Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 27. Januar 1940.)

Es sei $r \geqq 4$ ganz; S_r sei die Menge aller Punkte $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(r)})$ mit $a^{(1)} > 0, \dots, a^{(r)} > 0$. Für $a \in S_r$, $x > 0$ sei $V_a(x)$ das Volumen des r-dimensionalen Ellipsoids $a^{(1)}u_1^2 + \dots + a^{(r)}u_r^2 \leqq x$, $A_a(x)$ die Anzahl der in diesem Ellipsoid liegenden Gitterpunkte $(u_1, \dots, u_r)$,

$$\mathsf{P}_a(x) = A_a(x) - V_a(x), \quad M_a(x) = \int_0^x \mathsf{P}_a^2(y)\,\mathrm{d}y.$$

R_r sei die Menge aller $a \in S_r$ mit rationalen Koordinaten $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$. Für jedes $a \in S_r$ sei λ_a die Menge aller Werte von $a^{(1)}u_1^2 + \dots + a^{(r)}u_r^2$ für ganzzahlige $u_1, \dots, u_r$, sodaß λ_a keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt. Es gilt:

I. Für jedes feste a ist $\mathsf{P}_a(x)$ (und offenbar auch $M_a(x)$) als Funktion von x in jedem Punkte $x > 0$ rechtsseitig stetig.

II. Ist $b \in S_r$ und liegt $x_0 > 0$ nicht in λ_b, so ist $\mathsf{P}_a(x_0)$ als Funktion von a im Punkte b stetig.

III. Sind $x > 0$ und $b \in S_r$ gegeben, so gibt es in S_r eine Umgebung U von b, sodaß $\mathsf{P}_a(y)$ im Gebiet $0 < y < x$, $a \in U$ beschränkt ist.

IV. Ist $a \in R_r$, so sind alle Zahlen von λ_a rational.

V. $M_a(x)$ ist bei festem x eine stetige Funktion von a.

I bis IV sind klar. V folgt so: ist $x > 0$, $a_n \to a$, so ist die Folge $\mathsf{P}_{a_n}(y)$ für $0 < y < x$ nach III gleichmäßig beschränkt und strebt nach II für fast alle y gegen $\mathsf{P}_a(y)$. Daraus folgt bekanntlich

$$\int_0^x \mathsf{P}_{a_n}^2(y)\,\mathrm{d}y \to \int_0^x \mathsf{P}_a^2(y)\,\mathrm{d}y.$$

VI. Es ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}}} > 0, \quad \limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} < \infty \text{ [1])} \qquad (1)$$

[1]) V. Jarník, Math. Zeitschr. **33** (1931), 62—84.

und für $r > 4$ auch

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|\mathsf{P}_a(x)|}{x^{\frac{1}{2}r-1}} < \infty.^{2)} \tag{2}$$

VII. Für $a \in R_r$ ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} > 0^{1)} \tag{3}$$

und für $r > 4$ auch

$$\liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}}.^{3)} \tag{4}$$

VIII. Es gibt eine Menge $N_r \subset S_r$, die alle Punkte von S_r mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null enthält, sodaß für jedes $a \in N_r$ gilt[4])

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} (\log x)^{3r+3}} < \infty. \tag{5}$$

Ich möchte nun auf eine in der Punktmengenlehre übliche Weise zeigen, daß es solche a gibt, für welche $\mathsf{P}_a(x)$, $M_a(x)$ die nach (1), (2) größtmöglichen Schwankungen „fast" erreichen (rechnerische Beweise einiger verwandten Sätze liegen bereits vor):

Satz. *Es sei $r \geqq 4$ ganz, $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Dann gibt es in S_r eine Menge B mit folgenden Eigenschaften:*

E_1. Die Menge $S_r - B$ ist von erster Kategorie (in S_r), also ist B nicht leer.

E_2. Für $a \in B$ gilt:

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} f(x) = \infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} (\log x)^{3r+8} f(x)} = 0$$

und für $r > 4$ auch

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = +\infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = -\infty.$$

Beweis. Für $k = 1, 2, \ldots$ sei C_k die Menge aller $a \in S_r$, zu welchen es eine irrationale Zahl x und im Falle $r > 4$ noch zwei weitere irrationale Zahlen t, u gibt mit

$$x > k, \quad \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} f(x) > k;$$

$$t > k, \quad \frac{\mathsf{P}_a(t)}{t^{\frac{1}{2}r-1}} f(t) > k; \quad u > k, \quad \frac{\mathsf{P}_a(u)}{u^{\frac{1}{2}r-1}} f(u) < -k.$$

[2]) V. Jarník, Bull. Internat. de l'Acad. des sciences de Bohême, 1928, 1—10; oder V. Jarník, Math. Annalen **101** (1929), 136—146 und V. Jarník und A. Walfisz, Math. Zeitschr. **32** (1930), 152—160.

[3]) Z. B. V. Jarník, Math. Zeitschr. **27** (1927), 154—160.

[4]) V. Jarník, Math. Zeitschr. **33** (1931), 85—97.

Weiter sei D_k die Menge aller $a \in S_r$, zu welchen es ein w mit

$$w > k, \quad \frac{M_a(w)}{w^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} (\log w)^{3r+3} f(w)} < \frac{1}{k}$$

gibt. Jeder Punkt von R_r ist nach I, (3), (4) ein Punkt von C_k und zwar nach II, IV, V ein innerer Punkt von C_k; jeder Punkt von N_r ist nach (5), V ein innerer Punkt von D_k. Also (da R_r, N_r dicht in S_r sind) enthält C_k und ebenso D_k eine in S_r dichte offene Menge. Setzt man $B = \prod_{k=1}^{\infty} C_k D_k$, also $S_r - B = \sum_{k=1}^{\infty} (S_r - C_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_r - D_k)$, so sind $S_r - C_k$, $S_r - D_k$, also auch $S_r - B$ von erster Kategorie. Weiter hat B offenbar die Eigenschaft E_2.[5])

Ich habe hier den Beweis dieses Satzes gegeben, da ich diesen Satz in der Einleitung einer anderen Arbeit ohne Beweis angeführt habe. In jener Arbeit habe ich folgenden Fall untersucht:

$$r = r_1 + r_2, \; r_1 \geqq 6, \; r_2 \geqq 6, \; \alpha_1 > 0, \; \alpha_2 > 0, \; \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ irrational}, \tag{6}$$

$$a^{(1)} = \ldots = a^{(r_1)} = \alpha_1, \; a^{(r_1+1)} = \ldots = a^{(r)} = \alpha_2, \tag{7}$$

sodaß es sich um Ellipsoide

$$\alpha_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$$

handelt. Es seien $\frac{p_v}{q_v}$ $(v = 1, 2, \ldots)$ die *positiven* Näherungsbrüche von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und man setze

$$z = \operatorname{Min}(r_1, r_2), \quad H(x) = \sum_{v} \sum_{m,n} \frac{1}{q_v^2 m^{r_2-2} n^{r_1-2}} \operatorname{Min}\left(1, \left(\frac{q_{v+1} mn}{x}\right)^z\right),$$

wobei (bei festem v) m bzw. n über alle positiven Teiler von p_v bzw. q_v läuft. Und ich zeige: $x^{r-1} H(x)$ stellt $M_a(x)$ so genau dar, daß

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1} H(x)} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1} H(x)} < \infty.$$

In einer dritten Arbeit untersuche ich $\mathsf{P}_a(x)$ selbst und zeige unter anderem (unter denselben Voraussetzungen (6), (7)): es

[5]) In B liegen auch Punkte $(a^{(1)}, \ldots, a^{(r)})$, welche für keine ganzzahligen $c_0, c_1, \ldots, c_r$ den Beziehungen $a^{(1)} c_1 + \ldots + a^{(r)} c_r + c_0 = 0$, $|c_1| + \ldots + |c_r| > 0$ genügen; denn die Punkte, welche irgendeiner solchen Bedingung genügen, bilden auch nur eine Menge erster Kategorie (Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Hyperebenen).