Poznámka o kvadratických formách.

K. Petr, Praha.

(Došlo dne 10. května 1939.)

Budu uvažovati k vůli zjednodušení kvadratické formy o diskriminantu různém od nuly. Budiž dána taková forma ve tvaru ($a_{ik} = a_{ki}$)

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Diskriminant její jest determinant

$$| a_{ik} |; \; i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Hlavní subdeterminant jeho mající elementy o indexech řádkových (a sloupcových) $i_1, i_2, \ldots, i_s$ označím $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$. Jest tedy na př.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} \text{ označeno symbolem } (1, 2).$$

Hlavní subdeterminant stupně s-tého obsahující prvky o všech indexech od 1 až do s budu značiti ještě stručněji znakem Δ_s. Jest tedy $\Delta_1 = (1) = a_{11}$, $\Delta_2 = (1, 2)$, $\Delta_3 = (1, 2, 3)$ atd. Pak, jak známo, je-li diskriminant (který značíme Δ_n) různý od nuly a rovněž tak hlavní subdeterminanty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, lze převésti danou kvadratickou formu na tvar

$$\Delta_1 X_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} X_n^2, \tag{2}$$

ve kterém jsou $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lineární formy proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v tělese $K(a_{ik})$. Předpokládejme dále, že součinitelé formy (1) jsou vesměs čísla reálná. Pak i součinitelé formy (2) jsou čísla reálná (různá od nuly). Počet záporných součinitelů ve (2) jest pak očividně dán počtem změn znaménkových v řadě

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \tag{3}$$

Převedeme-li nějakým jiným způsobem formu (1) na tvar

$$A_1 Y_1^2 + A_2 Y_2^2 + \ldots + A_n Y_n^2, \tag{4}$$

kde $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ jsou lineární formy prom. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s reálnými součiniteli, jsou $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čísla reálná, od nuly různá a záporných jest právě tolik, kolik jest záporných čísel v součinitelích formy (2). To nám právě praví všeobecně známá věta nazývaná zákonem setrvačnosti u kvadratických forem s reálnými koeficienty.*) Formu (4) nazývati tu budeme kanonický tvar formy (1). Počet záporných koeficientů kanonického tvaru lze tedy ustanoviti vyčíslením počtu změn znaménkových v řadě (3), jsou-li ovšem všechna čísla řady (3) různá od nuly. Řada (3) však počtem změn znaménkových dává zmíněné číslo i tenkráte, jsou-li některé její členy rovny nule, jsou-li jenom členy, jež s nimi (se členy rovnými nule) sousedí v řadě (3) od nuly různy (jakož obecně známo). V následujícím pak chci ukázati nejprve, že i když jsou dva sousední členy rovny nule, lze vhodným počítáním změn znaménkových dospěti k cíli řadou (3). Pak totiž, je-li ve (3) takovýto sled

$$a, 0, 0, b,$$

kde a, b jsou nuly různá čísla, pak čítati jest při tomto sledu dvě změny znaménkové, jsou-li a, b stejného znaménka; jednu pak změnu, jsou-li protivného znaménka. Ba lze i v případě, že i více po sobě následujících členů řady (3) jest rovno nule, nalézti účelné prostředky, jak na základě (3) lze vyčísliti počet záporných součinitelů. Provedu v následujícím příslušné úvahy ještě pro případ, že 3, 4 a 5 po sobě následujících členů řady (3) jest rovno nule.

I.

Formu (1) lze, jak známo, ortogonální substitucí převésti na tento kanonický tvar

$$\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \ldots + \lambda_n Z_n^2,$$

kde λ_k jsou kořeny rovnice

$$| a_{ik} - \lambda\delta_{ik} | = 0; \; i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5)$$
$$\delta_{ii} = 1, \; \delta_{ik} = 0 \text{ při } i \neq k.$$

Počet záporných koeficientů ve (4) jest tudíž (podle zákona setrvačnosti) též dán počtem záporných kořenů rovnice (5). Jelikož pak tyto kořeny (které jsou všecky reálné), jsou vesměs od nuly různé (neboť $\Delta_n \neq 0$) a jelikož kořeny jsou spojité funkce součinitelů, má i na př forma

$$f' = \sum_{i,k} a'_{ik} x_i x_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1')$$

*) Vývody, jež v tomto článku jsou podávány, lze bez potíží rozšířiti na formy Hermitovy (v nichž a_{ik} a a_{ki} nejsou čísla stejná, nýbrž komplexně sdružená).

kde

$$a'_{ik} = a_{ik} + \varepsilon b_{ik}, \quad b_{ik} = b_{ki} \tag{6}$$

stejný počet záporných koeficientů ve svém kanonickém tvaru, je-li ovšem ε dosti malé; budeme stručně říkati, je-li ε nekonečně malé. Tak současně vyhovíme i jiným případným podmínkám požadujícím, aby ε bylo dosti malé. Při nekonečně malém ε znaménko mnohočlenu

$$c_i \varepsilon^i + c_{i+1} \varepsilon^{i+1} + c_{i+2} \varepsilon^{i+2} + \ldots, \quad c_i \neq 0$$

souhlasí se znaménkem členu $c_i \varepsilon^i$, členu nejnižšího stupně v ε od nuly různého. Nahradíme-li pak v řadě (3) čísla a_{ik} čísly a'_{ik} podle (6), dostaneme řadu

$$1, \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n; \tag{3'}$$

jsou-li pak b_{ik} voleny tak, aby žádný z členů této řady nebyl rovný nule, dostáváme spočtěním změn znaménkových v (3′) hledané číslo. Volbu čísel b_{ik} lze však vždy tak provésti; stačí na př. klásti $b_{ii} = 1$, $b_{ik} = 0$ při $i \neq k$. Za předpokladu takovéto volby a za předpokladu, že $\Delta_r \neq 0$ jest dále počet změn znaménkových v řadě

$$1, \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_r; \ \operatorname{sign} \Delta'_r = \operatorname{sign} \Delta_r$$

roven počtu záporných koeficientů v kanonickém tvaru příslušném k f_r, kde f_r jest kvadratická forma plynoucí z f, klademe-li v této za proměnné $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots, x_n$ vesměs nuly. Počet záporných koef. v kanonickém tvaru k f_r označíme P_r; pak jest počet záporných koeficientů v (4) označen P_n. Dále budiž $\Delta_{r+s} \neq 0$. Potom bude počet změn znaménkových v řadě

$$\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}, \ldots, \Delta'_{r+s}, \ \operatorname{sign} \Delta'_{r+s} = \operatorname{sign} \Delta_{r+s} \tag{7}$$

rovný $P_{r+s} - P_r$ (jsou-li b'_{ik} voleny, jak svrchu předpokládáno).

Předpokládajíce stále $\Delta_r \neq 0$, $\Delta_{r+s} \neq 0$ proveďme postupně tyto změny

$$a'_{ik} = a_{ik} + \varepsilon c_{ik}, \quad c_{ik} = c_{ki}, \tag{8}$$

ε „nekonečně malé“,

$$a''_{ik} = a'_{ik} + \varepsilon^s b_{ik}, \ b_{ik} = b_{ki}$$

Při tom čísla c_{ik} volme tak, aby byla všechna rovna nule, jichž oba indexy nejsou uvnitř intervalu $(r, r + s)$, zbývající c_{ik} pak tak, aby $\Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}, \ldots, \Delta'_{r+s-1}$ byly vesměs různy od nuly. Že taková volba jest vždy možna, to vyplývá z okolnosti, že oběma podmínkám hoví na př. tato čísla $c_{ii} = 1$ pro $i = r + 1, r + 2, \ldots, r + s - 1$, ostatní $c_{ik} = 0$. Čísla b_{ik} pak volíme tak, aby žádné z čísel

$$1, \Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_n \tag{8'}$$

nebylo rovno nule (což jak svrchu vytčeno, jest vždy možné). Při tom jest

$$\operatorname{sign} \Delta'_k = \operatorname{sign} \Delta''_k \text{ pro } k = r, r+1, r+2, \ldots, r+s;$$

neboť Δ'_k jsou polynomy v ε stupně nejvýš $s - 1$ a zavedením a''_{ik} místo a'_{ik}, čímž přejde Δ'_k ve Δ''_k, se nemohou změniti součinitelé při ε^k, kde $k < s$. Dává tedy řada (7) číslo $P_{r+s} - P_r$, jsou-li a'_{ik} dány vztahy (8). Stačí tudíž, abychom dospěli na základě řady (3) k stanovení čísla P_n, rozděliti řadu tu na úseky, v nichž krajní členové jsou různy od nuly, vnitřní pak jsou vesměs rovny nule; obecně pro takový úsek tedy platí

$$\Delta_r, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \ldots, \Delta_{r+s-1} = 0, \Delta_{r+s};$$

při tom

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+s} \neq 0.$$

Pak pro jednotlivé úseky vypočísti na základě substituce (8) číslo $P_{r+s} - P_r$.

V následujícím odstavci zevrubně vyložím, jak lze v nejjednodušších případech ($s = 2, 3, 4, 5$) postupovati, abychom zjistili, kolik změn znaménkových úsek takový zastupuje při vyčíslování P_k řadou (3).

II.

1. $s = 2$. V tomto případě máme

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} \neq 0.$$

Nahraďme $a_{r+1,r+1}$ výrazem $a_{r+1,r+1} + \varepsilon$; ostatní a_{ik} buďtež beze změny.

$$\Delta'_r = \Delta_r, \Delta'_{r+1} = \varepsilon\Delta_r, \Delta'_{r+2} = \Delta_{r+2} + \varepsilon(\ldots).$$

Znaménka čísel $\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}$ při nekonečně malém ε jsou tedy dána čísly

$$\Delta_r, \varepsilon\Delta_r, \Delta_{r+2}.$$

Počet změn znaménkových v této řadě čísel od nuly různých dává $P_{r+2} - P_r$; avšak prostřední člen má znaménko závislé na znaménku čísla ε; abychom dostali pro $P_{r+2} - P_r$ číslo nezávislé na ε, jest nutno (a post.), aby Δ_r, Δ_{r+2} měla znaménka protivná. V případě $s = 2$ zastupuje tedy úsek jednu změnu znaménkovou, jak obecně známo. Zároveň jest tady prokázáno, že je-li v řadě po sobě jdoucích hlavních subdeterminantů symetrického determinantu, jeden rovný nule a oba sousední od nuly různy, že tyto sousední mají protivná znaménka.

2. $s = 3$. Tu máme

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \Delta_{r+3} \neq 0.$$

V tomto případě volíme nejprve

$$a'_{r+1,r+2} = a_{r+1,r+2} + \varepsilon,\ a'_{r+2,r+1} = a_{r+2,r+1} + \varepsilon.$$

Tu dostaneme

$$\Delta'_r = \Delta_r \neq 0,\ \Delta'_{r+1} = \Delta_{r+1} = 0,\ \Delta'_{r+2} = -\varepsilon^2\Delta_r,$$
$$\Delta'_{r+3} = \Delta_{r+3} + \varepsilon(\ldots). \qquad \text{(m)}$$

Označíme-li totiž minory, které patří v Δ_{r+2} k a_{ik} znakem A_{ik}, jest

$$A_{r+2,r+2}A_{r+1,r+1} - A^2_{r+1,r+2} = \Delta_{r+2}\Delta_r = 0$$

a jelikož $A_{r+2,r+2} = \Delta_{r+1} = 0$, jest i $A_{r+1,r+2} = 0$. Redukuje se tedy řada (m) na řadu

$$\Delta_r,\ 0,\ -\varepsilon^2\Delta_r,\ \Delta_{r+3}$$

obsahující ještě jednu nulu, jež bychom také mohli odstraniti (na př. zavedeném $a'_{r+1,r+1} = a_{r+1,r+1} + \varepsilon^3$). Avšak od provádění této substituce, jež znaménka členů od nuly různých nemění možno upustiti, stačí, máme-li vědomí, že i poslední nulu můžeme odstraniti, neboť na znaménku členu zastupujícího nulu nezávisí tu očividně hledaný počet změn zn. Zastupují tedy členy

$$\Delta_r \neq 0,\ \Delta_{r+1} = 0,\ \Delta_{r+2} = 0,\ \Delta_{r+3} \neq 0$$

dvě změny znaménkové, jsou-li Δ_r, Δ_{r+3} stejného znaménka, a jednu změnu znam., jsou-li Δ_r, Δ_{r+3} protivného znaménka.

K výsledku tomuto můžeme ještě jednodušší cestou, jíž užijeme i při $s = 4, 5, 6$, dospěti; cesta ta má nad to výhodu, že nepoužívá vět o determinantech, jež bývají často málo přehledné. Volíme

$$a'_{r+1,r+1} = a_{r+1,r+1} + \varepsilon, \text{ ostatní } a'_{ik} \text{ rovny } a_{ik}.$$

Pro stručnost označíme ten hlavní subdeterminant diskriminantu Δ_n, který obsahuje v hlavní diagonále vedle prvků hlavní diagonály v Δ_r ještě prvky $a_{ii}, a_{kk}, \ldots$ znakem

$$[i, k, \ldots.]$$

Pak po učiněné právě volbě dostáváme (je-li $\Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = 0$)

$$\Delta'_r = \Delta_r,\ \Delta'_{r+1} = \varepsilon\Delta_r,\ \Delta'_{r+2} = \varepsilon[r+2],\ \Delta'_{r+3} = \Delta_{r+3} + \varepsilon(\ldots).$$

Není možno, aby za učiněných předpokladů ($\Delta_r \neq 0$, $\Delta_{r+3} \neq 0$) bylo $[r + 2] = 0$; neboť pak by čísla $\varepsilon\Delta_r$, Δ_{r+3}, od nuly různá a sousedící s $\varepsilon[r + 2]$, měla protivná znaménka a znaménko čísla Δ_{r+3} by bylo závislo na ε. Jest tedy $[r + 2] \neq 0$ a řada dávající znaménka jest

$$\Delta_r,\ \varepsilon\Delta_r,\ \varepsilon[r+2],\ \Delta_{r+3}.$$

Má-li počet změn znaménkových v této řadě čísel od nuly různých býti nezávislý od ε, k tomu jest nutno a post., aby sign $[r + 2] =$

$= -\operatorname{sign} \Delta_{r+3}$. Tak obdržíme, bereme-li ε kladně, konečně řadu

$$\Delta_r, -\Delta_{r+3}, \Delta_{r+3}$$

aneb řadu dávající týž výsledek

$$\Delta_r, -\Delta_r, \Delta_{r+3};$$

což se shoduje s výrokem svrchu odvozeným.

3. $s = 4$. Nyní uvažujeme řadu

$$\Delta_r \neq 0,\ \Delta_{r+1} = 0,\ \Delta_{r+2} = 0,\ \Delta_{r+3} = 0,\ \Delta_{r+4} \neq 0. \qquad \text{(u)}$$

Jako v případě $s = 3$ volíme

$$a'_{r+1,r+1} = a_{r+1,r+1} + \varepsilon_1, \text{ ostatní } a'_{ik} \text{ jsou rovny } a_{ik}.$$

Tu dostaneme

$$\Delta'_r = \Delta_r,\ \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1\Delta_r,\ \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1[r+2],\ \Delta'_{r+3} = \varepsilon_1[r+2, r+3],$$
$$\Delta'_{r+4} = \Delta_{r+4} + \varepsilon_1(\ldots).$$

Je-li $[r+2] \neq 0$, jest i $[r+2, r+3]$ různo od nuly; neboť kdyby bylo $[r+2, r+3]$ rovno nule při $[r+2] \neq 0$, bylo by znaménko Δ_{r+4} podle poslední řady protivné znaménku čísla $\varepsilon_1[r+2]$ a tedy závislo na znaménku čísla ε_1. Dále jsou v poslední řadě nejvýše dva členy rovny nule, takže řada ta na základě výsledků pro $s = 3, 2$ nám dává snadno ihned hledaný výsledek.

a) Buď nejprve $[r+2, r+3] \neq 0$, pak $\operatorname{sign}[r+2, r+3] = -\operatorname{sign} \Delta_{r+4}$, neboť počet změn znaménkových jest nezávislý na znaménku ε_1. Volíme-li ε_1 kladně, obdržíme řadu

$$\Delta_r, [r+2], -\Delta_{r+4}, \Delta_{r+4}.$$

b) Budiž $[r+2, r+3] = 0$, pak i $[r+2] = 0$; dospíváme pak k řadě

$$\Delta_r, \varepsilon\Delta_r, 0, 0, \Delta_{r+4},$$

již podle výsledku pro $s = 3$ lze nahraditi řadou

$$\Delta_r, \varepsilon\Delta_r, -\varepsilon\Delta_r, \Delta_{r+4},$$

ze které následuje, jelikož počet změn jest nezávislý na znaménku ε, že v tomto případě $\operatorname{sign} \Delta_r = \operatorname{sign} \Delta_{r+4}$, čímž získáváme konečně řadu o 2 změnách znaménkových.

Máme tak v každém případě: Úsek $\Delta_r, \Delta_{r+1}, \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}$ splňující podmínky (u) zastupuje tolik změn znaménkových, kolik jich obsahuje řada

$$\Delta_r, [r+2], -\Delta_{r+4}, \Delta_{r+4}.$$

V této řadě, je-li $[r+2] = 0$, mají členy sousední s členem $[r+2]$ protivná znaménka (t. j. $\operatorname{sign} \Delta_r = \operatorname{sign} \Delta_{r+4}$).

4. $s = 5$. Postupujeme úplně stejně jako v případě $s = 4$ a nahradíme řadu

$$\Delta_r \neq 0,\ \Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \Delta_{r+3} = \Delta_{r+4} = 0,\ \Delta_{r+5} \neq 0 \qquad \text{(v)}$$

řadou

$$\Delta'_r = \Delta_r,\ \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1\Delta_r,\ \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1[r+2],\ \Delta'_{r+3} = \varepsilon_1[r+2, r+3],$$
$$\Delta'_{r+4} = \varepsilon_1[r+2, r+3, r+4],\ \Delta'_{r+5} = \Delta_{r+5} + \varepsilon_1(\ldots).$$

Jenom tři členy v této řadě mohou býti rovny nule a vystačíme tudíž při výpočtu $P_{r+5} - P_r$ s větami získanými pro $s = 2, 3, 4$.

a) $[r+2, r+3, r+4] \neq 0$; pak sign $[r+2, r+3, r+4] = -$ sign Δ_{r+5}*) a máme řadu (volíce ε_1 kladně, neboť v důsledku právě vytčeného vztahu jest počet změn zn. nezávislý na ε_1)

$$\Delta_r,\ [r+2],\ [r+2, r+3],\ -\Delta_{r+5},\ \Delta_{r+5}.$$

V této řadě oba prostřední členy, je-li jeden z nich anebo oba rovny nule, jest nahraditi (v důsledku pro $s = 2, 3$ získaných pravidel) číslem $-\Delta_r$ anebo Δ_{r+5} (obojí náhrada vede k témuž výsledku).

b) $[r+2, r+3, r+4] = 0$, $[r+2, r+3] = 0$; je-li $[r+2, r+3, r+4] = 0$, nemůže býti $[r+2, r+3]$ různo od nuly (viz svrchu přísl. úvahu pro $s = 4$). Budiž dále $[r+2] \neq 0$. Pak máme řadu

$$\Delta_r,\ \varepsilon_1\Delta_r,\ \varepsilon_1[r+2],\ 0,\ 0,\ \Delta_{r+5},$$

již podle výsledku pro $s = 3$ nahradíme řadou čísel od nuly různých

$$\Delta_r,\ \varepsilon_1\Delta_r,\ \varepsilon_1[r+2],\ -\varepsilon_1[r+2],\ \Delta_{r+5}.$$

Jelikož počet změn znaménkových v této řadě jest nezávislý na znaménku čísla ε_1, jest sign $[r+2] =$ sign Δ_{r+5} a tak máme na konec tuto řadu při ε_1 kladném

$$\Delta_r,\ \Delta_{r+5},\ -\Delta_{r+5},\ \Delta_{r+5} \qquad \text{(w)}$$

dávající 2 resp. 3 změny znaménkové.

c) $[r+2, r+3, r+4] = [r+2, r+3] = [r+2] = 0$.

Obdržíme řadu

$$\Delta_r,\ \varepsilon_1\Delta_r = \Delta'_{r+1},\ 0,\ 0,\ 0,\ \Delta_{r+5}.$$

V tomto případě můžeme s výhodou použíti substituce

$$a'_{r+i,r+i} = a_{r+i,r+i} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2$$

ostatní $a'_{ik} = a_{ik}$. Tu dostaneme pro prvé tři členy řady Δ'_{r+j} tyto výsledky

$$\Delta'_r = \Delta_r,\ \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1\Delta_r,\ \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\Delta_r.$$

Tyto tři členy poskytují při vhodné volbě znamének u ε_1, ε_2 dvě změny a při jiné volbě 2 sledy znaménkové. Zastupuje tedy řada

*) Neboť $[r+2, r+3, r+4]$, $[r+1, r+2, r+3, r+4]$, $[r+1, r+2, r+3, r+4, r+5]$ jsou tři po sobě následující hlavní subdeterminanty a prostřední jest rovný nule.

Δ_{r+j} aspoň 2 a nejvýše 3 změny znaménkové a jest počet změn znaménkových dán opět řadou (w), již ostatně můžeme nahraditi řadou

$$\Delta_r, -\Delta_r, -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5}. \qquad (\mathrm{w}')$$

Lze tedy uzavírati celkem: **Řada (v) zastupuje tolik změn znaménkových, kolik jich jest v řadě**

$$\Delta_r, [r+2], [r+2, r+3], -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5},$$

při čemž, je-li jeden nebo oba ze členů $[r+2]$, $[r+2, r+3]$ **rovný nule, jest oba ty členy nahraditi číslem** $-\Delta_r$ (anebo číslem Δ_{r+5}).

Můžeme výsledek tento vysloviti též stručně takto: Řada (v) zastupuje buď 2 anebo 3 změny znaménkové, vyjma v případě, kdy sign $[r+2] = -$ sign $\Delta_r = -$ sign $[r+2, r+3] = -$ sign Δ_{r+5}, kdy počet změn znaménkových jest 4, a v případě, kdy sign $\Delta_r =$ sign $[r+2] =$ sign $[r+2, r+3] = -$ sign Δ_{r+5}, kdy počet změn znaménkových jest 1.

III.

V tomto odstavci poněkud stručněji naznačím vyšetření případu $s = 6$, při čemž jasně vysvitne, jak lze v případech dalších postupovati, a zároveň objasním některé další obraty přibližující nás k definitivnímu výsledku. Budiž tedy

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \Delta_{r+3} = \Delta_{r+4} = \Delta_{r+5} = 0, \quad \Delta_{r+6} \neq 0.$$

Zavedeme

$$a'_{r+1, r+1} = a_{r+1, r+1} + \varepsilon_1, \text{ ostatní } a'_{ik} = a_{ik}.$$

Pak dostaneme pro $\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \ldots, \Delta'_{r+6}$ po řadě tyto hodnoty

$$\Delta_r, \ \varepsilon_1\Delta_r, \ \varepsilon_1[r+2], \ \varepsilon_1[r+2, r+3], \ \varepsilon_1[r+2, r+3, r+4],$$
$$\varepsilon_1[r+2, r+3, r+4, r+5], \ \Delta_{r+6} + \varepsilon_1(\ldots).$$

V této řadě počet členů, které mohou (ε_1 pokládáme za nekonečně malé, od nuly různé) býti rovny nule, jest 4. Můžeme tedy v důsledku toho, co jsme v předch. odst. podali, dospěti na základě vět odvozených získati číslo $P_{r+6} - P_r$.

Nejprve možno opět tvrditi, že člen předposlední jest různý od nuly, je-li člen třetí od konce různý od nuly; dále, že sign $[r+2, r+3, r+4, r+5] = -$ sign Δ_{r+6} je-li předposlední člen $\neq 0$. Budeme pak probírati postupně jednotlivé možnosti se vyskytující.

a) $[r+2, r+3, r+4, r+5] \neq 0$. Pak v důsledku toho co bylo řečeno máme dáno číslo $P_{r+6} - P_r$ počtem změn znaménkových v řadě (sign ε_1 budiž $+1$)

$$\Delta_r, \ [r+2], \ [r+2, r+3], \ [r+2, r+3, r+4], \ -\Delta_{r+6}, \ \Delta_{r+6}.$$

V této řadě může každý jednotlivý člen ze členů na místě druhém, třetím a čtvrtém býti roven nule (sousední mají při tom znaménka protivná, jsouce od nuly různá). Avšak i dva členy po sobě následující z oněch členů mohou býti rovny nule. Neboť podle toho, co bylo uvedeno pro $s = 3$, stačí, je-li na př.

$$[r + 2] = [r + 2, r + 3] = 0, \; [r + 2, r + 3, r + 4] \neq 0,$$

nahraditi členy na místě 2. a 3. výrazem $- \Delta_r$. Obdobně, je-li

$$[r + 2] \neq 0, \; [r + 2, r + 3] = [r + 2, r + 3, r + 4] = 0$$

nahraditi členy na místě 3. a 4. výrazem Δ_{r+6}.

Zbývá tedy jenom vyšetřiti případ, že by všechny tři členy na místech 2., 3. a 4. byly rovny nule, což provedeme později.

b) $[r + 2, r + 3, r + 4, r + 5] = 0$, $[r + 2, r + 3, r + 4] = 0$, $[r + 2, r + 3] \neq 0$. Tu nejprve přeměníme přirozený pořad indexů u a_{ik} tím, že místo pořadu

$$r, r + 1, r + 2, r + 3, r + 4, r + 5, r + 6,$$

volíme pořad

$$r, r + 2, r + 3, r + 1, r + 4, r + 5, r + 6,$$

čímž se řada Δ_{r+j} změní na řadu

$$\Delta_r, [r + 2], [r + 2, r + 3], \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}.$$

Úsek této řady ohraničený členy $[r + 2, r + 3]$, Δ_{r+6} od nuly různými má podle předpokladu všecky vnitřní členy (počtem 3) rovny nule. Užijeme-li tedy věty odvozené svrchu pro $s = 4$, máme ihned dáno $P_{r+6} - P_r$ počtem změn znaménkových v řadě

$$\Delta_r, [r + 2], [r + 2, r + 3], [r + 2, r + 3, r + 4], - \Delta_{r+6}, \Delta_{r+6};$$

avšak $[r + 2, r + 3, r + 4] = 0$ a tedy $\operatorname{sign} [r + 2, r + 3] = \operatorname{sign} \Delta_{r+6}$, čímž se ta řada redukuje v řadu

$$\Delta_r, [r + 2], \Delta_{r+6}, - \Delta_{r+6}, \Delta_{r+6},$$

která dává počtem změn znaménkových $P_{r+6} - P_r$; $[r + 2]$ není tu rovno nule, jsou-li Δ_r, Δ_{r+6} stejného znaménka.

c) $[r + 2, \; r + 3, \; r + 4, \; r + 5] = [r + 2, \; r + 3, \; r + 4] = [r + 2, r + 3] = 0$, $[r + 2] \neq 0$.

Tu volíme tento pořad indexů

$$r, r + 2, r + 1, r + 3, r + 4, r + 5, r + 6$$

a dostaneme místo řady Δ_{r+j} řadu

$$\Delta_r, [r + 2], \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}.$$

Použijeme-li pak věty pro $s = 5$ máme místo

$$[r + 2], \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}$$

(ve kterémžto úseku 4 vnitřní členy jsou rovny nule) řadu

$$[r+2],\ [r+2,r+3],\ [r+2,r+3,r+4],\ -\Delta_{r+6},\ \Delta_{r+6},$$

kterouž jest nahraditi (jelikož druhý a třetí člen jsou rovny nule) řadou

$$[r+2],\ \Delta_{r+6},\ -\Delta_{r+6},\ \Delta_{r+6},$$

čímž dospějeme v uvažovaném případu k řadě

$$\Delta_r,\ [r+2],\ \Delta_{r+6},\ -\Delta_{r+6},\ \Delta_{r+6}$$

jež se shoduje s řadou případu b).

d) $[r+2, r+3] = 0$, $[r+1, r+3] = 0$. Případ tento uvažovati jest účelno, aby se zkrátily úvahy následující. Tu zavedeme

$$a'_{r+i,r+i} = a_{r+i,r+i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

ostatní a'_{ik} nechť jsou rovny a_{ik}. První čtyři členy řady Δ'_{r+j} budou

$$\Delta_r,\ \varepsilon_1\Delta_r,\ \varepsilon_1[r+2] + \varepsilon_1\varepsilon_2\Delta_r,\ \varepsilon_1\varepsilon_2[r+3] + \varepsilon_1\varepsilon_3[r+2] + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\Delta_r.$$

Nechť jest nejprve $[r+2] \neq 0$. Poslednímu ze čtyř vypsaných členů můžeme vhodnou volbou znaménka čísla ε_3 dáti libovolné znaménko (při čemž znaménko předch. členů se nezmění). Je-li dále sign $[r+2] =$ sign Δ_r, lze vhodnou volbou znamének při ε_1, ε_3 docíliti, že ve čtyřech členech vypsaných se vyskytují 3 sledy a při jiné volbě 2 změny znaménkové. V celé řadě Δ'_{r+j}, $j = 0, 1, \ldots, 6$ se tedy vyskytují aspoň 2 změny a nejvýš 3 změny; i máme, jestliže Δ_r má stejné znam. jako Δ_{r+6}, 2 změny; má-li protivné, 3 změny znaménkové. Stejně, je-li sign $[r+2] = -$ sign Δ_r; tu jsou v celé řadě Δ'_{r+j} buď 4 anebo 3 změny znam.

Konečně, je-li $[r+2] = 0$ a $[r+3] \neq 0$, získáme výsledky, které vyplývají z předcházejících, zaměníme-li $[r+2]$ s $[r+3]$. Je-li pak $[r+2] = [r+3] = 0$, máme stejným způsobem při vhodné volbě znamének u ε_1, ε_2, ε_3 buď tři sledy anebo 3 změny znam. a tedy v celé řadě jsou přesně 3 změny (a nutně sign $\Delta_r =$ $= -$ sign Δ_{r+6}).

Shrneme-li výsledky právě odvozené, obdržíme větu: Jestliže v případě $s = 6$ jest $[r+2, r+3] = 0$ a $[r+1, r+3] = 0$, pak řada Δ_{r+j}, $j = 0, 1, \ldots, 6$ zastupuje při $[r+2] \neq 0$ počet změn znaménkových daný počtem změn v řadě případu b), t. j. v řadě

$$\Delta_r,\ [r+2],\ \Delta_{r+6},\ -\Delta_{r+6},\ \Delta_{r+6};$$

je-li však $[r+2] = 0$, pak v této řadě jest nahraditi $[r+2]$ číslem $[r+3]$. Jsou-li $[r+2]$ i $[r+3]$ rovny nule, jest sign $\Delta_r = -$ $-$ sign Δ_{r+6} a člen $[r+2]$ lze v řadě vypsané potlačiti.

Věta právě získaná má pro nás význam proto, že v násl. případech dosud nevyřešených můžeme se omeziti při $[r+2] = 0$, $[r+2, r+3] = 0$ na předpoklad $[r+1, r+3] \neq 0$.

Lze ještě poznamenati, že při $[r + 2] = 0$ a při sign $\Delta_r = -$ sign Δ_{r+6} zastupuje řada Δ_{r+j} v případě $s = 6$ vždy 3 změny znaménkové, následkem čehož můžeme vedle $[r + 1, r + 3] \neq 0$ v následujícím také předpokládati, že Δ_r, Δ_{r+6} mají stejná znaménka.

$$\text{e)}\ [r + 2] = 0,\ [r + 2, r + 3] = 0,\ [r + 2, r + 3, r + 4] = 0,\ [r + 1, r + 3] \neq 0.$$

V tomto případě stačí přeměnit pořad indexů v následující

$$r, r + 1, r + 3, r + 2, r + 4, r + 5, r + 6.$$

Příslušná řada Δ_{r+j} se změní v následující

$$\Delta_r \neq 0,\ \Delta_{r+1} = 0,\ [r + 1, r + 3],\ \Delta_{r+3} = 0,\ \Delta_{r+4} = 0,\ \Delta_{r+5} = 0,\ \Delta_{r+6},$$

jež se rozpadá ve dva úseky: v prvém $s = 2$, v druhém $s = 4$. Užijeme-li na tyto úseky vět odvozených, máme ihned (se zřetelem k tomu, že z napsané řady vyplývá, že sign $[r + 1, r + 3] = -$ sign Δ_r) tento výsledek: V případě e) zastupuje řada Δ_{r+j} počet změn znaménkových daný počtem změn znam. v řadě

$$\Delta_r,\ -\Delta_r,\ [r + 1, r + 3, r + 4],\ -\Delta_{r+6},\ \Delta_{r+6};$$

v případě, že sign $\Delta_r =$ sign Δ_{r+6}, nemůže $[r + 1, r + 3, r + 4]$ za učiněných předpokladů býti rovno nule.

Přenechávám čtenáři, aby na základě úvah vyčerpávajících všecky možnosti vzhledem k číslům $[r + 2]$, $[r + 2, r + 3]$, $[r + 2, r + 3, r + 4]$, $[r + 2, r + 3, r + 4, r + 5]$ sestavil si přehledné pravidlo pro $s = 6$; jenom podotýkám, že, je-li jedno (anebo více) z uvedených čísel rovno nule a zároveň sign $\Delta_r = -$ sign Δ_{r+6}, vždy jest $P_{r+6} - P_r = 3$.*)

*) Podnět k napsání tohoto článku dalo mi pojednání p. R. Košťála „Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením“ Čas. **68**, str. 50, ve kterém se autor zabývá signaturou kvadratické formy $\sum s_{i+k-2}\lambda_i \lambda_k$. Autor však nesprávně usuzuje, že součet čtverců

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_m^2$$

jest číslo od nuly různé, ačkoliv $A_1, A_2, \ldots$ jsou čísla komplexní (viz na str. 51, dole). Odvozuje na základě toho větu, že v řadě hlavních subdeterminantů patřících k jeho kvadratické formě

$$1,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \ldots$$

ve kterém na př. Δ_r jest různé od nuly, všecky Δ_k, kde $k < r$, jsou rovněž různy od nuly. Že tato věta jest nesprávná a že může v autorově případu dokonce i několik po sobě jdoucích hlavních subdeterminantů býti rovno nule, mohl se p. autor přesvědčiti na zcela jednoduchých příkladech. Kdyby na př. si byl vzal za základ rovnici

$$\lambda^6 + 1 = 0$$