

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0069|log15

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 69.



SEŠIT 2.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ,
V. KNICHAL, V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER,
K. RYCHLÍK, J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, ST.
TEPLÝ, FRANT. VYČICHLO, AL. WANGLER,
FR. ZÁVIŠKA, AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1940

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 K

Obsah

ČÁST VĚDECKÁ

Část matematická

- K. Petr**, Praha XIV-1118: O racionálním tvaru lineární substituce —
Rationale kanonische Form einer linearen Substitution..... 9
- M. Pinl**, Praha VII, Sochařská 13: W-Projektionen totalisotroper Flächen II — W-projekce totálně isotropních ploch II 23
- Miroslav Katětov**, Praha XIII, Nad Primaskou 1090: Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume — O absolutně uzavřených a bikompaktních prostorech..... 36
- Harry Levy**, Urbana (Illinois): Conformal Invariants in Two Dimensions I — Konformní invarianty ve dvou dimensích I 50
- Vojtěch Jarník**, Praha XVIII, Pevnostní 1: Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre — Poznámka k teorii mřížových bodů 57

Část fyzikální

- Václav Dolejšek**, Praha XIII, Jablonského 27, a **Viktor Vranský**,
Sofia: O L-serii prvků Ta, W a Pt — Über die L-Serie von Ta, W
und Pt..... 61
- Swami Inanananda**, Narendra Nagar (India): Absolute measurement
of mercury vapour pressure at temperatures from 7° to 25° C, and the
verification of the Knudsen's law of molecular streaming — Absolutní
měření napětí rtuťových par za teploty 7° až 25° C a ověření
Knudsenova zákona o molekulárním proudění 78

ČÁST MATEMATICKÁ

O racionálním kanonickém tvaru lineární substituce.

K. Petr, Praha.

(Došlo dne 24. září 1939.)

V následujícím budu uvažovati lineární substituci (resp. lineární vztahy mezi proměnnými x_i, X_i) tvaru

$$X_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Pro tuto substituci byl podán racionální kanonický tvar; jednoduchým způsobem odvodil jej v posledních letech L. E. Dickson. Výklad o tom najde čtenář v jeho „Modern Algebraic theories“, které pod titulem „Höhere Algebra“ vyšly v německém překladě (r. 1929); viz str. 80 a násl. tohoto překladu. Než postup Dicksonův lze ještě velmi podstatně zjednodušiti; ve tvaru, ve kterém na cit. místě byl podán, není tak snadno přístupný porozumění; obtíže zejména při jeho postupu vznikající nutí autora myšlenkový pochod z velké části pouze naznačovati. Zavedením operačního symbolu, který níže označuji písmenem Δ , stávají se veškeré úvahy jasné, zcela elementární a získávají na stručnosti.

I.

Nejprve zavedu některé předpoklady a označení. Čísla a_{ik} v (1) nechtě jsou prvky tělesa (komutativního) K . Obecně budou všechna čísla v následujícím užívána a značena pomocí písmen a, b, c, d prvky tělesa K . Písmena pak x, y, z budou znaky pro proměnné lineárních forem v násl. se vyskytujících.

Matici čísel a_{ik} v (1) označíme A ; jednotkovou matici n -tého stupně E .*) Determinanty n -tého stupně z matice A resp. matice $A - \lambda E$ značeny budou $|A|, |A - \lambda E|$. Obdobná označení nebudou v následujícím zevrubněji vysvětlována. Dále nechtě značí $[x]$ matici o jednom sloupci a n řádcích; v řádku i -tém nechtě se

*) E bude v pozdějších odstavcích značiti jednotkovou matici i jiných stupňů; o který stupeň při tom jde, snadno se pozná z výrazu, ve kterém jest označení to použito.

nachází x_i ; obdobný význam mají $[X]$, $[y]$ atd. Pak vztahy (1) lze psát ve tvaru

$$[X] = A[x]. \quad (1')$$

Transformace proměnných, jež v (1) budeme provádět, jsou pro x a X kogredientní; t. j. obě řady x , X se transformují toutéž lineární substitucí. Na př. klademe

$$[x] = C[y] \text{ a současně } [X] = C[Y]. \quad (2)$$

kde C jest matice čísel c_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, n$ a $|C| \neq 0$. Touto substitucí se změní (1) ve vztahy

$$[Y] = B[y], \text{ kde } B = C^{-1}AC. \quad (2')$$

Determinant $|A - \lambda E|$ jest polynom n -tého stupně v parametru λ . Explicitně jej budeme vypisovati a značiti ve tvaru

$$(-1)^n [\lambda^n - a_n \lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_2 \lambda - a_1 \lambda^0] = (-1)^n f(\lambda). \quad (3)$$

Obyčejně se ve členu posledním závorky na levé straně (t. j. v $-a_1 \lambda^0$) činitel λ^0 potlačuje tím, že se klade $\lambda^0 = 1$; k vůli zjednodušení výkladu násl. to však nebudu činiti.

Největší společná míra všech subdeterminantů stupně $n - 1$ v determinantu $|A - \lambda E|$ budiž polynom stupně $n - s'$ v parametru λ , označíme ji $f_1(\lambda)$ stanovíce součinitel při $\lambda^{n-s'}$ rovný 1. Polynom tento jest dělitelem mnohočlenu $f(\lambda)$ a lze tedy psát

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) g'(\lambda), \text{ kde } g'(\lambda) = \lambda^{s'} - b_{s'} \lambda^{s'-1} - \dots - b_2 \lambda - b_1 \lambda^0; \quad (4)$$

při tom ovšem jest s' číslo celé > 0 . Jestliže $n = s'$, klademe $f_1(\lambda) = \lambda^0 = 1$ a jest $f(\lambda) = g'(\lambda)$.

Netřeba snad ani podotýkati, že mnohočlen $f(\lambda)$ jest invariantní vůči lineární transformaci (2), neboť z rovnice (2') následuje též

$$B - \lambda E = C^{-1} (A - \lambda E) C \text{ a tedy } |B - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Rovněž $f_1(\lambda)$ jest invariantem; to vyplývá ze vztahů

$$B - \lambda E = C^{-1} (A - \lambda E) C, \quad A - \lambda E = C (B - \lambda E) C^{-1},$$

ze kterých následuje na podkladě známých vět o determinantech, že determinant r -tého stupně utvořený z prvků matice $B - \lambda E$ jest lineární formou determinantů r -tého stupně utvořených z prvků matice $A - \lambda E$, a naopak. Jsou tudíž také invarianty polynomy $f_r(\lambda)$, $r = 1, 2, 3, \dots$, kde $f_r(\lambda)$ jest největší společná míra subdeterminantů v $|A - \lambda E|$ stupně $n - r$.

Operace Δ , o kterou v následujícím se budu opírat, vztahuje se na lineární formy proměnných x_i ; jest definována rovnicemi

$$\Delta x_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\Delta(c x_i) = c \Delta x_i,$$

$$\Delta(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = c_1 \Delta x_1 + c_2 \Delta x_2 + \dots + c_n \Delta x_n.$$

Na Δx_i lze opět provést operaci Δ ; obdržíme $\Delta(\Delta x_i) = \Delta^2 x_i$. Obdobně jasný význam mají operace $\Delta^3 x_i, \Delta^4 x_i, \dots$; Δ^0 značiti bude operaci identickou, pro kterou tedy $\Delta^0 x_i = x_i$; Δ^0 můžeme bez závady nahrazovati 1 a jakožto činitel vynechávati. Dále budiž, značíme-li při proměnném λ mnohočlen

$$d_0 \lambda^m + d_1 \lambda^{m-1} + \dots + d_m \lambda^0 \text{ znakem } \varphi(\lambda),$$

$\varphi(\Delta) L = d_0 \Delta^m L + d_1 \Delta^{m-1} L + \dots + d_m L$, L lineární forma v x_i .

V důsledku předcházejícího jest, je-li $\psi(\lambda)$ jiný polynom v proměnné λ a $\chi_1(\lambda) = \varphi(\lambda) \psi(\lambda) = \psi(\lambda) \varphi(\lambda)$, $\chi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda)$,

$$\varphi(\Delta) [\varphi(\Delta) L] = \chi_1(\Delta) L = \varphi(\Delta) [\psi(\Delta)] L,$$

definice součinu operací $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$;

$$\varphi(\Delta) L + \psi(\Delta) L = \chi_2(\Delta) L,$$

definice součtu operací $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$.

Pro operace vyznačené symboly $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$ jest tedy definováno sčítání a násobení a jsou platny pro tyto dva úkony tatáž pravidla jako pro sčítání a násobení polynomů o jedné proměnné s koeficienty v K . Násobení dvou operací $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$ značí tady ovšem sled těch operací v libovolném pořádku po sobě prováděných na lineární formy v x_i .

Na základě symbolu Δ lze psáti (1) ve tvaru

$$X_i = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Spočívá tedy operace Δ provedená na formu L v podstatě v tom, že se ve formě L proměnné x_i nahradí proměnnými X_i vztahy (1) definovanými.

Rovnici (1') lze dále dáti tvar

$$[\Delta x] = A[x], \quad (7)$$

ze které, nahradíme-li v ní x výrazem Δx , následuje ihned

$$[\Delta^2 x] = A^2[x] \text{ a stejně } [\Delta^3 x] = A^3[x]; \text{ obecně } [\Delta^r x] = A^r[x]. \quad (7')$$

Jelikož proměnné y definované rovnicemi (2) jsou lineární formy proměnných x_i , podržuje operace Δ i vzhledem k proměnným y svůj význam a jest očividně

$$\Delta y_i = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

aneb v označení maticovém

$$[\Delta y] = B[y], \text{ kde } B = C^{-1}AC.$$

II.

Rovnici (1) můžeme (se zřetelem k (6)) psát ve tvaru

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + (a_{ii} - \Delta)x_i + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad (1'')$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Označme v determinantu $|A - \Delta E|$, který jest mnohočlenem v Δ stupně n -tého a rovným $(-1)^n f(\Delta)$ — viz (3) —, minory, jež patří k prvkům prvního sloupce po řadě $\varphi_{11}(\Delta), \varphi_{21}(\Delta), \dots, \varphi_{n1}(\Delta)$. Provedme pak na (1'') operaci $\varphi_{i1}(\Delta)$; obdržíme

$$a_{i1} \varphi_{i1}(\Delta) x_1 + a_{i2} \varphi_{i1}(\Delta) x_2 + \dots + (a_{ii} - \Delta) \varphi_{i1}(\Delta) x_i + \dots + a_{in} \varphi_{i1}(\Delta) x_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sčítáme-li tyto rovnice počtem n , dostaneme v důsledku elementárních vět o determinantech

$$(-1)^n f(\Delta) x_1 = 0 \text{ aneb } f(\Delta) x_1 = 0.$$

Stejně dostáváme

$$f(\Delta) x_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Koeficienty, jež při provádění operace Δ na proměnné x_i se vyskytují, tvoří matici A . Stejně koeficienty, jež se při provádění operace $f(\Delta)$ na x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ vyskytují, tvoří matici; tato matice jest patrně $f(A)^*$ — klademe při tom $A^0 = E$. Má-li však býti splněno (8), musí tato matice býti maticí nulovou a jest tedy

$$f(A) = 0, \quad (8')$$

při čemž 0 na pravé straně této rovnice značí matici nulovou (kvadratickou, n -tého stupně).

Kdybychom svrchu místo, abychom násobili rovnice (1'') minory $\varphi_{i1}(\Delta)$, násobili těmito minory dělenými největší společnou mírou všech minorů příslušných k elementům determinantu $|A - \Delta E|$ — kteroužto společnou míru jsme označili svrchu $f_1(\Delta)$ — byli bychom dostali obdobně

$$g'(\Delta) x_i = 0, \text{ při tom } f(\Delta) = f_1(\Delta) \cdot g'(\Delta), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

ze které následuje stejně

$$g'(A) = 0. \quad (9')$$

Dokážeme pak, že existuje polynom stupně s -tého $g(\lambda)$ takový, že jsou splněny rovnice

$$g(\Delta) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (10)$$

při čemž není žádný polynom stupně nižšího než s , který by měl tuto vlastnost. Dále, že k tomuto polynomu lze sestrojiti lineární

*) Viz rovnice (7').

formu $L(x)$ proměnných x_i , pro kterou sice již v důsledku (10) jest platna rovnice $g(\Delta) L(x) = 0$, avšak není žádný polynom stupně nižšího než g , pro který by byla platna obdobná rovnice.

Nejprve jest patrné, že — je-li $L_1(x)$ libovolná lineární forma proměnných x_i s koeficienty z tělesa K — v řadě forem

$$L_1(x), \Delta L_1(x), \Delta^2 L_1(x), \dots, \Delta^k L_1(x), \dots,$$

jest jenom konečný počet na sobě lineárně nezávislých (nejvýše n). Buďtež tedy formy

$$L_1(x), \Delta L_1(x), \Delta^2 L_1(x), \dots, \Delta^{r-1} L_1(x)$$

na sobě lineárně nezávisly; forma však $\Delta^r L(x)$ na vypsanych lineárně závislá, takže jest

$$\Delta^r L_1(x) = c_r \Delta^{r-1} L_1(x) + c_{r-1} \Delta^{r-2} L_1(x) + \dots + c_2 \Delta L_1(x) + c_1 L_1(x).$$

Pak jest platný vztah

$$h_1(\Delta) L_1(x) = 0, \text{ kde } h_1(\Delta) = \Delta^r - c_r \Delta^{r-1} - \dots - c_2 \Delta - c_1 \quad (11)$$

a není polynom stupně nižšího než r , pro který obdobný vztah byl splněn.

Polynom $h_1(\lambda)$ jest polynom nejnižšího stupně, pro nějž vlastnost (11) jest platna, a budeme říkati, že $h_1(\lambda)$ přísluší k $L_1(x)$ a neb též, že $L_1(x)$ přísluší k $h_1(\lambda)$.*) Každý jiný polynom $h(\lambda)$, pro který $h(\Delta) L_1(x) = 0$, jest očividně dělitelný $h_1(\lambda)$.

Že $h_1(\lambda)$ příslušný k $L_1(x)$ má současně s $L_1(x)$ součinitele z tělesa K , jak označením bylo vytknuto, jest v důsledku známých vět o determinantech bezprostředně patrné. O koeficientech lineárních forem (a tudíž i příslušných k nim polynomů) v tomto odstavci dále v úvahu branych činím rovněž předpoklad, že jsou vesměs v tělese K .

Dále lze tvrditi: Přísluší-li $L_1(x)$ ku $h_1(\lambda)$ a $L_2(x)$ ku $h_2(\lambda)$, kde $h_1(\lambda)$ a $h_2(\lambda)$ jsou bez společné míry, pak $L_1(x) + L_2(x)$ přísluší k $h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)$. Neboť z předpokladu následuje, že $h_1(\Delta) \cdot h_2(\Delta) \cdot (L_1(x) + L_2(x)) = 0$; přísluší-li tedy $L_1(x) + L_2(x)$ ku $h(\lambda)$, jest $h(\lambda)$ dělitelem součinu $h_1(\lambda) h_2(\lambda)$; t. j. $h(\lambda) = h'_1(\lambda) h'_2(\lambda)$, kde $h'_1(\lambda)$ resp. $h'_2(\lambda)$ jest dělitelem polynomu $h_1(\lambda)$ resp. $h_2(\lambda)$ a jest tedy $h'_1(\Delta) h'_2(\Delta) [L_1(x) + L_2(x)] = 0$ a též $h_1(\Delta) h'_2(\Delta) [L_1(x) + L_2(x)] = h_1(\Delta) h'_2(\Delta) L_2(x) = 0$; jelikož pak dle poslední rovnice $h_1(\lambda) \cdot h'_2(\lambda)$ jest dělitelné $h_2(\lambda)$, jest nutně $h'_2(\lambda) = h_2(\lambda)$ a obdobně $h'_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, čímž věta dokázána.

Avšak i když polynomy $h_1(\lambda), h_2(\lambda)$ přísluší k lineárním formám $L_1(x), L_2(x)$ mají společnou míru, lze na základě $L_1(x), L_2(x)$ sestro-

*) Budeme, aby polynom $h_1(\lambda)$ příslušný k $L_1(x)$ byl jednoznačně stanoven předpokládati, že koeficient při nejvyšší mocnině parametru λ jest 1.

jití lineární formu $L_3(x)$, jež patří k nejmenšímu společnému násobku polynomů $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$. Budiž nejm. sp. míra těchto polynomů $m(\lambda)$; pak $h_1(\lambda) = \overline{h_1(\lambda)} m(\lambda)$, $h_2(\lambda) = \overline{h_2(\lambda)} m(\lambda)$; $\overline{h_1(\lambda)}$ a $\overline{h_2(\lambda)}$ jsou bez společné míry. Rozložme $m(\lambda)$ operacemi shodnými s těmi, jež se používají při hledání společné míry dvou polynomů, ve dva faktory $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$. V prvním nechť se nacházejí všechny v K irreducibilní faktory z $m(\lambda)$, jež dělí též $\overline{h_1(\lambda)}$; v druhém pak všechny irr. fakt., jež jsou též v $\overline{h_2(\lambda)}$. Ty irreducibilní faktory z $m(\lambda)$, jež nedělí ani $\overline{h_1(\lambda)}$, ani $\overline{h_2(\lambda)}$, buďtež na př. vesměs v $m_1(\lambda)$. Utvoříme potom tyto dvě lineární formy

$$\overline{L_1(x)} = m_2(\Delta) L_1(x), \quad \overline{L_2(x)} = m_1(\Delta) L_2(x);$$

první patří k polynomu $\overline{h_1(\lambda)} m_1(\lambda)$, druhá k $\overline{h_2(\lambda)} m_2(\lambda)$. Oba tyto polynomy jsou bez společné míry a patří tudíž $\overline{L_1(x)} + \overline{L_2(x)}$ k polynomu $\overline{h_1(\lambda)} \overline{h_2(\lambda)} m_1(\lambda) m_2(\lambda) = \overline{h_1(\lambda)} \overline{h_2(\lambda)} m(\lambda)$, což jest nejmenší společný násobek polynomů $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$; označme ten násobek $h_3(\lambda)$. Jest tedy $h_3(\lambda)$ polynom co nejnižšího stupně, pro nějž současně platí

$$h_3(\Delta) L_1(x) = 0, \quad h_3(\Delta) L_2(x) = 0$$

a k němuž příslušná lineární forma existuje a jest $L_3(x) = \overline{L_1(x)} + \overline{L_2(x)}$.

Tímto způsobem postupujíc vycházíme od nejjednodušších lineárních forem $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, k nimž nechť postupně patří polynomy $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), g^{(3)}(\lambda), \dots, g^{(n)}(\lambda)$; dospějeme tak k polynomu $g(\lambda)$,* pro nějž platí (10) a k lineární formě $L(x)$, jež patří ku $g(\lambda)$; polynom $g(\lambda)$ jest polynom nejnižšího stupně, pro nějž jsou splněny (10) a jest $g(\lambda)$ nejmenší společný násobek mnohočlenů $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), \dots, g^{(n)}(\lambda)$.

Během vývodů vlastních dospějeme k výsledku, že polynom $g(\lambda)$ se shoduje s polynomem $g'(\lambda)$ ve (4) definovaným.

Polynom $g(\lambda)$, k němuž jsme dospěli, vypisovati budeme explicitně ve tvaru

$$g(\lambda) = \lambda^s - b_s \lambda^{s-1} - b_{s-1} \lambda^{s-2} - \dots - b_2 \lambda - b_1 \lambda^0. \quad (12)$$

III.

Obrátíme se nyní, když jsem vyložil potřebné pomůcky, k transformaci lineárních vztahů (1) kogredientní lineární substi-

*) Napřed sestrojíme na podkladě x_1, x_2 lineární formu, jež patří k nejm. sp. nás. polynomů $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda)$. K této lineární formě přibereme x_3 a sestrojíme lineární formu, jež patří k nejm. sp. nás. $g^{(1)}(\lambda), g^{(2)}(\lambda), g^{(3)}(\lambda)$. K poslední lineární formě přibereme x_4 atd. Zpravidla postup se značně zjednoduší. Je-li na př. $g^{(1)}(\lambda) = g^{(2)}(\lambda) = \dots = g^{(n)}(\lambda)$, lze za lineární formu $L(x)$ zvoliti na př. x_1 anebo jinou proměnnou.

tucí za proměnné x resp. X . Použijeme k tomu cíli lineární formu $L(x)$ sestrojenou ke konci předchozího odstavce a patřící k polynomu $g(\lambda)$. Zavedeme těchto s nových proměnných y :

$$y_1 = L(x), y_2 = \Delta L(x), y_3 = \Delta^2 L(x), \dots, y_s = \Delta^{s-1} L(x). \quad (13)$$

Proměnné Y_1, Y_2, \dots, Y_s dostaneme z výrazů pro y_1, y_2, \dots, y_s , když v nich místo x_i zavedeme X_i ; t. j. když na tyto výrazy provedeme operaci Δ ; obdržíme

$$Y_1 = \Delta L(x), Y_2 = \Delta^2 L(x), Y_3 = \Delta^3 L(x), \dots, Y_s = \Delta^s L(x).$$

Tím získáme mezi Y_1, \dots, Y_s a y_1, \dots, y_s tyto vztahy

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_2, Y_2 = y_3, Y_3 = y_4, \dots, Y_{s-1} = y_s, \\ Y_s &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_s y_s. \end{aligned} \quad (14)$$

Poslední vztah jest vypsání vztahu $g(\Delta) L(x) = 0$ v jiném tvaru.

Lineární formy proměnných x_i v (13) pro y_1, y_2, \dots, y_s jsou na sobě lineárně nezávisly v důsledku předpokladu, že $g(\lambda)$ přísluší k $L(x)$, a jest tedy aspoň jeden determinant s -tého stupně z matice součinitelů těch lineárních forem různý od nuly; nechť to jest determinant obsahující součinitele při x_1, x_2, \dots, x_s . Následkem toho můžeme x_1, x_2, \dots, x_s vyjádřiti pomocí $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_s$. Ze vztahů pak (1) můžeme proměnné x_1, x_2, \dots, x_s a rovněž proměnné X_1, X_2, \dots, X_s , pro něž jest platno stejné vyjádření pomocí $X_{s+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_s$ eliminovati a obdržíme touto transformací nový tvar pro rovnice (1). Prvých s rovnic tohoto tvaru jest vypsáno ve (14). Zbývajících $n - s$ rovnic (jež dostaneme, dosadíme-li do posledních $n - s$ rovnic (1) za x_1, x_2, \dots, x_s výrazy v $x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s$) má pak tento tvar

$$\begin{aligned} X_{s+j} &= c'_{j1} y_1 + c'_{j2} y_2 + \dots + c'_{js} y_s + b_{j1} x_{s+1} + b_{j2} x_{s+2} + \dots + \\ &+ b_{j, n-s} x_n, \quad j = 1, 2, \dots, n - s. \end{aligned} \quad (15')$$

Příslušné výrazy pro $\Delta y_1, \dots, \Delta y_s, \Delta x_{s+1}, \dots, \Delta x_n$ dostaneme z (14) a (15'), píšeme-li tam místo Y_1, \dots, Y_s, X_{s+j} po řadě právě $\Delta y_1, \dots, \Delta y_s, \Delta x_{s+j}$.

Rovnice (15') lze však dále transformacemi lineárními zjednodušovati. Kladme nejprve

$$\begin{aligned} x_{s+j} &= x'_{s+j} + c'_{js} y_{s-1} \text{ a tedy } X_{s+j} = X'_{s+j} + c'_{js} Y_{s-1} = \\ &= X'_{s+j} + c'_{js} y_s, \quad j = 1, 2, \dots, n - s; \end{aligned}$$

rovnice (15') získají ihned tvar ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} X'_{s+j} &= c''_{j1} y_1 + c''_{j2} y_2 + \dots + \\ &+ c''_{j, s-1} y_{s-1} + b_{j1} x'_{s+1} + b_{j2} x'_{s+2} + \dots + b_{j, n-s} x'_n, \end{aligned}$$

v nichž se nevyskytuje již y_s . Zcela stejně odstraníme po řadě $y_{s-1}, y_{s-2}, \dots, y_3, y_2$. Tak dospějeme konečně k proměnným, jež označíme y_{s+j} resp. Y_{s+j} , $j = 1, 2, \dots, n - s$, které jsou vázány rovnicemi tvaru

$$Y_{s+j} = c_{s+j}y_1 + b_{j1}y_{s+1} + b_{j2}y_{s+2} + \dots + b_{j,n-s}y_n; \quad (15'')$$

$$j = 1, 2, \dots, n - s.$$

Avšak součinitel c_{s+j} při y_1 v této rovnici jest nutně rovný nule; neboť y_{s+j} jakožto lineární forma x_1, x_2, \dots, x_n hová rovnici $g(\Delta) y_{s+j} = 0$ a

$$\Delta y_{s+j} = Y_{s+j} = c_{s+j}y_1 + (y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n),$$

$$\Delta^2 y_{s+j} = c_{s+j}y_2 + (y_1, y_{s+1}, \dots, y_n), \dots,$$

$$\Delta^{s-1} y_{s+1} = c_{s+j}y_{s-1} + (y_1, y_2, \dots, y_{s-2}, y_{s+1}, \dots, y_n),$$

$$\Delta^s y_{s+j} = c_{s+j}y_s + (y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n).$$

Dosadíme-li pak tyto výrazy do rovnice $g(\Delta) y_{s+j} = 0$, dostaneme vztah

$$c_{s+j}y_s + (y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n) = 0.$$

Při tom kulaté závorky znamenají lineární formy proměnných v nich se nacházejících. Jelikož však y_1, y_2, \dots, y_n jest n proměnných na sobě lineárně nezávislých, jsou součinitelé při jednotlivých proměnných v poslední rovnici vesměs rovny nule a tak jest

$$c_{s+j} = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n - s.$$

čímž dostáváme konečný tvar rovnice (15'')

$$Y_{s+j} = b_{j1}y_{s+1} + b_{j2}y_{s+2} + \dots + b_{j,n-s}y_n, \quad j = 1, 2, \dots, n - s. \quad (15)$$

Tak jest proveden lineární substitucí rozklad základních rovnic počtem n ve dvě skupiny rovnic. V první (14) vyskytují se na levé i pravé straně proměnné y, Y o indexech $1, 2, \dots, s$. V druhé (15) jsou pak na obou stranách proměnné o indexech $s + 1, s + 2, \dots, n$. Prvá skupina (14) má pro nás tvar definitivní, rovněž i druhá (15), jestliže matice čísel b_{jk} , $j, k = 1, 2, \dots, n - s$ jest tvaru cE (kde E jest jednotk. matice st. $n - s$); není-li však matice ta toho tvaru, pak se zřetelem k tomu, že systém (15) se liší od (1) pouze tím (nehledě k označení), že místo n nastupuje jakožto počet rovnic číslo $n - s$, lze na (15) užití výsledku právě docfleného a takovýmto způsobem tak dlouho postupovati, až buď dospějeme k matici tvaru cE_i aneb převedeme všech n proměnných na definitivní tvar, ve kterém se soustava rovnic rozpadá na několik skupin, v nichž závislosti na obou stranách jsou upraveny dle vzoru skupiny ve (14).

K tomu jest jenom přičiníti jednu poznámku. K transformaci systému (15) jest především nutno naléztí mnohočlen $g_1(\lambda)$ splňující

$n - s$ rovnic

$$g_1(\Delta) y_{s+j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - s \quad (16)$$

co nejnižšího stupně. Mnohočlen $g(\lambda)$ svrchu použitý splňuje rovnice

$$g(\Delta) y_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

tedy též i rovnice (16), kdybychom v nich místo $g_1(\Delta)$ psali $g(\Delta)$; musí tudíž $g_1(\lambda)$ býti dělitelem mnohočlenu $g(\lambda)$.

Vedle toho než vyslovím konečný výsledek, zavedu pro stručnost některá označení. Matici soustavy rovnic (14) označím M_0 ; má tento tvar (vypisuji je k vůli zřetelnosti pro případ $s = 5$)

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5 \end{pmatrix}.$$

Determinant s -tého stupně příslušný k této matici jest $(-1)^{s-1} b_1$. Matice jest hodnosti s -té, je-li $b_1 \neq 0$. Je-li $b_1 = 0$, jest hodnosti $s - 1$. Charakteristický determinant k této matici příslušný (t. j. determinant $|M_0 - \lambda E|$) jest $(-1)^s g(\lambda)$. Největší společná míra minorů patřících k jednotlivým prvkům determinantu $|M_0 - \lambda E|$ jest 1.

Matice M_k nechť liší se od M_0 tím, že počet sloupců i řádků jest s_k (místo s) a že prvky v posledním řádku jsou $b_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, s_k$. K vůli stručnosti i při M_0 místo $b_i, s, g(\lambda)$ budu obšírněji psáti $b_i^{(0)}, s_0, g_0(\lambda)$. Jestliže $s_k = 1$, pak matice se redukuje na jediný prvek $b_1^{(k)}$; $M_k = \{b_1^{(k)}\}$.

Máme tak tento výsledek (výsledné proměnné označím z_i , $i = 1, 2, \dots, n$): Lineární transformaci (kogredientní) lze vztahy (1) mezi proměnnými X_i, x_i převést na vztahy mezi Z_i, z_i , při nichž matice součinitelů má tento tvar

$$B = \begin{pmatrix} M_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & M_r \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Matice M_k , $k = 0, 1, 2, \dots, r$, nacházející se v diagonále jsou matice kvadratické o s_k řádcích, jichž význam byl svrchu vyložen; silné tečky jsou matice nulové pravoúhelníkové, na př. tečka v třetím sloupci druhém řádku zastupuje matici nulovou o s_1 řádcích a s_2 sloupcích. Celkem má matice B řádků (a sloupců) $s_0 + s_1 + \dots + s_r = n$.

Jelikož

$$|M_k| = \pm b_1^{(k)}, \quad |M_k - \lambda E| = \pm g_k(\lambda),$$

jest

$$|B| = \pm b_1^{(0)} b_1^{(1)} b_1^{(2)} \dots b_1^{(r)}, \quad |B - \lambda E| = \pm g_0(\lambda) g_1(\lambda) \dots g_r(\lambda).$$

Při tom jest $g_k(\lambda)$ dělitelno $g_{k+1}(\lambda)$, $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$. V důsledku toho jest největší společná míra všech minorů příslušných k prvkům determinantu $|B - \lambda E|$ rovna součinu $g_1(\lambda) \dots g_r(\lambda)$ a $g_0(\lambda)$ (jež jsme dříve značili $g(\lambda)$) vskutku rovno (nehledě k znaménku) determinantu $|B - \lambda E|$ dělenému tou největší společnou mírou, čímž dokázán výrok ke konci odst. II. uvedený. Stejně vyplývá, že $g_1(\lambda)$ jest rovno podílu největší společné míry všech minorů příslušných v $|B - \lambda E|$ k jednotlivým prvkům a největší společné míry všech minorů toho determinantu příslušných k jednotlivým subdeterminantům druhého stupně. Obdobné věty plynou pro $g_2(\lambda), g_3(\lambda), \dots$.

Výsledek uvedený jest platný v obou možných případech svrchu vytknutých. Především, když postupným prováděním dokázané transformace nedospějeme nikdy k matici tvaru bE_t . Avšak i v tom případě, když dospívám k matici bE_t , zachovává platnost. Předpokládejme k vůli jednoduchosti, že dospějeme k matici bE_3 o třech řádcích a sloupcích. Pak v (17) jsou poslední tři matice M_{r-2}, M_{r-1}, M_r matice o jediném prvku rovném b , $M_{r-2} = M_{r-1} = M_r = \{b\}$, $|M_r - \lambda E| = b - \lambda$, atd.

Polynomy g_0, g_1, \dots jakožto invarianty vzhledem k lineární transformaci (viz přísl. pozn. v odst. I) můžeme přímo počítati z matice $A - \lambda E$, kde A jest matice patřící ke vztahům (1).

Předcházejícími vývodů úkol, který jsem si předsevzal, jest splněn. Připojím jenom ještě několik úvah, abych naznačil užitečnost symbolu Δ .

IV.

Vztahy (1) jsme racionálními operacemi a lineární transformací s koeficienty v K převedli na vztahy mezi z_i, Z_i , při čemž matice B z koeficientů v těchto posledních vztazích jest vypsána ve (17). Avšak vztahy tyto racionálními prostředky lze ještě dále zjednodušovati, jsou-li některé z polynomů $g_k(\lambda)$ reducibilní v K .

Uvažujme na př. vztahy z počátku odst. III

$$Y_1 = y_2, Y_2 = y_3, \dots, Y_{s-1} = y_s, Y_s = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_s y_s, \quad (18)$$

k nimž přísluší charakteristický mnohočlen $g(\lambda) = \lambda^s - b_s \lambda^{s-1} - \dots - b_2 \lambda - b_1 \lambda^0$, a budiž $g(\lambda)$ reducibilní. Necht' jest $g(\lambda) = h_1(\lambda) h_2(\lambda)$, kde $h_1(\lambda)$ a $h_2(\lambda)$ jsou bez společné míry a kde jest

$$\begin{aligned} h_1(\lambda) &= \lambda^{t_1} - d_{t_1} \lambda^{t_1-1} - \dots - d_1 \lambda^0, \\ h_2(\lambda) &= \lambda^{t_2} - d'_{t_2} \lambda^{t_2-1} - \dots - d'_1 \lambda^0, \end{aligned}$$

$t_1 + t_2 = s, t_1 > 0, t_2 > 0$. Uvažujme tyto lineární výrazy v y_1, y_2, \dots, y_s (a také v x_1, x_2, \dots, x_n):

$$\begin{aligned} h_1(\Delta) y_1, \Delta h_1(\Delta) y_1, \Delta^2 h_1(\Delta) y_1, \dots, \Delta^{t_1-1} h_1(\Delta) y_1; \\ h_2(\Delta) y_1, \Delta h_2(\Delta) y_1, \Delta^2 h_2(\Delta) y_1, \dots, \Delta^{t_2-1} h_2(\Delta) y_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Jak očividno, jsou na sobě lineárně nezávisly; můžeme je tedy místo y_1, y_2, \dots, y_s zavést jakožto nové proměnné a označiti po řadě $z_1, z_2, \dots, z_{t_1}; z_{t_1+1}, \dots, z_s$. Mezi novými proměnnými z a příslušnými Z jsou pak tyto relace

$$\begin{aligned} Z_1 = z_2, Z_2 = z_3, \dots, Z_{t_1-1} = z_{t_1}, Z_{t_1} = d'_1 z_1 + d'_2 z_2 + \dots + d'_{t_1} z_{t_1}, \\ Z_{t_1+1} = z_{t_1+2}, \dots, Z_{s-1} = z_s, Z_s = d_1 z_{t_1+1} + \dots + d_t z_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Speciálně, kdyby $h_2(\lambda) = (\lambda - b)^t$ (tudíž $h_1(b) \neq 0, t_2 = t$), mohli bychom místo první řádky ve (19) voliti za nové proměnné tyto lineární výrazy

$$h_1(\Delta) y_1, (\Delta - b) h_1(\Delta) y_1, (\Delta - b)^2 h_1(\Delta) y_1, \dots, (\Delta - b)^{t-1} h_1(\Delta) y_1 \quad (19')$$

a obdrželi bychom (značíme-li je opět z_1, z_2, \dots, z_t) tyto vztahy $Z_1 = bz_1 + z_2, Z_2 = bz_2 + z_3, \dots, Z_{t-1} = bz_{t-1} + z_t, Z_t = bz_t$. (21)

Poslední z těchto vztahů jest přepis rovnice $(\Delta - b)^t h_1(\Delta) y_1 = 0$, již lze psáti patrně ve tvaru

$$\Delta (\Delta - b)^{t-1} h_1(\Delta) y_1 - b (\Delta - b)^{t-1} h_1(\Delta) y_1 = 0.$$

Jsou-li nulové body polynomu $g(\lambda)$ vesměs v tělese K , rozpadají se vztahy (18) vesměs ve vztahy tvaru (21); při tom jsou z_1, z_2, \dots, z_t lineární formy (na sobě nezávislé) proměnných y_1, y_2, \dots, y_s . Soustav tvaru (21) bude pak tolik, kolik jest nulových bodů mnohočlenu $g(\lambda)$ mezi sebou různých.

Takovýto rozpad základních vztahů (1) v soustavě vztahové tvaru (21) nastane ovšem i tenkrát, když k tělesu K adjungujeme nulové body mnohočlenu $g(\lambda)$ (který jsme ve III také značili $g_0(\lambda)$). Soustava (21) se obvykle pak nazývá elementární dělitel soustavy (1). Číslo b sluje v následujícím multiplikátor elementárního dělitele (21); t stupeň el. děl.; z_t lineární to forma proměnných x_1, x_2, \dots, x_n základ elem. dělitele. Pojmenování tato zavádím tu pouze z té příčiny, abych mohl, pokud možno stručně, uvést ještě několik vět, které na základě úvah předcházejících téměř bezprostředně vyplývají. Těleso číselné, jehož prvky nyní budu označovati písmeny a, b, c, d , nechť jest v následujícím těleso K rozšířené adjunkcí nulových bodů polynomu $g_0(\lambda)$.

Chci totiž vedle vztahů (1), k nimž patří matice A a operace Δ , uvažovati vztahy, k nimž patří matice A_1 , kde

$$A_1 = a_1 A^{s-1} + a_2 A^{s-2} + \dots + a_s A^0.$$

Vztahům těmto můžeme užívajíc označení odstavce I užitého na př. v rovnici (1') dáti tvar

$$[X'] = A_1[x], \quad (22)$$

ponechávajíc pro základní proměnné x_1, x_2, \dots, x_n tytéž znaky jako jsou v rovnicích (1). Pro proměnné ze základních odvozené na základě vztahů (22) — kteréžto proměnné nejsou na sobě nezávislé, není-li A_1 hodnoty n -té — užili jsme označení $X'_i, i = 1, 2; \dots, n$, abychom je i označením rozlišili od proměnných X_i vyplývajících z (1).

Operace Δ_1 příslušná k A_1 jest v důsledku (7') z I

$$\Delta_1 = a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \dots + a_s;$$

neboť jest

$$[\Delta_1 x] = [(a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \dots + a_s)x] = a_1[\Delta^{s-1}x] + a_2[\Delta^{s-2}x] + \dots + a_s[x] = (a_1\Delta^{s-1} + a_2\Delta^{s-2} + \dots + a_s)[x] = A_1[x].$$

Užívati budu v následujícím označení

$$a_1\lambda^{s-1} + a_2\lambda^{s-2} + \dots + a_s\lambda^0 = \psi(\lambda);$$

pak jest $A_1 = \psi(A), \Delta_1 = \psi(\Delta)$.

Zavedeme nyní místo proměnných x_i proměnné z_i tak, aby se soustava (1) rozpadla v elementární dělitele tvaru (21), a budeme vyšetřovat, jak závisí na z_i jim na základě vztahů (22) přiřazené výrazy Z'_i . Jest nejprve

$$Z'_i = \Delta_1 z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dále jest v důsledku toho, jak byly definovány z_1, z_2, \dots, z_t vyskytující se v elementárním děliteli (21)

$$(\Delta - b)z_1 = z_2, (\Delta - b)z_2 = (\Delta - b)^2 z_1 = z_3, \dots, (\Delta - b)^{t-1}z_1 = z_t, \\ (\Delta - b)^t z_1 = 0$$

a tedy

$$Z'_1 = \Delta_1 z_1 = \psi(\Delta) z_1 = \\ = \psi(b) z_1 + [\psi(\Delta) - \psi(b)] z_1 = \psi(b) z_1 + d_2 z_2 + d_3 z_3 + \dots + d_t z_t,$$

neboť dle známé identity jest

$$\psi(\Delta) - \psi(b) = \\ = (\Delta - b) \psi'(b) + \frac{1}{2!} (\Delta - b)^2 \psi''(b) + \frac{1}{3!} (\Delta - b)^3 \psi'''(b) + \dots,$$

kde $\psi'(\lambda), \psi''(\lambda), \dots$ jsou první, druhá, \dots derivace polynomu $\psi(\lambda)$; d_2, d_3, \dots pak se rovnají $\psi'(b), \frac{1}{2}\psi''(b), \dots$. Obdobné vztahy vyplývají pro Z'_2, Z'_3, \dots , takže vcelku máme tento výsledek

$$\begin{aligned}
Z'_1 &= \psi(b) z_1 + d_2 z_2 + d_3 z_3 + \dots + d_t z_t, \\
Z'_2 &= \psi(b) z_2 + d_2 z_3 + \dots + d_{t-1} z_t, \\
Z'_3 &= \psi(b) z_3 + \dots + d_{t-2} z_t, \\
&\dots\dots\dots \\
Z'_t &= \psi(b) z_t.
\end{aligned}
\tag{23}$$

Závisí tedy Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_t výhradně na z_1, z_2, \dots, z_t a stejně je tomu tak i u ostatních z_i (a jim příslušných Z'_i) v jiných elementárních dělitelech se nacházejících. Označíme-li matici z koeficientů lineárních výrazů na pravé straně rovnic (23) znakem D , jest

$$|D - \lambda E| = (-1)^t (\lambda - \psi(b))^t.$$

Jestliže $d_2 = \psi'(b) \neq 0$, jest největší společná míra subdeterminantů stupně $t - 1$ v determinantu $|D - \lambda E|$ rovna 1. V důsledku toho soustava (23), zavedeme-li vhodné lineární formy proměnných z_1, z_2, \dots, z_t , se dá změnit na tvar (21)* a jest přiřazen v tomto případě elementárnímu děliteli (21) příslušnému k (1) elementární dělitel téhož stupně, očividně téhož základu z_t a o multiplikátoru $\psi(b)$.

Jestliže však $d_2 = \psi'(b) = 0$, $\psi''(b) \neq 0$ a $t > 1$, jsou dva lineární výrazy a to z_t, z_{t-1} , pro které jest

$$(A_1 - \psi(b)) z_t = 0, (A_1 - \psi(b)) z_{t-1} = 0$$

a tedy

$$Z'_t = \psi(b) z_t, Z'_{t-1} = \psi(b) z_{t-1}$$

a jsou tudíž z_{t-1}, z_t dva základy pro elementární dělitele soustavy (23) a snadným vyšetřením matice $D - \lambda E$ zjistíme, že soustava (23) se rozpadá ve dva elementární dělitele oba o multiplikátoru $\psi(b)$, o stupních $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{2}t$ resp. $\frac{1}{2}(t + 1)$, $\frac{1}{2}(t - 1)$, je-li t sudé resp. liché, a o vytknutých základech.

Obdobné výsledky jsou platny pro případ $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, $d_4 \neq 0$ a $t > 2$. Tu lze převést soustavu (23) ve tři elementární dělitele, vesměs o multiplikátoru $\psi(b)$, o základech z_t, z_{t-1}, z_{t-2} atd.

Resumé.

Autor podává převedení vztahů (1) na racionální kanonický tvar. Při tom užívá s výhodou operace Δ definované v rovnici (5).

*) Je-li na př. $t = 4$, stačí na př., je-li $d_2 \neq 0$, voliti místo z_1, z_2, z_3, z_4 lineární formy $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$ dané na př. vztahy

$$d_3^3 \bar{z}_1 = z_1, d_3^3 \bar{z}_2 = d_2 z_2 + d_3 z_3 + d_4 z_4, d_3^2 \bar{z}_3 = d_2 z_2 + 2d_3 z_4, \bar{z}_4 = z_4,$$

abychom místo (23) získali tvar

$\bar{Z}'_1 = \psi(b) \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \bar{Z}'_2 = \psi(b) \bar{z}_2 + \bar{z}_3, \bar{Z}'_3 = \psi(b) \bar{z}_3 + \bar{z}_4, \bar{Z}'_4 = \psi(b) \bar{z}_4$ shodný s tvarem (21), normálním to tvarem elem. děl. Že jsem volil $t = 4$, činil jsem jenom k vůli úspoře místa a větší přehlednosti; pro obecné t výpočet příslušných výrazů naznačiti nečiní prázdňné obtíže.

Rationale kanonische Form einer linearen Substitution.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Der Verfasser gibt in der Abhandlung eine Überführung der linearen Substitution (1) in ihre rationale kanonische Form an. Er benützt dazu im wesentlichen den Weg, den L. E. Dickson in seinem Buche „Modern Algebraic Theories“ angegeben hat. (Siehe S. 80 der deutschen Übersetzung des Buches, die unter dem Titel: „Höhere Algebra“ erschienen ist.) Er führt dabei den Operator Δ ein, der durch (5) definiert ist. Die Ableitung der kanonischen Form aus der ursprünglichen Substitution gewinnt dadurch sehr an Einfachheit, Verständlichkeit und rechnerischer Schönheit.

R.

W-Projektionen totalisotroper Flächen II.¹⁾

M. Pinl, Praha.

(Eingegangen am 30. Oktober 1937.)

§ 5. $\mu = 2$, $n = 7$; euklidische Flächen; Hauptkurven.

Beschränkt man sich in der Theorie zweidimensionaler Flächen eines euklidischen $(n - m)$ -dimensionalen Raumes R_{n-m} auf die Elemente erster und zweiter Ordnung, so erscheint bekanntlich erst die Theorie zweidimensionaler Flächen $\mathfrak{r}^*(u_1, u_2)$ des R_5 mit den Komponentengleichungen

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2), \dots, x_5^* = x_5^*(u_1, u_2); \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial x_1^*}{\partial u_\alpha} & \frac{\partial x_2^*}{\partial u_\alpha} & \frac{\partial x_3^*}{\partial u_\alpha} & \frac{\partial x_4^*}{\partial u_\alpha} & \frac{\partial x_5^*}{\partial u_\alpha} \end{array} \right\|, \quad (1)$$

$(\alpha = 1, 2)$ vom Rang 2

als allgemeiner Fall, da für $n < 5$ stets lineare Abhängigkeiten zwischen den fünf ersten und zweiten Ableitungen ξ_α^* , $\xi_{\alpha\beta}^*$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) des Kurvenvektors \mathfrak{r}^* bestehen. Gerade dieser allgemeine Fall $n = 5$ wurde denn auch in der neueren Literatur wieder bevorzugt²⁾ und neue Resultate für die Theorie allgemeiner Flächen mit fünfdimensionalem von den Vektoren ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_{11}^* , ξ_{12}^* , ξ_{22}^* aufgespannten Schmiegraum gewonnen.

Sind dann allgemein

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2), \dots, x_{n-m}^* = x_{n-m}^*(u_1, u_2) \text{ und } y_1 = y_1(u_1, u_2), \dots, \\ y_m = y_m(u_1, u_2), \quad n - m \geq 2, \quad m \geq 2 \quad (2)$$

zwei isometrische Flächen aus einem R_{n-m} bzw. aus einem R_m von der binären quadratischen Metrik

¹⁾ vgl. M. Pinl, W-Projektionen totalisotroper Flächen I, Časopis 66, (1937), 95—102; die Kenntnis dieser Note wird hier nicht vorausgesetzt.

²⁾ vgl. E. Bompiani und E. Bortolotti, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazione della superficie di Veronese, M. Z. 42, (1937), sowie die dort angegebene Literatur.

$$\begin{aligned} ds_{(n-m)}^2 &= dx_1^{*2} + \dots + dx_{n-m}^{*2} = g_{\alpha\beta}^{(n-m)} du^\alpha du^\beta = \\ &= g_{\alpha\beta}^{(m)} du^\alpha du^\beta = dy_1^2 + \dots + dy_m^2 = ds_{(m)}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

und der totalisotropen „Darstellungsfläche“³⁾

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^*(u_1, u_2), \dots, x_{n-m}^* = x_{n-m}^*(u_1, u_2); \quad x_{n-m+1} = iy_1(u_1, u_2), \dots, \\ x_n &= iy_m(u_1, u_2) \quad (i = \sqrt{-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

so erhält man umgekehrt aus der Theorie der totalisotropen Flächen (4), auf welchen

$$dx_1^{*2} + \dots + dx_{n-m}^{*2} + dx_{n-m+1}^2 + \dots + dx_n^2 \equiv 0, \quad \{u_1, u_2\}, \quad (5)$$

offensichtlich erst für $n \geq 7$ Beiträge für die Flächentheorie des R_5 . Dabei entspricht $n = 7, m = 2$ dem Fall „euklidischer Isometrien“, sofern man dann (4) stets in der Parameterdarstellung

$$x_1^* = x_1^*(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \dots, x_5^* = x_5^*(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad x_6 = i\bar{u}_1, \quad x_7 = i\bar{u}_2 \quad (6)$$

ansetzen kann.

Für die Funktionalmatrix $\|\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}\|$ der Fläche (6) ergibt sich

$$\|\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}\| = \begin{vmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* & \xi_{11}^* & \xi_{12}^* & \xi_{22}^* \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

wenn wir 5-komponentige Vektoren zum Unterschied gegenüber 7-komponentigen mit Sternen * versehen.

Besitzt die Matrix $\|\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_{11}^*, \xi_{12}^*, \xi_{22}^*\|$ den Rang fünf, so besitzt auch die Matrix $\|\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}\|$ den Rang fünf. Dies bedeutet:

Jeder euklidischen Fläche eines R_5 mit fünfdimensionalem nichtausgeartetem Schmiegraum entspricht eine totalisotrope Darstellungsfläche eines R_7 mit nicht ausgeartetem fünfdimensionalen Schmiegraum.

Weniger trivial erscheint die Umkehrung:

Jede „ W -Projektion“ einer totalisotropen Fläche eines komplexen R_7 mit fünfdimensionalem nicht ausgeartetem Schmiegraum auf einen beliebigen Koordinaten- R_5 ist eine euklidische Fläche dieses R_5 mit fünfdimensionalem nicht ausgeartetem Schmiegraum!

Beweis. $\xi(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ sei eine totalisotrope Fläche in R_7 mit fünf-

³⁾ vgl. den Begriff der „superficie figurative“ (del problema di deformazione assegnato) bei E. Bompiani, Geometrie riemanniana di specie superiore, Reale Accademia D'Italia, 6, (1935), Capitolo V, 315 ff.

dimensionalem Schmiegraum,⁴⁾ \mathfrak{v} , \mathfrak{w} seien zwei beliebige (konstante) Hilfsvektoren, G und G^* mögen die Gramschen Determinanten

$$G = G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}^2 & \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12} & \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} \\ \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{11} & \mathfrak{x}_{12}^2 & \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{22} \\ \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_{11} & \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{x}_{12} & \mathfrak{x}_{22}^2 \end{vmatrix},$$

$$G^* = G^*(\mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*) = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}^{*2} & \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{12}^* & \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{22}^* \\ \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{12}^* & \mathfrak{x}_{12}^{*2} & \mathfrak{x}_{12}^*\mathfrak{x}_{22}^* \\ \mathfrak{x}_{11}^*\mathfrak{x}_{22}^* & \mathfrak{x}_{12}^*\mathfrak{x}_{22}^* & \mathfrak{x}_{22}^{*2} \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Dann gilt nach Voraussetzung⁵⁾

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta &\equiv \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv 0, \quad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^2 \equiv \\ &\equiv G \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{v} & \mathfrak{x}_1 \mathfrak{w} \\ \mathfrak{x}_2 \mathfrak{v} & \mathfrak{x}_2 \mathfrak{w} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}\} \end{aligned} \quad (8)$$

somit also, da $(\mathfrak{x}_1 \mathfrak{v})(\mathfrak{x}_2 \mathfrak{w}) = (\mathfrak{x}_1 \mathfrak{w})(\mathfrak{x}_2 \mathfrak{v})$ nicht identisch in \mathfrak{v} und \mathfrak{w} verschwindet

$$G \equiv G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \neq 0, \quad \{u_1, u_2\}. \quad (9)$$

Für die euklidische W -Projektion \mathfrak{x}^* gilt nach (6)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_1^{*2} &\equiv g_{11}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 1, \quad \mathfrak{x}_1^* \mathfrak{x}_2^* \equiv g_{12}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 0, \quad \mathfrak{x}_2^{*2} \equiv g_{22}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 1, \\ \mathfrak{x}_\alpha^* \mathfrak{x}_\beta^* &\equiv 0, \quad \{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Damit erhält man für das Determinantenquadrat $(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*)^2$ der Projektionsfläche \mathfrak{x}^* in R_5 mit Rücksicht auf (7) und (8)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*)^2 &\equiv \begin{vmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{vmatrix} \cdot G^*(\mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*) = \\ &= G^* = G(\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}) \neq 0 \quad \{u_1, u_2\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{11}^*, \mathfrak{x}_{12}^*, \mathfrak{x}_{22}^*$ sind also linear unabhängig und der Schmiegraum, welchen sie aufspannen, fünfdimensional.

Nach dem Vorhergehenden lassen sich somit alle euklidischen Flächen des R_5 als „euklidische Komponenten“ totalisotroper Flächen in R_7 auffassen. Die Existenz solcher abwickelbarer Flächen in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegraum und diejenige totalisotroper Flächen in R_7 mit fünfdimensionalem Schmiegraum bedingen einander wechselseitig.

Man erhält auf diese Weise neue Klassen abwickelbarer

⁴⁾ Die Existenz solcher Flächen belegen im folgenden z. B. die Flächen (15), (39) und (60); vgl. M. Pinl, Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen, *Compositio mathematica* (5), (1938), 208—238.

⁵⁾ vgl. z. B. J. Lense, *M. Z.* 84, (1932), 721—736, insbesondere 722, 723, 728.

Flächen des R_5 , die weder Torsen (mit dreidimensionalem Schmiegräum) noch Regelflächen, noch Schiebflächen (mit vierdimensionalem Schmiegräum) darstellen, obwohl ihre Gauss'sche Krümmung identisch verschwindet.

Um die Fruchtbarkeit dieser Methoden zur Untersuchung der Flächen in höheren euklidischen Räumen zu demonstrieren, untersuchen wir im Folgenden die sgn. „Hauptkurvennetze“ auf einigen euklidischen Komponenten in R_5 totalisotroper Flächen in R_7 . Dazu betrachten wir zunächst eine allgemeine Kurve auf einer Fläche des R_5 . Die Grenzlage der Tangentialebenen an die Fläche in zwei benachbarten Kurvenpunkten bestimmt im allgemeinen einen vierdimensionalen linearen Raum, den sgn. Bitangentenraum.⁶⁾ Für gewisse ausgezeichnete Richtungen erscheinen die Bitangentenräume der Fläche als „Tritangentenräume“, d. h. bestimmt durch die Grenzlage dreier benachbarter Tangentialebenen.⁷⁾ Die Flächenkurven mit diesen ausgezeichneten Richtungen bilden das sgn. Hauptkurvennetz. Bestimmt man die Koeffizienten C_{rst}^{*pq} , C_{rst}^{*p} aus den für die dritten Ableitungen \mathfrak{r}_{rst}^* der Fläche \mathfrak{r}^* in R_5 bestehenden Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{r}_{rst}^* = C_{rst}^{*pq} \mathfrak{r}_{pq}^* + C_{rst}^{*p} \mathfrak{r}_p^*, \quad (p, q, r, s, t = 1, 2), \quad (12)$$

so bestimmen sich die Hauptkurven auf \mathfrak{r}^* aus der Differentialgleichung fünften Grades⁸⁾

$$A d\bar{u}_1^5 + B d\bar{u}_1^4 d\bar{u}_2 + C d\bar{u}_1^3 d\bar{u}_2^2 + D d\bar{u}_1^2 d\bar{u}_2^3 + E d\bar{u}_1 d\bar{u}_2^4 + F d\bar{u}_2^5 = 0, \quad (13)$$

deren Koeffizienten A, B, C, D, E, F aus C_{rst}^{*pq} gemäß der Relationen⁹⁾

$$\begin{aligned} A &= C_{111}^{*22}, & B &= 3C_{112}^{*22} - 2C_{111}^{*12}, & C &= C_{111}^{*11} - 6C_{112}^{*12} + 3C_{122}^{*22} \\ F &= C_{222}^{*11}, & E &= 3C_{122}^{*11} - 2C_{222}^{*12}, & D &= C_{222}^{*22} - 6C_{122}^{*12} + 3C_{112}^{*11} \end{aligned} \quad (14)$$

gebildet werden. Es handelt sich also im allgemeinen um fünffache Kurvennetze. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Bitangentenräume längs jeder Kurve einer einparametrischen Schar auf der Fläche zusammenfallen. Dann sind diese Kurven notwendig Hauptkurven und bestehen nach einem Satz von E. Bompiani¹⁰⁾ entweder aus einer Schar ebener Kurven oder verlaufen in den dreidimensionalen Schmiegräumen einer allgemeinen Raumkurve, die also im allgemeinen in R_5 eine Hypertorse einhüllen. Im

⁶⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 412.

⁷⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 413.

⁸⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 419.

⁹⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 419.

¹⁰⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 416.

zweiten Falle wird man unmittelbar auf eine Methode geführt,¹¹⁾ Flächen mit einem dreifachen Hauptkurvennetz mit festen Bitangentenräumen zu konstruieren. Darüber hinaus hat sich aus den Untersuchungen von G. Bol¹²⁾ auch eine Fläche mit einem fünf-fachen derartigen Hauptkurvennetz ergeben.

Im Folgenden wollen wir nun einen Beitrag zum ersten Fall von Flächen mit ebenen Hauptkurven geben.

§ 6. *Euklidische Flächen in R_5 mit ebenem Hauptkurvennetz.*

Wir betrachten die totalisotrope Fläche $\mathfrak{z}(u_1, u_2)$ in R_7 mit den Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + 2iu_1u_2^2), & x_3 &= \frac{1}{2}(u_2 + 2iu_1^2u_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2i}(u_1 - 2iu_1u_2^2), & x_4 &= \frac{1}{2i}(u_2 - 2iu_1^2u_2), & x_5 &= \pm i\sqrt{2i}u_1u_2, \\ x_6 &= \frac{1}{2i}(u_1^2 + iu_2^2), \\ x_7 &= \frac{\pm i}{2}(u_2^2 + iu_1^2), \end{aligned} \quad (15)$$

$(i = \sqrt{-1}).$

Für die Matrizen $\|\xi_1, \xi_2\|$, $\|\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}\|$, $\|\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{122}, \xi_{222}\|$ aus den ersten, zweiten und dritten Ableitungen ergibt sich nach (15)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1 + 2iu_2^2), & \frac{1}{2i}(1 - 2iu_2^2), & 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, \\ 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, & \frac{1}{2}(1 + 2iu_1^2), & \frac{1}{2i}(1 - 2iu_1^2), \\ \pm i\sqrt{2i}u_2, & -iu_1, & \mp u_1, & \\ \pm i\sqrt{2i}u_1, & u_2, & \pm iu_2, & \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 2iu_2, & -2u_2, & 0, & -i, & \mp 1 \\ 2iu_2, & -2u_2, & 2iu_1, & -2u_1, & \pm i\sqrt{2i}, & 0, & 0 \\ 2iu_1, & -2u_1, & 0, & 0, & 0, & 1, & \pm i \end{vmatrix} \quad (17)$$

¹¹⁾ vgl. ²⁾ insbesondere 417.

¹²⁾ vgl. G. Bol, *Hamburger Abh.* 11 (1936), 387—393; W. Blaschke, *Hamburger Abh.* 9 (1933), 313—317; ²⁾ insbesondere 417.

$$\begin{vmatrix} \xi_{111} \\ \xi_{112} \\ \xi_{122} \\ \xi_{222} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2i, & -2, & 0, & 0, & 0 \\ 2i, & -2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Aus (16) und (17) folgt

$$g_{\alpha\beta} \equiv \xi_{\alpha}\xi_{\beta} \equiv 0, \quad g_{1111} \equiv g_{1112} \equiv g_{1222} \equiv g_{2222} \equiv 0, \quad g_{1122} \equiv -2i, \\ (g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta}), \quad G(\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}) \equiv -8i \neq 0. \quad (19)$$

Demnach ist ξ totalisotrop ($g_{\alpha\beta} \equiv 0$) und trägt fünfdimensionale Schmiegräume ($G \neq 0$).

Die biquadratische Grundform

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^{\alpha} du^{\beta} du^{\gamma} du^{\delta} \equiv 12i du_1^2 du_2^2 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (20)$$

reduziert sich auf das Quadrat einer quadratischen Form mit konstanten Koeffizienten. Es liegt also eine Minkowskische totalisotrope Fläche vor.¹³⁾ Die Nulllinien der Form (20) bilden auf der Fläche ein ebenes, zweifaches und zweifach isotropes Kurvennetz ($\xi_{\alpha}^2 \equiv \xi_{\alpha\alpha}^2 \equiv 0, \xi_{\alpha\alpha\alpha} \equiv 0, \alpha = 1, 2$).¹⁴⁾

Als Koordinatenraum der W -Projektion ξ^* der Fläche ξ wählen wir den R_5 der x_1, x_2, \dots, x_5 .¹⁵⁾ Für die „Determinante der Projektion“ erhalten wir aus (16)

$$\begin{vmatrix} -iu_1, & \mp u_1 \\ u_2, & \pm iu_2 \end{vmatrix} = \pm 2u_1u_2 \neq 0. \quad (21)$$

Dann lauten die Gleichungen der Projektionsfläche ξ^* in den ursprünglichen „isotropen“ Parametern

$$x_1^* = \frac{1}{2} (u_1 + 2iu_1u_2^2), \quad x_3^* = \frac{1}{2} (u_2 + 2iu_1^2u_2), \\ x_2^* = \frac{1}{2i} (u_1 - 2iu_1u_2^2), \quad x_4^* = \frac{1}{2i} (u_2 - 2iu_1^2u_2), \quad x_5^* = \pm i\sqrt{2}iu_1u_2 \quad (22)$$

Für die quadratischen Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta}^{(5)}$ der Projektionsfläche ξ^* bekommen wir:

$$\xi_1^{*2} \equiv g_{11}^{(5)}(u_1, u_2) \equiv 0, \quad \xi_1^*\xi_2^* \equiv g_{12}^{(5)}(u_1, u_2) \equiv -2iu_1u_2, \quad \xi_2^{*2} \equiv g_{22}^{(5)}(u_1, u_2) \equiv 0. \quad (23)$$

¹³⁾ vgl. L. Berwald, Journ. f. Math. 156 (1927), 191—222, insbesondere 208.

¹⁴⁾ vgl. M. Pinl, Proceedings Amsterdam 85 (1932), 1181—1188, insbesondere 1183.

¹⁵⁾ bei dieser Wahl, die wegen (21) erlaubt ist, sind u_1 und u_2 auch auf ξ^* isotrope Parameter.

für die zweiten und dritten Ableitungen $\xi_{\alpha\beta}^*$ und $\xi_{\alpha\beta\gamma}^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\xi_{11}^{*2} &\equiv \xi_{11}^* \xi_{12}^* \equiv \xi_{11}^* \xi_{22}^* \equiv 0, \quad \xi_{12}^{*2} \equiv -2i, \quad \xi_{12}^* \xi_{22}^* \equiv \xi_{22}^{*2} \equiv 0, \\ \xi_{111}^* &\equiv \xi_{222}^* \equiv 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Ersetzen wir die Parameter u_1, u_2 in (22) durch orthogonale \bar{u}_1, \bar{u}_2 vermöge der Transformation

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= -\frac{1}{2}(u_1^2 + iu_2^2), \quad \bar{u}_2 = \pm \frac{1}{2}(u_2^2 + iu_1^2), \\ \frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} &= \mp 2u_1 u_2 \neq 0,\end{aligned}\quad (25)$$

so entsteht aus (23)

$$\stackrel{(5)}{g}_{kl} = \stackrel{(5)}{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_l} = \bar{\delta}_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad \alpha, \beta, k, l = 1, 2. \quad (26)$$

Somit ist \mathfrak{r}^* abwickelbar euklidisch und der von den Vektoren $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_{11}^*, \xi_{12}^*, \xi_{22}^*$ aufgespannte Schmiegraum infolge des parameterrelativinvarianten Verhaltens der Gramschen Determinanten G und G^* fünfdimensional. Wir bemerken noch: der Schnitt der Fläche \mathfrak{r}^* mit der einparametrischen R_4 — Schar $x_5^* = \text{const.}$ ist die ebene Kurvenschar $u_1 \cdot u_2 = c$, deren Vektorgleichung

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}^*(u_1, c) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{2ic^2}{u_1} \right), \frac{1}{2i} \left(u_1 - \frac{2ic^2}{u_1} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{c}{u_1} + 2icu_1 \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2i} \left(\frac{c}{u_1} - 2icu_1 \right), \pm ic\sqrt{2i} \right\}\end{aligned}\quad (27)$$

gegeben ist. Für die ersten drei Ableitungen des Kurvenvektors \mathfrak{v}^* erhält man:

$$\mathfrak{v}^{*2} \equiv -\frac{4ic^2}{u_1^2}, \quad \mathfrak{v}^{*3} \equiv 0, \quad \mathfrak{v}^{*4} \equiv -\frac{3}{u_1} \mathfrak{v}^*. \quad (28)$$

Überdies gilt:

$$\mathfrak{v}^{*2} \equiv 2ic^2. \quad (29)$$

Es handelt sich also für $c \neq 0$ um eine einparametrische Schar ebener hypersphärischer Kurven mit isotroper Hauptnormale, für $c = 0$ um das isotrope Geradenpaar $\mathfrak{r}^*(u_1, 0), \mathfrak{r}^*(0, u_2)$.¹⁶⁾

Nunmehr betrachten wir die Ableitungsgleichungen (12) in unserem Sonderfall (22). Zuzufolge (24) verschwinden von vornherein

$$C_{111}^{*pq} = C_{222}^{*pq} = C_{111}^{*p} = C_{222}^{*p}, \quad p, q = 1, 2. \quad (30)$$

¹⁶⁾ für $\mathfrak{r}^*(u_1, 0)$ ergibt sich aus (15) $x_1^2 + x_2^2 = 0, x_3 = x_4 = x_5 = 0$, für $\mathfrak{r}^*(0, u_2)$ analog $x_3^2 + x_4^2 = 0, x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

Somit verbleiben die beiden Relationen

$$\mathfrak{r}_{112}^* = C_{112}^{*pq} \mathfrak{r}_{pq}^* + C_{112}^{*p} \mathfrak{r}_p^*, \quad \mathfrak{r}_{122}^* = C_{122}^{*pq} \mathfrak{r}_{pq}^* + C_{122}^{*p} \mathfrak{r}_p^*, \quad p, q = 1, 2. \quad (31)$$

Wir multiplizieren skalar mit \mathfrak{r}_{11}^* , \mathfrak{r}_{12}^* , \mathfrak{r}_{22}^* und erhalten mit Rücksicht auf (23) und (24):

$$\begin{aligned} 2iu_2 C_{112}^{*2} = 0, \quad -2iC_{112}^{*12} = 0, \quad 2iu_1 C_{112}^{*1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad 2iu_2 C_{122}^{*2} = 0, \\ -2iC_{122}^{*12} = 0, \quad 2iu_1 C_{122}^{*1} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Somit verschwinden überdies:

$$C_{112}^{*1} = C_{112}^{*2} = C_{122}^{*1} = C_{122}^{*2} = C_{112}^{*12} = C_{122}^{*12} = 0. \quad (33)$$

Multiplizieren wir skalar mit \mathfrak{r}_1^* bzw. \mathfrak{r}_2^* , so entsteht

$$2iu_1 C_{112}^{*22} = 0, \quad 2iu_2 C_{112}^{*11} = 2i \quad \text{bzw.} \quad 2iu_1 C_{122}^{*22} = 2i, \quad 2iu_2 C_{122}^{*11} = 0, \quad (34)$$

also

$$C_{112}^{*11} = \frac{1}{u_2}, \quad C_{112}^{*22} = 0, \quad C_{122}^{*11} = 0, \quad C_{122}^{*22} = \frac{1}{u_1}. \quad (35)$$

Nach (30), (33) und (35) reduzieren sich demnach die Koeffizienten (14) auf die speziellen Werte

$$A = F = B = E = 0, \quad C = \frac{3}{u_1}, \quad D = \frac{3}{u_2} \quad (36)$$

und die Differentialgleichung (13) der Hauptkurven der Fläche \mathfrak{r}^* lautet:

$$du_1^2 du_2^2 \left(\frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} \right) = 0 \quad (37)$$

mit den Integralen

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_1 u_2 = c, \quad (c_1, c_2, c \text{ beliebige Konstante}). \quad (38)$$

Mit Rücksicht auf (19), (20), (23), (24), (26), (29), (37) und (38) haben wir so das Resultat erhalten:

Die W -Projektion (22) der totalisotropen Fläche (15), deren biquadratische Fundamentalform durch das Quadrat einer quadratischen Differentialform gegeben ist (mit konstanten Koeffizienten), ist eine abwickelbar euklidische Fläche in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegrum und dreifachem Hauptkurvennetz. Sämtliche Hauptkurven sind ebene Kurven. Zwei der drei Hauptkurvenscharen bestehen aus ebenen zweifach isotropen Kurven, die dritte für $c \neq 0$ aus ebenen hypersphärischen Kurven mit isotroper Hauptnormale, für $c = 0$ aus einem isotropen Geradenpaar.¹⁷⁾

¹⁷⁾ vgl. ¹⁶⁾.

§ 7. Allgemeinere Fälle.

Die totalisotrope Fläche (15) ist ein Vertreter des speziellesten Typus totalisotroper Flächen in R_7 mit fünfdimensionalem Schmiegrau, dessen biquadratische Grundform F zwei invarianten Bedingungen genügt: Verschwinden der Diskriminante Θ_3 und Proportionalität zur Hesseschen Kovariante H :

$$\Theta_3 = \Theta_2^2 - \frac{1}{4}\Theta_1^3 \equiv 0, \quad \Theta_2 H - \Theta_1 F \equiv 0.$$

Läßt man die zweite dieser Bedingungen fallen und beschränkt sich auf totalisotrope Flächen mit verschwindender Diskriminante, so ergeben sich W -Projektionen allgemeineren Charakters, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (u_2 - u_1^2 u_2), \quad x_3 = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2), \\ x_2 &= \frac{1}{2i} (u_2 + u_1^2 u_2), \quad x_4 = \frac{1}{2i} (2u_1 u_2 + u_2^2 \sqrt{2}), \\ & \quad x_5 = \pm \sqrt{2} u_1 u_2 \pm \frac{u_2^2}{2}, \\ & \quad x_6 = \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_1 u_2^2 \right) \frac{1}{2}, \\ & \quad x_7 = \frac{1}{2i} \left(u_1 + \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2 \right). \end{aligned} \right\} (39)$$

Auf dieser Fläche $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$ des R_7 gilt, wie man analog (16), (17), (18) durch Berechnung der Elemente der Matrizen $\|\xi_1, \xi_2\|$, $\|\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}\|$, $\|\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{122}, \xi_{222}\|$ erkennt:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\equiv \xi_\alpha \xi_\beta \equiv 0, \quad g_{1111} \equiv 1, \quad g_{1112} \equiv 0, \quad g_{1122} \equiv 1, \quad g_{1222} \equiv 0, \quad g_{2222} \equiv 0, \\ (g_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta), \quad G(\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}) \equiv -1. \end{aligned} \quad (40)$$

Demnach ist \mathfrak{r} totalisotrop ($g_{\alpha\beta} \equiv 0$) und trägt fünfdimensionale Schmiegräume ($G \equiv 0$). Die biquadratische Grundform

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\alpha du^\beta du^\gamma du^\delta \equiv du_1^2 (du_1^2 + du_2^2), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (41)$$

reduziert sich auf das Produkt zweier quadratischer Formen konstanter Koeffizienten, ihre Diskriminante verschwindet.¹⁸⁾ Es liegt also eine Minkowskische totalisotrope Fläche vor.¹⁹⁾

Als Koordinatenraum der W -Projektion \mathfrak{r}^* der Fläche \mathfrak{r} wählen wir den R_5 der x_1, x_2, \dots, x_5 . Für die „Determinante der

¹⁸⁾ man erhält $\Theta_2 = 6 \begin{vmatrix} g_{1111} & g_{1112} & g_{1122} \\ g_{1112} & g_{1122} & g_{1222} \\ g_{1122} & g_{1222} & g_{2222} \end{vmatrix} = -6$, $\Theta_1 = 2 (g_{1111} g_{2222} - 4g_{1112} g_{1222} + 3g_{1122}^2) = 6$, $\Theta_3 = \Theta_2^2 - \frac{1}{4}\Theta_1^3 = 0$,

vgl. z. B. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, § 11, S. 54, Groningen (1923).

¹⁹⁾ vgl. 13).

Projektion“ erhalten wir aus $\|\xi_1, \xi_2\|$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_6}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_7}{\partial u_\alpha} \right| &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2}(1 - u_1^2 - u_2^2), & \frac{1}{2i}(1 + u_1^2 + u_2^2) \\ -u_1 u_2, & -iu_1 u_2 \end{array} \right| = \\ &= -iu_1 u_2 (u_1^2 + u_2^2) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (42)$$

Somit lauten die Gleichungen der Projektionsfläche ξ^* in den ursprünglichen Parametern:

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{2}(u_2 - u_1^2 u_2), \quad x_3^* = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2), \\ x_2^* &= \frac{1}{2i}(u_2 + u_1^2 u_2), \quad x_4^* = \frac{1}{2i}(2u_1 u_2 + u_2^2 \sqrt{2}), \quad x_5^* = \pm \sqrt{2} u_1 u_2 \pm \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \right\} (43)$$

Für die quadratischen Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta}$ der Projektionsfläche ξ^* bekommen wir:

$$\stackrel{(5)}{g}_{11} \equiv u_1^2 + u_2^2, \quad \stackrel{(5)}{g}_{12} \equiv u_1 u_2, \quad \stackrel{(5)}{g}_{22} \equiv 0. \quad (44)$$

Für die zweiten und dritten Ableitungen $\xi_{\alpha\beta}^*, \xi_{\alpha\beta\gamma}^*$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi_{11}^{*2} \equiv 1, \quad \xi_{11}^* \xi_{11}^* &\equiv 0, \quad \xi_{11}^* \xi_{22}^* \equiv \xi_{12}^{*2} \equiv 1, \quad \xi_{12}^* \xi_{22}^* \equiv 0, \quad \xi_{11}^{*2} \equiv 0, \\ \xi_{111}^* &\equiv \xi_{112}^* \equiv \xi_{222}^* \equiv 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Die Projektionsfläche ist euklidisch abwickelbar, wie das Verhalten ⁽⁵⁾ von $g_{\alpha\beta}$ in orthogonalen Parametern zeigt.²⁰⁾ Ferner ist der von den Vektoren $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_{11}^*, \xi_{12}^*, \xi_{22}^*$ aufgespannte Schmiegrum fünfdimensional ($G^* \neq 0$). Nunmehr betrachten wir die Ableitungsgleichungen (12) für den Spezialfall (43). Wegen (45) verschwinden von vornherein:

$$C_{111}^{*pq} \equiv C_{122}^{*pq} \equiv C_{222}^{*pq} \equiv C_{111}^{*p} \equiv C_{122}^{*p} \equiv C_{222}^{*p} \equiv 0, \quad p, q = 1, 2. \quad (46)$$

Somit verbleibt die Relation:

$$\xi_{112}^* = C_{112}^{*pq} \xi_{pq}^* + C_{112}^{*p} \xi_p^*, \quad p, q = 1, 2. \quad (47)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten C_{112}^{*pq} und C_{112}^{*p} multiplizieren

$$\begin{aligned} {}^{20)} \text{ setzen wir } \bar{u}_1 &= \frac{1}{2i} \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} - u_1 u_2^2 \right), \quad \bar{u}_2 = -\frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2 \right), \\ &\cdot \frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = -iu_1 u_2 \neq 0, \end{aligned}$$

so entsteht aus (44):

$$\stackrel{(5)}{\bar{g}}_{kl} = \stackrel{(5)}{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_l} = \bar{\delta}_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad k, l, \alpha, \beta = 1, 2.$$

wir skalar mit $\xi_{11}^*, \xi_{12}^*, \xi_{22}^*, \xi_1^*, \xi_2^*$ und erhalten mit Rücksicht auf (44), (45) (und weitere aus diesen durch Differentiation hervorgehende Identitäten)

$$\xi_{112}^* \xi_{11}^* = C_{112}^{*11} \cdot 1 + C_{112}^{*12} \cdot 0 + C_{112}^{*22} \cdot 1 + C_{112}^{*1} u_1 + C_{112}^{*2} \cdot 0 = 0, \quad (48)$$

$$\xi_{112}^* \xi_{12}^* = C_{112}^{*11} \cdot 0 + C_{112}^{*12} \cdot 1 + C_{112}^{*22} \cdot 0 + C_{112}^{*1} u_2 + C_{112}^{*2} \cdot 0 = 0, \quad (49)$$

$$\xi_{112}^* \xi_{22}^* = C_{112}^{*11} \cdot 1 + C_{112}^{*12} \cdot 0 + C_{112}^{*22} \cdot 0 + C_{112}^{*1} u_1 + C_{112}^{*2} \cdot 0 = 0, \quad (50)$$

$$\xi_{112}^* \xi_1^* = C_{112}^{*11} \cdot u_1 + C_{112}^{*12} \cdot u_2 + C_{112}^{*22} \cdot u_1 + C_{112}^{*1(5)} g_{11} + C_{112}^{*2(5)} g_{12} = 0, \quad (51)$$

$$\xi_{112}^* \xi_2^* = C_{112}^{*11} \cdot 0 + C_{112}^{*12} \cdot 0 + C_{112}^{*22} \cdot 0 + C_{112}^{*1(5)} g_{12} + C_{112}^{*2(5)} \cdot 0 = -1. \quad (52)$$

Subtrahieren wir (50) von (48), so folgt $C_{112}^{*22} = 0$. Für die restlichen Koeffizienten erhalten wir:

$$C_{112}^{*11} = \frac{1}{u_2}, \quad C_{112}^{*12} = \frac{1}{u_1}, \quad C_{112}^{*1} = -\frac{1}{u_1 u_2}, \quad C_{112}^{*2} = \frac{1 - u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 u_2^2}. \quad (53)$$

Die Koeffizienten (14) erhalten in diesem Falle also die Werte:

$$A = B = F = E = 0, \quad C = -\frac{6}{u_1}, \quad D = \frac{3}{u_2}. \quad (54)$$

Somit reduziert sich die Differentialgleichung (13) der Hauptkurven für die Fläche (43) auf

$$3 du_1^2 du_2^2 \left(\frac{du_2}{u_2} - \frac{2 du_1}{u_1} \right) = 0 \quad (55)$$

mit den Integralen

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_2 = c_3 u_1^2, \quad (c_3 \neq 0). \quad (56)$$

Zwei Hauptkurvenscharen fallen also mit den ebenen Parameterkurven der Fläche zusammen ($\xi_{111}^* = \xi_{222}^* = 0$). Die dritte erhält die Vektordarstellung ($\varphi = c_3 u_1^2, \varphi' = 2c_3 u_1, \varphi'' = 2c_3, \varphi''' = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{y}^*(u_1) &= \xi^*(u_1, \varphi(u_1)), \quad \mathfrak{y}^{*'} = \xi_1^* + \xi_{\varphi}^* \varphi', \\ \mathfrak{y}^{*''} &= \xi_{11}^* + 2\xi_{1\varphi}^* \varphi' + \xi_{\varphi\varphi}^* \varphi'^2 + \xi_{\varphi}^* \varphi'', \\ \mathfrak{y}^{*'''} &= \xi_{111}^* + 3\xi_{11\varphi}^* \varphi' + 3\xi_{1\varphi}^* \varphi'' + 3\xi_{\varphi\varphi}^* \varphi' \varphi'', \\ \mathfrak{y}^{*IV} &= 6\xi_{112}^* \varphi'' + 3\xi_{22}^* \varphi''^2, \quad \mathfrak{y}^{*V} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Da \mathfrak{y}^{*V} identisch verschwindet, liegen die Kurven dieser Schar höchstens in einem R_4 . Andererseits folgt aus der Annahme

$$\lambda_1 \mathfrak{y}^{*'} + \lambda_2 \mathfrak{y}^{*''} + \lambda_3 \mathfrak{y}^{*'''} + \lambda_4 \mathfrak{y}^{*IV} \equiv 0, \quad \{n_1\} \quad (58)$$

durch skalare Multiplikation mit ξ_{112}^* bzw. ξ_2^*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad (59)$$

Die Kurvenschar $\eta^*(u_1, c_3)$ liegt also mindestens in einem R_4 . Damit hat sich das Resultat ergeben:

Die W -Projektion (43) der totalisotropen Fläche (39), deren biquadratische Fundamentalform durch (41) gegeben ist (mit konstanten Koeffizienten und identisch verschwindender Diskriminante), ist eine abwickelbar euklidische Fläche in R_5 mit fünfdimensionalem Schmiegraum und dreifachem Hauptkurvennetz. Die Kurven zweier der drei Hauptkurvenscharen bestehen aus ebenen Kurven, diejenigen der dritten liegen in einem festen vierdimensionalen Raum.

Ein weiteres noch allgemeineres Beispiel erhalten wir durch W -Projektion der totalisotropen Fläche

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(u_1 - \frac{4}{3} u_1^3 - 2u_1 u_2^2 \right), & x_2 &= \frac{1}{2i} \left(u_1 + \frac{4}{3} u_1^3 + 2u_1 u_2^2 \right), \\ x_3 &= \frac{1}{2} (u_2 - 2u_1^2 u_2 + u_2^3), & x_4 &= \frac{1}{2i} (u_2 + 2u_1^2 u_2 - u_2^3), \\ x_5 &= \frac{1}{2} \left(\mp \sqrt{2} u_1^2 + 2u_1 u_2 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} u_2^2 \right), & x_6 &= \mp i u_2^2, \\ x_7 &= \frac{\pm \sqrt{2}}{2} u_1^2 + u_1 u_2 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} u_2^2, \end{aligned} \right\} (60)$$

mit den (konstanten) Fundamentalkomponenten

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\equiv 0, \quad g_{1111} \equiv 4, \quad g_{1112} \equiv 0, \quad g_{1122} \equiv 2, \quad g_{1222} \equiv 0, \quad g_{2222} \equiv -3, \\ \Theta_1 &= 2(g_{1111}g_{2222} + 3g_{1122}^2) \equiv 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Hier handelt es sich um eine (Minkowskische) totalisotrope Fläche mit nichtverschwindender Diskriminante.²¹⁾ Die Nulllinien der Fundamentalform $g_{\alpha\beta\gamma\delta} du^\alpha du^\beta du^\gamma du^\delta$ liegen wegen $\Theta_1 \equiv 0$ äquianharmonisch. Wählt man den R_5 der x_3, x_4, \dots, x_7 zum Koordinatenraum der W -Projektion ξ^* , so verschwinden die Ableitungen ξ_{111}^* und ξ_{122}^* identisch, desgleichen also die Koeffizienten C_{111}^{*2q} und C_{122}^{*2q} der Ableitungsgleichungen für ξ_{112}^* und ξ_{222}^* . Mit C_{111}^{*22} verschwindet insbesondere wieder der Koeffizient A der Differentialgleichung der Hauptkurven, deren eine Schar also durch die ebenen Parameterkurven $u_2 = \text{const}$ gegeben ist ($\xi_{111}^* \equiv 0$). Eine genauere Untersuchung der übrigen Hauptkurvenscharen solcher äquianharmonischer Fälle muß ihrer rechnerischen Kompliziertheit wegen vorbehalten sein.

²¹⁾ man erhält $\Theta_1 \equiv 0$, $\Theta_2 = -192$, $\Theta_3 \neq 0$.

ziertheit wegen einer eigenen Bearbeitung vorbehalten bleiben. Dasselbe gilt auch für die aus dem R_8 und R_9 bekannten totalisotropen Flächen mit fünfdimensionalem Schmiegraum jedoch insgesamt oder teilweise identisch verschwindenden Invarianten der biquadratischen Grundform und ihre Verwertung für die Flächentheorie in R_4 und R_5 durch A - bzw. B -Projektionen.²²⁾

*

W -projekce totálně isotropních ploch. II.

(Obsah předešlého článku.)

W -projekce ξ^* totálně isotropních ploch ξ euklidovského prostoru R_7 , t. j. integrálních ploch rovnice

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_7^2 = 0$$

na libovolný R_5 jsou euklidovsky rozvinutelné plochy v tomto R_5 . Nejsou-li oskulační prostory $S^*(\xi_\alpha^*, \xi_{\alpha\beta}^*)$, odpovídající prvním a druhým derivacím ξ_α^* , $\xi_{\alpha\beta}^*$, v každém obecném bodě takové plochy ξ^* degenerovány (t. j. neexistuje-li žádný lineární vztah mezi vektory ξ_α^* , $\xi_{\alpha\beta}^*$), platí totéž také pro oskulační prostory $S(\xi_\alpha, \xi_{\alpha\beta})$ plochy ξ a naopak. Z existence takových totálně isotropních ploch ξ v R_7 vychází tedy jako příspěvek k teorii ploch v euklidovském R_5 existence euklidovsky rozvinutelných ploch s pětidimensionálními oskulačními prostory.

Jako takové W -projekce vycházejí speciálně euklidovsky rozvinutelné plochy v R_5 se systémem rovinných hlavních čar ve smyslu C. Segre-E. Bompianiho, mezi nimi jeden příklad rozvinutelné euklidovské plochy s hlavními čarami pouze rovinnými, které tvoří na ploše trojnásobnou síť.

²²⁾ vgl. ¹⁾, insbesondere S. 96.

Über H -abgeschlossene und bikompakte Räume.

Miroslav Katětov, Praha.

(Eingegangen am 2. Juni 1939.)

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile. Im § 1 werden (neben anderen Sätzen) zwei notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bikompaktheit eines Raumes gegeben (Sätze 1.5 und 1.7). Der Satz 1.7 ist nicht neu; er wurde von Herrn M. H. Stone¹⁾ mit Hilfe der Theorie der Booleschen Ringe bewiesen; hier gebe ich einen anderen Beweis. Im § 2 wird für jeden Hausdorffschen Raum die Existenz einer H -abgeschlossenen Hülle (siehe dort die Definition) bewiesen und einige ihre Eigenschaften untersucht. Im § 3 wird für die bikompakte Hülle [dieser Begriff und der betreffende Satz sind aus den Arbeiten von Herren M. H. Stone¹⁾ und E. Čech²⁾ bekannt] ein auf den Ergebnissen von § 1 und 2 beruhender Existenzbeweis gegeben.

Vorbemerkungen.

Zunächst erklären wir einige im folgenden benützte Bezeichnungen; sonst stimmt die Terminologie mit der von Alexandroff und Hopf³⁾ überein.

Ist R eine Menge und ist jeder Menge $M \subset R$ eine Menge $uM \subset R$ zugeordnet (also ist — wenn \mathfrak{R} das System aller Teilmengen von R bezeichnet — eine Abbildung u von \mathfrak{R} in \mathfrak{R} definiert), so heißt u eine *topologische Zuordnung* oder eine *allgemeine Topologie* auf R ; (R, u) heißt ein *allgemein-topologischer Raum*. Man schreibt gewöhnlich, wenn daraus kein Mißverständnis entstehen kann, R anstatt (R, u) und \overline{M} anstatt uM .

¹⁾ M. H. Stone, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, Transactions of the Amer. Math. Soc., 41 (1937), S. 375ff.

²⁾ E. Čech, On bicomact spaces, Annals of Math., (2), 88 (1937), S. 823—844.

³⁾ P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, I. Band; Springer, Berlin 1935.

Sind u und v allgemeine Topologien auf R und ist stets $uM \subset vM$, so sagt man, u sei *schwächer* als v und v *stärker* als u .⁴⁾ Ist $P \subset R$, so setzt man für $M \subset P$ $u_P M = P \cdot uM$; u_P ist dann eine allgemeine Topologie auf P . (P, u_P) heißt ein *Relativraum* (in bezug auf R); man sagt auch, (P, u_P) sei in (R, u) *eingebettet* und (R, u) *umfasse* (P, u_P) .

Ist $M \subset R$, M in dem Raum (R, u) offen, bzw. Umgebung eines Punktes usw., so sagen wir M sei u -offen, bzw. eine u -Umgebung usw. Wenn f eine Abbildung einer Menge A in eine Menge B und $M \subset A$ ist, bezeichnen wir mit f_M die Abbildung von M in B , welche entsteht, indem für $x \in M$ $f_M(x) = f(x)$ gesetzt wird.

Ein allgemein-topologischer Raum (R, u) heißt ein *Hausdorffscher* Raum und u heißt eine *Hausdorffsche* Topologie (wir schreiben: H -Raum, H -Topologie), wenn folgende Axiome erfüllt sind (dabei bezeichnen A, B Teilmengen von R):

- I. $u\emptyset = \emptyset$. II. $A \subset uA$. III. $u(uA) = uA$. IV. $u(A + B) = uA + uB$. V. (Hausdorffsches Trennungsaxiom.) Je zwei verschiedene Punkte aus R besitzen disjunkte Umgebungen.

Nun führen wir einige bekannte Sätze an, die im folgenden benützt werden. Sie rühren meistens von Alexandroff und Urysohn⁵⁾ her; siehe auch das erwähnte Buch von Alexandroff und Hopf.

0.1 sind G, M Teilmengen eines H -Raumes, G offen, so ist $\overline{GM} = \overline{GM}$.

Definition. Ein H -Raum heißt *H-abgeschlossen*, wenn er in jedem ihn umfassenden H -Raum abgeschlossen ist.

0.2. Ein H -Raum R ist dann und nur dann H -abgeschlossen, wenn jede seine offene Überdeckung endlichviele Elemente G_i mit $\sum_{i=1}^m \overline{G_i} = R$ enthält.

Definition. Ein H -Raum heißt *bikompakt*, wenn jede seine offene Überdeckung eine endliche Überdeckung enthält.

0.3. Ein H -Raum R ist dann und nur dann bikompakt, wenn folgendes gilt: ist \mathfrak{F} ein (nichtleeres) System abgeschlossener Teilmengen von R und ist der Durchschnitt endlichvieler Elemente von \mathfrak{F} stets nichtleer, so hat \mathfrak{F} einen nichtleeren Durchschnitt.

0.4. Jede abgeschlossene Teilmenge eines bikompakten H -Raumes ist bikompakt (als Relativraum).

⁴⁾ Also auch wenn $u = v$.

⁵⁾ P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandlungen der Kon. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929.

0.5. Jede schlichte stetige Abbildung eines bikompakten H -Raumes auf einen H -Raum ist eine Homöomorphie.

Definition. Ein H -Raum heißt *regulär*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R , von denen eine einpunktig ist, disjunkte Umgebungen besitzen.

0.6. Ein H -Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn er H -abgeschlossen und regulär ist.

Definition. Ein H -Raum heißt *normal*, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von R disjunkte Umgebungen besitzen.

0.7. Jeder bikompakte H -Raum ist normal.

0.8. Ist R ein normaler H -Raum, $A \subset R$ abgeschlossen und ist in A eine beschränkte stetige Funktion f definiert, so gibt es eine in R definierte stetige beschränkte Funktion F mit $F_A = f$.

Definition. Ein H -Raum heißt *vollständig regulär*,⁶⁾ wenn es zu jeder abgeschlossenen nichtleeren $M \subset R$ und jedem Punkt $x \in R - M$ eine in R definierte stetige Funktion f mit $f(x) = 0$, $f(M) = (1)$ gibt.

Offenbar ist jeder normale H -Raum vollständig regulär, und jeder vollständig reguläre H -Raum regulär.

§ 1.

1.1. Ist der Raum R H -abgeschlossen, f seine stetige Abbildung auf einen H -Raum S , so ist auch S H -abgeschlossen.

Beweis: \mathfrak{G} sei eine offene Überdeckung von S . Dann bilden die Mengen $f^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}$, eine offene Überdeckung von R ; daher gibt es nach **0.2** $G_i \in \mathfrak{G}$ ($i = 1, \dots, m$) so daß $\sum_{i=1}^m f^{-1}(G_i) = R$, also $\sum_{i=1}^m f^{-1}(\overline{G_i}) = R$, $\sum_{i=1}^m \overline{G_i} = S$ gilt. Die H -Abgeschlossenheit von S folgt jetzt aus **0.2**.

1.2. Ist der Raum R H -abgeschlossen, $M \subset R$ offen, so ist auch der Raum \overline{M} H -abgeschlossen.

Beweis: Ist \mathfrak{G} eine offene Überdeckung von $Q = \overline{M}$, so sei für jede $G \in \mathfrak{G}$ G^* in R offen und $G^*Q = G$. Dann ist $\sum G^* + (R - Q) = R$, also mit geeigneten $G_i \in \mathfrak{G}$ $\sum_{i=1}^m \overline{G_i^*} + \overline{R - Q} =$

⁶⁾ A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. 102 (1930), S. 544.

= R und daher $\overline{\sum_{i=1}^m G_i^*} \supset M$, folglich wegen $M \cdot \overline{\sum_{i=1}^m G_i^*} = \overline{M \cdot \sum_{i=1}^m G_i^*}$

(nach 0.1) $\sum_{i=1}^m G_i \supset \overline{M} = Q$, woraus die H -Abgeschlossenheit von \overline{M} folgt.

Definition. Eine H -Topologie u auf R heißt *maximal*, wenn keine von u verschiedene H -Topologie auf R stärker als u ist.

1.3. Ist der Raum (R, u) H -abgeschlossen, so gibt es eine und nur eine maximale H -Topologie v auf R , die stärker als u ist. Diese Topologie besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so ist $u_Q = v_Q$;
- (2) besitzen in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen, so ist (R, v) regulär;
- (3) ist f eine stetige Abbildung des Raumes (R, u) in einen regulären Raum, so ist f auch als Abbildung von (R, v) stetig.

Beweis. I. Mit \mathfrak{A} bezeichnen wir das System aller $R - uG$, G u -offen, und definieren eine Topologie v auf R , indem wir \mathfrak{A} für eine Basis des Raumes (R, v) erklären. Sind x, y verschiedene Punkte aus R , so sei U eine u -offene Umgebung von x , $y \notin uU$; setzt man $G = R - u(R - uU)$, $\Gamma = R - uU$, so ist G bzw. Γ eine v -Umgebung von x bzw. y und $G\Gamma = \emptyset$, also das Trennungsaxiom erfüllt. Offenbar genügt v auch den übrigen Axiomen und ist also eine H -Topologie und dabei stärker als u . Nach 1.1 ist der Raum (R, v) H -abgeschlossen.

w sei jetzt eine H -Topologie auf R und stärker als u . Ist $A \in \mathfrak{A}$, so ist $A = R - B$, wo $B = uG$, G u -offen ist. Nach 1.2 und 1.1 ist dann der Raum (B, w_B) H -abgeschlossen, also B in (R, w) abgeschlossen, A w -offen. Daraus folgt, daß w schwächer als v ist; also ist v die (einzige) maximale Topologie auf R , die stärker als u ist.

II. Ist $Q \subset R$, $uQ = R$, (Q, u_Q) regulär, so sei $x \in Q$, U eine Umgebung von x in (R, u) . Da (Q, u_Q) regulär ist, kann man eine u -offene Umgebung V von x finden, für die $Q \cdot u(VQ) \subset UQ$ gilt. Setzt man $G = R - u(R - uV)$, so ist $x \in V \subset G \subset uV$, G v -offen, also eine v -Umgebung von x ; nach 0.1 ist $u(VQ) = uV$ und daher $QG \subset Q \cdot u(VQ) \subset QU$. Hiermit ist die Behauptung (1) bewiesen.

III. Nun setzen wir voraus, daß in (R, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen. Es sei $x \in R$, U eine v -Umgebung von x . Nach der Definition von v gibt es eine u -offene Menge A mit $x \in R - uA \subset U$. Zu jedem $y \in B = uA$ kann man u -offene Umgebungen G_y und $G(y)$ von x bzw. y so finden, daß $uG_y \cdot uG(y) = \emptyset$ ist.

Nach 1.2 ist B H -abgeschlossen; da $BG(y)$ eine offene Über-

deckung von B bilden, gilt nach 0.2 mit geeigneten $y_i \in B$ $u \sum_{i=1}^m G(y_i) \supset B$. Setzt man $G = \prod_{i=1}^m G_{y_i}$, $\Gamma = R - u(R - uG)$, so ist $x \in G \supset \Gamma$, Γ v -offen, also eine v -Umgebung von x ; ferner ist wegen $\prod_{i=1}^m uG_{y_i} \cdot \sum_{i=1}^m uG(y_i) = \emptyset$ auch $B \cdot uG = \emptyset$, also, da uG v -abgeschlossen, $\Gamma \subset uG$ ist, $v\Gamma \subset uG \subset R - B \subset U$, woraus die Regularität von (R, v) folgt.

IV. Ist f eine stetige Abbildung von (R, u) in einen regulären Raum S , so sei $x \in R$, U eine Umgebung von $y = f(x)$ in S , ferner V eine offene Umgebung von y , $\bar{V} \subset U$. Dann ist $x \in f^{-1}(V) \subset R - u(R - uf^{-1}(V)) \subset uf^{-1}(V) \subset f^{-1}(\bar{V}) \subset f^{-1}(U)$, also $f^{-1}(U)$ eine v -Umgebung von x . Daraus folgt die Behauptung (3).

1.4. Eine H -Topologie u auf R ist dann und nur dann maximal, wenn (1) (R, u) H -abgeschlossen ist; (2) das System aller $R - uG$, G offen, eine Basis von (R, u) ist.

Beweis. I. sind beide Bedingungen erfüllt; und definiert man die maximale Topologie v wie in 1.3, I, so ist infolge der Bedingung (2) $v = u$.

II. Ist (R, u) H -abgeschlossen, gilt aber (2) nicht, so ist v offenbar stärker als u und von u verschieden.

III. Ist (R, u) kein H -abgeschlossener Raum, so sei (R, u) in einen H -Raum (S, v) eingebettet und $vR - R \neq \emptyset$.

Man wähle $\xi \in vR - R$ und $a \in R$ und setze $\varphi(\xi) = a$ und für $x \in R$ $\varphi(x) = x$; φ ist dann eine Abbildung von $Q = R + (\xi)$ auf R . Wir bestimmen eine Topologie v auf R durch die Festsetzung: $M \subset R$ ist dann und nur dann v -offen, wenn $\varphi^{-1}(M)$ in Q offen ist. Man beweist leicht, daß v eine H -Topologie, stärker als u und von u verschieden ist.

1.5. Ein H -Raum (R, u) ist dann und nur dann bikompakt, wenn (1) je zwei verschiedene Punkte aus R disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen; (2) die Topologie u maximal ist.

Beweis. I. Sind die Bedingungen erfüllt, so folgt aus (2) nach 1.4 die H -Abgeschlossenheit von (R, u) . Konstruieren wir die H -Topologie v auf R wie in 1.3, I, so ist erstens v stärker als u , also gleich u , zweitens folgt aus (1) nach 1.3, Behauptung (2), daß (R, v) , also (R, u) regulär ist. Daraus folgt nach 0.6 die Bikompaktheit von (R, u) .

II. Ist (R, u) bikompakt, so ist (1) nach 0.6 und (2) nach 0.5 erfüllt.

1.6. Jedes monotone (nichtleere) System nichtleerer H -abgeschlossenen Teilmengen eines H -Raumes hat einen nichtleeren Durchschnitt.

Beweis. I. Es sei \mathfrak{F} ein solches System von Teilmengen eines H -Raumes R . Man kann offenbar voraussetzen, daß R H -abgeschlossen ist.

Es sei $F \in \mathfrak{F}$, $x \in R - F$. Für $y \in F$ sei $U(y)$ eine offene Umgebung von y , $x \notin \overline{U(y)}$. Da F H -abgeschlossen ist, gilt nach 0.2 für geeignete $y_i \in F$ $\sum_{i=1}^m \overline{FU(y_i)} \supset F$. Setzt man

$G(F, x) = \sum_{i=1}^m U(y_i)$, so ist $G(F, x)$ offen, $\overline{FG(F, x)} \supset F$ und $\prod_{x \in R-F} \overline{G(F, x)} = F$, da $x \notin \overline{G(F, x)}$.

II. Es sei $F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ ($i = 1, \dots, n$), $F_i \supset F_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ist $1 < r \leq n$ und $F_r \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, so ist auch $F_{r-1} \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also nach I $\overline{F_{r-1}G(F_{r-1}, x_{r-1})} \prod_{i=r}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$, also, da $\prod_{i=r}^n G(F_i, x_i)$ offen ist, $F_{r-1} \prod_{i=r-1}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$. Nun folgt aus $F_n G(F_n, x_n) \neq \emptyset$ durch Rekursion $\prod_{i=1}^n G(F_i, x_i) \neq \emptyset$.

III. Man nehme an, $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F$ sei leer. Dann ist auch $\prod_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} \overline{G(F, x)} = \emptyset$, also $\sum_{\substack{F \in \mathfrak{F} \\ x \in R-F}} (R - \overline{G(F, x)}) = R$. Nach 0.2 gilt dann mit geeigneten

$F_i \in \mathfrak{F}$, $x_i \in R - F_i$ $\sum_{i=1}^n \overline{R - G(F_i, x_i)} = R$, $\sum_{i=1}^n (R - G(F_i, x_i)) = R$, $\prod_{i=1}^n G(F_i, x_i) = \emptyset$, wobei infolge der Monotonie von \mathfrak{F} noch $F_i \supset F_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) vorausgesetzt werden kann. Das ist aber nach II ein Widerspruch.

1.7. Ein H -Raum ist dann und nur dann bikompakt, wenn jede seine abgeschlossene Teilmenge H -abgeschlossen ist.

Beweis. I. Die Bedingung ist nach 0.4 und 0.6 in jedem bikompakten Raum erfüllt.

II. Ist sie in einem H -Raum R erfüllt, so sei \mathfrak{F} ein (nicht-leeres) System von abgeschlossenen Teilmengen von R mit $\prod_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$ für $F_i \in \mathfrak{F}$ ($i = 1, \dots, m$). Man nehme an, es sei $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F = \emptyset$. Dann gibt es die kleinste Zahl α , für die eine trans-

finite Folge $\{F_\xi\}$, $\xi < \alpha$, mit $F_\xi \in \mathfrak{F}$, $\prod_{\xi < \alpha} F_\xi = \emptyset$ existiert. Die Zahl α ist unendlich; wäre sie isoliert, so könnte man durch eine geeignete Umordnung aus $\{F_\xi\}$ eine Folge $\{F'_\xi\}$, $\xi < \beta$, $\beta < \alpha$, bilden, was aber ein Widerspruch ist. Die Mengen $A_\xi = \prod_{\eta < \xi} F_\eta$ ($0 < \xi < \alpha$) sind abgeschlossen, also H -abgeschlossen und nicht-leer; für $0 < \xi_1 < \xi_2 < \alpha$ gilt $A_{\xi_1} \supset A_{\xi_2}$; da α keine isolierte Zahl ist, gilt $\prod_{0 < \xi < \alpha} A_\xi = \prod_{\xi < \alpha} F_\xi = \emptyset$. Das ist nach 1.6 ein Widerspruch; also $\prod_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$. Nun folgt aus 0.3 die Bikompaktheit von R .

§ 2.

2.1. Zu jedem H -Raum R gibt es einen H -Raum S mit folgenden Eigenschaften:

- (1) R ist in S eingebettet. $\bar{R} = S$; (2) S ist H -abgeschlossen; (3) ist f eine stetige Abbildung von R in einen H -Raum Q , $f(\bar{R}) = Q$, so gibt es eine Teilmenge M von S und ihre stetige Abbildung F auf Q , für die $R \subset M$, $F_R = f$ gilt.

Ist Q bikompakt, so kann man $M = S$ wählen.

Besitzt ferner ein H -Raum S' die Eigenschaften (1)–(3) in bezug auf einen H -Raum R' , so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S' , welche auf R mit f zusammenfällt.

Definition. Einen H -Raum S , welcher die erwähnten Eigenschaften (1)–(3) besitzt, nennen wir eine H -abgeschlossene Hülle von R .

Beweis des Satzes. Ist R H -abgeschlossen, so kann man $S = R$ setzen. Daher setzen wir voraus, R sei nicht H -abgeschlossen. In dem ganzen Beweis bezeichnen die Buchstaben A, B, G offene Teilmengen von R , $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ Systeme solcher Mengen.

I. \mathfrak{A} heiÙe ein α -System, wenn ($\alpha 1$) $\mathfrak{A} \neq \emptyset$; ($\alpha 2$) $\emptyset \text{ non } \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 3$) ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{A}$, so ist $B \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 4$) sind $A_i \in \mathfrak{A}$ ($i = 1, \dots, m$),

so ist $\prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A}$; ($\alpha 5$) $\prod_{A \in \mathfrak{A}} \bar{A} = \emptyset$. \mathfrak{A} heiÙe ein β -System, wenn

\mathfrak{A} ein α -System, aber keine echte Teilmenge eines α -Systems ist. Da R kein H -abgeschlossener Raum ist, gibt es eine offene Überdeckung \mathfrak{B} von R , welche keine B_i mit $\sum_{i=1}^m \bar{B}_i = R$ enthält. Mit \mathfrak{A} bezeichnen wir das System aller A , zu denen es $B_i \in \mathfrak{B}$ mit $R - \sum_{i=1}^m \bar{B}_i \subset A$ gibt. \mathfrak{A} besitzt offenbar die Eigenschaften $\alpha 1 - \alpha 4$;

wegen $\prod_{A \in \mathfrak{A}} \bar{A} \subset \prod_{B \in \mathfrak{B}} \overline{R - B} \subset \prod_{B \in \mathfrak{B}} (R - B) = \emptyset$ ist also \mathfrak{A} ein α -System.

II. Es sei ein α -System \mathfrak{A} gegeben. Wir wollen die Existenz eines \mathfrak{A} umfassenden β -Systems beweisen. $\{\mathfrak{B}_\xi\}$, $\xi < \gamma$, sei eine (transfinite) Folge aller α -Systeme. Man setze $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ und für $0 < \xi < \gamma$ $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, falls $\mathfrak{B}_\xi \supset \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, sonst aber $\mathfrak{A}_\xi = \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$; ferner setze man $\mathfrak{G} = \sum_{\xi < \gamma} \mathfrak{A}_\xi$. \mathfrak{G} genügt offenbar den Bedingungen $\alpha 1$ und $\alpha 5$. Bleibt zu zeigen, daß $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$ erfüllt sind.

Ad $\alpha 2$. Wäre $\emptyset \in \mathfrak{G}$, so gäbe es die kleinste $\xi < \gamma$ mit $\emptyset \in \mathfrak{A}_\xi$; es wäre dann $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $\emptyset \in \mathfrak{B}_\xi$; das ist aber unmöglich, da \mathfrak{B}_ξ ein α -System ist.

Ad $\alpha 3$. Ist $B \supset A$, $A \in \mathfrak{G}$, so wähle man die kleinste ξ mit $A \in \mathfrak{A}_\xi$. Ist $\xi = 0$, so ist $A \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, also $B \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. Ist $\xi > 0$, so ist $\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$, also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$, $A \in \mathfrak{B}_\xi$, $B \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{G}$.

Ad $\alpha 4$. Sind $A_i \in \mathfrak{G}$ ($i = 1, \dots, m$), so wähle man die kleinste ξ mit $A_i \in \mathfrak{A}_\xi$ ($i = 1, \dots, m$). Ist $\xi = 0$, so ist $A_i \in \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ ($i = 1, \dots, m$), also $\prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$. Ist $\xi > 0$, so ist offenbar

$$\mathfrak{A}_\xi \neq \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta, \text{ also } \mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi, A_i \in \mathfrak{B}_\xi, \prod_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{G}.$$

\mathfrak{G} ist also ein α -System. Ist \mathfrak{B} ein α -System, $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{G}$, so gilt für eine geeignete $\xi < \gamma$ $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B} \supset \mathfrak{G} \supset \sum_{\eta < \xi} \mathfrak{A}_\eta$; nach der Definition von \mathfrak{A}_ξ ist also $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{B}_\xi$. Daher ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$ und somit \mathfrak{G} ein β -System.

III. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ verschiedene β -Systeme, so kann offenbar nicht $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2$ sein. Es sei also $G \in \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1$. Mit \mathfrak{A}' bezeichne man das System aller A , für die mit geeigneter $B \in \mathfrak{A}_1$ $A \supset BG$ gilt. Dann ist $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}_1$; \mathfrak{A}' ist also kein α -System. \mathfrak{A}' besitzt aber offenbar die Eigenschaften $\alpha 1$ und $\alpha 3 - \alpha 5$ und kann daher die Eigenschaft $\alpha 2$ nicht besitzen; also $\emptyset \in \mathfrak{A}'$, folglich gibt es $A \in \mathfrak{A}_1$ mit $AG = \emptyset$.

IV. Jedem β -System \mathfrak{A} sei jetzt ein in R nicht liegender Gegenstand $\tau(\mathfrak{A})$ zugeordnet und zwar verschiedenen \mathfrak{A} verschiedene $\tau(\mathfrak{A})$. Mit T bezeichnen wir die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$; nach I und II ist T nichtleer. Wir setzen $S = R + T$ und definieren eine Topologie u auf S wie folgt; für $\tau(\mathfrak{A}) = x \in S$ sollen alle $(x) + A$ mit $A \in \mathfrak{A}$, für $x \in R$ alle A mit $x \in A$ als Umgebungen von x gelten. Man beweist leicht, daß (S, u) ein H -Raum ist (z. B. das Trennungsaxiom folgt aus III und der Eigenschaft $\alpha 5$ der

β -Systeme). Ferner ist klar, daß R in (S, u) eingebettet und $uR = S$ ist.

V. Man nehme an, S sei kein H -abgeschlossener Raum. Dann gibt es einen S umfassenden H -Raum V so, daß S in V nicht abgeschlossen ist. Man wähle $x \in \bar{S} - S$ und bezeichne mit \mathfrak{A} das System aller RU , wo U eine offene Umgebung von x in V ist. \mathfrak{A} ist, wie man leicht zeigen kann, ein α -System; also gibt es nach II ein β -System \mathfrak{B} mit $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$. Da V ein H -Raum ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen U und U' von x bzw. $y = \tau(\mathfrak{B})$. Wegen $UR \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ ist nach der Definition von (S, u) $UR + (y)$, also auch $(UR + (y)) \cdot U'S = (y)$ eine Umgebung von y in S . Das ist aber ein Widerspruch, da $y \in \bar{R} - R$, also kein isolierter Punkt ist. Daher ist S H -abgeschlossen.

VI. f sei eine stetige Abbildung von R in einen H -Raum Q , $f(\bar{R}) = Q$. Für $y \in Q$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(y)$ das System aller A , welche das Urbild einer Umgebung von y (in Q) enthalten, und mit $\Phi(y)$ die Menge aller $\tau(\mathfrak{A})$, wo \mathfrak{A} alle $\mathfrak{A}(y)$ umfassende β -Systeme durchläuft. Sind y_1, y_2 verschiedene Punkte aus Q , so seien U_1 bzw. U_2 disjunkte offene Umgebungen von y_1 bzw. y_2 . Dann gilt $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}(y_1)$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}(y_2)$. Gäbe es ein β -System \mathfrak{A} mit $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_1)$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}(y_2)$, so wäre $f^{-1}(U_1) \in \mathfrak{A}$, $f^{-1}(U_2) \in \mathfrak{A}$, also $\emptyset \in \mathfrak{A}$; das ist aber nicht möglich. Daher sind $\Phi(y_1)$ und $\Phi(y_2)$ disjunkt. Ist ferner $y \in Q - f(R)$, so kann man zu jedem $x \in R$ eine offene Umgebung U von y so finden, daß $f(x) \text{ non } \in \bar{U}$, also $x \text{ non } \in \overline{f^{-1}(U)} \subset f^{-1}(U)$; daher ist dann, da $\mathfrak{A}(y)$ offenbar auch die Eigenschaften $\alpha 1 - \alpha 4$ besitzt, $\mathfrak{A}(y)$ ein α -System, also nach II $\Phi(y) \neq \emptyset$.

Demzufolge ist, wenn $M = R + \sum_{y \in Q} \Phi(y)$, für $x \in R$ $F(x) = f(x)$ und für $x \in \Phi(y)$ $F(x) = y$ gesetzt wird, F eine Abbildung von M auf Q . Dabei ist $R \subset M \subset S$ und $F_R = f$.

Bleibt zu zeigen, daß F stetig ist. Ist $x \in R$, U eine offene Umgebung von $F(x) = f(x)$ in Q , so ist $F^{-1}(U) \supset f^{-1}(U)$. $R = f^{-1}(U)$ eine offene (infolge der Stetigkeit von f) x enthaltende Teilmenge von R , also nach der Definition von S (siehe IV) eine Umgebung von x in S , also auch in M .

Ist $\tau(\mathfrak{A}) = x \in M - R$ und U eine offene Umgebung von $y = F(x)$, so ist $F^{-1}(U) \supset (x) + f^{-1}(U)$. $R = (x) + f^{-1}(U)$ ist aber eine Umgebung von x in S , da $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$ ist. Daraus folgt die Stetigkeit von F .

VII. f sei jetzt eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten H -Raum Q , $f(\bar{R}) = Q$. Für jeden Punkt $x = \tau(\mathfrak{A}) \in S - R$ wähle man ein $y \in \prod_{A \in \mathfrak{A}} \overline{f(A)}$ (das geht, da dieser Durchschnitt

nach 0.3 nichtleer ist). Ist U eine offene Umgebung von y , so ist für jede Menge $A \in \mathfrak{A}$ $f(A) \cdot U \neq \emptyset$, also $A \cdot f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Das System \mathfrak{A}' aller B , für die mit geeigneter $A \in \mathfrak{A}$ $B \supset A \cdot f^{-1}(U)$ gilt, ist offenbar ein \mathfrak{A} umfassendes α -System; also $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ und daher $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}$. Also gilt (mit den Bezeichnungen von VI) $\mathfrak{A}(y) \subset \mathfrak{A}$, $x = \tau(\mathfrak{A}) \in \Phi(y)$. Daraus folgt, daß die in VI definierte Menge M gleich S ist, w. z. b. w.

VIII. Nun gehen wir zum Beweis der letzten Behauptung des Satzes über. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz:

Sind R, Q H -Räume, $M \subset R$, $\bar{M} = R$, f und g stetige Abbildungen von R in Q . $f_M = g_M$, so ist $f = g$.

Beweis des Hilfssatzes. Gäbe es $x \in R$ mit $f(x) \neq g(x)$, so wären für beliebige Umgebungen U von $f(x)$ und V von $g(x)$ $f^{-1}(U)$ und $g^{-1}(V)$, also auch $f^{-1}(U) \cdot g^{-1}(V)$ Umgebungen von x und daher $f^{-1}(U) \cdot g^{-1}(V) \cdot M = f_M^{-1}(U) \cdot g_M^{-1}(V) = f_M^{-1}(UV) \neq \emptyset$, also $UV \neq \emptyset$, was aber dem Hausdorffschen Trennungsaxiom widerspricht.

R, R', S, S' seien jetzt Räume mit den in der letzten Behauptung des Satzes vorausgesetzten Eigenschaften. Es sei f eine topologische Abbildung von R auf R' , φ die Umkehrung von f .

Es sei $R \subset M \subset S$. F eine stetige Abbildung von M auf S' , $F_R = f$; ferner $R' \subset M' \subset S'$, Φ eine stetige Abbildung von M' auf S , $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in M_1 = F^{-1}(M')$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von M_1 auf S und g_R eine identische Abbildung. Nun folgt aus dem Hilfssatz, daß g eine identische Abbildung und daher $M_1 = S$, $M = S$, F schlicht und Φ eine Umkehrung von F , also F eine Homöomorphie ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes 2.1 vollendet.

2.2. Ist S eine H -abgeschlossene Hülle eines H -Raumes R , so gilt: (1) R ist in S offen; (2) der Relativraum $S - R$ ist isoliert; (3) ist $G \subset R$ offen, $a \in \bar{G} - R$, so ist $(a) + G$ eine Umgebung von a ; (4) ist $A \subset R$ in R nirgendsdicht, so ist $\bar{A} \subset R$.

Beweis. Da (4) aus (3) und (1), (2) aus der Konstruktion des Raumes S in 2.1, IV unmittelbar folgen, brauchen wir nur (3) zu beweisen. Ist $G \subset R$ offen, $a \in \bar{G}$, $a \notin R$, so ist für jede Umgebung U von a $URG \neq \emptyset$. Daher ist, wenn man mit \mathfrak{A} das System aller UR , mit \mathfrak{A}' das System aller B bezeichnet, wobei B alle URG enthaltende offene Mengen, U alle offene Umgebungen von a durchläuft, \mathfrak{A} ein β -System, \mathfrak{A}' ein α -System (siehe 2.1, I) und $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$. Daraus folgt, daß $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, $G \in \mathfrak{A}$, also $(a) + G$ eine Umgebung von a ist (siehe 2.1, IV).

2.3. (R, u) und (S, v) seien H -Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Für die Existenz einer S umfassenden H -abgeschlossenen

Hülle von R ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(1) R ist in S offen; ist $G \subset R$ offen, $x \in \bar{G} - R$, so ist $(x) + G$ eine Umgebung von x ;

(2) ist w eine H -Topologie auf S , die schwächer als v ist, und ist dabei $wR = S$, $w_R = v_R = u$, so ist $w = v$.

Beweis. I. Kann man S in eine H -abgeschlossene Hülle von R einbetten, so folgt aus 2.2, Behauptung (3), daß die Bedingung (1) erfüllt ist.

II. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei w eine H -Topologie auf S , w schwächer als v , $wR = S$, $w_R = v_R = u$. Es sei $a \in S - R$ und U eine w -offene Umgebung von a ; dann ist offenbar $a \in w(UR) \subset v(UR)$. Da UR in (R, w_R) , also in (R, v_R) offen ist, folgt aus (1), daß $(a) + UR$, also auch U , eine v -Umgebung von a ist. Daher ist $w = v$, also die Bedingung (2) erfüllt.

III. Ist diese Bedingung erfüllt, so sei T eine H -abgeschlossene Hülle von R . Nach 2.1 gibt es eine Menge $M \subset T$ und eine stetige Abbildung F von M auf S , so daß $R \subset M$ und für $x \in R$ $F(x) = x$ ist. Für jedes $y \in S - R$ wähle man einen Punkt $x = \varphi(y) \in M$ mit $F(x) = y$, bezeichne ferner mit P die Menge aller $\varphi(y)$ und setze $Q = R + P$. Dann ist $g = F_Q$ eine schlichte stetige Abbildung von Q auf S . Nun folgt aus (2), daß g eine topologische Abbildung ist. Hiermit ist der ganze Satz bewiesen.

2.4. Für $i = 1, 2$ sei R_i ein H -Raum mit folgender Eigenschaft: ist $a \in R_i$ nicht isoliert, so gibt es eine offene Menge $G \subset R_i$, so daß $a \in \bar{G}$, aber $(a) + G$ keine Umgebung von a ist.

Unter diesen Voraussetzungen sind R_1 und R_2 dann und nur dann homöomorph, wenn ihre H -abgeschlossene Hüllen homöomorph sind.

Beweis. Ist R_1 mit R_2 homöomorph, so wende man 2.1, letzte Behauptung, an. Sind ihre H -abgeschlossene Hüllen S_1 bzw. S_2 miteinander homöomorph, so sei f eine topologische Abbildung von S_1 auf S_2 . Ist $a \in R_1$ isoliert, so ist a auch in S_1 isoliert, also $f(a)$ in S_2 isoliert und daher, da $S_2 = \bar{R}_2$, $f(a) \in R_2$. Ist $a \in R_1$ nicht isoliert, so sei $G \subset R_1$ offen, $a \in \bar{G}$, $(a) + G$ keine Umgebung von a . Dann ist $f(G)$ in S_2 offen, $b = f(a) \in \overline{f(G)}$, also nach 0.1 $b \in R_2 f(G)$, aber $(b) + R_2 f(G)$ keine Umgebung von b , also nach 2.3 $b \in R_2$. Daher ist $f(R_1) \subset R_2$ und, da analog $f^{-1}(R_2) \subset R_1$ ist, $f(R_1) = R_2$, also R_1 mit R_2 homöomorph.

Bemerkungen zu dem Satz 2.4. 1. Nach 2.1 ist jedem H -Raum bis auf Homöomorphie eindeutig seine H -abgeschlossene Hülle zugeordnet. Der Satz 2.4 zeigt, daß diese Zuordnung bei gewissen Voraussetzungen eineindeutig ist. Die Voraussetzungen

des Satzes sind dafür nicht nur hinreichend, sondern auch in einem gewissen Sinne notwendig: aus 2.3 folgt nämlich, daß, falls sie in einem H -Raum R nicht erfüllt sind, kann man seinen echten Teilraum finden, welcher mit R gemeinsame H -abgeschlossene Hülle besitzt.

2. Die Voraussetzungen des Satzes 2.4 sind insbesondere in folgenden Fällen, wie man leicht zeigen kann, erfüllt:

- a) wenn R ein geordneter Raum ist;
- b) wenn man zu jedem nichtisolierten $a \in R$ eine unendliche abzählbare $M \subset R$ so finden kann, daß jede Umgebung von a höchstens endlichviele $x \in M$ nicht enthält.

§ 3.

3.1. Zu jedem vollständig regulären H -Raum R gibt es einen H -Raum S mit folgenden Eigenschaften: (1) R ist in S eingebettet, $\overline{R} = S$; (2) S ist bikompakt; (3) ist f eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q , $\overline{f(R)} = Q$, so gibt es eine stetige Abbildung von S auf Q , die auf R mit f zusammenfällt.

Besitzt ein H -Raum S' die Eigenschaften (1)–(3) in bezug auf einen H -Raum R' , so existiert zu jeder Homöomorphie f zwischen R und R' eine Homöomorphie zwischen S und S' , die auf R mit f zusammenfällt.

Definition. Ein H -Raum S , welcher die erwähnten Eigenschaften (1)–(3) besitzt, heißt eine *bikompakte Hülle* von R .

Beweis des Satzes. I. P sei eine H -abgeschlossene Hülle von R . Jedem $x \in P$ sei ein Gegenstand $\sigma(x)$ zugeordnet und zwar so, daß für $x \in R$ $\sigma(x) = x$, für $x \in P - R$ $\sigma(x) \notin R$ ist und für $x \in P - R$, $y \in P - R$ $\sigma(x) = \sigma(y)$ dann und nur dann gilt, wenn für jede stetige Abbildung f von P in einen bikompakten H -Raum $f(x) = f(y)$ ist. Mit S bezeichnen wir die Menge aller $\sigma(x)$; dann ist $R \subset S$ und σ eine Abbildung von P auf S . Wir definieren eine Topologie u auf S wie folgt: $M \subset S$ soll dann und nur dann als u -abgeschlossen gelten, wenn $\sigma^{-1}(M)$ in P abgeschlossen ist. Offenbar ist dann R in (S, u) eingebettet, $uR = S$, σ eine stetige Abbildung.

II. Ist φ eine stetige Abbildung von P in einen bikompakten H -Raum Q , so setzen wir für $x \in P$ $f(\sigma(x)) = \varphi(x)$. Da aus $\sigma(x) = \sigma(y)$ stets $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt, ist dadurch eine Abbildung f von S in Q definiert. Ist $A \subset Q$ abgeschlossen, so ist $\sigma^{-1}(f^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A)$ in P , also $f^{-1}(A)$ in (S, u) abgeschlossen. Daher ist f stetig; offenbar $f(S) = \varphi(P)$, $f_R = \varphi_R$.

III. Zum Beweis, daß (S, u) ein H -Raum ist, genügt es zu zeigen, daß das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt ist, da

(S, u) offenbar den übrigen Axiomen genügt. Es sei also $x \in S$, $y \in S$, $x \neq y$. Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Ist $x \in R$, $y \in R$, so folgt aus der vollständigen Regularität von R , indem man den Satz 2.1 anwendet, daß es eine stetige Abbildung φ von P in das Intervall $[0, 1]$ gibt, für die $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$ gilt.

b) Ist $x \in R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so sei U eine Umgebung von b in P , $x \notin \bar{U}$. Man kann, da R vollständig regulär ist, eine Abbildung ψ von R in das Intervall $[0, 1]$ so finden, daß $\psi(x) = 0$, $\psi(\bar{U} \cap R) = (1)$ ist. Es gibt dann nach 2.1 eine stetige Abbildung φ von P in $[0, 1]$ mit $\varphi_R = \psi$ und daher $\varphi(x) = 0$, $\varphi(b) = 1$.

c) Ist $\sigma(a) = x \in S - R$, $\sigma(b) = y \in S - R$, so gibt es nach der Definition von σ eine stetige Abbildung φ von P in einen bikompakten Raum, für die $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ ist.

In jedem der drei Fälle bestimme man f wie in II; f ist dann eine stetige Abbildung von (S, u) in einen bikompakten H -Raum, $f(x) \neq f(y)$. Daraus folgt, daß in (S, u) je zwei verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen.

IV. Nach I, III und 1.1 ist (S, u) ein H -abgeschlossener Raum und R ist in (S, u) eingebettet. Konstruiert man die H -Topologie v wie in 1.3, so ist (S, v) nach III und 1.3, Behauptung (2), regulär, also, da v stärker als u ist, nach 1.1 und 0.6 bikompakt. Aus der Behauptung (1) des erwähnten Satzes folgt ferner, daß R in (S, v) eingebettet ist; offenbar ist $vR = S$.

V. Ist ψ eine stetige Abbildung von R in einen bikompakten Raum Q , $\overline{\psi(R)} = Q$, so sei φ eine stetige Abbildung von P auf Q , $\varphi_R = \psi$ (siehe 2.1). Konstruiert man f wie in II, so ist $f_R = \psi$ und f nach 1.3, Behauptung (3), eine stetige Abbildung von (S, v) auf Q .

VI. Bleibt noch die letzte Behauptung des Satzes zu beweisen. Haben R' , S' und f die in dieser Behauptung erwähnten Eigenschaften, und bezeichnet φ die Umkehrung von f , so gibt es stetige Abbildungen F von S auf S' und Φ von S' auf S so, daß gilt: $F_R = f$, $\Phi_{R'} = \varphi$. Setzt man für $x \in S$ $g(x) = \Phi(F(x))$, so ist g eine stetige Abbildung von S auf S und g_R eine identische Abbildung. Daher ist nach dem Hilfssatz aus 2.1, VIII, auch g eine identische Abbildung, also F schlicht und daher eine Homöomorphie.

3.2. (R, u) und (S, v) seien vollständig reguläre H -Räume, R in S eingebettet, $vR = S$. Dann ist jede der folgenden Bedingungen für die Existenz einer S umfassenden bikompakten Hülle von R notwendig und hinreichend:

(1) Ist f eine in R definierte stetige beschränkte Funktion, so

kann man eine in dem Raum S definierte stetige beschränkte Funktion F so finden, daß $F_R = f$ gilt.

(2) Ist w eine H -Topologie auf S , (S, w) vollständig regulär, $w_R = S$, w schwächer als v , $w_R = v_R = u$, so ist $w = v$.

Beweis. I. Kann man S in eine bikompakte Hülle von R einbetten, so ist (1) offenbar erfüllt.

II. Ist (1) erfüllt, so sei w eine H -Topologie auf S mit den in (2) vorausgesetzten Eigenschaften. Ist $M \subset S$ w -abgeschlossen und nichtleer, $x \in S - M$, so sei die Funktion f in S definiert, in bezug auf (S, w) stetig und beschränkt, $f(x) = 0$, $f(M) = (1)$. Es gibt dann eine in S definierte beschränkte, in bezug auf (S, v) stetige Funktion g mit $g_R = f_R$. Nach dem Hilfssatz aus 2.1, VIII ist dann $g = f$, woraus $x \notin vM$ folgt. Also ist M auch v -abgeschlossen und daher $w = v$, also (2) erfüllt.

III. Gilt (2), so sei S in einen bikompakten H -Raum T eingebettet, $\bar{S} = T$, ferner P eine bikompakte Hülle von R . Nach 3.1 gibt es eine stetige Abbildung f von P auf T so, daß f_R die identische Abbildung ist. Wählt man für jedes $y \in S - R$ einen Punkt $x = \varphi(y) \in f^{-1}(y)$, bezeichnet mit M die Menge aller $\varphi(y)$ und setzt $Q = R + M$, so ist f_Q eine stetige schlichte Abbildung von Q auf S . Nun folgt aus (2), daß f_Q eine Homöomorphie ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

*

O absolutně uzavřených a bikompaktních prostorech.

(Obsah předešlého článku.)

V § 1 se dokazují m. j. tyto věty:

K tomu, aby AHU -prostor, jehož každé dva různé body jsou \bar{O} -oddělené, byl bikompaktní, je nutno a stačí, aby každé jeho prosté spojitě zobrazení na AHU -prostor bylo homeomorfní.

AHU -prostor je bikompaktní, když a jen když každá jeho uzavřená část je absolutně uzavřená.

Hlavním výsledkem § 2 je tato věta: ke každému AHU -prostoru R existuje AHU -prostor S s těmito vlastnostmi: (1) R je vnořen do S , $\bar{R} = S$; (2) S je absolutně uzavřený prostor; (3) je-li f spojitě zobrazení R do AHU -prostoru Q , $\bar{f}(R) = Q$, pak existuje $M \subset S$ a spojitě zobrazení F M na Q tak, že $R \subset M$, $F_R = f$. Je-li Q bikompaktní, lze klást $M = S$.

V § 3 se používá výsledků § 1 a § 2 k důkazu známé věty o bikompaktním obalu.

Conformal Invariants in Two Dimensions I.

Harry Levy, Urbana, Illinois.

(Received February 4, 1938.)

The conformal geometry of Riemannian spaces has been studied by Hlavatý, Cartan, T. Y. Thomas, Schouten, and others who have developed various algorithms for $n > 2$. In particular, Hlavatý¹⁾ has found the generalized conformal curvatures of a curve. But for $n = 2$ a single curve has no conformal invariants since any two surfaces are conformally equivalent. Here we shall obtain some invariants of two or more curves in the two dimensional case.

1. Let V_n and V'_n be two Riemannian spaces in conformal correspondence so that the coefficients of their linear elements

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu \quad ds'^2 = g'_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu \quad (1)$$

can be taken in the relation

$$g'_{\lambda\mu} = \sigma g_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

The reciprocal elements $g^{\lambda\mu}$ and the determinant $g = |g_{\lambda\mu}|$ (which we assume to be different from zero) then satisfy

$$g'^{\lambda\mu} = \sigma^{-1} g^{\lambda\mu} \quad g' = \sigma^n g. \quad (3)$$

The Christoffel symbols of the second kind, which we designate by $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ will satisfy the relation

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}' = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + \sigma_\mu \delta_\nu^\lambda + \sigma_\nu \delta_\mu^\lambda - g_{\mu\nu} \sigma^\lambda, \quad (4)$$

where $\sigma^\lambda = g^{\lambda\mu} \sigma_\mu$ and $\sigma_\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \log \sigma^2$.

We assume that V_n and V'_n are analytic so that $g_{\lambda\mu}$ and $g'_{\lambda\mu}$

¹⁾ Zur Conformgeometrie, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **88** (1935), pp. 281, 738, 1006.

²⁾ Cf. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton University Press (1926), p. 89.

(and therefore σ too) are continuous and have continuous derivatives of all orders.

Let C be an analytic curve and C' its transform. The unit components of the tangent vectors, λ_1^μ and $\lambda'_1{}^\mu$ respectively, satisfy

$$\lambda'_1{}^\mu = \sigma^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^\mu \quad (5)$$

and we obtain by a direction computation that the components of the principle normal (if defined) satisfy

$$k'_1 \lambda'_2{}^\mu = \sigma^{-1} (k_1 \lambda_2{}^\mu + \sigma_r \lambda_1{}^r \lambda_1^\mu - \sigma^\mu),^3 \quad (6)$$

where k_1 and k'_1 are the first curvatures of C and C' respectively.

From equations (3) we have that $\sigma = (g'/g)^{1/n}$ and therefore that

$$\sigma_\mu = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \log (g'/g). \quad (7)$$

If we eliminate σ from (6) by means of (7) we obtain that C^μ defined by

$$C^\mu = g^{1/n} \left\{ k_1 \lambda_2{}^\mu + \frac{1}{2n} (g^{\mu r} - \lambda_1{}^\mu \lambda_1{}^r) \frac{\partial}{\partial x^r} \log g \right\} \quad (8)$$

is invariant under conformal transformations.

2. Henceforth we assume $n = 2$. In this case there is a unique direction normal to a given direction, and consequently we must have

$$\lambda'_2{}^r = \sigma^{-\frac{1}{2}} \lambda_2{}^r \quad (r, s = 1, 2), \quad (9)$$

where the ambiguity in sign can be regarded as incorporated in $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ itself. From (2) and (3) it then follows that

$$g'^{-\frac{1}{2}} \lambda'_2{}^r g'_{rs} = g^{-\frac{1}{2}} \lambda_2{}^r g_{rs} \quad (10)$$

and multiplying the right hand sides of (8) and (10) and contracting we obtain that the expression I_1 , defined by

$$I_1 = g^{\frac{1}{2}} \left(k + \frac{1}{4} \lambda_2{}^r \frac{\partial}{\partial x^r} \log g \right) \quad (11)$$

is invariant under conformal transformations.

It will be convenient to write μ^r for $\lambda_2{}^r$ and simply λ^r for $\lambda_1{}^r$ and

$$\varphi = g^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_r = \frac{\partial}{\partial x^r} \varphi$$

so that (11) may be written

$$I_1 = \varphi k + \varphi_r \mu^r. \quad (12)$$

³⁾ Cf. Modesitt, Some Singular Properties of Conformal Transformations between Riemannian Spaces, Am. Journ. of Math., 1938.

We obtain a sequence of functions I_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$) from (12) by differentiation with respect to the arc s of the given curve and multiplication by φ ,

$$I_\alpha = \varphi \frac{d}{ds} I_{\alpha-1} \quad (\alpha = 2, 3, 4, \dots) \quad (13)$$

and clearly I_α is (for all values of α) invariant under conformal transformations. We can readily obtain by means of the Frenet equations that the values of I_α for $\alpha = 2, 3$ are given by

$$I_2 = \varphi^2 \frac{d}{ds} k + \varphi \varphi_{rs} \mu^r \lambda^s, \quad (14)$$

$$I_3 = \varphi^3 \frac{d^2}{ds^2} k + 2\varphi^2 \varphi_r \lambda^r \frac{d}{ds} k + \varphi^2 \varphi_{rs} (\mu^r \mu^s - \lambda^r \lambda^s) k + \varphi^2 (\varphi_{rst} + \varphi \varphi_t \varphi_{rs}) \lambda^r \mu^s \lambda^t, \quad (15)$$

where $\varphi_{r\dots st}$ is obtained from $\varphi_{r\dots s}$ by the formal process of covariant differentiation with respect to the g 's,

$$\varphi_{rs} = \frac{\partial}{\partial x^s} \varphi_r - \varphi_u \left\{ \begin{matrix} u \\ rs \end{matrix} \right\}$$

etc.

We can prove by induction that I_α , for an arbitrary value of α , has an expansion of the following form

$$I_\alpha = \varphi^\alpha k^{(\alpha-1)} + a_\alpha \varphi^{\alpha-1} \varphi_r \lambda^r k^{(\alpha-2)} + \{b_\alpha \varphi^{\alpha-2} (\varphi_r \lambda^r)^2 + (c_\alpha + 1) \varphi^{\alpha-1} \varphi_{rs} \lambda^r \lambda^s + \varphi^{\alpha-1} \varphi_{rs} \mu^r \mu^s + d_\alpha \varphi^{\alpha-1} \varphi_r \mu^r k\} k^{\alpha-1} + * \quad (16)$$

where $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ are the constants given by

$$a_\alpha = \frac{1}{2} (\alpha - 2) (\alpha + 1), \quad b_\alpha = \frac{1}{4!} (\alpha - 1) (\alpha - 2) (\alpha - 3) (3\alpha + 4), \quad (17)$$

$$c_\alpha = \frac{1}{3!} \alpha (\alpha + 1) (\alpha - 4), \quad d_\alpha = \frac{1}{3!} (\alpha - 3) (\alpha^2 - 4),$$

and the * represents a polynomial in $\lambda^r, \mu^r, \varphi, \varphi_r, \dots, \varphi_{r_1 \dots r_\alpha}, k, k', k'', \dots, k^{(\alpha-4)}$.

We can prove further by induction by means of (13) that I_α regarded as a function of $\mu^r, k, k', \dots, k^{(\alpha-1)}$ is an odd function of these variables taken together, that is

$$I_\alpha (-\mu^r, -k, -k', \dots, -k^{(\alpha-1)}) = -I_\alpha (\mu^r, k, k', \dots, k^{(\alpha-1)}).$$

3. Let C_i ($i = 1, 2, 3$) be three curves concurrent in a point P_0 of the surface V_3 , and let λ_i^r be the contravariant components of their unit tangent vectors and μ_i^r of their unit normal vectors.

Choose a positive direction of rotation about P_0 and let Θ_i be the directed angle from μ_{i+1} to μ_{i+2} .⁴⁾

Three directions at a point in two dimensions are necessarily linearly dependent, and it follows directly that the coefficients of dependence for the normal directions are the sines of their angles, so that

$$\mu_1 \sin \Theta_1 + \mu_2 \sin \Theta_2 + \mu_3 \sin \Theta_3 = 0. \quad (18)$$

If we write (12) for each of the three curves and evaluate at their common point P , multiply each of these three equations by the corresponding $\sin \Theta_i$ and add, the terms in μ drop out by virtue of (18) and we obtain

$$\Sigma I_1 \sin \Theta = \varphi \Sigma k \sin \Theta. \quad (19)$$

The left hand side is invariant under conformal transformations and the right under coordinate transformations. We have consequently the following theorem:

If three curves C_i on a surface are concurrent and if K_i are the values, at their common point, of their (geodesic) curvatures and $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ the directed angles from the normals to C_2, C_3, C_1 to the normals to C_3, C_1, C_2 respectively, then $\sqrt{g}(k_1 \sin \Theta_1 + k_2 \sin \Theta_2 + k_3 \sin \Theta_3)$ is an absolute conformal invariant.

This theorem has a particularly simple geometric interpretation in the Euclidean plane; if we assume that $k_1 k_2 k_3 \neq 0$, the sum with which we are concerned differs by a factor from

$$R_2 R_3 \sin \Theta_1 + R_1 R_3 \sin \Theta_2 + R_1 R_2 \sin \Theta_3,$$

where the R 's are the radii of curvature, reciprocals of the K 's and we observe that this expression represents the area of the triangle formed by the three centers of curvature. In particular, it then follows that if the centers of curvature for a common point of three curves in the Euclidean plane are collinear, they remain collinear under conformal transformations of the plane into itself.

The above results can be extended by writing in place of (18) the linear equations satisfied by the λ_s and by the products λ_μ . Let us assume for the sake of definiteness that the positive direction of rotation has been chosen so that the angle from λ_1 to μ_1 is $+\frac{\pi}{2}$. Then Θ_3 and $-\Theta_2$ are the directed angles from μ_1 to μ_2 and μ_3 respectively and we have that

⁴⁾ It is of course understood that by μ_k , we mean μ_{k-3} if $k > 3$.

$$\begin{aligned}
\lambda_2^r &= e (\cos \Theta_3 \lambda_1^r + \sin \Theta_3 \mu_1^r), \\
\lambda_3^r &= \bar{e} (\cos \Theta_2 \lambda_1^r - \sin \Theta_2 \mu_1^r), \\
\mu_2^r &= -\sin \Theta_3 \lambda_1^r + \cos \Theta_3 \mu_1^r, \\
\mu_3^r &= \sin \Theta_2 \lambda_1^r + \cos \Theta_2 \mu_1^r,
\end{aligned} \tag{20}$$

where $e(\bar{e})$ is ± 1 according as λ_2, μ_2 (λ_3, μ_3) and λ_1, μ_1 have the same or opposite orientation.

It follows by direct computation, by means of (20), that

$$\sin \Theta_1 \lambda_1^r + e \sin \Theta_2 \lambda_2^r + \bar{e} \sin \Theta_3 \lambda_3^r = 0 \tag{21}$$

and, denoting by S the symmetric part, that is

$$S \{ \sin 2\Theta_1 \lambda_1^r \mu_1^s + e \sin 2\Theta_2 \lambda_2^r \mu_2^s + \bar{e} \sin 2\Theta_3 \lambda_3^r \mu_3^s \} = 0. \tag{22}$$

We can now write (14) for each of the three curves, multiply each I_2 by the appropriate $\pm \sin 2\Theta$ and add the three products. The terms in $\lambda\mu$ drop out by virtue of (22) leaving

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)} \sin 2\Theta_1 + e I_2^{(2)} \sin 2\Theta_2 + \bar{e} I_2^{(3)} \sin 2\Theta_3 &= \\
= \varphi^2 (k'_1 \sin 2\Theta_1 + e K'_2 \sin 2\Theta_2 + \bar{e} K'_3 \sin 2\Theta_3).
\end{aligned}$$

Hence we have the theorem:

If three curves C_i on a surface have a common point and if k'_i is the value there of the derivative of the (geodesic) curvature of C_i with respect to its arc, if Θ_i is the directed angle from the normal to C_{i+1} to the normal to C_{i+2} and e and \bar{e} are ± 1 (as above defined), then $\sqrt{g} (k'_1 \sin 2\Theta_1 + e k'_2 \sin 2\Theta_2 + \bar{e} k'_3 \sin 2\Theta_3)$ is invariant under conformal maps of the surface.⁵⁾

4. In the determination of the curvature of a curve an ambiguity may arise in the choice of sign. Let us assume that we take the (geodesic) curvature as always non-negative and that thereby a positive normal is determined in accordance with the Frenet equations.⁶⁾ If we introduce normal coordinates at P_0 and find the expansion of the coordinates of the points of a curve in a neighborhood of P_0 we see that the given curve and its positive principal normal lie on the same side of the geodesic tangent at P_0 to the curve. Hence if two curves are tangent and lie on the same side of their common tangent geodesic they have the same principal normal whereas if they lie on opposite sides of their common tangent geodesic their normals are directed oppositely.

⁵⁾ If a conformal transformation of V_2 into itself interchanges C_1 and C_2 and leaves C_3 invariant this and the preceding theorem reduce to special theorems obtained by Kasner in the plane. Cf. Geometry of Conformal Symmetry, Annals of Math., 2nd series, vol. 38 (1937) pp. 876—877.

⁶⁾ See, for example, Eisenhart, l. c., p. 106.

Suppose C_2 and C_3 are tangent to each other but not to C_1 and that their tangent vectors have the same direction. Then e and \bar{e} of equations (20) will have the same or opposite signs according as C_2 and C_3 lie on the same or opposite sides of their common tangent geodesic. But in either case $\sin \theta_1 = 0$ and $\sin 2\theta_2 = -\sin 2\theta_3$ while $\sin \theta_2 = \mp \sin \theta_3$. The preceding theorem reduces to the following special case:

$\sqrt[4]{g}(k_1 \mp k_2)$ and $\sqrt[4]{g}(k'_1 \mp k'_2)$ are absolute conformal invariants of two tangent curves where the \mp is to be taken according as the curves lie on the same or opposite sides of their common tangent geodesic.

The derivation of the result that $\sqrt[4]{g}(k_1 \mp k_2)$ and $\sqrt[4]{g}(k'_1 \mp k'_2)$ are absolute conformal invariants was communicated to the writer by Professor Hlavaty who obtained it by methods only different from the above. Others have obtained somewhat similar results.⁷⁾

If two curves are tangent and have contact of order $h > 1$ either $k_1 = k_2, k'_1 = k'_2, \dots, k_1^{(h-2)} = k_2^{(h-2)}$ and they lie on the same side of their common geodesic tangent so that the positive direction of their normals coincide or $k_1 = k_2 = k'_1 = \dots = k_2^{(h-2)} = 0$ in which case the positive directions of their normals need not coincide. It follows from (16) and the remarks in the paragraph following (17) that the functions I_α for $\alpha = 1, 2, \dots, h-1$ formed for one curve are equal, except possibly for sign, to the corresponding functions for the other curve and that the functions I_h differ only in the first term so that

$$I_h^{(1)} \mp I_h^{(2)} = \varphi^h (k_1^{(h-1)} \mp k_2^{(h-1)}),$$

where the \mp sign is to be taken according as the normals coincide or are oppositely directed. Hence we have the result:

If two curves have contact of order $h, \sqrt[4]{g^h}(k_1^{(h-1)} \mp k_2^{(h-1)})$ is an absolute conformal invariant.

Equations (14) yield one final result. If C and C' are two curves intersecting orthogonally, the pairs of directions (λ_1, μ_1)

⁷⁾ Cf. Kasner, *Conformal Geometry*, Proceedings, Fifth Int. Cong. 2 (1912) p. 81; Ostrowski, *Berührungsmaße, nullwinklige Kreisbogendreiecke und die Modulfigur*, Jahresb. Deut. Math.-Verein. 44 (1934) p. 56; and Kasner and Comenetz, *Conformal Geometry of Horn Angles*, Proceedings, Nat. Ac. Sciences (Washington) 22 (1936) p. 303. These writers restrict themselves to conformal transformations of the Euclidean plane into itself and naturally find only the relative invariants $k_1 - k_2$ and $k'_1 - k'_2$. Comenetz, *Conformal Geometry on a Surface*, Bull. Am. Math. Soc. 42 (1936) p. 806 extends the results of Kasner and Comenetz to surfaces and notes that $(k'_1 - k'_2)/(k_1 - k_2)^2$ is an absolute invariant.

for C and λ_2, μ_2 for C' differ at most in orientation. If they have the same orientation

$$\lambda_1 = \pm \mu_2, \mu_1 = \mp \lambda_2$$

whereas the signs are reversed if they have opposite orientation. Writing equations (14) for each of the two curves and adding in the first case, subtracting in the second gives the following theorem:

If two curves intersect orthogonally, $\sqrt{g}(k'_1 \pm k'_2)$ is an absolute conformal invariant.⁸⁾

Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., and University of Illinois, Urbana, Illinois.

*

Konformní invarianty ve dvou dimensích I.

(Obsah předešlého článku.)

Autor nalézá algoritmus, kterým lze sestrojiti konformní invarianty křivek na ploše rekurentními formullemi. To mu dovoluje, mezi jiným, studovati konformní invarianty dvou křivek na ploše, jež v daném bodě mají styk libovolného řádu.

*

Konforminvarianten in zwei Dimensionen I.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Der Verfasser findet einen Algorithmus, mit welchem es gelingt, die Konforminvarianten der Kurven auf einer Fläche durch rekurrente Formeln anzugeben. Dies ermöglicht ihm, die Konforminvarianten von zwei Kurven zu studieren, wenn sich diese Kurven in einem Punkte in beliebiger Ordnung berühren.

⁸⁾ Kasner, Annals l. c. p. 879 shows that in the plane the sign of $k'_1 + k'_2$ is a conformal invariant of a general right angle.

Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 27. Januar 1940.)

Es sei $r \geq 4$ ganz; S_r sei die Menge aller Punkte $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(r)})$ mit $a^{(1)} > 0, \dots, a^{(r)} > 0$. Für $a \in S_r, x > 0$ sei $V_a(x)$ das Volumen des r -dimensionalen Ellipsoids $a^{(1)}u_1^2 + \dots + a^{(r)}u_r^2 \leq x$, $A_a(x)$ die Anzahl der in diesem Ellipsoid liegenden Gitterpunkte (u_1, \dots, u_r) ,

$$P_a(x) = A_a(x) - V_a(x), \quad M_a(x) = \int_0^x P_a^2(y) dy.$$

R_r sei die Menge aller $a \in S_r$ mit rationalen Koordinaten $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$. Für jedes $a \in S_r$ sei λ_a die Menge aller Werte von $a^{(1)}u_1^2 + \dots + a^{(r)}u_r^2$ für ganzzahlige u_1, \dots, u_r , sodaß λ_a keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt. Es gilt:

I. Für jedes feste a ist $P_a(x)$ (und offenbar auch $M_a(x)$) als Funktion von x in jedem Punkte $x > 0$ rechtsseitig stetig.

II. Ist $b \in S_r$ und liegt $x_0 > 0$ nicht in λ_b , so ist $P_a(x_0)$ als Funktion von a im Punkte b stetig.

III. Sind $x > 0$ und $b \in S_r$ gegeben, so gibt es in S_r eine Umgebung U von b , sodaß $P_a(y)$ im Gebiet $0 < y < x, a \in U$ beschränkt ist.

IV. Ist $a \in R_r$, so sind alle Zahlen von λ_a rational.

V. $M_a(x)$ ist bei festem x eine stetige Funktion von a .

I bis IV sind klar. V folgt so: ist $x > 0, a_n \rightarrow a$, so ist die Folge $P_{a_n}(y)$ für $0 < y < x$ nach III gleichmäßig beschränkt und strebt nach II für fast alle y gegen $P_a(y)$. Daraus folgt bekanntlich

$$\int_0^x P_{a_n}^2(y) dy \rightarrow \int_0^x P_a^2(y) dy.$$

VI. Es ist

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{r+1}} > 0, \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} < \infty^1 \quad (1)$$

¹⁾ V. Jarník, Math. Zeitschr. 33 (1931), 62—84.

und für $r > 4$ auch

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|P_a(x)|}{x^{\frac{1}{2}r-1}} < \infty.^2) \quad (2)$$

VII. Für $a \in R_r$ ist

$$\liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} > 0^1) \quad (3)$$

und für $r > 4$ auch

$$\liminf_{x=\infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} < 0 < \limsup_{x=\infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}}.^3) \quad (4)$$

VIII. Es gibt eine Menge $N_r \subset S_r$, die alle Punkte von S_r mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null enthält, sodaß für jedes $a \in N_r$ gilt⁴⁾

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} (\log x)^{3r+3}} < \infty. \quad (5)$$

Ich möchte nun auf eine in der Punktmengenlehre übliche Weise zeigen, daß es solche a gibt, für welche $P_a(x)$, $M_a(x)$ die nach (1), (2) größtmöglichen Schwankungen „fast“ erreichen (rechnerische Beweise einiger verwandten Sätze liegen bereits vor):

Satz. *Es sei $r \geq 4$ ganz, $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gibt es in S_r eine Menge B mit folgenden Eigenschaften:*

E₁. Die Menge $S_r - B$ ist von erster Kategorie (in S_r), also ist B nicht leer.

E₂. Für $a \in B$ gilt:

$$\limsup_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} f(x) = \infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{M_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} (\log x)^{3r+3}} f(x) = 0$$

und für $r > 4$ auch

$$\limsup_{x=\infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = +\infty, \quad \liminf_{x=\infty} \frac{P_a(x)}{x^{\frac{1}{2}r-1}} f(x) = -\infty.$$

Beweis. Für $k = 1, 2, \dots$ sei C_k die Menge aller $a \in S_r$, zu welchen es eine irrationale Zahl x und im Falle $r > 4$ noch zwei weitere irrationale Zahlen t, u gibt mit

$$x > k, \quad \frac{M_a(x)}{x^{r-1}} f(x) > k;$$

$$t > k, \quad \frac{P_a(t)}{t^{\frac{1}{2}r-1}} f(t) > k; \quad u > k, \quad \frac{P_a(u)}{u^{\frac{1}{2}r-1}} f(u) < -k.$$

²⁾ V. Jarník, Bull. Internat. de l'Acad. des sciences de Bohême, 1928, 1—10; oder V. Jarník, Math. Annalen 101 (1929), 136—146 und V. Jarník und A. Walfisz, Math. Zeitschr. 32 (1930), 152—160.

³⁾ Z. B. V. Jarník, Math. Zeitschr. 27 (1927), 154—160.

⁴⁾ V. Jarník, Math. Zeitschr. 33 (1931), 85—97.

Weiter sei D_k die Menge aller $a \in S_r$, zu welchen es ein w mit

$$w > k, \frac{M_a(w)}{w^{3r+\frac{1}{2}} (\log w)^{3r+3} f(w)} < \frac{1}{k}$$

gibt. Jeder Punkt von R_r ist nach I, (3), (4) ein Punkt von C_k und zwar nach II, IV, V ein innerer Punkt von C_k ; jeder Punkt von N_r ist nach (5), V ein innerer Punkt von D_k . Also (da R_r, N_r dicht in S_r sind) enthält C_k und ebenso D_k eine in S_r dichte offene Menge. Setzt man $B = \prod_{k=1}^{\infty} C_k D_k$, also $S_r - B = \sum_{k=1}^{\infty} (S_r - C_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_r - D_k)$, so sind $S_r - C_k, S_r - D_k$, also auch $S_r - B$ von erster Kategorie. Weiter hat B offenbar die Eigenschaft E_2 .⁵⁾

Ich habe hier den Beweis dieses Satzes gegeben, da ich diesen Satz in der Einleitung einer anderen Arbeit ohne Beweis angeführt habe. In jener Arbeit habe ich folgenden Fall untersucht:

$$r = r_1 + r_2, r_1 \geq 6, r_2 \geq 6, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{ irrational,} \quad (6)$$

$$a^{(1)} = \dots = a^{(r_1)} = \alpha_1, a^{(r_1+1)} = \dots = a^{(r)} = \alpha_2, \quad (7)$$

sodaß es sich um Ellipsoide

$$\alpha_1 (u_1^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + \dots + u_r^2) \leq x$$

handelt. Es seien $\frac{p_v}{q_v}$ ($v = 1, 2, \dots$) die positiven Näherungsbrüche

von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und man setze

$$z = \text{Min}(r_1, r_2), H(x) = \sum_{v, m, n} \frac{1}{q_v^2 m^{r_1-2} n^{r_2-2}} \text{Min} \left(1, \left(\frac{q_v + 1mn}{x} \right)^2 \right),$$

wobei (bei festem v) m bzw. n über alle positiven Teiler von p_v bzw. q_v läuft. Und ich zeige: $x^{r-1} H(x)$ stellt $M_a(x)$ so genau dar, daß

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1} H(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M_a(x)}{x^{r-1} H(x)} < \infty.$$

In einer dritten Arbeit untersuche ich $P_a(x)$ selbst und zeige unter anderem (unter denselben Voraussetzungen (6), (7)): es

⁵⁾ In B liegen auch Punkte $(a^{(1)}, \dots, a^{(r)})$, welche für keine ganzzahligen c_0, c_1, \dots, c_r den Beziehungen $a^{(1)}c_1 + \dots + a^{(r)}c_r + c_0 = 0, |c_1| + \dots + |c_r| > 0$ genügen; denn die Punkte, welche irgendeiner solchen Bedingung genügen, bilden auch nur eine Menge erster Kategorie (Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Hyperebenen).

sei $\varepsilon > 0$, $0 \leq \mu < 1$; dann gilt für alle x , die größer als eine nur von $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \varepsilon, \mu$ abhängige Zahl sind: es ist

$$|P_a(x)| < x^{r-1+\varepsilon} \sqrt{H(x)}$$

und es gibt zwei Zahlen x_1, x_2 mit $\mu x \leq x_1 \leq x$, $\mu x \leq x_2 \leq x$,

$$P_a(x_1) > x_1^{r-1-\varepsilon} \sqrt{H(x_1)}, \quad P_a(x_2) < -x_2^{r-1-\varepsilon} \sqrt{H(x_2)}.$$

Die verhältnismäßig einfache Gestalt von $H(x)$ erlaubt uns, verschiedene Schlüsse über ihren Verlauf zu machen; die Beweise der angeführten Sätze sind aber ziemlich kompliziert.

*

Poznámka k teorii mřížových bodů.

(Obsah předešlého článku.)

Je-li r celé ≥ 4 , značí-li $P_a(x)$ obvyklý mřížový zbytek pro elipsoid $a^{(1)}u_1^2 + \dots + a^{(r)}u_r^2 \leq x$, je-li dále $\int_0^x P_a^2(y) dy = M_a(x)$

a je-li konečně $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow +\infty$, potom existují systémy $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(r)})$ ($a^{(j)} > 0$), jež mají vlastnost vytčenou v E_2 ; ony systémy, jež tuto vlastnost nemají, tvoří dokonce pouze množinu 1. kategorie.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

O L-serii prvků Ta, W a Pt.

Václav Dolejšek (Praha) a Viktor Vranský (Sofia).

Podány výsledky studia L-serie Ta, W a Pt, za užití fokusační metody Kunzlovoy s plasticky deformovaným mosaikovým krystalem NaCl užitým na základě výsledků Bačkovského o podmínce pro vyloučení vlivu mosaiky.

Nově nalezené čáry nediagramové a některé quadrupolové klasifikovány. Ukázáno, že na rozdíl od K-serie, kde nebyly dosud nalezeny přechody $\Delta l = \Delta j = 0$, tyto přechody v L-serii existují a rovněž přechody $l \rightarrow l + 3$ a $j \rightarrow j + 3$.

Srovnáním nově nalezených čar nediagramových s výsledky předchozími ukázáno, že při užití experimentálního uspořádání v této práci uvedeného bylo docíleno takové světelnosti, že mez dokazatelnosti charakteristického záření X-spekter je dána povšechnou přirozenou nedokonalostí krystalů. Nedokonalostí krystalů je způsobováno difusní záření, které nelze rozeznat od záření charakteristického.

Podle klasické teorie X-záření jsou z možných přechodů mezi energetickými niveaux atomů dovoleny pouze ty, pro které jsou splněny kvantové podmínky:

$$l \rightarrow \begin{cases} l + 1 \\ l \\ l - 1 \end{cases} \quad j \rightarrow \begin{cases} j + 1 \\ j \\ j - 1 \end{cases}$$

Již při použití metod s rovinným krystalem byly nalezeny některé čáry, které se shodovaly s hodnotami nedovolených přechodů, na př. kvadrupolových nebo nediagramových.

Naproti tomu již v K-serii některé nedovolené přechody, na př. přechod $K-L_I$, ač byly úsilovně hledány, nepodařilo se najít. Pomocí metod fokusačních podařilo se sice najít v K-serii kvadrupolové čáry $K\beta_4$ a $K\beta_5$, a některé nové linie nediagramové, avšak přechod $K-L_I$ ani přechody podobné $K-M_I$ a $K-N_I$ ani kvadrupolový přechod $K-N_{VI, VII}$ nalezeny nebyly ani při užití fokusačních metod. V L-serii měřil Kaufman¹⁾ první značný počet kvadrupolových čar u těžkých prvků a také první podal jejich klasifikaci.

¹⁾ S. Kaufman, Phys. Rev., 45 (1934), 385, Phys. Rev., 45 (1934), 613.

Kaufman našel tyto čáry metodou s rovinným krystalem, při čemž jednotlivé expozice trvaly 10—30 hod., tedy za experimentálních podmínek velmi obtížných.

Použitím fokusačních metod byl nalezen v L-serii těžkých prvků podobně jako v K-serii další počet kvadrupolových čar. Jsou to zvláště práce Cauchoisové,²⁾ ³⁾ Allaise,⁴⁾ Hulubeia⁵⁾ a Paratta⁶⁾ pro prvky Re, Pt, Ra, Hg.

Těmito pracemi byly u některých prvků získány skoro všechny čáry kvadrupolové a rovněž řada nových nediagramových čar, jejichž klasifikace v L-serii je pro její komplikovanost přirozeně velmi obtížná. Zvláště je patrna obtížnost klasifikace z toho, že na př. L-serie W, která byla dosud měřena více než 20 autory, není bezpečně klasifikována. Wolfram je měřen autory: Barnes,⁷⁾ Hull a Rice,⁸⁾ Compton,⁹⁾ Siegbahn,¹⁰⁾ Siegbahn a Friman,¹¹⁾ Gorton,¹²⁾ Dershem,¹³⁾ Overn,¹⁴⁾ Duane a Patterson,¹⁵⁾ Coster,¹⁶⁾ Hoyt,¹⁷⁾ Yoshida,¹⁸⁾ Auger a Dauvillier,¹⁹⁾ Rogers,²⁰⁾ Crofut,²¹⁾ Friman,²²⁾ Jdei,²³⁾ Kaufman.²⁴⁾

Tantal byl dosud měřen autory: Moseley,²⁵⁾ Siegbahn a Fri-

- ²⁾ Y. Cauchois, C. R., **201** (1935), 598.
³⁾ Y. Cauchois, C. R., **200** (1935), 1314, C. R., **201** (1935), 598, C. R., **204** (1937), 255, C. R., **206** (1938), 344.
⁴⁾ Y. Cauchois et M. L. Allais, C. R., **200** (1935), 1314.
⁵⁾ H. Hulubei, C. R., **203** (1936), 399, C. R., **203** (1936), 665, C. R., **203** (1936), 542.
⁶⁾ L. Paratt, Phys. Rev., **54** (1938), 99.
⁷⁾ J. Barnes, Phil. Mag., **30** (1915), 368.
⁸⁾ A. W. Hull and M. Rice, J. Franklin Inst., **182** (1916), 403.
⁹⁾ A. H. Compton, Phys. Rev., **7** (1916), 646 Phys. Rev., **7** (1916), 498.
¹⁰⁾ M. Siegbahn, Verh. dtsch. physik Ges., **18** (1916), 39, Phys. Zs., **14** (1919), 137.
¹¹⁾ M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys., **49** (1916), 616.
¹²⁾ W. S. Gorton, Phys. Rev., **7** (1916), 203.
¹³⁾ E. Dershem, Phys. Rev., **11** (1918), 461.
¹⁴⁾ O. B. Overn, Phys. Rev., **14** (1919), 137.
¹⁵⁾ Duane and R. A. Patterson, Phys. Rev., **15** (1920), 328, Phys. Rev., **15** (1920), 526.
¹⁶⁾ D. Coster, Zs. f. Phys., **4** (1921), 178.
¹⁷⁾ Hoyt, Phys. Rev., **18** (1921), 331.
¹⁸⁾ U. Yoshida, Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ., **4** (1921), 343.
¹⁹⁾ P. Auger et A. Dauvillier, C. R., **176** (1923), 1297.
²⁰⁾ J. S. Rogers, Proc. Cambridge phil. Soc., **21** (1923), 430.
²¹⁾ C. B. Crofut, Phys. Rev., **24** (1924), 9.
²²⁾ E. Friman, Zs. f. Phys., **39** (1926), 813.
²³⁾ S. Jdei, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ., **19** (1930), 559.
²⁴⁾ S. Kaufman, Phys. Rev., **45** (1934), 385, Phys. Rev., **45** (1934), 613.
²⁵⁾ H. G. Moseley, Phil. Mag., **27** (1914), 703.

man,²⁶⁾ Hjalmar,²⁷⁾ Coster,²⁸⁾ Auger a Dauvillier,²⁹⁾ Wennerlöf,³⁰⁾ Jdei,³¹⁾ Kaufman,³²⁾ Cauchoisová.³³⁾

Platina je měřena dosud autory: Moseley,³⁴⁾ Siegbahn a Friman,³⁵⁾ Siegbahn,³⁶⁾ Coster,³⁷⁾ Dauvillier,³⁸⁾ Rogers,³⁹⁾ Lang,⁴⁰⁾ Friman,⁴¹⁾ Jdei,⁴²⁾ Hoyt,⁴³⁾ Kaufman,⁴⁴⁾ Cauchois.⁴⁵⁾

A právě L-serie wolframu není dosud měřena žádnou fokusační metodou. Ve spektru W různí autoři často měřili čáry, které později druzí autoři nezjistili, jak je patrné z tabulky 1.

*

Experimentální uspořádání. Obecně lze říci, že pro L-serii dosud bylo užito fokusační metody Cauchoisové,⁴⁶⁾ která náleží do skupiny metod asymetrických s fokusací vertikální.⁴⁷⁾ 48)

Fokusační metoda Kunzlova,⁴⁹⁾ 50) které bylo užito v této práci, podle uvedeného rozdělení patří do fokusačních metod symetrických s vertikální fokusací. Lze tedy v této symetrické metodě použití mosaikových krystalů, jak ukázal Bačkovský,⁵¹⁾ při čemž rozlišovací mohutnost v takovém symetrickém uspořádání je stejná jako při užití ideálně dokonalých krystalů. To bylo verifikováno na čáře Cu K α Bačkovským a Dolejškem⁵²⁾ za použití krystalu soli plasticky deformovaného, způsobem, který vyprac-

26) M. Siegbahn und M. Friman, Ann. d. Phys., 49 (1916), 616.

27) E. Hjalmar, Zs. f. Phys., 7 (1921), 314.

28) Coster, Zs. f. Phys., 6 (1921), 185.

29) P. Auger et A. Dauvillier, C. R., 176 (1923), 1297.

30) Wennerlöf, Zs. f. Phys., 41 (1927), 524, Ark. f. Mat. Ast. o. Fysik, 22 (1930), č. 8.

31) S. Jdei, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ., 19 (1930), 559.

32) S. Kaufman, Phys. Rev., 45 (1934), 385, Phys. Rev., 45 (1934), 613.

33) Y. Cauchois, C. R., 202 (1936), 2068.

34) H. G. I. Moseley, Phil. Mag., 27 (1914), 703.

35) M. Siegbahn und E. Friman, Phys. Zs., 17 (1916), 17.

36) M. Siegbahn, Verh. dtsch. physik. Ges., 18 (1916), 150.

37) D. Coster, Zs. f. Phys., 4 (1921), 178, C. R., 112 (1921), 1176.

38) A. Dauvillier, C. R., 174 (1926), 443.

39) J. S. Rogers, Proc. Cambridge phil. Soc., 21 (1923), 430.

40) K. Lang, Ann. d. Phys., 75 (1924), 489.

41) E. Friman, Zs. f. Phys., 39 (1926), 813.

42) S. Jdei, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ., 15 (1930), 559.

43) Hyot, Phys. Rev., 18 (1921), 33.

44) S. Kaufman, Phys. Rev., 45 (1934), 385, Phys. Rev., 45 (1934), 613.

45) Y. Cauchois, C. R., 201 (1935), 598.

46) Y. Cauchois, Journ. de Phys. et le Radium, 7 (1932), 320.

47) V. Dolejšek-M. Tayerle, C. R., 205 (1937), 605.

48) V. Dolejšek-M. Tayerle, Journ. de Phys., 9 (1938), 465.

49) V. Kunzl, C. R., 201 (1935), 656.

50) V. Kunzl, Zs. f. Phys., 99 (1936), 481.

51) J. M. Bačkovský, Nat., 141 (1938), 872.

52) J. M. Bačkovský-V. Dolejšek, Čas. mat. fys., 67 (1938), 211.

vali Bačkovský a Neprašová.⁵³⁾ Krystal soli kamenné je proto velmi vhodný ku zvýšení výkonnosti symetrické fokusační metody Kunzlovy a skýtá nové možnosti pro hlubší studium spekter X. V K-serii ukázali výkonnost takového uspořádání Bačkovský a Neprašová při studiu Mo. Souvislost ideální mosaikové struktury s reflekční mohutností daná vztahem $\Delta\sigma_{\min}/R_s = \text{konst}$, kde R_s = reflekční mohutnost krystalu v sym. metodě, $\Delta\sigma_{\min}$ = ideální mosaika, jak bylo prokázáno ve společné práci Dolejška, Jahody, Ježka a Rozsívala,⁵⁴⁾ ukazuje, že bylo výhodnější použití místo krystalu NaCl na př. krystalu ZnS, který má v symetrickém uspořádání ještě větší reflekční mohutnost než krystal NaCl. Dosud však není vypracována metoda pro deformaci tohoto krystalu, takže nelze jej zatím pro fokusační metody použít. Výkonnost uvedeného uspořádání byla taková, že na př. při studiu Ta vystoupily, jako znečištění Ta, všechny dosud měřené čáry Os: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_3, \beta_4$ a β_5 (jak známo spektrum Os lze velmi těžko získat a další čáry, známé u sousedních prvků v L-serii, u Os známy dosud nejsou). Vlnové délky námi měřené u Os udává tabulka 1.

Vzhledem k uvedené vysoké výkonnosti metody ukázalo se nutným získati co možno nejčistší spektra. To se zatím podařilo u zkoumaných prvků Ta, W a Pt tím, že kromě normálních nepečlivějších opatření bylo použito katod ze stejného materiálu jako antikatomy zkoumaných látek (u Wa, Ta).⁵⁵⁾ Při studiu Pt bylo použito jako přímo žhavené katody molybdenové spirály. Data o specifické emisi byla použita z knihy Espe a Knoll.⁵⁶⁾

Výsledky. S tímto uspořádáním u uvedených prvků Ta, W, Pt, obdrženy byly všechny čáry dosud měřené a řada nových čar, jak kvadrupolových, tak zvláště nedigramových. Přehled obdržných výsledků je uveden v tabulkách 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8.

U každého prvku byly získány minimálně 4 serie snímků téhož oboru a to s různými krystaly NaCl. Hodnoty pro dipolové čáry neudáváme, byly však všechny proměřeny za účelem vyloučení různých koincidenčí.

U Ta objevily se jako znečištění čáry niklu, který patrně zbyl ze sintrování Ta, dále čáry Os, Cu, Fe, Zn. U W objevily se čáry těchto prvků rovněž až na čáry prvků Os a Fe. U Pt objevily se čáry Cu, Zn a Ir a čáry K-serie Mo. Většinou jich bylo použito jako čar referentních pro klasifikaci.

⁵³⁾ J. M. Bačkovský a M. Neprašová, Čas. mat. fys., 67 (1938), 176.

⁵⁴⁾ Dolejšek, Jahoda, Ježek, Rozsíval, Nature, 142 (1938), 253.

⁵⁵⁾ Zajímavé je, že tantalové katody se osvědčily jako velmi vhodné a zdá se, že přítomnost tantalového karbidu na povrchu spirály značně zvyšuje emisi, a také životní doba tantalových spirál byla stejně dlouhá jako wolframových.

⁵⁶⁾ W. Espe und M. Knoll, Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, Berlin 1936.

Tabulka čís. 1.
Přítomnost osmia v tantalu.
Měření některých čar osmia.

Snímek	Vlnová délka, difusnost, intenzita	Ref. čára	Δd v m. m.	Disperse	$\Delta \lambda$	Niveau
I''f	1140,6 (1)	γ_1	+0,7	7,18	5,0	LIII Oiv, v—
I'h	1140,5 (1)	γ_1	+0,7	($\gamma_1\gamma_2$) 6,96	4,9	—čára β_5
Stř.	1140,6 (1)	γ_1		($\gamma_1\gamma_2$)		
II f	1165,0 d (1)	γ_5	+0,7	7,73	5,4	LIIINv—
III'g	1165,5 d (1)	γ_5	-0,7	($\gamma_1\gamma_5$) 6,96	4,9	—čára β_2
I'h	1164,6 (1)	γ_5	-0,85	($\gamma_1\gamma_5$) 6,82	5,8	
IIh	1164,5 d (1)	γ_5	-0,8	($\gamma_1\gamma_5$) 7,32	5,9	
IV''h	1166,3 d (1)	γ_5	-0,5	($\gamma_1\gamma_5$) 8,29	4,1	
Stř.	1165,2 d (1)	γ_5		($\gamma_1\gamma_5$)		
II f	1176,3 (1)	γ_5	+0,8	7,42	5,5	LIMIII—
III'g	1176,3 (1)	γ_5	+0,85	($\gamma_5\beta_9$) 6,96	5,9	—čára β_3
I'h	1175,9 (1)	γ_5	+0,8	($\gamma_1\gamma_5$) 6,82	5,5	
IIh	1176,3 (1)	γ_5	+0,8	($\gamma_1\gamma_5$) 7,35	5,9	
IV''h	1176,9 (1)	γ_5	+0,8	($\gamma_5\beta_9$) 8,08	6,5	
Stř.	1176,3 (1)	γ_5		($\gamma_5\beta_9$)		
II f	1193,4 d (2)	γ_5	+3,1	7,42	23,0	LII Miv—
III'g	1194,8 d (2)	γ_5	+3,5	($\gamma_5\beta_9$) 6,96	24,4	—čára β_1
I'h	1194,2 d (2)	γ_5	+3,5	($\gamma_1\gamma_5$) 6,82	23,8	
IV''h	1193,8 d (1)	γ_5	+2,9	($\gamma_1\gamma_5$) 8,08	23,4	
Stř.	1194,2 d (2)	γ_5		($\gamma_5\beta_9$)		
II f	1214,5 (1)	β_5	+5,2	7,44	38,6	LIMII—
II''h	1213,9 (1)	β_5	+5,2	($\gamma_5\beta_9$) 7,55	39,2	—čára β_4
IV''h	1214,3 (1)	β_5	+4,8	($\gamma_5\beta_9$) 8,08	38,8	
Stř.	1214,2 (1)	β_5		($\gamma_5\beta_9$)		

Snímek	Vlnová délka, difusnost, intenzita	Ref. čára	Δd v m. m.	Disperse	$\Delta \lambda$	Niveau
IV'f	1399,4 (1)	Cu $K\beta_1$	+1,35	8,42 (β_4 , Cu $K\beta_1$)	10,0	L _{III} M _{IV} —
VI'g	1400,1 (1)	Cu $K\beta_1$	+1,25	8,57 (β_4 , Cu $K\beta_1$)	10,7	— čára α_2
VI''g	1399,5 (1)	Cu $K\beta_1$	+1,25	8,05 (β_4 , Cu $K\beta_1$)	10,1	
VI'''g	1399,4 (1)	Cu $K\beta_1$	+1,15	8,75 (β_4 , Cu $K\beta_1$)	10,0	
V''h	1399,3 (1)	Cu $K\beta_1$	+1,05	9,44 (β_4 , Cu $K\beta_1$)	9,9	
Stř.	1399,6 (1)	Cu $K\beta_1$				

Tabulka č. 2.
Kvadrupolové čáry u L-serie tantalu.
Střední hodnoty.

Niveau	λ , dif. int.	ν/R poč.	ν/R změř.	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
L _I M _I	1079,0 (1)	660,6	660,8	25,71	—
L _I N _I	1114,8 (2)	818,6	817,8	28,60	1114,8 — Kaufman
L _I N _{IV} , v	1081,3 d (4)	843,0	842,8	29,03	1079,7 — Kaufman 1081,2 — Kaufman
L _I N _{VI} , VII	1065,0 d (1)	858,5	855,7	29,25	1066,3 — Kaufman
L _I O _I	1065,0 d (1)	855,2	855,7	29,25	1066,3 — Kaufman
L _I O _{IV} , v	1058,8 (2)	860,7	858,7	29,30	1059,6 — Kaufman
L _{II} M _{II}	1427,8 (1)	638,5	638,2	25,26	—
L _{II} M _{III}	1383,7 (2)	658,6	658,6	25,66	1383,2 — Auger a Dauvillier
L _{II} M _v	1315,1 (1)	692,5	692,9	26,33	1316,3 — Kaufman
L _{II} N _{II}	1161,2 (2)	786,1	784,8	28,01	—
L _{II} N _{III}	1152,3 (3)	790,5	790,5	28,12	1152,5 — Kaufman
L _{II} M _v	— velmi blízko u —	—	1135,58	—	—
L _{II} N _{VI} , VII	1114,3 (2)	818,8	817,8	28,60	—
L _{II} O _{II} , III	1114,3 (2)	817,4	817,8	28,60	1114,8 — Kaufman
L _{III} N _{II}	1315,1 (1)	693,5	692,9	26,33	1313,5 — Kaufman
L _{III} N _{III}	— velmi blízko u —	—	1304,19	—	—
L _{III} O _{II} , III	1260,0 (1)	724,8	723,2	26,89	1261,3 — Auger a Dauvillier 1257,6 — Kaufman

Jak je patrné z tabulky 3, pokud se týče kvadrupolových čar Ta, byly v této práci nalezeny chybějící kvadrupolové přechody

L_{II}N_{II}—L_IM_I, L_{II}N_{II}— a L_{II}N_{VI}, VII.

Tabulka č. 3.
Jiskrové čáry u L-serie tantalu.
Střední hodnoty.

Vlnová délka dif., int.	ν/R	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
1069,5 d (1)	852,1	29,19	—
1090,6 d (1)	835,6	28,91	—
1109,4 (1)	821,4	28,36	—
1115,8 (2)	816,7	28,58	—
1129,4 (3)	806,9	28,41	1129,0 — Auger a Dauvillier
			1129,5 — Kaufman
1145,6 (2)	795,5	28,20	—
1173,4 (2)	776,6	27,87	—
1179,6 (1)	772,4	27,79	—
1204,4 (0)	756,6	27,51	—
1209,2 d (1)	754,8	27,45	—
1240,0 (1)	734,5	27,11	—
1265,1 (0)	720,3	26,84	—
1272,9 (1)	715,9	27,76	1273,3 — Kaufman
1275,5 (3)	714,6	26,73	1275,2 — Kaufman
1355,3 d (1)	672,4	25,93	—
1364,0 (1)	668,1	25,85	—
1369,8 (1)	665,2	25,79	—
1445,6 (1)	630,37	25,11	—
1457,4 (1)	625,3	25,01	—
1557,8 (1)	585,0	24,19	—
1565,7 d (1)	582,0	24,13	—
1653,9 (1)	551,0	23,47	—
1663,7 (1)	547,7	23,40	—

čímž byly nalezeny všechny kvadrupolové přechody u tohoto prvku.

U W, kde již rovinným krystalem byl měřen značný počet kvadrupolových čar, ovšem různými autory, našli jsme v této práci všechny hodnoty již dříve měřené a vedle řady nových diagramových čar, o nichž se zmíníme až později, našli jsme nový kvadrupolový přechod L_I-O_I . Přechody L_I-N_I a $L_{III}-N_{II}$ nemohli jsme rozlišiti od normálních dipolových přechodů, první od $L_I-O_{II,III}$ a druhý od $L_{II}-M_V$. Naproti tomu nemohli jsme najíti chybějící přechod $L_{II}-N_{II}$. U Pt, kde měření Kaufmanovo bylo doplněno měřením pomocí fokusační metody Cauchoisové⁵⁷⁾, nebyly dosud měřeny tři očekávané přechody kvadrupolové a sice $L_{II}-M_{II}$, $L_{II}-M_V$ a $L_{II}-N_V$, které všechny jsme našli v této práci, jak je patrné z tabulky kvadrupolových linií Pt (tab. 7).

⁵⁷⁾ Y. Cauchois, C. R., 201 (1935), 598.

Tabulka č. 4.
Kvadrupolové čáry u L-serie wolframu.
Střední hodnoty.

Niveau	λ , dif., int.	ν/R poč.	ν/R změř.	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
L _I M _I	1335,0 d (2)	683,5	682,7	26,13	1336,6 — Dershem 1334,4 — Dauvillier 1335,9 — Kaufman
L _I N _I	1075,0 dd (2)	847,5	847,7	29,12	1070,5 — Dershem 1074,8 — Crofut 1075,2 — Jdei 1075,1 — Kaufman
L _I N _{IV}	1044,2 (3)	872,1	872,7	29,54	1044 — Overn 1043,9 — Dauvillier 1043,8 — Rogers 1044,4 — Crofut 1043,7 — Jdei
L _I N _V	1042,8 (4)	873,2	873,9	29,56	1044,4 — Kaufman 1044 — Overn 1043,9 — Dauvillier 1043,8 — Rogers 1044,4 — Crofut 1043,7 — Jdei 1043,5 — Kaufman
L _I N _{VI, VII}	— velmi blízko u —	—	1026,2	—	—
L _I O _I	1030,4 (1)	884,4	884,4	29,74	—
L _I O _{IV, V}	1022,8 (2)	890,8	891,0	29,85	1023,0 — Kaufman
L _{II} M _{II}	1381,0 (1)	660,6	659,9	25,69	1373,5 — Rogers
L _{II} M _{III}	1335,0 d (2)	682,4	682,7	26,13	1336,6 — Compton 1334,4 — Dauvillier 1335,9 — Kaufman
L _{II} M _V	1269,1 dd (1)	717,0	718,1	26,80	1270,2 — Kaufman
L _{II} N _{II}	—	—	—	—	—
L _{II} N _{III}	1112,3 d (2)	818,1	819,3	28,62	1113 — Barnes 1113,8 — Rogers
L _{II} N _V	1090,3 (3)	832,3	835,8	28,91	1095 — De Broglie 1088,7 — Dauvillier 1086,2 — Rogers
L _{II} N _{VI, VII}	1075,0 dd (2)	847,9	847,7	29,12	1074,8 — Crofut 1075,2 — Jdei 1075,1 — Kaufman
L _{III} N _{II}	1269,1 dd (1)	715,3	718,1	26,80	1270,2 — Kaufman
L _{III} N _{III}	1269,1 dd (1)	719,5	718,1	26,80	1264,6 — Kaufman
L _{III} O _{II, III}	1217,5 (2)	748,8	748,5	27,36	1218,6 — Kaufman

Na základě našich výsledků možno říci, že pro uvedené prvky skutečně existují v L-serii všechny přechody mezi jednotlivými energetickými nivoaux a to i takové přechody kvadrupolové, které se v K-serii nevyskytují. U W, Ta, Pt nalezené linky odpovídají přechodům:

Tabulka č. 5.
Jiskrové čáry u L-serie wolframu.
Střední hodnoty.

Vlnová délka dif., int.	ν/R	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
1050,7 (1)	867,3	29,45	—
1082,1 d (2)	842,1	29,02	1080 — Jdei
1134,2 d (1)	803,4	28,34	—
1141,9 (0)	798,0	28,25	—
1173,4 (0)	766,6	27,87	—
1176,1 (2)	774,8	27,84	1177,3 — Dershem
1188,7 (0)	766,6	27,69	—
1194,9 (1)	762,6	27,62	1193,7 — Kaufmann
1205,7 (3)	752,3	27,42	—
1227,3 (2)	742,5	27,25	1221 — De Broglie
			1224,4 — Dauvillier
			1230 — Rogers
			1228,0 — Kaufmann
1235,5 (6)	737,6	27,16	1235 — Overn
			1235,4 — Coster
			1236 — Hoyt
			1235,8 — Yoshida
			1236,0 — Dauvillier
			1235,5 — Rogers
			1236,4 — Crofut
			1235,8 — Jdei
			1236,1 — Kaufmann
1310,4 d (0)	695,9	26,38	1312 — Barnes
1320,9 (0)	689,9	26,27	1321,2 — Rogers
1409,0 (1)	646,8	25,43	—
1450,9 (3)	628,3	25,07	1450,3 — Rogers
1501,3 (1)	607,0	26,64	—
1515,3 (1)	601,4	24,52	—

$$l \rightarrow \begin{cases} l+3 \\ l+2 \\ l+1 \\ l \\ l-1 \end{cases} \quad j \rightarrow \begin{cases} j+3 \\ j+2 \\ j+1 \\ j \\ j-1 \end{cases}$$

Kromě přechodů $l \rightarrow l+3$ a $j \rightarrow j+3$, jichž existence v K-serii není dosud jistá a které se v L-serii objevují, vyskytnou se tedy v L-serii určitě v K-serii marně hledané přechody typu $K-X_I$ pro něž $\Delta l = \Delta j = 0$.

Regulérní dublety tvoří tyto nalezené kvadrupolové čáry:

$$L_{II}M_{II}-t, L_{II}M_{III}-s, L_{II}M_{V}-\alpha_1, L_{II}N_{II}-L_{III}N_{II}, N_{II}N_{III}-L_{III}N_{III}, \\ L_{II}N_{V}-\beta_2, L_{II}N_{VI-VII}-N_{III}N_{VI-VII}, L_{I}O_{II-III}-L_{II}O_{II-III}.$$

Tabulka č. 6.
Kvadrupolové čáry u L-serie platiny.
Střední hodnoty.

Niveau	λ , dif., int.	ν/R poč.	ν/R změř.	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
$L_I M_I$	1171,5 (1)	779,3	777,8	27,89	1175 — Cauchois
$L_I N_I$	9940,9 (0,5)	969,0	968,5	31,12	9944,6 — Rogers 943,7 — Cauchois
$L_I N_{IV}, v$	912,6 (3)	999,0	998,5	31,60	912,2 — Kaufman
$L_I N_{VI}, VII$	900,2 (1)	1012,9	1012,3	31,82	897,3 — Cauchois
$L_I O_I$	900,2 (1)	1014,9	1012,3	31,82	897,3 — Cauchois
$L_I O_{IV}, v$	892,1 (2)	1021,3	1021,5	31,96	891,4 — Kaufman 891,6 — Cauchois 892,5 — Cauchois
$L_{II} M_{II}$	1207,4 (1)	754,8	754,7	27,46	—
$L_{II} M_{III}$	1162,6 (1)	782,8	783,8	28,00	1164,6 — Kaufman 1164,3 — Cauchois
$L_{II} M_V$	1109,3 (0,5)	821,4	821,5	28,66	—
$L_{II} N_{II}$	980,0 (2)	932,7	929,9	30,49	980,5 — Cauchois
$L_{II} N_{III}$	969,4 (1)	939,4	940,1	30,65	969,9 — Kaufman 969,78 — Cauchois
$L_{II} N_V$	959,1 (1)	954,8	950,1	30,82	—
$L_{II} N_{VI}, VII$	950,7 (1)	972,2	972,9	31,19	967,2 — Dauvillier 937,46 — Cauchois
$L_{II} O_{II}, III$	936,7 (1)	973,4	972,9	31,19	937,2 — Kaufman 937,46 — Cauchois
$L_{III} N_{II}$	1131,2 (2)	806,9	805,6	28,38	1129,1 — Kaufman
$L_{III} N_{III}$	1121,7 (0)	813,6	812,4	28,50	1120,1 — Kaufman
$L_{III} O_{II}, III$	1076,2 (3)	847,6	847,8	29,10	1075,2 — Rogers 1077 — Hoyt 1076,3 — Kaufman 1073,09 — Kaufman

Irregulerní dublety tvoří tyto čáry:

$$L_I M_I - \gamma, \beta_4 - L_{II} M_{II}, \beta_3 - L_{II} M_{III}, \beta_2 - L_{II} M_V, L_I N_I - \gamma_6, \\ \gamma_2 - L_{II} N_{II}, \gamma_3 - L_{II} N_{III}, L_I N_{IV} - \gamma_1, L_I N_V - L_{II} N_V, \\ L_I N_{VI}, VII - L_{II} N_{VI}, VII, L_I O_I - \gamma_8, \gamma_4 - L_{II} O_{II}, III, L_{II} O_{IV}, v - \gamma_6.$$

Jak je však z uvedených tabulek patrné, byla u těchto prvků měřena hlavně velká řada čar nediagramových. Klasifikaci některých čar nediagramových a to $L\beta'_2, \beta_2 - \beta_2^{VII}, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma''_2$ podali Richtmayer a Kaufman.⁵⁸⁾

Některé z těchto čar byly měřeny u těžkých prvků fokusační metodou. A to pro at. č. 88 Hulubei⁵⁹⁾ a pro at. č. 68, 70, 71, 73, 75, 78 a 80 Cauchoisovou.⁶⁰⁾ Pro Pt měřili jsme v této práci všechny

⁵⁸⁾ F. K. Richtmayer and S. Kaufman, Phys. Rev., 44 (1933), 605.

⁵⁹⁾ H. Hulubei, C. R., 208 (1936), 665.

⁶⁰⁾ Y. Cauchois, C. R., 208 (1936), 398, C. R., 202 (1936), 2068, C. R., 204 (1937), 255, C. R., 201 (1935), 598, C. R., 200 (1935), 1314.

Tabulka č. 7.
 Jiskrové čáry u L-serie platiny.
 Střední hodnoty.

λ int. dif.	ν/R	$\sqrt{\nu/R}$	Cizí měření
905,8 d (1)	1006,11	31,72	—
922,2 (1)	988,2	31,44	922,9 — Kaufman
946,3 (1)	963,1	31,03	—
950,5 (1)	958,7	30,96	950,3 — Dauvillier
966,0 (1)	943,3	30,71	—
992,7 (1)	918,0	30,30	—
999,6 (1)	911,6	30,19	—
1006,5 (1)	905,4	30,09	—
1011,3 (1)	901,1	30,01	—
1014,2 (1)	898,6	29,98	—
1030,7 (1)	884,1	29,73	—
1036,8 (1)	878,9	29,65	—
1047,8 (1)	869,7	29,49	—
1049,2 (1)	868,5	29,47	—
1055,5 (2)	863,4	29,38	1053 — Hoyt
			1057,0 — Cauchois
1061,9 (1)	858,2	29,30	1063,1 — Kaufman
			1062,0 — Kaufman
			1064,0 — Cauchois
1064,1 (2)	856,4	29,06	1063,1 — Dauvillier
			1065,7 — Kaufman
			1065,7 — Cauchois
1080,7 (8)	843,5	29,04	1080,3 — Rogers
1085,7 (1)	839,4	28,97	1085,8 — Cauchois
1087,8 (1)	837,7	28,94	1087,8 — Kaufman
1092,8 (8)	833,9	28,88	1092,6 — Kaufman
			1092,9 — Cauchois
1094,8 (10)	832,4	28,85	1092,8 — Coster
			1094,1 — Dauvillier
			1093,6 — Rogers
			1094,4 — Jdaj
			1094,2 — Kaufman
			1094,4 — Cauchois
1149,4 (2)	792,8	28,16	—
1171,5 (1)	777,9	27,89	1175 — Cauchois
1183,1 d (1)	770,3	27,75	—
1211,8 (1)	752,0	27,42	—
1230,5 (1)	740,6	27,21	—
1235,1 (1)	737,8	27,16	—
1249,6 d (1)	729,3	27,01	—
1254,1 (1)	726,6	26,96	—
1266,5 (1)	719,5	26,82	—
1297,8 (1)	702,1	26,50	—
1302,3 (1)	699,8	26,45	—
1305,2 (4)	698,2	26,42	1303,8 — Coster
			1304,9 — Dauvillier
1444,9 (1)	630,7	25,11	—
1471,1 (1)	619,5	24,89	—
1473,5 (1)	618,4	24,87	—

Tabulka čís. 8.
Dipolové a kvadrupolové
Wolfram-serie.

Niveau	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
L _I M _I	—	—	1336,6	—	—	—	—	—
L _I M _{II}	1296	1300	1298,6	1296	1292	1297,7	1298,7	1298
L _I M _{III}	1258	1260	1260,2	1258	1256	1256,6	1260,0	1259
L _I M _{IV}	—	—	—	—	—	1209,8	—	1209
L _I M _V	—	—	—	—	—	—	1203,1	1202
L _I N _I	—	—	—	—	—	1070,5	—	—
L _I N _{II}	—	1065	1065,3	1064	—	1064,8	1065,8	1065
L _I N _{III}	—	—	1058,4	1058	1057	1058,7	1059,7	1059
L _I N _{IV}	—	—	—	—	—	—	—	1044
L _I N _V	—	—	—	—	—	1042,7	—	1044
L _I N _{VI, VII}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _I O _I	—	—	—	—	—	—	—	—
L _I O _{II, III}	—	1033	1025,1	—	1025	1025,3	1026,5	1026
L _I P _{I, II}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} M _I	—	—	—	—	—	1416,3	1417,7	—
L _{II} M _{II}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} M _{III}	—	—	1336,6	—	—	—	—	—
L _{II} M _{IV}	1277	1280	1279,2	1278	1275	1278,4	1279,2	1279
L _{II} M _V	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} N _I	—	—	—	—	—	1129,7	1128,4	1130
L _{II} N _{II}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} N _{III}	1113	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} N _{IV}	1082	1100	1096,5	1095	1094	1095,3	1095,5	1096
L _{II} N _V	—	—	—	—	—	—	—	1095
L _{II} N _{VI, VII}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} O _I	—	—	—	—	—	—	—	1079
L _{II} O _{II, III}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{II} P _{I, II}	—	1073	—	—	—	—	—	1072
L _{III} M _I	—	—	—	1677,1	—	—	1675,1	—
L _{III} M _{II}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} M _{III}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} M _{IV}	—	1480	1484,6	1481	1476	1482,8	1484,5	1483
L _{III} M _V	1477	1468	1473,6	1471	1466	1472,2	1473,5	1473
L _{III} N _I	—	—	—	—	1283	1286,8	1287,1	1287
L _{III} N _{II}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} N _{III}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} N _{IV}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} N _V	—	1242	1242	1241	1237	1241,6	1241,9	1243
L _{III} N _{VI, VII}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} O _I	—	—	1218,7	—	—	1220,2	1220,5	1221
L _{III} O _{II, III}	—	—	—	—	—	—	—	—
L _{III} P _{I, II}	—	—	—	—	—	—	1211,8	1213
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	1080
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—

a jiskrové čáry.

Wolfram-serie.

9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)	16)*)	17)	18)
—	—	—	—	1334,4	—	—	—	—	1335,0
1298,9	—	—	1297,7	1298,5	1298,7	1292,8	1298,79	1298,79	1298,79
1260,5	—	—	1259,5	1259,8	1260,1	1260,2	1259,92	1259,92	1259,92
—	—	1209	—	1210,5	—	1209,9	—	1209,6	1209,27
1204,4	—	1201	1201,0	1203,4	1202,1	1202,7	1202,5	1202,3	1202,32
—	—	—	—	—	—	1074,8	—	1075,2	1075,0
1065,9	1065,8	—	1064,8	1065,6	1065,0	1065,9	1065,88	1065,88	1065,88
1059,9	—	—	1058,5	1059,2	1059,0	1059,9	1059,87	1059,87	1059,87
—	—	—	—	1043,9	1043,3	1044,4	—	1043,7	1044,2
—	—	—	—	1043,9	1043,3	1044,4	—	1043,7	1042,8
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1026,2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1030,4
1026,4	—	—	1025,1	1026,2	1025,6	1026,6	1025,8	1025,8	1026,21
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1022,8
1418,1	—	—	1414,3	—	1417,3	1418	1418,1	1418,1	1418,33
—	—	—	—	—	1373,5	—	—	—	1381,0
—	—	—	—	1334,4	—	—	—	—	1335,0
1273,34	—	—	1279,2	1278,8	1279,05	1279,3	1279,17	1279,17	1279,17
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1269,1
—	—	—	1128,8	1128,8	1129,2	1129,9	—	1129,8	1129,66
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	1113,8	—	—	—	1112,3
1096,44	—	—	1096,2	1095,5	1095,53	1096,4	1096,30	1096,30	1096,30
—	—	—	—	1088,7	1086,2	—	—	—	1090,3
—	—	—	—	—	—	1074,8	—	1075,2	1075,0
—	—	—	—	1078,5	1078,0	1078,6	—	1079,1	1078,80
—	—	—	—	—	—	1074,8	—	1075,2	1075,0
—	1072,0	—	1071,1	1072,1	1071,5	1072,3	—	1072,1	1072,23
—	1676,2	—	—	—	—	—	1675,0	1675,0	1675,0
—	—	—	—	1621,6	—	—	—	—	1621,4
—	—	—	—	1561,0	—	—	—	—	1559,6
1484,4	—	—	1484,5	—	1484,3	1484,4	1484,38	1484,38	1484,38
1473,55	—	—	1474,0	—	1473,27	1473,3	1473,36	1473,36	1473,36
—	—	—	1287,6	1288,3	1287,6	1287,5	1287,0	1287,0	1287,38
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1269,1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1269,1
—	—	—	—	—	—	—	—	1243,9	—
1243,24	1241,2	—	1242,3	1242,4	1241,92	1242,1	1242,03	1242,03	1242,03
—	—	—	—	1218,0	—	1216,6	—	1216,1	1216,46
—	1220,8	1221	1221,3	—	1220,6	1221,7	—	1221,7	1221,35
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1217,5
—	—	1213	1211,6	1214,6	1212,6	1213,3	—	1212,9	1212,58
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1050,7
—	—	—	—	—	—	1069,9	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1082,1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1134,2
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1141,9
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1173,4

Pokračování tab. 8.

Wolfram-serie.

Niveau	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
	—	—	—	—	—	1177,3	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	1221
	—	—	—	—	—	—	—	1235
	—	—	—	—	—	—	—	1254
	1312	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—

1) Barnes 1915 — 2) Hull a Rice 1916 — 3) Compton 1916 — 4) Siegbahn a Friman; Siegbahn 1916 — 5) Gorton 1916 — 6) Dershem 1918 — 7) Siegbahn 1919 — 8) Overn 1919 — 9) Duane a Patterson 1920

uvedené čáry, jak je patrné z tabulky č. 1, a nově čáru β_2^{VII} , která pro tento prvek dosud měřena nebyla. Nemohli jsme rozlišiti čáry γ'_1 a γ'_2 pro přílišnou přeexposici hlavních čar. Rovněž pro W jsme nemohli oddělit čáru β_2^{V} od čáry β_3 . U Ta a W rovněž jsme neměřili čáru γ'_2 , naproti tomu γ''_2 byla měřena u všech 3 prvků.

Přehled těchto námi nalezených čar podává diagram. V diagramu je učiněn pokus o ukázání, že tyto čáry vyhovují u studovaných prvků Moseleyovu zákonu. Některé z těchto čar mohou se přiřadit jako satelity k čarám γ_4 nebo γ_2 , některé jako satelity ke γ_5 a β_3 , jiné ke β_2 , β_4 a konečně lze některé označit jako satelity α a l čar. Takové přiřazení lze nejlépe provést u čar β'_3 a β''_3 , které u všech tří prvků Ta, W a Pt vyhovují v mezích přesnosti Moseleyovu zákonu. U W hodnota čáry β'_3 souhlasí s čarou, kterou již dříve našel pro tento prvek Dershem (loc. cit.), která však nemohla být dříve klasifikována, poněvadž u jiných prvků až dosud měřena nebyla.

Grafické znázornění Moseleyho zákona pro čáry β'_3 a β''_3 probíhá paralelně s grafem pro čáru β_2^{X} , který však protíná skupinu grafů pro satelity čáry γ_1 a γ_2 a proto čára β_2^{X} byla přiřazena k čáře β_2 . Čára β_2^{X} u Ta vůbec měřena nebyla. Pro Pt souhlasí hodnota této čáry s čarou, kterou dříve našli Cauchoisová a Kaufman. Tři trabynty čáry β_4 splňují Moseleyův zákon úplně

Wolfram-serie.

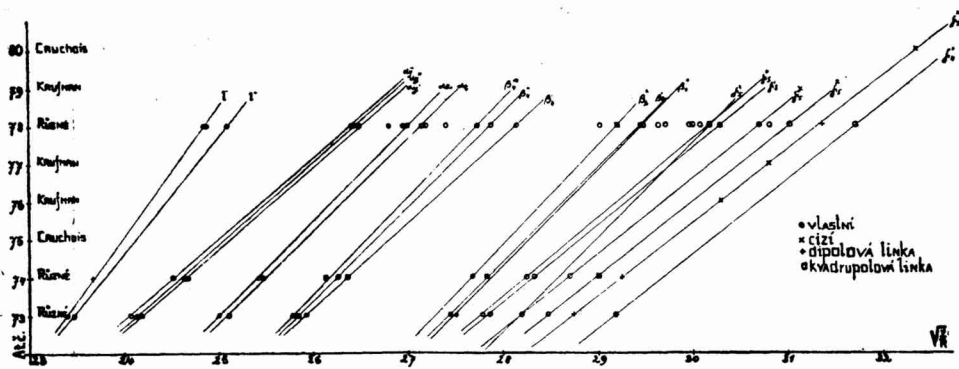
9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)	16)	17)	18)
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1176,1
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1188,7
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1194,9
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1205,7
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1227,6
—	1235,4	1235	1235,8	1236,0	1235,5	1236,4	—	1235,8	1235,5
—	—	—	—	—	1248,7	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1310,4
—	—	—	—	—	1321,2	—	—	—	1320,9
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1409,0
—	—	—	—	—	1450,3	—	—	—	1450,9
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1495,6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1501,3
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1515,3

— 10) Coster 1921 — 11) Hoyt 1921 — 12) Yoshida 1921 — 13) Dauvillier 1922 — 14) Rogers 1923 — 15) Crofut 1924 — 16) Friman 1926 — 17) Jdei 1929 — 18) Dolejšek-Vranský 1939.

*) Hodnoty přesného měření Frimanova vyznačené dvěma desetinnými místy jsou přejaty Jdeim (17) i námi (18) jako referentní čáry.

stejně jako trabanty čáry β_9 . S výjimkou β'_4 u W, kterou již roku 1916 měřil Barnes, všechny ostatní čáry až dosud měřeny nebyly. Tato klasifikace je naprosto bezpečná. Z trabantů čáry γ_5 je zajímavá čára γ_5^x , která tvoří pro tyto 3 prvky s čarou β''_9 irregulerní dublet, jak plyne z Moseleyho grafu. Grafy pro ostatní trabanty čáry γ_5 nejsou paralelní s grafem pro čáru γ_5^x , nýbrž protínají jej a jsou paralelní s grafy trabantů čáry γ_2 . U W nebyla čára γ_5^x původně v této práci nalezena a teprve po přiřazení pomocí Moseleyho zákona byla hledána. Nebyla však nalezena. Hodnota trabantu γ_5^z pro W souhlasí s hodnotou, kterou dříve našel pro tento prvek Jdei. Čára γ_5^z u Ta byla hledána a nalezena dodatečně až při klasifikaci nových nedigramových čar. Z trabantů čáry γ_2 je zajímavá čára γ'_2 , kterou klasifikoval již dříve Kaufman jako čáru γ'_2 . Tuto čáru jsme však nenalezli ani u jednoho ze zkoumaných prvků. (Patrně u těchto prvků je γ'_2 příliš blízko u γ_2 nebo γ_3 .)

Na kratší straně čáry α_1 měřili jsme trabanty α_2 a α_4 . Hodnota α_4 pro W byla hledána a nalezena dodatečně. Z těchto trabantů je zajímavý α_2 , který tvoří irregulerní dublet s β'''_4 . Dále byly měřeny trabanty α'_y , α''_y a α'''_y . Tyto tři čáry byly naměřeny u všech tří prvků. Pro platinu ale hodnoty α''_y a α'''_y splývají



Archiv JČMF.

s hodnotami trabantů α^z a α'^z , měřených Cauchysovou pro Ta, Re a Bi a Hulubeiem pro Ra. Konečně lze přiřadit čáře l satelity l' a l'' , měřené u Ta a Pt. Hodnota l' pro W splývá s čarou t , a l'' pro tžž prvek nalezena nebyla.

Jak je vidět z uvedeného grafu, zůstává u Pt ještě značný počet čar, které nelze zatím klasifikovati, neboť, jak bylo uvedeno již dříve, platina je prvek velmi vhodný pro spektroskopické studování a proto lze snadněji obdržeti jeho spektrum.

Jak ukazuje srovnání našich výsledků na př. pro W (viz tab. 8) s výsledky ostatních uvedených autorů, byly nalezeny téměř všechny čáry, které na různých místech mnohými autory jsou udávány.⁶¹⁾ Velmi překvapující byl fakt, že se nepodařilo nikomu pomocí rovinného krystalu tyto slabé linie získati všechny. Tento fakt lze vysvětliti z poznatku učiněného během naší práce, kde při použití fokusační metody mohli jsme pro kratší doby expozicní získati větší počet snímků pro tžž obor spektra. Ukázalo se, že ke zjištění některých čar bylo nutno voliti exposice ne s maximální hustotou černání fotografické desky, které naše uspořádání dovoľovalo. Neboť difusní podklad, vznikající vadami krystalů při krajních exposicích překrýval charakteristické slabé čáry i při použití různých exemplářů krystalů. Tento faktor — difuze záření na krystalu — zdá se nám, určuje při našem fokusačním fotografickém uspořádání hranice stanovitelnosti slabého charakteristického záření.

Spektroskopický ústav Karlovy university, Praha.

*

⁶¹⁾ Přehled těchto výsledků udán je v knize M. Siegbahn: *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 1932.

Über die L-Serie von Ta, W und Pt.

(Inhalt des vorhergehenden Artikels.)

Wellenlängen der L-Serie von Ta, W und Pt wurden gemessen. Die Messung wurde nach der symmetrischen Fokulationsmethode nach Kunzl mit einem auf die von Bačkovský angegebene Art plastisch deformierten NaCl-Kristall vorgenommen. Es zeigte sich, daß diese Anordnung sehr vorteilhaft ist.

Einige neue Quadrupletts wurden beobachtet und klassifiziert. Es wurde auch gezeigt, daß die Übergänge $\Delta l = \Delta j = 0$, welche in der K-Serie nicht gefunden wurden, in der L-Serie dieser Elemente existieren. Auch die Übergänge $l - l + 3$ und $j - j + 3$ wurden beobachtet.

Viele nicht diagrammatische Linien, welche bis jetzt von anderen nicht registriert waren, wurden beobachtet und ihre Wellenlängen gemessen, wie die Tabellen 2 bis 8 zeigen. Eine Klassifizierung dieser Linien wurde vorgenommen.

Die gegenwärtigen Resultate wurden mit früheren verglichen. Es zeigt sich, daß verschiedene Autoren verschiedene Linien fanden, welche bis jetzt nicht bestätigt waren; da, wie aus den gegenwärtigen Resultaten ersichtlich ist, die Grenze für die Registrierung der charakteristischen Linien sichtlich durch die Unvollkommenheit des als Gitter verwendeten Kristalls herabgesetzt wird. Als Ergebnis zufälliger Unvollkommenheiten der Kristalle entsteht eine diffuse Strahlung, welche die Linien überdeckt, so daß die schwachen Linien in der durch die diffuse Strahlung verursachten Schwärzung verschwinden.

Spektroskopisches Institut der Karls-Universität, Prag.

Absolute measurement of mercury vapour pressure at temperatures from 7° to 25° C, and the verification of the Knudsen's law of molecular streaming.

Swami Jnanananda, Narendra Nagar (India).

Mercury vapour pressure at temperatures 7° to 25° C. The measuring appliance of the apparatus has been the phlegmatic liquid filled gauge of Bačkovský-Slavík.

The method and the procedure of measurement of mercury vapour pressure have been such that the results have been quite independent of the influence of certain inherent objectionable conditions, thereby rendering the measurement of mercury vapour pressure not only absolute but also precise. The attained precision, being high, enables one to test the validity of Knudsen's mercury vapour pressure measurements.

A comparison of the present results with those obtained by streaming method as well as with those obtained by directly measuring with the absolute gauge has shown that the results by streaming method are more precise than those obtained by measurement with the absolute gauge. By the confirmation of the present results with those obtained by streaming method, the Knudsen's law of molecular streaming has been verified.

Introduction. Measurement of the lowest attainable pressures of gases has certain obstacles which are not easy to overcome. In the measurement of these pressures, it is required to clear of any gas adhering to the walls of the enclosure and the gauge. This is usually done by thoroughly heating the enclosure as well as the gauge while speedily exhausting them by high vacuum pumps. It has been shown already by Shrader¹⁾ that such heat treatment, if sufficiently done, is capable of removing the gases as well as the vapours adhering to the surfaces of the instruments. But such heating and the subsequent cooling the gauge back to the normal temperature cause it to act as a „getter“ in as much as the walls reabsorb the gases in the enclosure. In the former case our pressure readings are higher and in the later case they are lower in value than that of the real pressure.

In the case of the measurement of the lowest attainable vapour pressures there are more obstacles and they are even

¹⁾ Shrader: Phys. Rev., 18 (1919), 434.

more difficult to overcome than in the case of the measurement of the highest attainable gaseous pressure. The only gauge which is claimed to be capable of measuring low vapour pressures absolutely is the original model of Knudsen,²⁾ whose function is based on the radiometric action. But it is by no means easy to construct a true absolute gauge as that of Knudsen, for it is very difficult to realise a very small distance between an oscillating system and a fixed plate. In almost all the later models, constructed for certain practical purposes, the mentioned distance is not small, unlike that in the original model of Knudsen, compared with the mean free path. Since Knudsen's equations apply only when the distance between the fixed and the oscillating systems is considerably small compared with the mean free path, these later models, though based on the radiometric action, cannot be used as absolute manometers. West³⁾ has shown that when the distance between the oscillating system and the fixed system is not small compared with the mean free path, the nature of the gas affects the functioning forces. As such the later models of radiometer gauges are lack of "absoluteness".

With the absolute gauge, it is required to measure quite precisely the temperature of not only the hot plate system but also that of both the sides of the cold plate system. Knudsen made provision for the temperature measurement of even both the sides of the cold plate system. It is however very impracticable to make such a provision for the temperature measurement of both the sides of the suspended system which at the same time can permit heat treatment to clear of any gas sticking to the surfaces. If the heat treatment is not properly done, the pressure measurement cannot be precise. If suitable provision is not made for the temperature measurement of both the sides of the suspended system, the temperature of the suspended system cannot be directly measured. In the absence of the direct measurement of the actual temperature of the cold plate system, as in the case of most of the radiometer gauges, there is always a certain amount of uncertainty in the values of the pressure measurements. Therefore they can be deemed to be neither absolute nor precise. In spite of all these objectionable and difficult features, Knudsen somehow constructed an absolute gauge and measured with it the saturation vapour pressures of mercury at temperatures ranging from -10° to 25° C.⁴⁾

Prior to the invention of the mentioned absolute gauge,

²⁾ Martin Knudsen: *Ann. der Phyk.*, **32** (1910), 809—842.

³⁾ G. D. West: *Proc. Phys. Soc.*, **27** (1916), 259; **31** (1919), 278; **32** (1920), 166; **33**, (1920), 222.

⁴⁾ M. Knudsen: *Ann. der phyk.*, **32** (1910), 838.

Knudsen also gave an ingenious method for the measurement of the saturation vapour pressure of mercury, based on the application of the Knudsen's law of pure and steady molecular streaming through a tube wherein a plate with a circular hole is fixed, which is given by⁵⁾

$$G = \sqrt{\rho_1} \frac{p' - p''}{W_1 + W_2} \cdot t \text{ or } p' - p'' = \frac{G(W_1 + W_2)}{\sqrt{\rho_1} \cdot t},$$

where G is the mass of gas or vapour, ρ_1 the density at a pressure of 1 dyne per cm², W_1 and W_2 the "resistance" of the tube and the opening respectively and t the time through which the gas or vapour streams down through the tube system. He arranged his apparatus in such a way that the mercury vapour streams down a tube through a small hole and becomes condensed in a cold graduated bulb. He determined the mass of vapour streamed for a time t by weighing the distilled mercury. From the dimensions of the tube and the hole he determined the "resistance" W_1 and W_2 . As the initial pressure was very low, its value could be taken as zero. Introducing the experimentally determined values of G at different temperatures in the equation 1, Knudsen determined the saturation vapour pressure of mercury from 0° upto 154.4° C. Having compared his results with the theoretically calculated values as well as with the results of the former authors, he estimated the precision of his measurements by his method. The estimated precision was found to be nearly 0.5% which may be considered the highest attainable precision by any method of measurement of low vapour pressures. Knudsen's results however have not been so very well verified so as to enable us to confirm to his verification of the law of steady molecular streaming by direct and absolute measurements. This method which would serve more to verify the law of steady pure molecular streaming rather than to directly measure vapour pressures, though very precise, is indirect, slow in operation and does not seem very practicable for the low vapour measurements.

Besides the said Knudsen's direct measurements of low vapour pressure of mercury with the absolute gauge, all investigations on low vapour pressures have been carried by indirect methods involving rate of diffusion, viscosity, ionic conductivity etc. which are in a way based upon assumptions concerning the structure and degree of association of the vapour. The only direct and the most suitable method with which saturation pressure of mercury could be measured is by means of an apparatus in conjunction with a McLeod gauge, known as tensimeter, elaborated

⁵⁾ Martin Knudsen: Ann. der Phys., 29 (1909), 179—192.

and developed by Hickman.⁶⁾ It has been used for the measurement of vapour pressures ranging from atmospheric pressure to 0,05 mm Hg. He points out that his apparatus does not provide satisfactory means for determining vapour pressures lower than the mentioned limit. This method however extends the lower limit than ordinarily recorded and is quite practicable and more convenient than that of Knudsen's absolute manometric measurements of mercury vapour pressure. With this method, Hickman measured saturation vapour pressures of some high boiling organic liquids as well as that of mercury. As far as mercury is concerned, the lowest limit of his measurement of the saturation vapour pressure was 0,08 mm Hg which corresponds to the vapour pressure at a temperature of 80° C.

Now it may be mentioned that the required experimental equipment for the measurement of vapour pressure by the indirect method of molecular streaming as well as the Hickman's tensimeter permit a more suitable heat treatment for clearing of the surfaces from the occluded and the surface gases than the Knudsen's absolute gauge, because the surfaces of the later are more complicated than those of the former. The liquid filled gauges, in this respect, are very advantageous as the heat treatment for degassing need not be so high as in the case of the instruments with the metallic parts, where the heat treatment for degassing must be such that it would, in coming back to normal temperature, act as a "getter".

Having realized that the saturation vapour pressures of some of the high boiling organic liquids are much lower than that of mercury and that the coefficient of friction of these liquids is much lower than that of mercury with the walls of the glass tubes, Hickman and Sanford⁷⁾ conceived the use of some of these high boiling organic ones as gauge filled liquids. Consequently with one of these liquids whose vapour pressure is very low, they constructed a gauge⁷⁾ the precision of which was said to be 0,001 mm Hg. They did not however use their gauge for the measurement of vapour pressure.

Subsequently some authors made use of these phlegmatic liquids in their gauges. But none seemed to have attempted to measure vapour pressures with their gauges. Backovsky and Slavik⁸⁾ however have shown that certain kinds of the phlegmatic liquid filled gauges could be utilized for the measurement of

⁶⁾ K. C. D. Hickman: Jour. Phys. Chem., **34**, (1930), No. 3, 627—636.

⁷⁾ K. C. D. Hickman and C. R. Sanford: Jour. Phys. Chem., **34**, (1930), No. 3, 651.

⁸⁾ J. M. Backovsky and J. B. Slavik: Čas. pro přst. mat. fys., **66** (1936), 67—84.

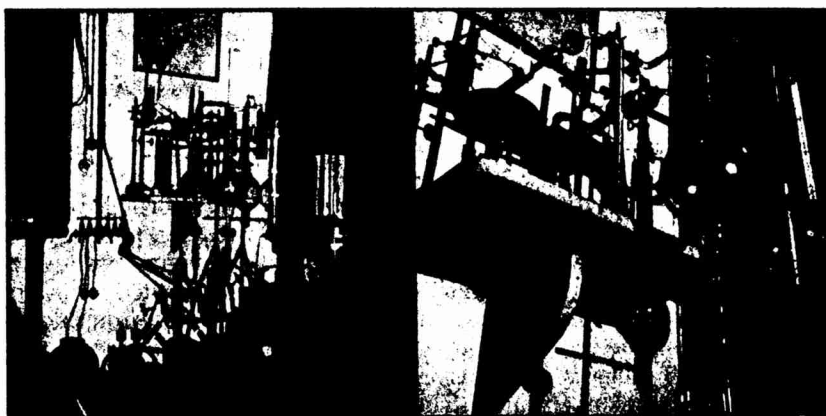
vapour pressures by actually measuring the saturation vapour pressure of mercury at 24° C. From the description of their form of the gauge, it seemed that it could be possible to absolutely measure with it the low vapour pressures of mercury very precisely, for the limit of observation depends upon certain factors which are technically possible to adjust. In using this gauge for the measurement of the saturation vapour pressure of mercury, certain practical difficulties however have been encountered and in trying to surmount them a certain procedure has been taken so as to utilize the gauge for the absolute and the precise measurement of the saturation vapour pressures of mercury from 25° C down to 7° C. To the requirements of the mentioned procedure, we have constructed our equipment, shown in the Fig. 1, so as to increase the sensitivity and thus raise the precision of the measuring appliances of our equipment.

The equipment and experimental procedure.

The equipment consists of a double chambered vacuum enclosure, exhausted by a high speed paraffin condensation pump, which is backed by a suitable auxiliary rotary pump, two phlegmatic liquid filled gauges, joined to either one of the chambers of the vacuum enclosure, which can be simultaneously used for pressure measurements to minimize the accidental errors, a McLeod gauge joined with one of the chambers by means of a side tube not only to measure the pressure of high vacuum before the commencement of the experiment but also to serve as a source of mercury vapour, a mercury bulb, as an auxiliary source of mercury vapour, connected to the vacuum chamber by means of a tube which can be either closed or opened according to the requirements and three thermometers to record the inner and the outer temperatures of the double chambered vacuum enclosure. When required, the vacuum enclosure can be easily converted into mercury vapour reservoir by opening it to the activated and functioning sources of mercury vapour. The two gauges, one filled with Triocresylphosphate, and the other with Butyl benzyl phthalate, form the principal part of the equipment for measuring low vapour pressures of mercury. (Fig. 1.)

The entire equipment together with the two mentioned phlegmatic liquid filled gauges has been exhausted by means of a paraffin condensation pump. The obtained vacuum when measured by a McLeod manometer and tested by a high tension electrical discharge, has been found to be of a pressure lower than 10^{-6} mm Hg. The pump speed has been such that the presence of mercury vapour in the vacuum enclosures could not be detected

even when the connection between vacuum enclosure and the McLeod gauge or the mercury reservoir has been opened. In this state the readings of the two phlegmatic liquid filled gauges have been simultaneously taken. Again after once more closing the connection between the vacuum enclosure and the McLeod gauge or the mentioned mercury reservoir, the readings of both the phlegmatic liquid filled gauges have been again taken simultaneously. In both the cases the manometric readings have been found to be remaining stationary so long as the temperature in both the cases remained constant, thereby indicating that in both cases there has been no detectible presence of mercury vapour.



a

Fig. 1.

b

When the temperature of the apparatus is changed, we have however found a change in the readings of the said gauges. In order to ascertain whether or not the changes in the manometric readings have been due to the variation of the angles of inclinations of the manometers which could be caused by the dilatation of the stand of these gauges through the temperature variation, we have observed the angular inclinations of these gauges by viewing reflections of fixed positions in mirrors attached to each one of the gauges with a separate telescope. It is important that there has been no observable change in the said angular inclinations of the manometers due to temperature variations. There has been, however, a considerable change in the position of the meniscus with the change of temperature. When the variations of the positions of the meniscus of the gauge filled liquid with the changes of temperature ranging from 7° to 25° C

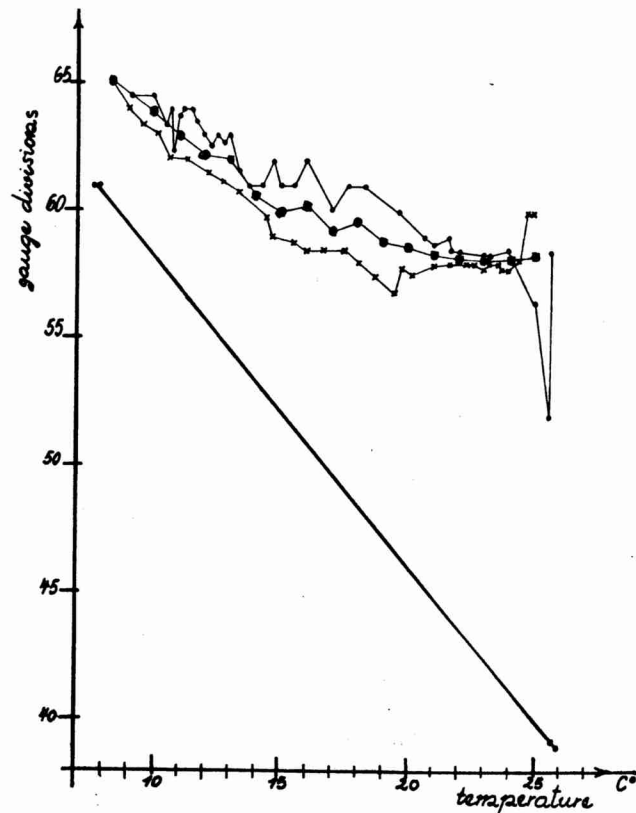
have been observed, they have been found to be of such magnitudes which would support a pressure of about 10^{-4} mm Hg in one manometer and 10^{-3} mm Hg in the case of the other manometer, filled with a different kind of phlegmatic liquid. Since these variations of the position of the meniscus of the gauge filled liquid are much greater than what could be expected from the considerations of the low saturation vapour pressure of each one of the gauge filled liquids at this temperature range, it can be stated that these changes which are unexpectedly great in value could be mainly due to the pressure of the products of cracking of these liquids during the heat treatment. We have found that even a careful heat treatment could introduce an error of the order 10^{-3} to 10^{-4} mm Hg and that the heat treatment would attack only the parts wetted by the liquids, especially the bulb part of the closed limb of the manometer.

We have found that even with this kind of heat treatment which would cause discrepancy in the pressure readings due to the pressure exerted by the products of cracking, it is possible to directly measure the true pressures by taking manometric zero positions for different temperatures. After thoroughly exhausting the whole vacuum enclosure together with the phlegmatic filled gauges, when we are sure that there has been no detectable presence of vapours and when the pressure of the attained vacuum is lower than 10^{-6} mm Hg, we have read at a certain temperature the position of the meniscus in the opened limb of each one of the manometers by means of a microscope. This reading of the position of the meniscus of each one of the manometers at the temperature is taken as the zero position of each one of the gauges for that particular temperature. We have changed the temperatures and for each temperature we have taken the zero positions. Thus we have actually determined the zero positions of each one of the phlegmatic filled gauges at temperatures between 7° C and 25° C.

In order to measure the inner and the outer temperatures of the apparatus, we have inserted one thermometer in the vacuum enclosure and a couple of thermometers outside quite close to the vacuum enclosure. It has been necessary to wait till the inner and the outer temperatures have come to equilibrium for fixing the zero positions of the manometers. Such waiting for temperature equilibrium causes considerable delay. We have waited for temperature equilibrium in the case of fixing the zero positions of the mentioned gauges at different temperatures. But we have not done so where it has not been quite so necessary.

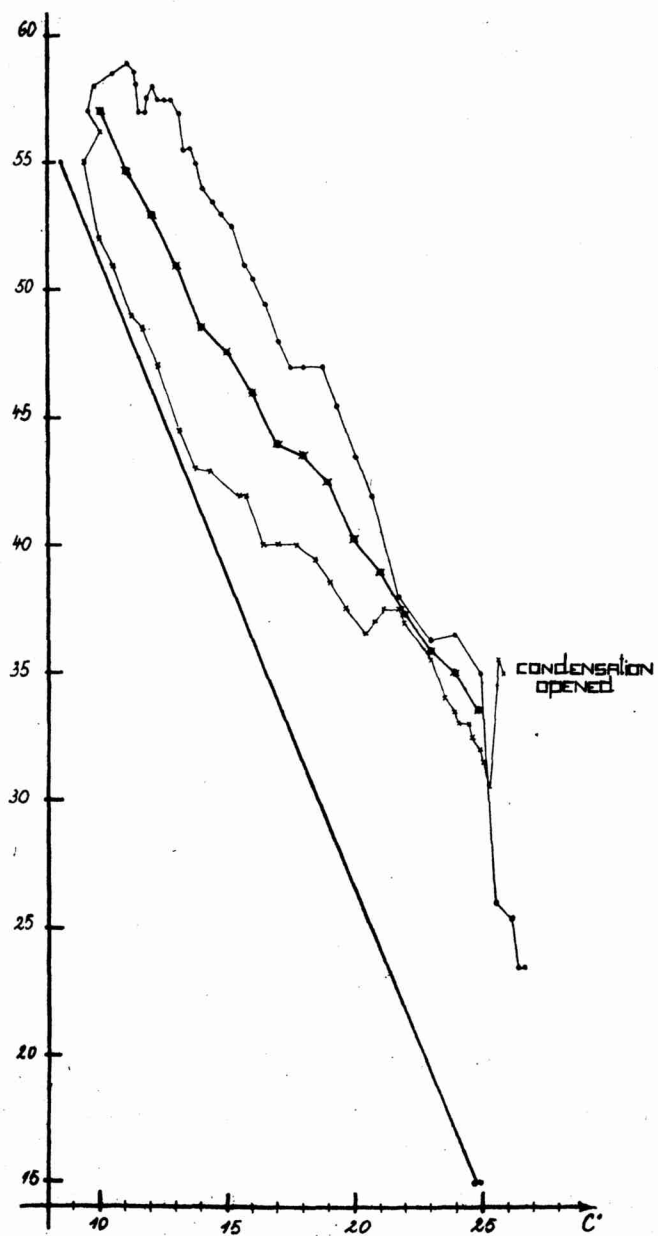
With this arrangement and after determining the zero positions of the said gauges as described above, we have measured the saturation vapour pressure of mercury at temperatures from 25° C

down to 7° C in the following manner. After introducing mercury vapour into the vacuum enclosure till complete saturation is attained, we have taken manometric readings from both gauges at different temperatures which can be seen from the graph I and the graph II. In the graph I, it can be noted that the zero



Graph I.

positions of one manometer at 25° C and 9° C are 42,5 and 61,0 divisions respectively and when the graphical positions of these two values are joined together we obtain the curve of the manometric zero positions for all temperatures between 9° C and 25° C. Also it can be seen that there are two series of manometric readings for saturation vapour pressure of mercury at the mentioned temperature range. The manometric readings of saturation mercury vapour pressure marked \cdot in the curves of the graphs Nos I and II, signify that these readings are those, taken



Graph II.

with the gradual lowering of temperature, while the rest that are marked in the curve are taken with the gradual rising of temperature. The rising and lowering of temperatures have been effected by fanning and regulated ventilation through windows in winter.

From the graphs I and II it can further be noticed that the curve of the readings with the lowering of temperature is slightly displaced from that of the readings with the rising of temperature through the same temperature-range in both the cases, so that we obtain two readings for each temperature through this range with a difference of 1 to 2 divisions for each given degree of temperature of the mentioned range. Such a difference can be explained by the fact that we have not waited until there is a temperature equilibrium in and out of our apparatus. We have however plotted a mean curve through the middle points of the mentioned curves at each position corresponding to every degree of temperature from 25° down to 10° C, and this gives the mean values of the manometric readings of the mercury vapour pressure at the mentioned temperature range. Similarly the graph II gives the mean values of the manometric readings at the same temperature range by the second phlegmatic liquid filled gauge.

The angle of inclination of the Triocreoylphosphate filled gauge is $1^{\circ} 23' 27.5''$ and the specific gravity of this gauge filled liquid is 1.178 at 24° C. Each division of this gauge corresponds to 8.992×10^{-5} mm Hg. The angle of inclination of Butyl-benzyl phthalate filled gauge is $2^{\circ} 43' 30''$. The specific gravity of this gauge filled liquid is 1.109 at a temperature of 20° C. Each division of this gauge corresponds to 8.661×10^{-5} mm Hg.

Now since each manometric division corresponds to 8.992×10^{-5} mm Hg in the case of Triocreoylphosphate filled gauge and 8.661×10^{-5} mm Hg in the case of Butyl-benzyl phthalate, the different divisions between the Zero-curve and the mentioned mean curve of each one of the manometers at any given temperature give the measured saturation vapour pressure of mercury by each one of the gauges. In this way we have obtained a separate series of measured values of the saturation vapour pressure of mercury at all degrees of temperature from 25° down to 10° C by each manometer and the two series of measurements by the gauge one and the gauge two are given separately in the third columns of the table 1 and table 2 respectively. Owing to differences of temperature in the different regions of the apparatus, there could be a slight influence of thermal efflux upon our readings. We have however corrected the readings for this influence and obtained the actual pressure values which are given in the final columns of the tables 1 and 2 and in the Ist and the IInd

columns of the table 6. We have further taken the mean of these two corrected values obtained separately by each of the two gauges for each degree of temperature and these mean values of corrected pressures are given in the last column of the table (6).

Table 1.

1. Tri-o-croeylphosphate filled gauge.

1 division = 8.992×10^{-5} mm mercury.

Saturation vapour pressure of mercury from 10° C to 25° C measured in the unit 10^{-3} mm Hg by the manometer 1.

Temperature	Divisions	Measured pressure	True pressure
10,0° C	4,8	0,432	0,440
11,0° C	5,9	0,531	0,543
12,0° C	6,4	0,575	0,589
13,0° C	7,5	0,674	0,690
14,0° C	7,2	0,634	0,648
15,0° C	7,9	0,712	0,731
16,0° C	9,2	0,827	0,852
17,0° C	9,6	0,863	0,890
18,0° C	11,0	0,989	1,021
19,0° C	11,5	1,034	1,070
20,0° C	12,5	1,124	1,166
21,0° C	13,5	1,214	1,262
22,0° C	14,5	1,304	1,358
23,0° C	15,6	1,403	1,463
24,0° C	17,0	1,529	1,598
25,0° C	18,3	1,646	1,723

It is very useful to record the vapour-pressure-temperature relation by plotting the logarithms of the pressures against the inverse of absolute temperature, for it enables us to easily judge the precision of the individual values. So we have plotted the individual values, given in the tables 1 to 4, obtained separately by the two gauges in the mentioned sort of graph III, so as to show the precision of our individual readings. For comparison the Knudsen's measurements of the saturation pressure of mercury at temperatures from 0° C to 25° C by the method of molecular streaming on the one hand and the measurements by the absolute gauge on the other have been plotted in the graph and they are marked with + and × respectively. For further comparison we have also plotted the mercury vapour saturation pressure values

Table 2.

2. Butyl-benzyl phthalate filled gauge.

1 division = 8.661×10^{-5} mm mercury.Saturation vapour pressure of mercury from 10°C to 25°C ,
measured in the unit 10^{-3} mm Hg by the manometer 2.

Temperature	Divisions	Measured pressure	True pressure
$10,0^{\circ}\text{C}$	5,8	0,502	0,511
$11,0^{\circ}\text{C}$	5,9	0,511	0,521
$12,0^{\circ}\text{C}$	6,5	0,563	0,575
$13,0^{\circ}\text{C}$	7,0	0,606	0,620
$14,0^{\circ}\text{C}$	7,5	0,650	0,667
$15,0^{\circ}\text{C}$	8,7	0,754	0,774
$16,0^{\circ}\text{C}$	9,5	0,823	0,847
$17,0^{\circ}\text{C}$	10,0	0,866	0,893
$18,0^{\circ}\text{C}$	11,9	1,031	1,064
$19,0^{\circ}\text{C}$	13,3	1,152	1,191
$20,0^{\circ}\text{C}$	13,5	1,169	1,211
$21,0^{\circ}\text{C}$	14,8	1,282	1,330
$22,0^{\circ}\text{C}$	15,5	1,342	1,395
$23,0^{\circ}\text{C}$	16,5	1,429	1,488
$24,0^{\circ}\text{C}$	17,5	1,506	1,571
$25,0^{\circ}\text{C}$	19,0	1,646	1,720

Table 3.

1. Tri-o-creoylphosphate filled gauge.

1 division = 8.078×10^{-5} mm mercury.Saturation vapour pressure of mercury from 7°C to 8°C measured
in the unit 10^{-3} mm Hg by the manometer 1.

Temperature	Divisions	Measured pressure	True pressure
$7,1^{\circ}\text{C}$	4,1	0,336	0,345
$8,0^{\circ}\text{C}$	5,05	0,409	0,420

for the temperatures from 0 to 25°C given in the international
critical tables.^{*)}*) International Critical Tables of numerical data, Vol. 3, page 206,
1st Edition, (1928).

Table 4.

2. Butyl-benzyl phthalate filled gauge.

1 division = 7.856×10^{-5} mm mercury.Saturation vapour pressure of mercury from 7° to 8° C, measured in the unit 10^{-3} mm Hg by the manometer 2.

Temperature	Divisions	Measured pressure	True Pressure
7,1° C	4,5	0,350	0,360
8,0° C	—	—	—

Table 5.

Mean values of the saturation vapour pressure of mercury from 7° to 8° C, given in the unit 10^{-3} mm mercury.

Temperature	By Gauge I.	By Gauge II.	Mean pressure
7,1° C	0,345	0,360	0,353
8,0° C	0,420	—	0,420

Table 6.

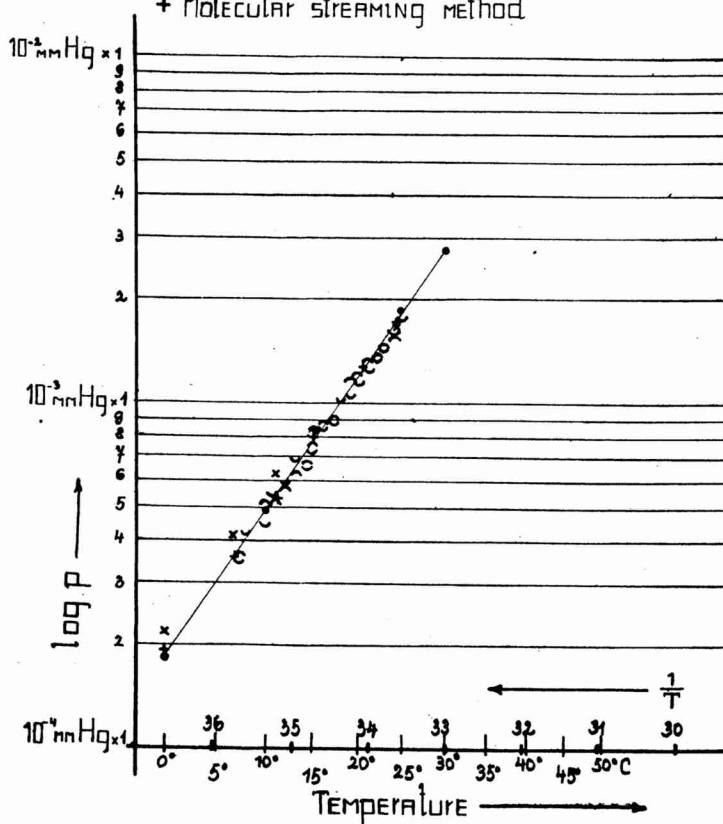
Mean values of the saturation vapour pressure of mercury from 10° C to 25° C, given in the unit 10^{-3} mm mercury.

Temperature	By Gauge I.	By Gauge II.	Mean pressure
10,0° C	0,440	0,511	0,476
11,0° C	0,543	0,521	0,537
12,0° C	0,589	0,575	0,582
13,0° C	0,690	0,620	0,655
14,0° C	0,648	0,667	0,658
15,0° C	0,731	0,774	0,753
16,0° C	0,852	0,847	0,850
17,0° C	0,890	0,893	0,892
18,0° C	1,021	1,064	1,042
19,0° C	1,070	1,191	1,130
20,0° C	1,166	1,211	1,188
21,0° C	1,262	1,330	1,296
22,0° C	1,358	1,395	1,376
23,0° C	1,463	1,488	1,475
24,0° C	1,598	1,571	1,584
25,0° C	1,723	1,720	1,722

Critical observations.

It can be seen in our graph III that our individual measured values do not show any systematic variation from the calculated values given in the International Critical Tables for the range of

- Data from International critical tables
- ∪ Tri-*o*-cresylphosphate filled gauge
- ∩ Butyl-benzyl phthalate filled gauge
- × KNUDSEN'S Absolute gauge
- + MOLECULAR STREAMING METHOD



Graph III.

temperature from 0° C to 25° C in the limits of the obtained precision. The cause of the small differences between the readings of the two gauges is to be attributed to the differences in temperature equilibrium. The individual differences, so caused, are

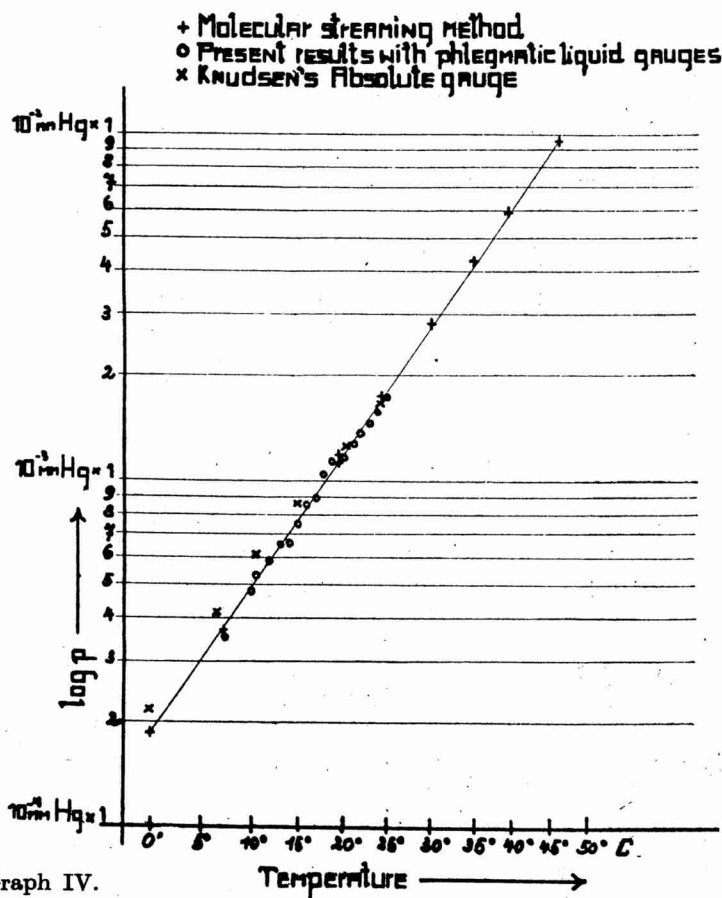
irregularly higher in some cases and in some lower than those of the International Critical Tables and the measurements of one gauge are not systematically higher or lower than those of the other, so that the mentioned differences must be considered to be accidental. From these accidental minor deviations, the limit of precision of our absolutely measured values of the vapour pressure of mercury with the mentioned phlegmatic liquid filled gauges, can be easily ascertained.

We have taken the manometric readings at every two minutes at a constant temperature between 7° and 8° C for about half an hour while keeping the reservoir fully opened to both the functioning sources of mercury vapour. During the period the gauge readings have been constant thereby indicating that the reservoir has been full to saturation with mercury vapour. These saturation vapour pressure readings at temperatures 7° to 8° C given in the tables 3, 4, and 5 fall on the pressure-temperature-relation straight line of our values of vapour pressures of mercury at all other degrees of temperature till 25° C. Therefore it can be considered that at each one of the rest of our pressure measurements, the reservoir has been full to saturation with mercury vapour.

The two mercury vapour pressure values at $7,1^{\circ}$ C, obtained by the two mentioned phlegmatic liquid filled gauges do not differ more than by nearly 5%. These pressure values as well as those of ours at temperatures $11,1^{\circ}$, $15,7^{\circ}$, $20,6^{\circ}$, and $24,4^{\circ}$ C agree fairly well with the values for the same range of temperature obtained by the method of molecular streaming. Similarly the vapour pressure value for 0° C, extrapolated from our measurements at other temperatures agrees with the value for the same temperature obtained by the said molecular streaming method. But the pressure value for 0° C obtained by measuring with the Knudsen's absolute gauge is higher by 18% than that by the molecular streaming method as well as our mentioned extrapolated value. This difference can be said to be much higher than the limit of our attained precision. The other values of the vapour pressure measurements by the absolute gauge are in fact systematically higher than our values as well as those by the method of molecular streaming method and are percentually increasing with the increasing temperature.

Since the measurement of the saturation vapour pressure with the absolute gauge is direct, the above mentioned difference of about 18% between the pressure values obtained by the direct measurement with the absolute gauge and those obtained indirectly by the method of molecular streaming might lead one to the conclusion that the streaming method and the law of pure

and steady molecular flow, given in the expression 1 (page 3a), on which the method is based, are not quite rigorous. To show that this sort of conclusion is not valid, we plot our mean pressure values given in the last columns of the tables (5 and 6), those obtained by the method of molecular streaming and finally also the



Graph IV.

pressure values obtained by the direct measurement with the absolute gauge in the graph No. IV, recording the pressure-temperature-relation for general comparison and further judgment. In the graph IV, it can be seen that the curve of our directly measured absolute mercury-vapour-pressure values, in the limit of our attained precision, coincide on the one hand precisely with the pressure values obtained by the indirect method of molecular

streaming and on the other considerably differ from the values obtained by the direct measurement with the Knudsen's absolute gauge.

In this connection we may point out that the values of the constants A and B , occurring in the equation¹⁰⁾

$$\log_{10} p = - 52,23 \frac{A}{T} + B, \quad (2)$$

calculated from our directly measured absolute pressure values of mercury vapour are $A = 61,943$, and $B = 8,1166$. Now on introducing these values and the absolute temperature value for 0°C in the above mentioned equation (2), we obtain $0,18433 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$ as the saturation vapour pressure of mercury at a temperature of 0°C , calculated from our directly measured values for other temperatures. This value $0,18433 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$, calculated from our values of the constants A and B , for the temperature of 0°C indeed agrees quite well with the value $0,1846 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$ for the same temperature, obtained by the streaming method and differs actually by nearly 18% from the pressure value for 0°C obtained by the direct measurement with the absolute gauge.

Thus our directly and absolutely measured, calculated, as well as our extrapolated values, in agreeing well with the results obtained by the method of molecular streaming and in widely differing from the values by the absolute gauge, show that the former are more precise than the later mentioned values by the absolute gauge. We may go even a step further and say that the pressure-values obtained by direct measurement with the absolute gauge are in fact not so precise as those of ours as well as those obtained by molecular streaming, because the pressure-values with the Knudsen's absolute gauge, being corrected empirically, have such corrections which, as Knudsen pointed out on the page 838, *Ann. der phys.*, volume 32 (1910), would introduce an uncertainty in the pressure values. So our direct and absolute measurements, in disagreeing with the results by the absolute gauge and in thoroughly confirming with the results obtained by the method of molecular streaming in a way verify the method and the law of molecular streaming on which the method is based. In this connection it may be pointed out that the mercury vapour saturation pressure value for 0°C , $0,1846 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$, obtained by the streaming method or our value $0,18433 \times 10^{-3} \text{ mm Hg}$, obtained from the mentioned constants A and B derived from our actually measured values, must be rightly taken as the standard value to be used as the constant to calculate the values for the

¹⁰⁾ International Critical Tables of Numerical Data, Volume III, 204.

mercury vapour pressure-temperature-relation curve, and also to calibrate the ionization gauge for the relative measurements of vapour pressure of mercury at low temperatures as was done in the case of the modified ionization gauge with which Poindexter¹¹⁾ measured mercury vapour pressure at low temperatures.

In concluding this work, I beg to offer my heartiest thanks to Prof. Dr. Václav Dolejšek Esq. not only for the arrangements which he has made for my Research in the Spectroscopical Institute Laboratory of the Charles University but also for his unbounded kindness which he has been pleased to so lavishly bestow upon me during my stay in this kind and hospitable land of the Czechs. My thanks are due to my Czech friends and fellow research scholars for their kind help during the research. Finally it is my great privilege to tender my deepest gratitude and gratefulness to His Highness Sri Maharaja Sir Narendra Shah, the ruling chief of Tehri-Garhwal State (India) for His Highness's interest in my philosophic and scientific pursuits.

Absolutní měření napětí rtuťových par za teploty 7° až 25° C a ověření Knudsenova zákona o molekulárním proudění.

Obsah předešlého článku.

Autor podává přímé absolutní měření tlaku par rtuti v rozmezí teplot 7° až 25° C, které v laboratoři lze získati bez zvláštních opatření (na př. v zimě při normálním topení a při otevření oken). Absolutní měření tlaku par Hg v tomto oboru bylo dosud docíleno přímo Knudsenem, jeho absolutním manometrem, a nepřímo (rovněž absolutně) rovněž Knudsenem, za užití jeho vzorců pro molekulární proudění.

Autor používá absolutního manometru s flegmatickou kapalinou, který udali Bačkovský-Slavík. Propracováním postupu pracovního, na př. vyloučením možného vlivu krakování kapaliny manometru, zavedením kontroly manometru a vyloučením vlivu činitelů, které vždycky s tímto manometrem jsou spjaty a omezují přesnost a absolutnost výsledků, dociluje autor takové přesnosti, že může porovnáním obdržných výsledků ukázati, zda z Knudsenových měření jsou správné jeho výsledky pomocí nepřímé metody za užití zákonů molekulárního proudění, či výsledky pomocí absolutního manometru. Výsledky obdržné pomocí těchto Knudsenových metod liší se asi o 20%.

Výsledky autora, udané v této práci, souhlasí v rozmezí 2 až 4% s Knudsenovými hodnotami obdržnými pomocí metody molekulárního proudění.

¹¹⁾ F. E. Poindexter: Phys. Rev., **26**, (1925), 859—868.

Tím jsou verifikovány Knudsenovy vzorce pro molekulární proudění přímým absolutním měřením. Pokud se týče výhodnosti v této práci použitého manometru typu Bačkovský-Slavík k měření tence par, je nesporné, že při stejné přesnosti absolutního měření je týž značně výhodnější, než aplikace nepřímé absolutní metody Knudsenovy, jejíž jednotlivé měření trvá na př. 13 dnů.

Praha, Spektroskopický ústav Karlovy university.

Foto a kresby S. Jnanananda. - Archiv JČMF.

Absolute Messung der Quecksilberdampfspannung für Temperaturen 7°—25° C und Bestätigung des Knudsen'schen Gesetzes der Molekularströmung.

(Inhalt des vorstehenden Artikels.)

Der Autor gibt direkte absolute Messungen der Quecksilberdampfspannung im Temperaturbereich von 7°—25° C, welche im Laboratorium ohne besondere Vorkehrungen zu erreichen sind (z. B. im Winter bei normaler Heizung und bei geöffneten Fenstern). Die absolute Messung der Hg-Dampfspannung in diesem Gebiet wurde bisher von Knudsen direkt mit seinem absoluten Manometer und indirekt (ebenfalls absolut) unter Benutzung seiner Formeln für die Molekularströmung vorgenommen.

Der Autor benutzt das absolute, mit phlegmatischen Flüssigkeiten gefüllte Manometer nach Bačkovský-Slavík. Durch Ausarbeitung des Arbeitsgangs, z. B. Eliminierung des möglichen Einflusses des Crackens der Manometerflüssigkeit, und Ausschluß des störenden Einflusses der immer mit diesem Manometer verbundenen Faktoren, welche die Genauigkeit und den absoluten Charakter der Resultate einschränkten, erzielt der Autor eine solche Genauigkeit, daß er durch Vergleich der erzielten Resultate zeigen kann, ob Knudsen's Resultate nach der indirekten Methode unter Benutzung der Molekularströmung, oder die mittels des absoluten Manometers erzielten richtig sind. Die mittels dieser beiden Methoden von Knudsen erzielten Resultate unterscheiden sich ungefähr um 20%.

Die in dieser Arbeit angeführten Resultate des Autors stimmen innerhalb eines Spielraums von 2—4% mit Knudsen's Resultaten nach der Methode der Molekularströmung überein.

Dadurch wurden Knudsen's Formeln für die Molekularströmung nach einer direkten absoluten Methode verifiziert. Was die Vorteile des bei dieser Arbeit benutzten Manometertyps Bačkovský-Slavík betrifft, ist dieser zweifellos bei gleicher Genauigkeit vorteilhafter als die Anwendung der indirekten absoluten Methode Knudsen's, deren einzelne Messungen z. B. 13 Tage dauern.

Názvy a značky elementární matematiky

8° 24 str.

1939

Brož. K 4,80

Normy přijaté Jednotou českých matematiků a fyziků v Praze a schválené ministerstvem školství a národní osvěty pro školy obecné, měšťanské, střední a odborné a pro učitelské ústavy s českým jazykem vyučovacím.

Právě vyšlo:

Ing. Dr. VÁCLAV ELZNIC:

Osmimístné tabulky

přirozených hodnot goniometrických funkcí
sin, cos, tg a tabulky geodetické
pro úhlové dělení šedesátinné.

4° 64 stran, 1 příloha, 2 obr. 1940

Váz. K 54,—

Obsah: Úvod — Konstanty — 10míst. hodnoty $\cos 0^\circ$ — 1° — 8míst. hodnoty goniom. funkcí — Hodnoty arku — Převod míry úhlové na časovou a naopak — Převod míry šedesátinné na setinnou a naopak — Geodetické tabulky — Kartografické tabulky — Orthometrické opravy — Terestrické zakřivení a refrakce — Sférický exces — Tabulky pro kyvadlová měření — Změny tíže zemské s výškou — Na příloze: Opravy z druhé tab. difference — Tabulka šedesátin difference.

Lze dostati u každého knihkupce nebo přímo u nakladatele

Jednota českých matematiků a fyziků v Praze II,

Žitná 25.

FYSMA společnost s ručením omezeným
založená Jednotou českých
matematiků a fyziků v Praze

Praha II, Žitná 25.

Telefon 237-14, 293-08

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

přesně vyrobené, spolehlivé, odborně vyzkoušené.

NOVÉ PŘÍSTROJE: Wilsonova komora k ukázení mlžných drah paprsků α — Přístroj k důkazu závislosti odporu vodiče na jeho délce, průřezu i materiálu — Přístroj k ukázení kritického stavu éteru v projekci — Přístroj pro výklad Bernoulliovy rovnice — II. část souboru k osvětlení podstaty letu: Přístroj k promítání vírových oblastí, model letounu a model řídicího ústrojí letounu — Nové banánky — atd.

NAVŠTIVTE NÁS, předvedeme Vám pokusy v naší předváděcí síni nezávazně.

NAPIŠTE NÁM, posloužíme Vám radou, nabídkou a prospekty.

OPRAVY POMŮCEK a přístrojů kterékoliv výroby provádíme pečlivě a odborně.

Vydává a nakládá Jednota českých matematiků a fyziků v Praze.
Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8—12 a od 13—17 hodin kromě soboty odpoled., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knih tiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohlédací úřad Praha 25.