

Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0069|log22

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über H -abgeschlossene und bikompakte Räume.

Miroslav Katětov, Praha.

(Eingegangen am 2. Juni 1939.)

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. Im § 1 werden (neben anderen Sätzen) zwei notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bikompaktheit eines Raumes gegeben (Sätze 1.5 und 1.7). Der Satz 1.7 ist nicht neu; er wurde von Herrn M. H. Stone¹⁾ mit Hilfe der Theorie der Booleschen Ringe bewiesen; hier gebe ich einen anderen Beweis. Im § 2 wird für jeden Hausdorffschen Raum die Existenz einer H -abgeschlossenen Hülle (siehe dort die Definition) bewiesen und einige ihre Eigenschaften untersucht. Im § 3 wird für die bikompakte Hülle [dieser Begriff und der betreffende Satz sind aus den Arbeiten von Herren M. H. Stone¹⁾ und E. Čech²⁾ bekannt] ein auf den Ergebnissen von § 1 und 2 beruhender Existenzbeweis gegeben.

Vorbemerkungen.

Zunächst erklären wir einige im folgenden benutzte Bezeichnungen; sonst stimmt die Terminologie mit der von Alexandroff und Hopf³⁾ überein.

Ist R eine Menge und ist jeder Menge $M \subset R$ eine Menge $uM \subset R$ zugeordnet (also ist — wenn $\mathfrak{R}$ das System aller Teilmengen von R bezeichnet — eine Abbildung u von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ definiert), so heißt u eine *topologische Zuordnung* oder eine *allgemeine Topologie* auf R ; (R, u) heißt ein *allgemein-topologischer Raum*. Man schreibt gewöhnlich, wenn daraus kein Mißverständnis entstehen kann, R anstatt (R, u) und $\overline{M}$ anstatt uM .

¹⁾ M. H. Stone, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, Transactions of the Amer. Math. Soc., 41 (1937), S. 375ff.

²⁾ E. Čech, On bicompact spaces, Annals of Math., (2), 88 (1937), S. 823—844.

³⁾ P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, I. Band; Springer, Berlin 1935.

Sind u und v allgemeine Topologien auf R und ist stets $uM \subset vM$, so sagt man, u sei *schwächer* als v und v *stärker* als u .⁴⁾ Ist $P \subset R$, so setzt man für $M \subset P$ $u_P M = P \cdot uM$; u_P ist dann eine allgemeine Topologie auf P . (P, u_P) heißt ein *Relativraum* (in bezug auf R); man sagt auch, (P, u_P) sei in (R, u) *eingebettet* und (R, u) *umfasse* (P, u_P) .

Ist $M \subset R$, M in dem Raum (R, u) offen, bzw. Umgebung eines Punktes usw., so sagen wir M sei u -offen, bzw. eine u -Umgebung usw. Wenn f eine Abbildung einer Menge A in eine Menge B und $M \subset A$ ist, bezeichnen wir mit f_M die Abbildung von M in B , welche entsteht, indem für $x \in M$ $f_M(x) = f(x)$ gesetzt wird.

Ein allgemein-topologischer Raum (R, u) heißt ein *Hausdorffscher* Raum und u heißt eine *Hausdorffsche* Topologie (wir schreiben: H -Raum, H -Topologie), wenn folgende Axiome erfüllt sind (dabei bezeichnen A, B Teilmengen von R):

I. $u\emptyset = \emptyset$. II. $A \subset uA$. III. $u(uA) = uA$. IV. $u(A + B) = uA + uB$. V. (Hausdorffsches Trennungsaxiom.) Je zwei verschiedene Punkte aus R besitzen disjunkte Umgebungen.

Nun führen wir einige bekannte Sätze an, die im folgenden benutzt werden. Sie rühren meistens von Alexandroff und Urysohn⁵⁾ her; siehe auch das erwähnte Buch von Alexandroff und Hopf.

0.1 sind G, M Teilmengen eines H -Raumes, G offen, so ist $\overline{GM} = \overline{G}\overline{M}$.

Definition. Ein H -Raum heißt *H-abgeschlossen*, wenn er in jedem ihn umfassenden H -Raum abgeschlossen ist.

0.2. Ein H -Raum R ist dann und nur dann H -abgeschlossen, wenn jede seine offene Überdeckung endlichviele Elemente G_i mit $\sum_{i=1}^m \overline{G_i} = R$ enthält.

Definition. Ein H -Raum heißt *bikompakt*, wenn jede seine offene Überdeckung eine endliche Überdeckung enthält.

0.3. Ein H -Raum R ist dann und nur dann bikompakt, wenn folgendes gilt: ist $\mathfrak{F}$ ein (nichtleeres) System abgeschlossener Teilmengen von R und ist der Durchschnitt endlichvieler Elemente von $\mathfrak{F}$ stets nichtleer, so hat $\mathfrak{F}$ einen nichtleeren Durchschnitt.

0.4. Jede abgeschlossene Teilmenge eines bikompakten H -Raumes ist bikompakt (als Relativraum).

⁴⁾ Also auch wenn $u = v$.

⁵⁾ P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandlungen der Kon. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929.

0.5. Jede schlichte stetige Abbildung eines bikompakten H -Raumes auf einen H -Raum ist eine Homöomorphie.

Definition. Ein H -Raum heißt *regulär*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R , von denen eine einpunktig ist, disjunkte Umgebungen besitzen.

0.6. Ein H -Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn er H -abgeschlossen und regulär ist.

Definition. Ein H -Raum heißt *normal*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R disjunkte Umgebungen besitzen.

0.7. Jeder bikompakte H -Raum ist normal.

0.8. Ist R ein normaler H -Raum, $A \subset R$ abgeschlossen und ist in A eine beschränkte stetige Funktion f definiert, so gibt es eine in R definierte stetige beschränkte Funktion F mit $F_A = f$.

Definition. Ein H -Raum heißt *vollständig regulär*,⁶⁾ wenn es zu jeder abgeschlossenen nichtleeren $M \subset R$ und jedem Punkt $x \in R - M$ eine in R definierte stetige Funktion f mit $f(x) = 0$, $f(M) = (1)$ gibt.

Offenbar ist jeder normale H -Raum vollständig regulär, und jeder vollständig reguläre H -Raum regulär.

§ 1.

1.1. Ist der Raum R H -abgeschlossen, f seine stetige Abbildung auf einen H -Raum S , so ist auch S H -abgeschlossen.

Beweis: $\mathfrak{G}$ sei eine offene Überdeckung von S . Dann bilden die Mengen $f^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}$, eine offene Überdeckung von R ; daher gibt es nach **0.2** $G_i \in \mathfrak{G}$ ($i = 1, \dots, m$) so daß $\sum_{i=1}^m f^{-1}(\overline{G_i}) = R$, also $\sum_{i=1}^m f^{-1}(\overline{G_i}) = R$, $\sum_{i=1}^m \overline{G_i} = S$ gilt. Die H -Abgeschlossenheit von S folgt jetzt aus **0.2**.

1.2. Ist der Raum R H -abgeschlossen, $M \subset R$ offen, so ist auch der Raum $\overline{M}$ H -abgeschlossen.

Beweis: Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Überdeckung von $Q = \overline{M}$, so sei für jede $G \in \mathfrak{G}$ G^* in R offen und $G^*Q = G$. Dann ist $\Sigma G^* + (R - Q) = R$, also mit geeigneten $G_i \in \mathfrak{G}$ $\sum_{i=1}^m \overline{G_i^*} + \overline{R - Q} =$

⁶⁾ A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. 102 (1930), S. 544.

$= R$ und daher $\overline{\sum_{i=1}^m G_i^*} \supset M$, folglich wegen $M \cdot \overline{\sum_{i=1}^m G_i^*} = \overline{M \cdot \sum_{i=1}^m G_i^*}$

(nach 0.1) $\overline{\sum_{i=1}^m G_i} \supset \overline{M} = Q$, woraus die H -Abgeschlossenheit von $\overline{M}$ folgt.

Definition. Eine H -Topologie u auf R heißt *maximal*, wenn keine von u verschiedene H -Topologie auf R stärker als u ist.

1.3. Ist der Raum (R, u) H -abgeschlossen, so gibt es eine und nur eine maximale H -Topologie v auf R , die stärker als u ist. Diese Topologie besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so ist $u_Q = v_Q$;
- (2) besitzen in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen, so ist (R, v) regulär;
- (3) ist f eine stetige Abbildung des Raumes (R, u) in einen regulären Raum, so ist f auch als Abbildung von (R, v) stetig.

Beweis. I. Mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir das System aller $R - uG$, G u -offen, und definieren eine Topologie v auf R , indem wir $\mathfrak{U}$ für eine Basis des Raumes (R, v) erklären. Sind x, y verschiedene Punkte aus R , so sei U eine u -offene Umgebung von x , $y \notin uU$; setzt man $G = R - u(R - uU)$, $\Gamma = R - uU$, so ist G bzw. Γ eine v -Umgebung von x bzw. y und $G\Gamma = \emptyset$, also das Trennungsaxiom erfüllt. Offenbar genügt v auch den übrigen Axiomen und ist also eine H -Topologie und dabei stärker als u . Nach 1.1 ist der Raum (R, v) H -abgeschlossen.

w sei jetzt eine H -Topologie auf R und stärker als u . Ist $A \in \mathfrak{U}$, so ist $A = R - B$, wo $B = uG$, G u -offen ist. Nach 1.2 und 1.1 ist dann der Raum (B, w_B) H -abgeschlossen, also B in (R, w) abgeschlossen, A w -offen. Daraus folgt, daß w schwächer als v ist; also ist v die (einzige) maximale Topologie auf R , die stärker als u ist.

II. Ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so sei $x \in Q$, U eine Umgebung von x in (R, u) . Da (Q, u_Q) regulär ist, kann man eine u -offene Umgebung V von x finden, für die $Q \cdot u(VQ) \subset UQ$ gilt. Setzt man $G = R - u(R - uV)$, so ist $x \in V \subset G \subset uV$, G v -offen, also eine v -Umgebung von x ; nach 0.1 ist $u(VQ) = uV$ und daher $QG \subset Q \cdot u(VQ) \subset QU$. Hiermit ist die Behauptung (1) bewiesen.

III. Nun setzen wir voraus, daß in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen. Es sei $x \in R$, U eine v -Umgebung von x . Nach der Definition von v gibt es eine u -offene Menge A mit $x \in R - uA \subset U$. Zu jedem $y \in B = uA$ kann man u -offene Umgebungen G_y und $G(y)$ von x bzw. y so finden, daß $uG_y \cdot uG(y) = \emptyset$ ist.

Nach 1.2 ist B H -abgeschlossen; da $BG(y)$ eine offene Über-

deckung von B bilden, gilt nach 0.2 mit geeigneten $y_i \in B$ $u \sum_{i=1}^m G(y_i) \supset B$. Setzt man $G = \prod_{i=1}^m G_{y_i}$, $\Gamma = R - u(R - uG)$, so ist $x \in G \supset \Gamma$, Γ v -offen, also eine v -Umgebung von x ; ferner ist wegen $\prod_{i=1}^m uG_{y_i} \cdot \sum_{i=1}^m uG(y_i) = \emptyset$ auch $B \cdot uG = \emptyset$, also, da uG v -abgeschlossen, $\Gamma \subset uG$ ist, $v\Gamma \subset uG \subset R - B \subset U$, woraus die Regularität von (R, v) folgt.

IV. Ist f eine stetige Abbildung von (R, u) in einen regulären Raum S , so sei $x \in R$, U eine Umgebung von $y = f(x)$ in S , ferner V eine offene Umgebung von y , $\bar{V} \subset U$. Dann ist $x \in f^{-1}(V) \subset R - u(R - uf^{-1}(V)) \subset uf^{-1}(V) \subset f^{-1}(\bar{V}) \subset f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U)$ eine v -Umgebung von x . Daraus folgt die Behauptung (3).

1.4. Eine H -Topologie u auf R ist dann und nur dann maximal, wenn (1) (R, u) H -abgeschlossen ist; (2) das System aller $R - uG$, G offen, eine Basis von (R, u) ist.

Beweis. I. sind beide Bedingungen erfüllt; und definiert man die maximale Topologie v wie in 1.3, I, so ist infolge der Bedingung (2) $v = u$.

II. Ist (R, u) H -abgeschlossen, gilt aber (2) nicht, so ist v offenbar stärker als u und von u verschieden.

III. Ist (R, u) kein H -abgeschlossener Raum, so sei (R, u) in einen H -Raum (S, v) eingebettet und $vR - R \neq \emptyset$.

Man wähle $\xi \in vR - R$ und $a \in R$ und setze $\varphi(\xi) = a$ und für $x \in R$ $\varphi(x) = x$; φ ist dann eine Abbildung von $Q = R + \{\xi\}$ auf R . Wir bestimmen eine Topologie v auf R durch die Festsetzung: $M \subset R$ ist dann und nur dann v -offen, wenn $\varphi^{-1}(M)$ in Q offen ist. Man beweist leicht, daß v eine H -Topologie, stärker als u und von u verschieden ist.

1.5. Ein H -Raum (R, u) ist dann und nur dann bikompakt, wenn (1) je zwei verschiedene Punkte aus R disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen; (2) die Topologie u maximal ist.

Beweis. I. Sind die Bedingungen erfüllt, so folgt aus (2) nach 1.4 die H -Abgeschlossenheit von (R, u) . Konstruieren wir die H -Topologie v auf R wie in 1.3, I, so ist erstens v stärker als u , also gleich u , zweitens folgt aus (1) nach 1.3, Behauptung (2), daß (R, v) , also (R, u) regulär ist. Daraus folgt nach 0.6 die Bikompaktheit von (R, u) .

II. Ist (R, u) bikompakt, so ist (1) nach 0.6 und (2) nach 0.5 erfüllt.

1.6. Jedes monotone (nichtleere) System nichtleerer H -abgeschlossenen Teilmengen eines H -Raumes hat einen nichtleeren Durchschnitt.

Beweis. I. Es sei $\mathfrak{F}$ ein solches System von Teilmengen eines H -Raumes R . Man kann offenbar voraussetzen, daß R H -abgeschlossen ist.

Es sei $F \in \mathfrak{F}$, $x \in R - F$. Für $y \in F$ sei $U(y)$ eine offene Umgebung von y , $x \notin \overline{U(y)}$. Da F H -abgeschlossen ist, gilt nach 0.2 für geeignete $y_i \in F$ $\sum_{i=1}^m \overline{F U(y_i)} \supset F$. Setzt man

$G(F, x) = \sum_{i=1}^m U(y_i)$, so ist $G(F, x)$ offen, $\overline{F G(F, x)} \supset F$ und $\prod_{x \in R-F} \overline{G(F, x)} = F$, da $x \notin \overline{G(F, x)}$.

II. Es sei $F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ ($i = 1, \dots, n$), $F_i \supset F_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ist $1 < r \leq n$ und $F_r \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, so ist auch $F_{r-1} \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also nach I $\overline{F_{r-1} G(F_{r-1}, x_{r-1})} \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also, da $\prod_{i=r}^n G(F_i, x_i)$ offen ist, $F_{r-1} \prod_{i=r-1}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$. Nun folgt aus $F_n G(F_n, x_n) \neq \emptyset$ durch Rekursion $\prod_{i=1}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$.

III. Man nehme an, $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F$ sei leer. Dann ist auch $\prod_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} \overline{G(F, x)} = \emptyset$, also $\sum_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} (R - \overline{G(F, x)}) = R$. Nach 0.2 gilt dann mit geeigneten

$F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ $\sum_{i=1}^n \overline{R - G(F_i, x_i)} = R$, $\sum_{i=1}^n (R - G(F_i, x_i)) = R$, $\prod_{i=1}^n G(F_i, x_i) = \emptyset$, wobei infolge der Monotonie von $\mathfrak{F}$ noch $F_i \supset F_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) vorausgesetzt werden kann. Das ist aber nach II ein Widerspruch.

1.7. Ein H -Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn jede seine abgeschlossene Teilmenge H -abgeschlossen ist.

Beweis. I. Die Bedingung ist nach 0.4 und 0.6 in jedem bikompakten Raum erfüllt.

II. Ist sie in einem H -Raum R erfüllt, so sei $\mathfrak{F}$ ein (nicht-leeres) System von abgeschlossenen Teilmengen von R mit $\prod_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$ für $F_i \in \mathfrak{F}$ ($i = 1, \dots, n$). Man nehme an, es sei $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F = \emptyset$. Dann gibt es die kleinste Zahl α , für die eine trans-

finite Folge $\{F_\xi\}$, $\xi < \alpha$, mit $F_\xi \in \mathfrak{F}$, $\prod_{\xi < \alpha} F_\xi = \emptyset$ existiert. Die Zahl α ist unendlich; wäre sie isoliert, so könnte man durch eine geeignete Umordnung aus $\{F_\xi\}$ eine Folge $\{F'_\xi\}$, $\xi < \beta$, $\beta < \alpha$, bilden, was aber ein Widerspruch ist. Die Mengen $A_\xi = \prod_{\eta < \xi} F_\eta$ ($0 < \xi < \alpha$) sind abgeschlossen, also H -abgeschlossen und nicht-leer; für $0 < \xi_1 < \xi_2 < \alpha$ gilt $A_{\xi_1} \supset A_{\xi_2}$; da α keine isolierte Zahl ist, gilt $\prod_{0 < \xi < \alpha} A_\xi = \prod_{\xi < \alpha} F_\xi = \emptyset$. Das ist nach 1.6 ein Widerspruch; also $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$. Nun folgt aus 0.3 die Bikompaetheit von R .

§ 2.

2.1. Zu jedem H -Raum R gibt es einen H -Raum S mit folgenden Eigenschaften:

- (1) R ist in S eingebettet. $\bar{R} = S$; (2) S ist H -abgeschlossen; (3) ist f eine stetige Abbildung von R in einen H -Raum Q , $\bar{f}(\bar{R}) = Q$, so gibt es eine Teilmenge M von S und ihre stetige Abbildung F auf Q , für die $R \subset M$, $F_R = f$ gilt.

Ist Q bikompaht, so kann man $M = S$ wählen.

Besitzt ferner ein H -Raum S' die Eigenschaften (1)–(3) in bezug auf einen H -Raum R' , so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S' , welche auf R mit f zusammenfällt.

Definition. Einen H -Raum S , welcher die erwähnten Eigenschaften (1)–(3) besitzt, nennen wir eine H -abgeschlossene Hülle von R .

Beweis des Satzes. Ist R H -abgeschlossen, so kann man $S = R$ setzen. Daher setzen wir voraus, R sei nicht H -abgeschlossen. In dem ganzen Beweis bezeichnen die Buchstaben A, B, G offene Teilmengen von R , $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ Systeme solcher Mengen.

I. $\mathfrak{A}$ heiße ein α -System, wenn ($\alpha 1$) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$; ($\alpha 2$) $\emptyset \text{ non } \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 3$) ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{A}$, so ist $B \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 4$) sind $A_i \in \mathfrak{A}$ ($i = 1, \dots, m$),

so ist $\prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 5$) $\prod_{A \in \mathfrak{A}} \bar{A} = \emptyset$. $\mathfrak{A}$ heiße ein β -System, wenn

$\mathfrak{A}$ ein α -System, aber keine echte Teilmenge eines α -Systems ist. Da R kein H -abgeschlossener Raum ist, gibt es eine offene Über-

deckung $\mathfrak{B}$ von R , welche keine B_i mit $\sum_{i=1}^m \bar{B}_i = R$ enthält. Mit $\mathfrak{A}$

bezeichnen wir das System aller A , zu denen es $B_i \in \mathfrak{B}$ mit $R - \sum_{i=1}^m \bar{B}_i \subset A$ gibt. $\mathfrak{A}$ besitzt offenbar die Eigenschaften $\alpha 1 - \alpha 4$;

wegen $\prod_{A \in \mathfrak{A}} \overline{A} \subset \prod_{B \in \mathfrak{B}} \overline{R - B} \subset \prod_{B \in \mathfrak{B}} (R - B) = \emptyset$ ist also $\mathfrak{A}$ ein α -System.

II. Es sei ein α -System $\mathfrak{A}$ gegeben. Wir wollen die Existenz eines $\mathfrak{A}$ umfassenden β -Systems beweisen. $\{\mathfrak{B}_\xi\}$, $\xi < \gamma$, sei eine (transfinite) Folge aller α -Systeme. Man setze $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und für $0 < \xi < \gamma$ $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, falls $\mathfrak{B}_\xi \supset \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, sonst aber $\mathfrak{A}_\xi = \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$; ferner setze man $\mathfrak{G} = \sum_{\xi < \gamma} \mathfrak{A}_\xi$. $\mathfrak{G}$ genügt offenbar den Bedingungen $\alpha 1$ und $\alpha 5$. Bleibt zu zeigen, daß $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$ erfüllt sind.

Ad $\alpha 2$. Wäre $\emptyset \in \mathfrak{G}$, so gäbe es die kleinste $\xi < \gamma$ mit $\emptyset \in \mathfrak{A}_\xi$; es wäre dann $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $\emptyset \in \mathfrak{B}_\xi$; das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{B}_\xi$ ein α -System ist.

Ad $\alpha 3$. Ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{G}$, so wähle man die kleinste ξ mit $A \in \mathfrak{A}_\xi$. Ist $\xi = 0$, so ist $A \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, also $B \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. Ist $\xi > 0$, so ist $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $A \in \mathfrak{B}_\xi$, $B \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{G}$.

Ad $\alpha 4$. Sind $A_i \in \mathfrak{G}$ ($i = 1, \dots, m$), so wähle man die kleinste ξ mit $A_i \in \mathfrak{A}_\xi$ ($i = 1, \dots, m$). Ist $\xi = 0$, so ist $A_i \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ ($i = 1, \dots, m$), also $\prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. Ist $\xi > 0$, so ist offenbar

$$\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta, \text{ also } \mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi, A_i \in \mathfrak{B}_\xi, \prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{G}.$$

$\mathfrak{G}$ ist also ein α -System. Ist $\mathfrak{B}$ ein α -System, $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{G}$, so gilt für eine geeignete $\xi < \gamma$ $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B} \supset \mathfrak{G} \supset \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$; nach der Definition von $\mathfrak{A}_\xi$ ist also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$. Daher ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ und somit $\mathfrak{G}$ ein β -System.

III. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ verschiedene β -Systeme, so kann offenbar nicht $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ sein. Es sei also $G \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1$. Mit $\mathfrak{A}'$ bezeichne man das System aller A , für die mit geeigneter $B \in \mathfrak{A}_1$ $A \supset BG$ gilt. Dann ist $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}'$ ist also kein α -System. $\mathfrak{A}'$ besitzt aber offenbar die Eigenschaften $\alpha 1$ und $\alpha 3 - \alpha 5$ und kann daher die Eigenschaft $\alpha 2$ nicht besitzen; also $\emptyset \in \mathfrak{A}'$, folglich gibt es $A \in \mathfrak{A}_1$ mit $AG = \emptyset$.

IV. Jedem β -System $\mathfrak{A}$ sei jetzt ein in R nicht liegender Gegenstand $\tau(\mathfrak{A})$ zugeordnet und zwar verschiedenen $\mathfrak{A}$ verschiedene $\tau(\mathfrak{A})$. Mit T bezeichnen wir die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$; nach I und II ist T nichtleer. Wir setzen $S = R + T$ und definieren eine Topologie u auf S wie folgt; für $\tau(\mathfrak{A}) = x \in S$ sollen alle $(x) + A$ mit $A \in \mathfrak{A}$, für $x \in R$ alle A mit $x \in A$ als Umgebungen von x gelten. Man beweist leicht, daß (S, u) ein H -Raum ist (z. B. das Trennungsaxiom folgt aus III und der Eigenschaft $\alpha 5$ der

β -Systeme). Ferner ist klar, daß R in (S, u) eingebettet und $uR = S$ ist.

V. Man nehme an, S sei kein H -abgeschlossener Raum. Dann gibt es einen S umfassenden H -Raum V so, daß S in V nicht abgeschlossen ist. Man wähle $x \in \bar{S} - S$ und bezeichne mit $\mathfrak{A}$ das System aller RU , wo U eine offene Umgebung von x in V ist. $\mathfrak{A}$ ist, wie man leicht zeigen kann, ein α -System; also gibt es nach II ein β -System $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Da V ein H -Raum ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U und U' von x bzw. $y = \tau(\mathfrak{B})$. Wegen $UR \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist nach der Definition von (S, u) $UR + (y)$, also auch $(UR + (y)) \cdot U'S = (y)$ eine Umgebung von y in S . Das ist aber ein Widerspruch, da $y \in \bar{R} - R$, also kein isolierter Punkt ist. Daher ist S H -abgeschlossen.

VI. f sei eine stetige Abbildung von R in einen H -Raum Q , $f(\bar{R}) = Q$. Für $y \in Q$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(y)$ das System aller A , welche das Urbild einer Umgebung von y (in Q) enthalten, und mit $\Phi(y)$ die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$, wo $\mathfrak{A}$ alle $\mathfrak{A}(y)$ umfassende β -Systeme durchläuft. Sind y_1, y_2 verschiedene Punkte aus Q , so seien U_1 bzw. U_2 disjunkte offene Umgebungen von y_1 bzw. y_2 . Dann gilt $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}(y_1)$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}(y_2)$. Gäbe es ein β -System $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_1)$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_2)$, so wäre $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}$, also $\emptyset \in \mathfrak{A}$; das ist aber nicht möglich. Daher sind $\Phi(y_1)$ und $\Phi(y_2)$ disjunkt. Ist ferner $y \in Q - f(R)$, so kann man zu jedem $x \in R$ eine offene Umgebung U von y so finden, daß $f(x) \text{ non } \in \bar{U}$, also $x \text{ non } \in f^{-1}(\bar{U}) \subset f^{-1}(U)$; daher ist dann, da $\mathfrak{A}(y)$ offenbar auch die Eigenschaften $\alpha 1 - \alpha 4$ besitzt, $\mathfrak{A}(y)$ ein α -System, also nach II $\Phi(y) \neq \emptyset$.

Demzufolge ist, wenn $M = R + \sum_{y \in Q} \Phi(y)$, für $x \in R$ $F(x) = f(x)$ und für $x \in \Phi(y)$ $F(x) = y$ gesetzt wird, F eine Abbildung von M auf Q . Dabei ist $R \subset M \subset S$ und $F_R = f$.

Bleibt zu zeigen, daß F stetig ist. Ist $x \in R$, U eine offene Umgebung von $F(x) = f(x)$ in Q , so ist $F^{-1}(U) \supset f^{-1}(U)$. $R = f^{-1}(U)$ eine offene (infolge der Stetigkeit von f) x enthaltende Teilmenge von R , also nach der Definition von S (siehe IV) eine Umgebung von x in S , also auch in M .

Ist $\tau(\mathfrak{A}) = x \in M - R$ und U eine offene Umgebung von $y = F(x)$, so ist $F^{-1}(U) \supset (x) + f^{-1}(U)$. $R = (x) + f^{-1}(U)$ ist aber eine Umgebung von x in S , da $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$ ist. Daraus folgt die Stetigkeit von F .

VII. f sei jetzt eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten H -Raum Q , $f(\bar{R}) = Q$. Für jeden Punkt $x = \tau(\mathfrak{A}) \in S - R$ wähle man ein $y \in \prod_{A \in \mathfrak{A}} f(A)$ (das geht, da dieser Durchschnitt

nach 0.3 nichtleer ist). Ist U eine offene Umgebung von y , so ist für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ $f(A) \cdot U \neq \emptyset$, also $A \cdot f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Das System $\mathfrak{A}'$ aller B , für die mit geeigneter $A \in \mathfrak{A}$ $B \supset A \cdot f^{-1}(U)$ gilt, ist offenbar ein $\mathfrak{A}$ umfassendes α -System; also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ und daher $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}$. Also gilt (mit den Bezeichnungen von VI) $\mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$, $x = \tau(\mathfrak{A}) \in \Phi(y)$. Daraus folgt, daß die in VI definierte Menge M gleich S ist, w. z. b. w.

VIII. Nun gehen wir zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes über. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz:

Sind R, Q H -Räume, $M \subset R$, $\bar{M} = R$, f und g stetige Abbildungen von R in Q , $f_M = g_M$, so ist $f = g$.

Beweis des Hilfssatzes. Gäbe es $x \in R$ mit $f(x) \neq g(x)$, so wären für beliebige Umgebungen U von $f(x)$ und V von $g(x)$ $f^{-1}(U)$ und $g^{-1}(V)$, also auch $f^{-1}(U) \cdot g^{-1}(V)$ Umgebungen von x und daher $f^{-1}(U) \cdot g^{-1}(V) \cdot M = f_M^{-1}(U) \cdot g_M^{-1}(V) = f_M^{-1}(UV) \neq \emptyset$, also $UV \neq \emptyset$, was aber dem Hausdorffschen Trennungsaxiom widerspricht.

R, R', S, S' seien jetzt Räume mit den in der letzten Behauptung des Satzes vorausgesetzten Eigenschaften. Es sei f eine topologische Abbildung von R auf R' , φ die Umkehrung von f .

Es sei $R \subset M \subset S$, F eine stetige Abbildung von M auf S' , $F_R = f$; ferner $R' \subset M' \subset S'$, Φ eine stetige Abbildung von M' auf S , $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in M_1 = F^{-1}(M')$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von M_1 auf S und g_R eine identische Abbildung. Nun folgt aus dem Hilfssatz, daß g eine identische Abbildung und daher $M_1 = S$, $M = S$, F schlicht und Φ eine Umkehrung von F , also F eine Homöomorphie ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes 2.1 vollendet.

2.2. Ist S eine H -abgeschlossene Hülle eines H -Raumes R , so gilt: (1) R ist in S offen; (2) der Relativraum $S - R$ ist isoliert; (3) ist $G \subset R$ offen, $a \in \bar{G} - R$, so ist $(a) + G$ eine Umgebung von a ; (4) ist $A \subset R$ in R nirgendsdicht, so ist $\bar{A} \subset R$.

Beweis. Da (4) aus (3) und (1), (2) aus der Konstruktion des Raumes S in 2.1, IV unmittelbar folgen, brauchen wir nur (3) zu beweisen. Ist $G \subset R$ offen, $a \in \bar{G}$, $a \notin R$, so ist für jede Umgebung U von a $URG \neq \emptyset$. Daher ist, wenn man mit $\mathfrak{A}$ das System aller UR , mit $\mathfrak{A}'$ das System aller B bezeichnet, wobei B alle URG enthaltende offene Mengen, U alle offene Umgebungen von a durchläuft, $\mathfrak{A}$ ein β -System, $\mathfrak{A}'$ ein α -System (siehe 2.1, I) und $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, $G \in \mathfrak{A}$, also $(a) + G$ eine Umgebung von a ist (siehe 2.1, IV).

2.3. (R, u) und (S, v) seien H -Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Für die Existenz einer S umfassenden H -abgeschlossenen

Hülle von R ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(1) R ist in S offen; ist $G \subset R$ offen, $x \in \bar{G} - R$, so ist $(x) + G$ eine Umgebung von x ;

(2) ist w eine H -Topologie auf S , die schwächer als v ist, und ist dabei $wR = S$, $w_R = v_R = u$, so ist $w = v$.

Beweis. I. Kann man S in eine H -abgeschlossene Hülle von R einbetten, so folgt aus 2.2, Behauptung (3), daß die Bedingung (1) erfüllt ist.

II. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei w eine H -Topologie auf S , w schwächer als v , $wR = S$, $w_R = v_R = u$. Es sei $a \in S - R$ und U eine w -offene Umgebung von a ; dann ist offenbar $a \in w(UR) \subset v(UR)$. Da UR in (R, w_R) , also in (R, v_R) offen ist, folgt aus (1), daß $(a) + UR$, also auch U , eine v -Umgebung von a ist. Daher ist $w = v$, also die Bedingung (2) erfüllt.

III. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei T eine H -abgeschlossene Hülle von R . Nach 2.1 gibt es eine Menge $M \subset T$ und eine stetige Abbildung F von M auf S , so daß $R \subset M$ und für $x \in R$ $F(x) = x$ ist. Für jedes $y \in S - R$ wähle man einen Punkt $x = \varphi(y) \in M$ mit $F(x) = y$, bezeichne ferner mit P die Menge aller $\varphi(y)$ und setze $Q = R + P$. Dann ist $g = F_Q$ eine schlichte stetige Abbildung von Q auf S . Nun folgt aus (2), daß g eine topologische Abbildung ist. Hiermit ist der ganze Satz bewiesen.

2.4. Für $i = 1, 2$ sei R_i ein H -Raum mit folgender Eigenschaft: ist $a \in R_i$ nicht isoliert, so gibt es eine offene Menge $G \subset R_i$, so daß $a \in \bar{G}$, aber $(a) + G$ keine Umgebung von a ist.

Unter diesen Voraussetzungen sind R_1 und R_2 dann und nur dann homöomorph, wenn ihre H -abgeschlossene Hüllen homöomorph sind.

Beweis. Ist R_1 mit R_2 homöomorph, so wende man 2.1, letzte Behauptung, an. Sind ihre H -abgeschlossene Hüllen S_1 bzw. S_2 miteinander homöomorph, so sei f eine topologische Abbildung von S_1 auf S_2 . Ist $a \in R_1$ isoliert, so ist a auch in S_1 isoliert, also $f(a)$ in S_2 isoliert und daher, da $S_2 = \bar{R}_2$, $f(a) \in R_2$. Ist $a \in R_1$ nicht isoliert, so sei $G \subset R_1$ offen, $a \in \bar{G}$, $(a) + G$ keine Umgebung von a . Dann ist $f(G)$ in S_2 offen, $b = f(a) \in \overline{f(G)}$, also nach 0.1 $b \in R_2 f(G)$, aber $(b) + R_2 f(G)$ keine Umgebung von b , also nach 2.3 $b \in R_2$. Daher ist $f(R_1) \subset R_2$ und, da analog $f^{-1}(R_2) \subset R_1$ ist, $f(R_1) = R_2$, also R_1 mit R_2 homöomorph.

Bemerkungen zu dem Satz 2.4. 1. Nach 2.1 ist jedem H -Raum bis auf Homöomorphie eindeutig seine H -abgeschlossene Hülle zugeordnet. Der Satz 2.4 zeigt, daß diese Zuordnung bei gewissen Voraussetzungen eineindeutig ist. Die Voraussetzungen

des Satzes sind dafür nicht nur hinreichend, sondern auch in einem gewissen Sinne notwendig: aus 2.3 folgt nämlich, daß, falls sie in einem H -Raum R nicht erfüllt sind, kann man seinen echten Teilraum finden, welcher mit R gemeinsame H -abgeschlossene Hülle besitzt.

2. Die Voraussetzungen des Satzes 2.4 sind insbesondere in folgenden Fällen, wie man leicht zeigen kann, erfüllt:

- a) wenn R ein geordneter Raum ist;
- b) wenn man zu jedem nichtisolierten $a \in R$ eine unendliche abzählbare $M \subset R$ so finden kann, daß jede Umgebung von a höchstens endlichviele $x \in M$ nicht enthält.

§ 3.

3.1. Zu jedem vollständig regulären H -Raum R gibt es einen H -Raum S mit folgenden Eigenschaften: (1) R ist in S eingebettet, $\overline{R} = S$; (2) S ist bikompakt; (3) ist f eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q , $\overline{f(R)} = Q$, so gibt es eine stetige Abbildung von S auf Q , die auf R mit f zusammenfällt.

Besitzt ein H -Raum S' die Eigenschaften (1)–(3) in bezug auf einen H -Raum R' , so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S' , die auf R mit f zusammenfällt.

Definition. Ein H -Raum S , welcher die erwähnten Eigenschaften (1)–(3) besitzt, heißt eine *bikompakte Hülle* von R .

Beweis des Satzes. I. P sei eine H -abgeschlossene Hülle von R . Jedem $x \in P$ sei ein Gegenstand $\sigma(x)$ zugeordnet und zwar so, daß für $x \in R$ $\sigma(x) = x$, für $x \in P - R$ $\sigma(x) \notin R$ ist und für $x \in P - R$, $y \in P - R$ $\sigma(x) = \sigma(y)$ dann und nur dann gilt, wenn für jede stetige Abbildung f von P in einen bikompakten H -Raum $f(x) = f(y)$ ist. Mit S bezeichnen wir die Menge aller $\sigma(x)$; dann ist $R \subset S$ und σ eine Abbildung von P auf S . Wir definieren eine Topologie u auf S wie folgt: $M \subset S$ soll dann und nur dann als u -abgeschlossen gelten, wenn $\sigma^{-1}(M)$ in P abgeschlossen ist. Offenbar ist dann R in (S, u) eingebettet, $uR = S$, σ eine stetige Abbildung.

II. Ist φ eine stetige Abbildung von P in einen bikompakten H -Raum Q , so setzen wir für $x \in P$ $f(\sigma(x)) = \varphi(x)$. Da aus $\sigma(x) = \sigma(y)$ stets $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt, ist dadurch eine Abbildung f von S in Q definiert. Ist $A \subset Q$ abgeschlossen, so ist $\sigma^{-1}(f^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A)$ in P , also $f^{-1}(A)$ in (S, u) abgeschlossen. Daher ist f stetig; offenbar $f(S) = \varphi(P)$, $f_R = \varphi_R$.

III. Zum Beweis, daß (S, u) ein H -Raum ist, genügt es zu zeigen, daß das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt ist, da

(S, u) offenbar den übrigen Axiomen genügt. Es sei also $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Ist $x \in R$, $y \in R$, so folgt aus der vollständigen Regularität von R , indem man den Satz 2.1 anwendet, daß es eine stetige Abbildung φ von P in das Intervall $[0, 1]$ gibt, für die $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$ gilt.

b) Ist $x \in R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so sei U eine Umgebung von b in P , $x \notin \bar{U}$. Man kann, da R vollständig regulär ist, eine Abbildung ψ von R in das Intervall $[0, 1]$ so finden, daß $\psi(x) = 0$, $\psi(\bar{U} \cap R) = (1)$ ist. Es gibt dann nach 2.1 eine stetige Abbildung φ von P in $[0, 1]$ mit $\varphi_R = \psi$ und daher $\varphi(x) = 0$, $\varphi(b) = 1$.

c) Ist $\sigma(a) = x \in S - R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so gibt es nach der Definition von σ eine stetige Abbildung φ von P in einen bikompakten Raum, für die $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ist.

In jedem der drei Fälle bestimme man f wie in II; f ist dann eine stetige Abbildung von (S, u) in einen bikompakten H -Raum, $f(x) \neq f(y)$. Daraus folgt, daß in (S, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen.

IV. Nach I, III und 1.1 ist (S, u) ein H -abgeschlossener Raum und R ist in (S, u) eingebettet. Konstruiert man die H -Topologie v wie in 1.3, so ist (S, v) nach III und 1.3, Behauptung (2), regulär, also, da v stärker als u ist, nach 1.1 und 0.6 bikompakt. Aus der Behauptung (1) des erwähnten Satzes folgt ferner, daß R in (S, v) eingebettet ist; offenbar ist $vR = S$.

V. Ist ψ eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q , $\bar{\psi(R)} = Q$, so sei φ eine stetige Abbildung von P auf Q , $\varphi_R = \psi$ (siehe 2.1). Konstruiert man f wie in II, so ist $f_R = \psi$ und f nach 1.3, Behauptung (3), eine stetige Abbildung von (S, v) auf Q .

VI. Bleibt noch die letzte Behauptung des Satzes zu beweisen. Haben R' , S' und f die in dieser Behauptung erwähnten Eigenschaften, und bezeichnet φ die Umkehrung von f , so gibt es stetige Abbildungen F von S auf S' und Φ von S' auf S so, daß gilt: $F_R = f$, $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in S$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von S auf S und g_R eine identische Abbildung. Daher ist nach dem Hilfssatz aus 2.1, VIII, auch g eine identische Abbildung, also F schlicht und daher eine Homöomorphie.

3.2. (R, u) und (S, v) seien vollständig reguläre H -Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Dann ist jede der folgenden Bedingungen für die Existenz einer S umfassenden bikompakten Hülle von R notwendig und hinreichend:

(1) Ist f eine in R definierte stetige beschränkte Funktion, so