ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Příspěvek k deskriptivní geometrii Plückerova konoidu.

L. Seifert, Brno.

(Došlo 11. června 1938.)

Věnováno prof. dr. Karlu Petrovi k jeho 70. narozeninám.

Pišme rovnici Plückerova konoidu ve tvaru

$$(x^2 + y^2)\, z - ay^2 = 0, \tag{1}$$

jemuž odpovídá parametrické vyjádření

$$x = r \cos \varphi,\ \ y = r \sin \varphi,\ \ z = a \sin^2 \varphi. \tag{2}$$

Roviny $x = 0$, $y = 0$ jsou hlavní roviny symetrie, bod $O(0, 0, \frac{1}{2}a)$ je střed plochy. Čáry $\varphi =$ konst jsou přímky, jež s osou Ox svírají úhel φ, $r =$ konst jsou jejich ortogonální trajektorie. Parametry φ, $\varphi + \pi$ patří téže přímce, parametry $+ \varphi$, $- \varphi$ patří přímkám, které se sekou na ose Oz.

Pro součinitele tečné roviny

$$u(X - x) + v(Y - y) + w(Z - z) = 0 \tag{3}$$

dostaneme

$$u = a \sin \varphi \,.\, \sin 2\varphi,\ \ v = - a \cos \varphi \,.\, \sin 2\varphi,\ \ w = r,$$

rovnice tečné roviny bodu (r_0, φ_0) je tedy

$$a \sin 2\varphi_0\, (X \sin \varphi_0 - Y \cos \varphi_0) + r_0 Z = a r_0 \sin^2 \varphi_0. \tag{4}$$

Dosadíme-li z rovnic (2) za běžné souřadnice, dostaneme po redukci

$$r = \frac{r_0}{\sin 2\varphi_0} \sin (\varphi_0 + \varphi), \tag{5}$$

což je polární rovnice kruhu v rovině (xy) o středu $\left(\frac{r_0}{4 \cos \varphi_0}, \frac{r_0}{4 \sin \varphi_0}\right)$ a poloměru $\frac{r_0}{2 \sin 2\varphi_0}$, jenž, jak známo, je průmětem elipsy, ve které tečná rovina seče plochu.

Všimněme si křivky na konoidu dané rovnicí

$$r = 2g \sin 2\varphi. \tag{6}$$

Tečné roviny v bodech této křivky sekou konoid v elipsách, jejichž středy podle (5) vyplňují kruh o středu O a poloměru g v rovině $\sigma(z = \frac{1}{2}a)$. Mezi součiniteli v rovnici (3) platí

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2 \sin^2 2\varphi + r^2$$

tedy

$$\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2 \sin^2 2\varphi}}$$

a pro body křivky (6) má poslední výraz hodnotu $\frac{2g}{\sqrt{a^2 + 4g^2}}$.

Tečné roviny v bodech křivky (6) svírají konstantní úhel s osou Oz a tvoří tedy rozvinutelnou plochu, jejíž hrana vratu je šroubovice. Tou se chceme zabývati.

Po dosazení z (6) do rovnice tečné roviny dostáváme

$$X \sin \varphi - Y \cos \varphi + \frac{2g}{a} Z = 2g \sin^2 \varphi. \tag{7}$$

Charakteristika je dána rovnicí (7) a rovnicí

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = 2g \sin 2\varphi. \tag{8}$$

K určení hrany vratu máme ještě rovnici

$$-X \sin \varphi + Y \cos \varphi = 4g \cos 2\varphi. \tag{9}$$

Šroubovice je dána vyjádřením

$$x = 4g \sin^3 \varphi, \quad y = 4g \cos^3 \varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}a\,(1 + 3 \cos 2\varphi); \tag{10}$$

jest to tedy racionální křivka šestého stupně a kolmý řez válce na němž se nalézá, je asteroida. Nárys dostaneme vyloučením φ z prvé a třetí rovnice (10)

$$(z - 2a)^3 + \frac{27}{16}\frac{a^3}{g^2} x^2 = 0 \tag{10a}$$

má tedy bod $x = 0$, $z = 2a$ za bod vratu.

Zajímavá vlastnost křivky (10) vychází následující úvahou. Pro kosiny směrné tečny dostaneme snadno

$$\alpha : \beta : \gamma = 2g \sin \varphi : -2g \cos \varphi : -a;$$

normální rovina bodu φ má rovnici

$$2Xg \sin \varphi - 2Yg \cos \varphi - aZ + \frac{a^2}{2} + \left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) \cos 2\varphi = 0. \tag{11}$$

Dvojím derivováním dostaneme snadno

$$2Xg\cos\varphi + 2Yg\sin\varphi - 2\sin 2\varphi\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) = 0, \qquad (11a)$$

$$-2Xg\sin\varphi + 2Yg\cos\varphi - 4\cos 2\varphi\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right) = 0. \qquad (11b)$$

Rovnice (11) a (11a) určují polární plochu, s (11b) pak hranu vratu, t. j. *g. místo středu oskulační koule.* V parametrickém vyjádření jest

$$x = \frac{16g^2 + 3a^2}{g}\sin^3\varphi,\quad y = \frac{16g^2 + 3a^2}{g}\cos^3\varphi,$$
$$z = \frac{a}{2} - \frac{3}{a}\left(8g^2 + \frac{3a^2}{2}\right)\cos 2\varphi. \qquad (12)$$

Tato křivka je opět šroubovice na asteroidickém válci a snadným výpočtem zjistíme, že *protíná jeho površky pod týmž úhlem jako šroubovice (10) protíná površky příslušného válce.*

Jiná pozoruhodná vlastnost je, že šroubovice (10) a (12) *se nalézají na rotačních hyperboloidech.* Skutečně z rovnic (10) jde nejprve

$$x^2 + y^2 = g^2(1 + 3\cos^2 2\varphi),$$

a pak vyloučením 2φ

$$\frac{x^2 + y^2}{4g^2} - \frac{4}{3a^2}\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = 1, \qquad (13)$$

což je jednodílný rotační hyperboloid se středem O (ve středu konoidu), poloměrem hrdelní kružnice $2g$ a konstantní délkou imaginární poloosy rovnou $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Šroubovice (12) nalézá se také na rotačním jednodílném hyperboloidu

$$\frac{4g^2}{m^4}(x^2 + y^2) - \frac{4a^2}{3m^4}\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = 1, \qquad (14)$$

kde psáno pro krátkost m^2 místo $16g^2 + 3a^2$.*)

Vraťme se nyní k dotykové čáře konoidu s uvažovanou rozvinutelnou plochou. Její půdorys (6) neb v pravoúhlých souřadnicích

$$(x^2 + y^2)^3 = 16g^2x^2y^2 \qquad (15)$$

je čtyřcípá růžice. Parametricky je dána dotyková křivka rovnicemi

$$x = 2g\sin 2\varphi \,.\, \cos\varphi,\quad y = 2g\sin 2\varphi \,.\, \sin\varphi,\quad z = a\sin^2\varphi \qquad (16)$$

*) Tyto vlastnosti patří ostatně obecnějším šroubovicím na válcích s podstavou hypocykloidickou, jak ukázal M. Lerch ve svém článku: Asymptotické čáry na přímém konoidu; příspěvky k vlastnostem čar šroubových, Časopis, roč. 42 (1913), str. 8.

nebo, při tg $\frac{1}{2}\varphi = t$

$$x = 8g \frac{t(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^3}, \quad y = 16g \frac{t^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^3}, \quad z = 4a \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Je to tedy racionální křivka šestého stupně. Z bodu $A(0, 0, 0)$ se promítá kuželem čtvrtého stupně

$$y^2(x^2 + y^2) = \frac{16g^2}{a^2} x^2 z^2, \tag{17}$$

který má Ox, Oz za dvojné površky. Oz je také dvojnou na konoidu, čára je tedy tímto kuželem a konoidem úplně charakterisována. Pro konstrukci poznamenejme, že řez kužele (17) s rovinou $z = \frac{1}{2}a$ je

$$y^2(x^2 + y^2) - 4g^2x^2 = 0 \text{ či } r = g \operatorname{cotg} \varphi. \tag{18}$$

Podobně průmět z bodu $(0, 0, a)$ do střední roviny je

$$x^2(x^2 + y^2) - 4g^2y^2 = 0 \text{ či } r = g \operatorname{tg} \varphi. \tag{19}$$

Oba průměty jsou t. zv. křivky *kappa*.

Průmět do roviny (xz) jest

$$a^3x^2 - 16g^2z\,(a - z)^2 = 0; \tag{20}$$

jest tedy $x = 0$, $z = a$ dvojný bod s reálnými dvojnými tečnami $ax \pm 4g\,(a - z) = 0$.

Kuspidální body konoidu $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, a)$ jsou dotykové uzly naší sextiky.

Další zajímavá okolnost týká se obálky tečných rovin (7). Tato obálka je ***rozvinutelná plocha čtvrté třídy***. Skutečně, hledáme-li obálku stop roviny (7) v souřadných rovinách $x = 0$, $y = 0$, dospíváme k parabolám

$$X = 0,\ Y^2 = \frac{16g^2}{a}(Z - a); \quad Y = 0,\ X^2 = -\frac{16g^2}{a}\,.\,Z. \tag{21}$$

K tomuto výsledku lze dospěti také takto: Koeficienty rovnice (7) splňují podmínku

$$\frac{4g^2}{a^2}(u^2 + v^2) = w^2, \tag{22}$$

tečnová rovnice konoidu (1) jest

$$(u^2 + v^2)\,\pi + au^2w = 0. \tag{23}$$

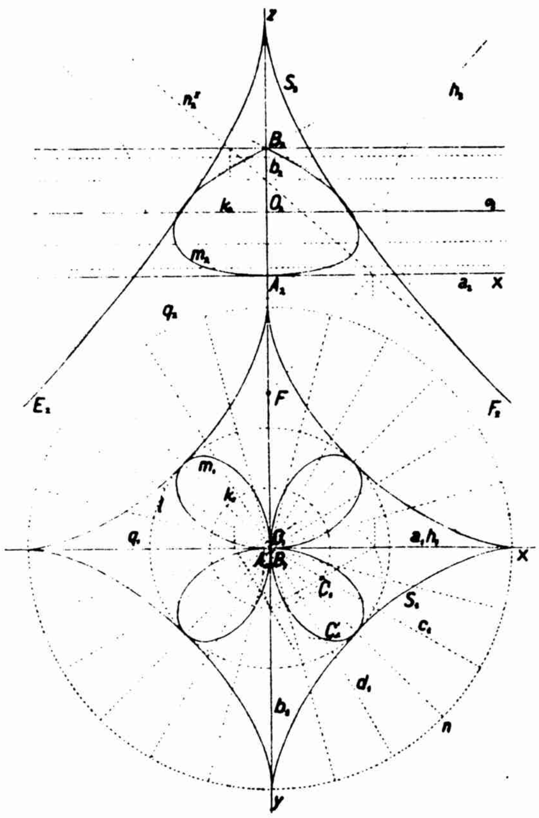
Vyloučením $u^2 + v^2$ dostaneme

$$\frac{4g^2}{a} u^2 + w\pi = 0, \tag{24}$$

z (22) a (24) dostáváme

$$\frac{4g^2}{a^2} v^2 = w^2 + \frac{w\pi}{a}. \tag{25}$$

Rovnice (22), (24), (25) představují dvojné kuželosečky uvažované obálky rovin. Prvá jest v rovině nevlastní, druhé a třetí odpovídají v bodových souřadnicích kuželosečky (21). Naší rozvinutelné ploše je tedy vepsána řada ploch



$$\frac{4g^2}{a^2} u^2 + \frac{w\pi}{a} + k\left(\frac{4g^2}{a^2} v^2 - w^2 - \frac{w\pi}{a}\right) = 0, \tag{26}$$

což lze v bodových souřadnicích napsati

$$\frac{a^2}{8g^2} x^2 + \frac{a^2}{8kg^2} y^2 + \frac{2a}{1-k} z + \frac{2ka^2}{(1-k)^2} = 0. \tag{26a}$$

Máme tedy řadu paraboloidů, jež mají společné roviny symetrie