci.

Tamtéž jest ukázáno, že v praxi, kde se většinou jedná o získání pokud možno ostrých čar ve větším úhlovém rozmezí

1) A. Němejcová-Kochanovská, Čas. mat. a fys., 68 (1939), 214—228.

a kde tudíž nelze splniti podmínku rovnosti úhlu dopadu a příslušného úhlu Braggova pro celý zkoumaný obor úhlový, stačí



Obr. 1. *f* štěrбина (ohnisko X-trubice), *o* střed spektrografu, *m* materiál, *s* středový paprsek dopadajícího svazku, *s_r* týž paprsek po reflexi, φ Braggův úhel příslušné Debyeovy čáry, *l_a* šířka Debyeovy čáry.

z daleka se nevyužije celého výstupního svazku plně. Snahou je samozřejmě využití z celého výstupního svazku paprsků X co možná největší část.

Autorům se podařilo ještě dále zvětšiti světelnost této metody a docílit více než 20násobného zkrácení expoziční doby tím,



Obr. 2. Jemnozrný plech Cu, fokusační metoda se štěrbinou, expozice 1 min.

paprsků X vysílaných trubici. Ostatní uspořádání zůstává stejné jako u popsané metody, t. j. reflektující plocha polykrystalitu jest umístěna ve středu kruhového spektrografu, na jehož obvodu se nachází ohnisko X-trubice a fotografický film.

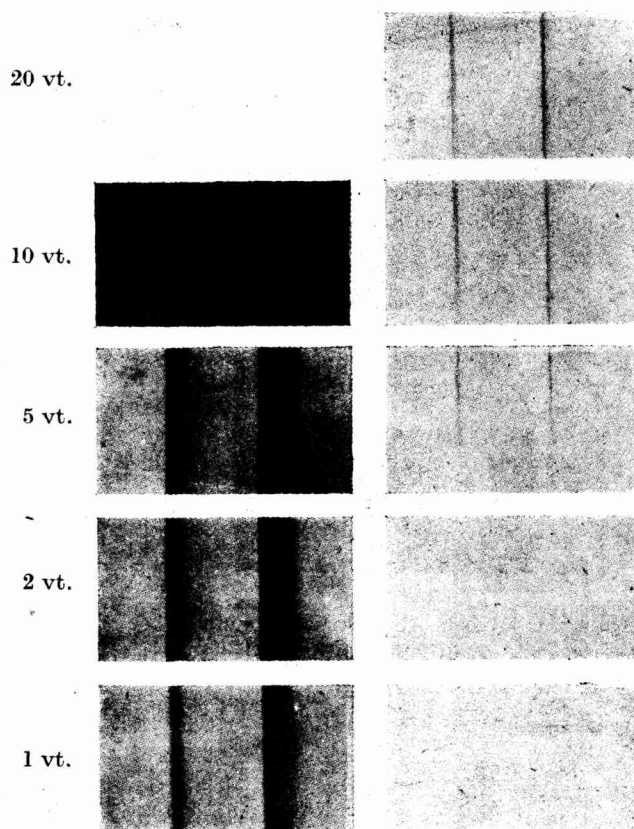
Podstatné snížení expoziční doby, kterého se tímto způsobem

k získání dostatečně ostrých čar splniti tuto podmínku pouze pro jednu čáru celého zkoumaného oboru, nejlépe pro čáru s nejmenším Braggovým úhlem. Jak patrně z reprodukováného snímku v obr. 2, stačí expozice 1 min při 16 MA a 40 KV k dosažení poměrně intenzivního snímku.

Při této fokusační metodě se sice zužitkuje z výstupního svazku paprsků X značně větší část než při metodách používajících rovnoběžných svazků, protože se vymezení provádí jedinou štěrbinou a nikoli systémem štěrbin, avšak

že místo čarové štěrbinou použili přímo čarového ohniska technické X-trubice pro jemnou strukturu. Ukázalo se totiž, že čarové ohnisko technických X-trubic je dosti úzké v porovnání se šířkou Debyeových čar, takže přímé použití ohniska místo čarové štěrbinou není na újmu ostrosti čar. Tímto způsobem využili autoři plně celého rozbíhavého svazku

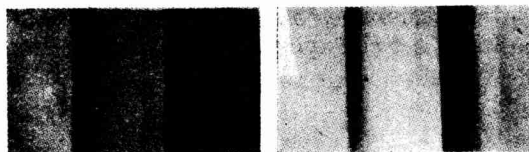
dosáhne, je patrné ze snímků reprodukováných v obr. 3. Reprodukované jsou snímky Cu-plechu, zhotovené touto metodou technickou trubicí s Cu-anodou při zatížení 16 MA a 40 KV. Expoziční doby jsou 1 až 10 vteřin. Pro srovnání jsou reprodukovány odpovídající snímky, získané fokusační metodou se štěrbinou při stejných expozicích a při expozici 20 vt. Je patrné, že snímek



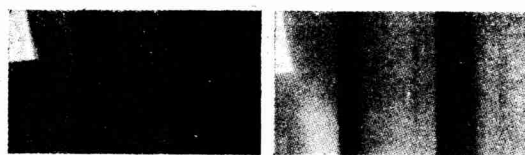
Obr. 3. Jemnozrnný plech Cu. Srovnání intenzity snímků získaných fokusační metodou: a bez štěrbin, b se štěrbinou.

s expozicí 1 vt. bez štěrbin odpovídá expozici delší než 20 vt. se štěrbinou a že expozice 1 a 2 vt. se štěrbinou se nacházejí pod prahem citlivosti filmu, teprve při 5 vt. expozici dostáváme slabé stopy čar.

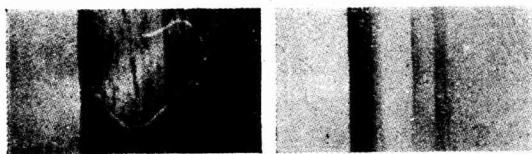
Rozbíhavost svazku paprsků námi používané technické X-trubice s čarovým ohniskem umístěným vertikálně, byla v horizontálním směru $7^{\circ} 23'$. Při tak velké rozbíhavosti dopadajícího



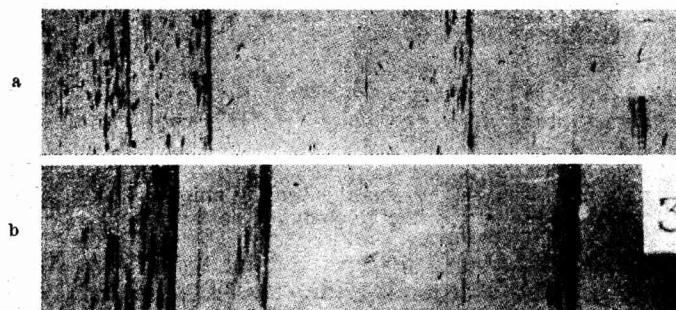
Obr. 4. Jemnozrnný plech Cu, fokusační metoda bez štěrbin: *a* velká plocha, *b* úzký proužek.



Obr. 5. Hrubozrnný plech Cu, fokusační metoda bez štěrbin: *a* velká plocha, *b* úzký proužek.



Obr. 6. Hrubozrnný plech Al, fokusační metoda bez štěrbin: *a* velká plocha, *b* úzký proužek.

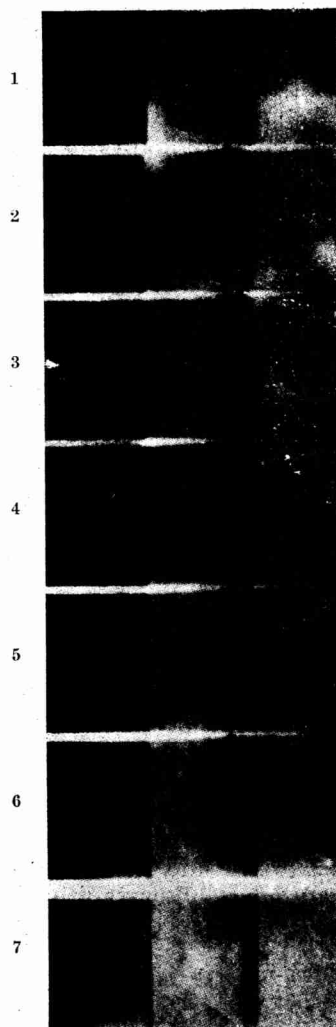


Obr. 7. *a* hrubozrnný plech Cu, expozice 1 min.,
b hrubozrnný plech Al, expozice 1 min.

primárního svazku a při poměrně malém Braggovu úhlu krystalografických ploch s malými indexy, je samozřejmě i šířka plochy polykrystalitu zasažená paprsky X poměrně veliká. Z toho důvodu je také výhodno, aby rovinná plocha zkoumaného polykrystalitu byla dostatečně široká, aby se mohl uplatnit dopadající primární svazek v celé šíři. Ze při tak veliké reflektující ploše jsou čáry poměrně úzké, toho je docíleno právě vhodným uspořádáním vzájemné polohy ohniska, materiálu a fotografického filmu²⁾.

Dopadající primární svazek obsahuje však také paprsky rozbíhavé ve směru vertikálním. Pro tyto paprsky ovšem v tomto uspořádání nenastává fokusace. To se projeví u materiálu jemnozrného na snímku zvětšením spojitého černání pozadí, u materiálu hrubozrného pak vystoupí na snímku struktura materiálu, někdy dokonce tak silně, že mizí vlastní polohy čar.

Účinek paprsků rozbíhavých ve vertikální směry lze v případech, kdy je na závadu (na př. u jemnozrného materiálu, nebo i u hrubozrného materiálu pokud se nejedná o strukturu, nýbrž jen o polohu Debyeových čar), vyloučiti tím, že se reflektující plocha zkoumaného materiálu vymezi vhodně co do výšky. Odstraní se tak do značné míry spojitě černání podkladů u materiálu jemnozrného, jako jest patrné z obr. 4, kde je reprodukován snímek jemnozrného Cu-plechu, a to jednak velké plochy (obr. a), jednak vhodně úzkého proužku (obr. b). Použije-li se téhož způsobu u materiálu hrubozrného, odstraní se stopy jednotlivých krystalků, za to vynikne tím více poloha jednotlivých čar, jak



Obr. 8. Rekrystalisace plechu Cu a tvorba kyslíčnicku.

2) Přesný výpočet šířky čáry ukázal, že v tomto případě lze přes poměrně velké rozbíhavosti primárního svazku použití ještě pro výpočet šířky čáry aproximovaného vzorce, uvedeného v citované práci.

jak patrně z obr. 5a, b a 6a, b, kde jsou reprodukovány snímky jednak velkých ploch, jednak úzkých proužků hrubozrnného Cu a Al-plechu. Snímky těchto dvou materiálů, získané však fokusační metodou se štěrbinou, jsou reprodukovány v obr. 7a, b.

Popsaná metoda bez štěrbin se hodí pro svou velkou světelnost a z ní plynoucí zkrácení expoziční doby ke studiu změn materiálu během různých chemických a fyzikálních pochodů. V obr. 8 jsou reprodukovány snímky, získané touto fokusační metodou bez štěrbin při rekryсталisaci Cu-plechu. Rekryсталisace byla způsobena spojitým zvyšováním teploty. Ze snímků je patrný počátek rekryсталisace (snímek 5), postupný růst krystalků a tvorba kyslíčků (snímky 6 a 7, kde jsou patrné nové čáry na krátkovlnné straně).

Spektroskopický ústav Karlovy university v Praze.

*

Methode ohne Spalt großer Lichtstärke zum Studium der Polykrystallite durch Röntgenstrahlen.

(Inhalt des vorstehenden Artikels.)

Es wird eine Methode von großer Lichtstärke zum Studium der Feinstruktur der Polykrystallite mit Hilfe der Röntgenstrahlen beschrieben. Diese Methode besteht darin, daß an Stelle des Spaltes direkt der Strichfokus der technischen Feinstruktur-röntgenröhren benutzt wird. Die ebene Reflektionsfläche des untersuchten Polykrystalliten wird in der Mitte des Kreisspektrographen an dessen Umfang der Fokus der Röhre und der photographische Film sich befindet, angebracht. Der Incidenzwinkel des Mittelstrahles des Primärbündels wird gleich dem Bragg'schen Winkel der entsprechenden Debye-Linie gewählt. Mit Hilfe dieser Methode können infolge der Kürze der Expositionszeiten (1 sec. bei 16 MA und 40 KV) Änderungen der Struktur und der Körnigkeit der Polykrystallite bei verschiedenen chemischen und physikalischen Processen registriert werden.

Kreslila A. Kochanovská. Archiv JČMF.

Závislost modulu pružnosti ocelí a niklu na teplotě.

J. Šimonová-Čeřovská, Praha.

(Došlo 17. dubna 1940.)

Úkolem této práce bylo stanovit závislost modulu pružnosti na teplotě u různých druhů ocelí a niklu. K určování modulu pružnosti E bylo použito dynamické metody: byl počítán ze vzorce pro kmitočty podélných (longitudinálních) kmitů pravoúhlých a kruhových tyčí.

K rozkmitávání tyčí bylo použito magnetostrikčních vlastností zkoumaných látek. Tyče z magnetostrikčního materiálu mohou totiž býti uvedeny do mechanických kmitů střídavým magnetickým polem. To po prvé ukázal J. H. Vincent (1), načež W. G. Pierce (2) sestrojil první magnetostrikční oscilátor. Magnetostrikčních vlastností ocelí a niklu použili k buzení kmitů deštiček také H. Dörffler (3), B. Pavlík (4), I. Šimon (5) a F. Kohl (6).

Podélnými kmity tyčí rozumíme kmity, při nichž elastická posunutí se dějí pouze ve směru délky. Pro kmitočty základního kmitu „nekonečně tenké tyče“ platí vzorec:

$$f_l = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

kde l je délka tyče, ρ hustota a E modul pružnosti v tahu.

Z tohoto vztahu plyne

$$E = 4l^2 \rho \cdot f_l^2. \quad (2)$$

Vzorec (1) neplatí zcela přesně, ježto nepřihlíží k příčným rozměrům vyšetřované tyče. Protože však Rayleighova korekce (7) byla pro vyšetřované tyčinky menší než chyby měření, bylo při výpočtu modulu E užíváno přibližného vzorce (2).

Pro nikl byl modul pružnosti určován z kmitů tyčinky kruhového průřezu; u ocelí značek Victrix Special, CM4, 1555 a AK5M od firmy Poldina Huť byl modul pružnosti určován na tyčinkách kruhového i čtvercového průřezu. Přibližné chemické složení studovaných ocelí je podle údajů Poldiny Hutí sestaveno v tabulce 1.

Tabulka 1.

Značka materiálu	% C	% Mn	% Si	% Cr	% Ni	% Mo
Victrix Special	0,15	0,50	0,25	1	3,7	0,35
CM4	0,34	0,60	0,25	1,1	—	0,20
1555	0,12	0,40	0,30	5,0	—	0,55
AK5M	0,42	0,50	0,25	1,5	—	1,80

Rozměry tyčinek a hustota ρ jsou uvedeny v tab. 2.

Tabulka 2.

Značka materiálu	Značka tyčinky	l mm	$a = b$ mm	r mm	ρ g/cm ³
Victrix	2; 3	39,98 ₉	3,98 ₅	—	7,85 ₂
Special	3; 3	40,15 ₄	—	2,49 ₆	—
CM4	2; 1	39,92 ₁	3,98 ₃	—	7,88 ₃
	3; 1	39,77 ₄	—	2,52 ₆	—
1555	2; 1	39,84 ₉	4,01 ₅	—	7,78 ₀
	3; 1	39,47 ₈	—	2,50 ₆	—
AK5M	2; 1	40,31 ₂	3,98 ₇	—	7,79 ₆
	3; 1	40,31 ₂	—	2,50 ₆	—
Ni	16	39,45 ₀	—	2,49 ₅	8,86 ₃

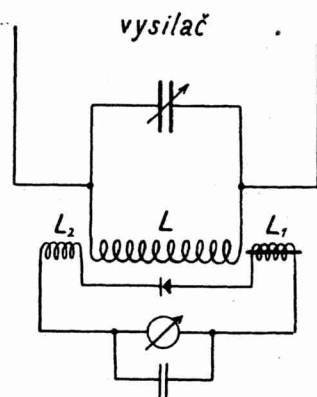
Ocelové tyčinky byly v dílnách Poldiny Huti vybroušeny ze zakaleného a vyžíhaného (zúšlechtěného) materiálu. Niklová tyčinka byla zhotovena z běžného niklového drátu.

Ježto vyšetřované tyčinky byly zhotoveny z magnetostrikčních látek, lze buditi jejich podélné kmity v magnetickém poli oscilační cívky vysokofrekvenčního generátoru. V generátoru v tříbodovém zapojení bylo použito vysílací lampy Telefunken RS 282 o max. anodové ztrátě 100 W při anodovém napětí 1000 V.

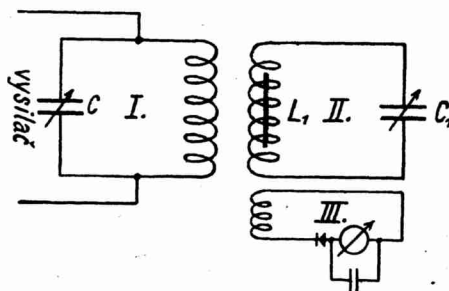
Při vlastním měření bylo postupováno takto: Vyšetřovaná tyčinka byla rozkmitána v oscilační cívce generátoru. Příslušný kmitočet generátoru byl určován volně spráženým vlnoměrem značky Telefunken typu K. W. 61,1 ocejchovaným s přesností 1⁰/₁₀₀. K zjišťování, že tyčinka kmitá a jaké kmity koná, bylo za obvyklých teplot užíváno metody Chladniho obrazců (s plavuní). Při

vyšších teplotách bylo nutno použití jiných indikačních metod. Jsou to:

1. *Metoda Giebe-Blechschildtova* (8). Její princip je patrný ze schematu na obr. 1. V magnetickém poli oscilační cívky L jsou umístěny dvě stejné cívky L_1 a L_2 . Do cívky L_1 je vložena zkoumaná magnetostrikční tyčinka. Cívky se zapojí tak, aby indukovaná napětí byla opačné fáze, takže detektorem neteče prakticky žádný vysokofrekvenční proud a galvanometr neukazuje žádnou výchylku. Nastane-li resonance vlastních kmitů tyčinky



Obr. 1.



Obr. 2.

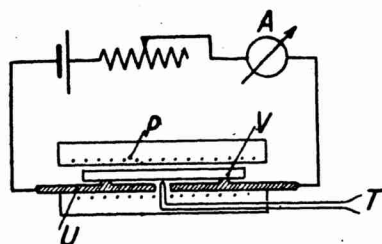
s elektromagnetickými kmity vysilače, vznikají v tyčince periodická elastická napětí, jimiž se změní její magnetické vlastnosti, takže rovnováha se poruší a galvanometr ukáže výchylku.

2. *Metoda zářezové křivky*. Do cívky samostatného oscilačního obvodu je vložena magnetostrikční tyč. Zářezová resonanční křivka magnetostrikčních resonátorů (9), (10) je do jisté míry analogická zářezovým křivkám piezoelektrických deštiček [D. W. Dye (11), V. Petržílka a A. Žáček (12)]. Experimentální uspořádání této metody je schematicky znázorněno na obr. 2.

Hodnoty samoindukce L_1 a kapacity C_1 jsou voleny tak, aby vlastní kmitočet oscilačního obvodu II byl blízko vlastního kmitočtu f magnetostrikční tyče. Měníme-li postupně kondensátorem C kmitočet vysilače a měříme-li proud v obvodu L_1 a C_1 , dostáváme obyčejnou resonanční křivku, na níž je u resonančního kmitočtu f ostrý zářez. Tento zářez je způsoben tím, že při resonanci tyčinky se z dané energie oscilačního obvodu použije část energie na mechanické kmitý a pouze zbytek se přenáší do obvodu II.

3. *Mikrofonní metoda*. Tato metoda, které zde bylo po prvé

použito, využívá změny odporu mezi uhlíkovou podložkou a na ní ležící tyčinkou, jež nastane, když se tyčinka rozkmitá. Magnetostrikční tyč spočívá volně na dvou zářezech, vypilovaných



Obr. 3.

A miliampérmetr, *P* asbestová píčka s topným drátem, *T* termočlánek, *U* uhlíková podložka, *V* vyšetřovaná tyč.

v uhlíkových podložkách. Podložkami a tyčinkou protéká proud asi 80 mA ze čtyřvoltové baterie (obr. 3).

Nekmitá-li tyčinka, miliampérmetr *A* ukazuje přibližně stálou výchylku. Jestliže se tyčinka rozkmitá, poruší se kontakt uhlíkytyč, odpor zařízení vzroste a na miliampérmetru pozorujeme ostrý pokles proudu velikosti asi 10—15 mA.

Celé zařízení je uloženo v asbestové pídce, v níž je také termočlánek. Teplota deštičky byla měřena termočlánkem železo-konstantan; jako základních bodů při cejchování bylo použito bodu varu vody, bodu tání chemicky čistého cínu a zinku.

Výsledky měření na jednotlivých vzorcích téhož materiálu u tyčinek čtvercového a kruhového průřezu dobře souhlasí, jak je patrné z grafu 1 a tab. 3.

Při stanovení závislosti modulu pružnosti *E* na teplotě bylo u vzorků z ocelí a niklu přihlíženo ke korekci vzhledem k délkové roztažnosti a k změně hustoty s teplotou. V tab. 4. jsou uvedeny hodnoty koeficientu délkové roztažnosti $\alpha \cdot 10^7$ (u ocelí podle udání Poldiny Hutí).

Tabulka 4.

Značka materiálu	20°—100°	20°—200°	20°—300°	20°—400°	20°—500°	20°—600°
Victrix	111	112	116	125	131	135
Special						
CM4	130	132	137	142	147	151
1555	122	123	126	129	132	134
AK5M	95	103	107	112	113	115
Ni (13)	0—100° 145	0—200° 285	0—300° 434	0—400° 591	0—500° 756	

Tabulka 3.

Victrix Special				CM4				1555				AK5M				Ni 16	
□ 2; 3		□ 2; 2		□ 2; 1		Ø 3; 1		□ 2; 1		Ø 3; 1		□ 2; 1		Ø 3; 1			
t	E	t	E	t	E	t	E	t	E	t	E	t	E	t	E	t	E
20	2,12	20	2,11	20	2,17	20	2,18	20	2,19	20	2,18	20	2,41	20	2,40 ₅	22	2,23
67	2,09	54	2,08	54	2,16	67	2,15	50	2,17 ₇	66	2,16	100	2,37	73	2,39	68	2,22
93	2,06	101	2,06	75	2,15	81	2,13	84	2,16	96	2,15	131	2,35	113	2,38	105	2,19
129	2,04	136	2,04	105	2,13	116	2,12	110	2,14	123	2,13 ₅	152	2,34	134	2,36	126	2,17 ₆
164	2,01	184	1,99 ₉	135	2,12	152	2,09	153	2,11	149	2,10	176	2,32	164	2,32	152	2,16
194	2,00	250	1,97	160	2,10	183	2,07	184	2,09	171	2,09 ₇	203	2,29 ₈	187	2,31	182	2,15
215	1,98	288	1,94	197	2,08	215	2,06	224	2,06	205	2,07	240	2,27	221	2,28	212	2,11
253	1,97	394	1,86	218	2,06	241	2,05	257	2,04	224	2,05	266	2,25	253	2,25	228	2,10
285	1,94	417	1,83	270	2,03	285	2,02	310	2,01	286	2,01	311	2,21	278	2,23	264	2,08
313	1,92	426	1,82	291	2,01	330	1,99	350	1,96 ₅	324	1,98	332	2,17 ₆	325	2,19	292	2,07
324	1,89 ₈	430	1,81	332	1,98	373	1,94	375	1,94	385	1,94	359	2,17	375	2,13	306	2,05
347	1,89	458	1,78	360	1,96	390	1,91	405	1,90	446	1,89	389	2,18	415	2,11	328	2,03
351	1,88	492	1,76	387	1,93	424	1,90 ₆	434	1,89	478	1,86	416	2,11	437	2,08	368	2,01
372	1,87	510	1,76	425	1,92	483	1,85	463	1,87			459	2,10	468	2,05	386	1,96 ₅
391	1,84			457	1,88	516	1,83	481	1,85			481	2,08				
427	1,82			480	1,87			508	1,81			499	2,06				
460	1,78			510	1,83							509	2,05 ₅				
				532	1,81												

E kg/mm² · 10⁴, t °C

Z grafu 1 je patrný celkový pokles modulu pružnosti E s teplotou u ocelí, u niklu na grafu 2. Pro temperaturní koeficienty modulu pružnosti materiálu Victrix Special, CM4, 1555, a AK5K v rozmezí 20° — 500° C, u niklu v rozmezí 20° — 380° C, kdy závislost je téměř lineární, byly na základě měření vypočteny tyto hodnoty:

$$\text{Victrix } e = -0,0006_9 \text{ 1/grad}$$

$$\text{CM4: } e = -0,0007_5 \text{ 1/grad}$$

$$1555: e = -0,0007_3 \text{ 1/grad}$$

$$\text{AK5M: } e = -0,0007_3 \text{ 1/grad}$$

$$\text{Ni: } e = -0,0006_4 \text{ 1/grad}$$

Závislost modulu pružnosti E na teplotě u různých ferromagnetických látek byla studována již dříve v celé řadě prací (14—27) jak statickými, tak i dynamickými metodami. O. Engler (23) měřil závislost modulu pružnosti E u niklu na teplotě a na intensitě magnetického pole. Z jeho grafu je patrná značná závislost temperaturního koeficientu modulu elasticity E na intensitě magnetického pole. Při nulové intensitě magn. pole modul pružnosti E u niklu s rostoucí teplotou prudce klesá, asi od 180° C mírně stoupá, až ke Curieovu bodu (ca 370° C), načež znovu rapidně klesá. Při intensitě magnetického pole 40 Oe modul pružnosti téměř lineárně klesá.

Ačkoliv naše měření modulu pružnosti byla provedena v magnetickém poli intensity asi 15 Oe, nebyly nalezeny výsledky shodné s výsledky Englerovými. Rozdílnost výsledků dala by se snad vysvětliti poněkud odlišným složením a zpracováním použitého materiálu. O. Engler užíval chemicky čistého niklu, zatím co naše měření byla provedena na technickém niklu. Naproti tomu se však naše výsledky shodují s výsledky měření F. Föster a W. Köstera (24) (viz graf 2), podle nichž modul pružnosti E niklu klesá s teplotou téměř lineárně.

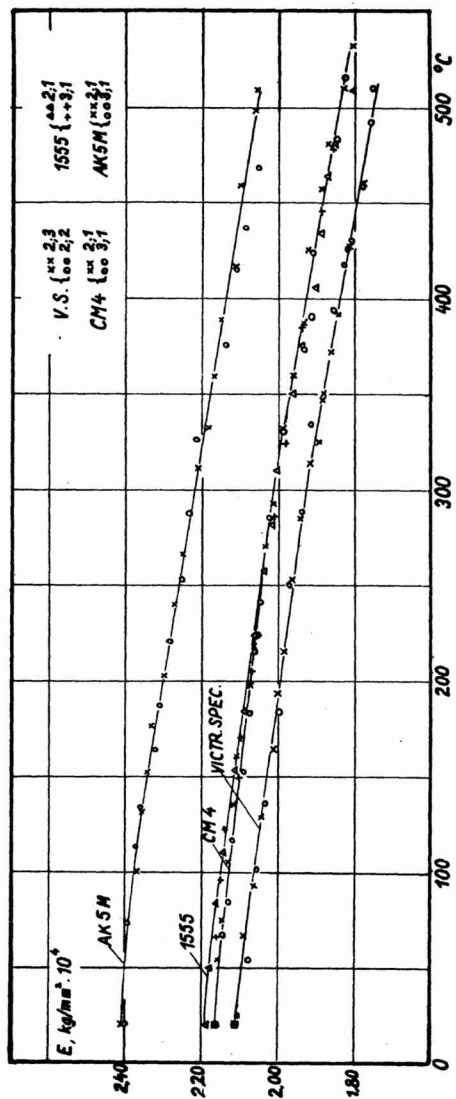
Práce byla provedena ve fyzikálním ústavu Karlovy university. Řediteli ústavu prof. dr. A. Žáčkovi děkuji za propůjčení experimentálních prostředků, za popud k této práci a cenné rady, jimiž podporoval moji práci. Panu doc. dr. V. Petržílkovi děkuji za laskavou pomoc. Firma Poldina Huť poskytla velmi ochotně pokusný materiál, začež jí patří náš dík.

*

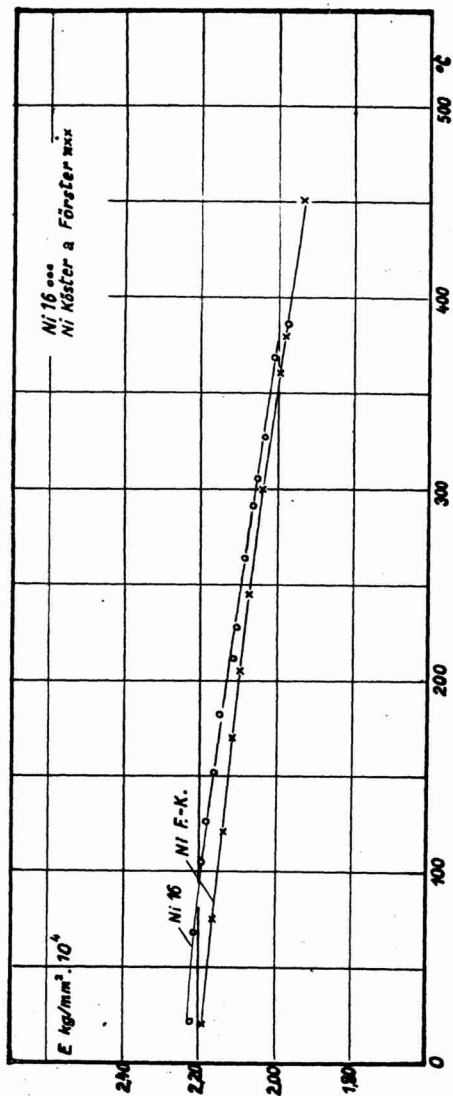
Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls von Stählen und Nickel.

(Inhalt des vorstehenden Artikels.)

In dieser Arbeit wird Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls verschiedener Stahlsorten und eines Nickelstabes



Graf 1.



Graf 2.

gemessen. Das Elasticitätsmodul E wird aus der Frequenz von Longitudinalschwingungen der Stäbe berechnet. Die Stäbe wurden im magnetischen Felde der Schwingspule eines Oszillators zu mechanischen Schwingungen erregt. Zum Feststellen der Schwingungen wurde eine Indikationsmethode, die auf einer Art Mikro-phonerscheinung beruht, angewendet. Das Elasticitätsmodul nimmt mit der Temperatur ab und zwar bei den Stahlstäben im Bereich 20° — 500° C fast linear.

Literatura:

1. Vincent J. H.: Proc. physic. Soc., **41** (1929), 476; Electrician, **101** (1928), 729.
 2. Pierce W. G.: Proc. Inst. Radio Engr., **17** (1929), 42.
 3. Dörffler H.: Z. f. Phys., **63** (1930), 30.
 4. Pavlík B.: Ann. der Phys., **26**, (1936), 625.
 5. Šimon I.: Z. f. Phys., **106** (1937), 379.
 6. Kohl F.: Z. f. Phys., **111** (1939), 450.
 7. Rayleigh: Theory of Sound, I (1929), 252.
 8. Giebe E., Bechshmidt E.: Ann. der Phys., **11** (1931), 905.
 9. Freimann L. S.: Hochfrequenztechn. u. Elektroakust., **34** (1929), 219.
 10. Šimon I.: Hochfrequenztechn. a Elektroakust., **50** (1937), 54.
 11. Dye W. D.: Proc. phys. Soc. London, **36** (1929), 399.
 12. Petržílka V., Záček A.: Hochfrequenztechn. u. Elektroakust., **46** (1935), 157.
 13. Technický průvodce: Teplo.
 14. Becker R.: Phys. Z., **33** (1932), 905.
 15. Kersten M.: Z. f. techn. Phys., **11** (1934), 463.
 16. Brown W. F.: Phys. Rev., **50** (1936), 1165; **52** (1937), 325.
 17. Balamuth: Phys. Rev., **45** (1934), 715.
 18. Rose: Phys. Rev., **49** (1936), 50.
 19. Zacharies: Phys. Rev., **44** (1933), 116.
 20. Siegel S., Quimby S. L.: Phys. Rev., **49** (1936), 663.
 21. Quimby S. L.: Phys. Rev., **39** (1932), 345.
 22. Gerlach W.: Z. f. Elektrochem., **45** (1939), 151.
 23. Engler O.: Ann. der Phys. **31** (1938), 145.
 24. Föster F., Köster W.: Z. f. Metallkunde, **29** (1937), 116.
 25. Föster F.: Engr., **166** (1938), 626.
 26. Jaquered, Mugeli H.: Stahl u. Eisen 1924, 621.
 27. Cooke W. T.: Phys. Rev., **50** (1936), 1158.
- Kreslila J. Šimonová-Čeřovská. Archiv JČMF.

NOVÁ KNIŽNÍ SBÍRKA

CESTA K VĚDĚNÍ

Sv. 1.

Dr. ŠTEFAN SCHWARZ:

O ROVNICÍCH

8° 94 str. 10 obr. 1940 Brož. 14 K.

Sv. 2.

Doc. Dr. V. PETRŽÍLKA

a Ing. Dr. J. B. SLAVÍK:

PIEZOELEKTŘINA

a její použití v technické praxi.

8° 117 str. 97 obr. 1940 Brož. 19 K.

Lze dostat u všech knihkupeů nebo u nakladatele

Jednota českých matematiků a fysiků v Praze.

FYSMA společnost s ručením omezeným
založená Jednotou českých
matematiků a fyziků v Praze

Praha II, Žitná 25.

Telefon 237-14, 293-08

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

přesně vyrobené, spolehlivé, odborně vyzkoušené.

NOVÉ PŘÍSTROJE: Wilsonova komora k ukázání mlžných drah paprsků α — Přístroj k důkazu závislosti odporu vodiče na jeho délce, průřezu i materiálu — Přístroj k ukázání kritického stavu éteru v projekci — Přístroj pro výklad Bernoulliovy rovnice — II. část souboru k osvětlení podstaty letu: Přístroj k promítání vírových oblastí, model letounu a model řídicího ústrojí letounu — Nové banánky — atd.

NAVŠTIVTE NÁS, předvedeme Vám pokusy v naší předváděcí síni nezávazně.

NAPIŠTE NĀM, posloužíme Vám radou, nabídkou a prospekty.

OPRAVY POMŮCEK a přístrojů kterékoliv výroby provádíme pečlivě a odborně.

Vydává a nakládá Jednota českých matematiků a fyziků v Praze.
Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8—12 a od 13—17 hodin kromě soboty odpoč., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII.
Dohledací úřad Praha 25.