Da die Mächtigkeit der Klasse $T(\vartheta)$ gleich $\aleph_\mu$ ist, läßt sich aus ihr eine ständig wachsende Folge von Ordnungszahlen der Mächtigkeit $\aleph_\varrho$ herausgreifen. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir voraussetzen, daß alle Punkte der Folge $\{x^\eta\}$ in der Klasse $T(\vartheta)$ liegen. Beachten wir nun die Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \ldots > z^\xi > \ldots, \qquad (\xi < \omega_\varrho)$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\zeta, \ldots, \alpha_\vartheta, \xi, 0, 0, \ldots$$

ist. Es ist $x^\eta < z^\xi$ für jedes $\eta < \omega_\mu$ und jedes $\xi < \omega_\varrho$. Leicht sieht man jedoch, daß nach jedem Punkte $z \in T$, der vor allen z^ξ liegt, ein Punkt $x^\eta > z$ existiert. Daher ist die Menge B koinitial mit der Punktfolge $\{z^\xi\}$, was ein Widerspruch ist.

Zweiter Fall. Es existiert keine Klasse von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Da die Punktfolge $\{x^\eta\}$ $\aleph_\mu$ ($\aleph_\mu < \aleph_\varrho$) Punkte enthält, wogegen $\aleph_\varrho$ die Mächtigkeit aller Klassen $T(\zeta)$ ist, existiert eine kleinste Ordnungszahl $\vartheta < \omega_\varrho$ derart, daß in den Klassen $T(1), T(2), \ldots, T(\zeta), \ldots, \zeta < \vartheta$, $\aleph_\mu$ Punkte der Punktfolge $\{x^\eta\}$ eingereiht sind. Leicht erkennt man, daß die Zahl ϑ eine Limeszahl ist und daß jede Klasse $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ die ad 2. definierte Klasse ist. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir wieder voraussetzen, daß alle Punkte der Folge $\{x^\eta\}$ in den Klassen $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ eingeteilt sind. Nun betrachten wir die Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \ldots > z^\xi > \ldots, \qquad (\xi < \omega_\varrho),$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\zeta, \ldots, \xi, 0, 0, \ldots \qquad (\zeta < \omega_\mu).$$

Ähnlicherweise wie im ersten Falle kommen wir zum Schluß, daß die Menge B koinitial mit der Punktfolge $\{z^\xi\}$ ist, was einen Widerspruch ergibt.

Das topologische Seminar der Masaryk Universität, Brno.

*

Dvě poznámky k Bernsteinově ultrakontinuu.

(Obsah předešlého článku.)

F. Bernstein sestrojil uspořádaný prostor, jejž nazval ultrakontinuem (Math. Ann. **61**, 1905, str. 152). Jeho prvky jsou obyčejné nekonečné posloupnosti

$$[\alpha_n] = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

kde α_n jsou ordinální čísla prvé a druhé číselné třídy ($0 \leqq \alpha_n < \omega_1$). Uspořádání je definováno podle tohoto pravidla: bod $[\alpha_n]$ je před bodem $[\beta_n]$, když $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, kdežto $\alpha_k < \beta_k$ pro liché k nebo $\alpha_k > \beta_k$ pro sudé k.

V předešlém článku jsou studovány především charaktery bodů a mezer v ultrakontinuu. Charakter rozkladu ultrakontinua

$$X_u = P + (x) + Q,\ P < x < Q$$

resp.

$$X_u = P + Q,\ P < Q,\ P \neq \emptyset \neq Q$$

označujeme podle obecné definice Hausdorffovy $c_{\varrho\sigma}$; tento symbol znamená, že množina P je konfinální s regulárním ordinálním číslem ω_ϱ a že množina Q^* (jež se liší od Q jen inversním uspořádáním) je konfinální s regulárním číslem ω_σ.

V článku je dokázáno, že body ultrakontinua mají charakter c_{00}, kdežto mezery jsou trojího typu, a to c_{01}, c_{10} a c_{11}. Množina mezer každého typu je v ultrakontinuu hustá a má mohutnost $\aleph_1$. Mezery dají se charakterisovati určitými konečnými uspořádanými skupinami ordinálních čísel prvé a druhé číselné třídy.

Nechť prostor P' vznikne z Bernsteinova ultrakontinua vyplněním všech jeho mezer typu c_{01} a c_{10} a prostor P vyplněním všech mezer vůbec. Topologie těchto prostorů je definována jejich uspořádáním. Kartézský součin $P \times P'$ jest úplně regulární prostor avšak v žádném svém bodě není lokálně normální. Touto vlastností je dána odpověď (kladná) na Čechův problém v Ann. of Math. 38, 1937, str. 843 (On bicompact spaces).

Vyplníme-li všecky mezery Bernsteinova ultrakontinua novými body, dostaneme opět uspořádaný prostor, v němž body ultrakontinua mají zase charakter c_{00}. Přidáme-li pak k tomuto rozšířenému prostoru ještě dvě nevlastní mezery, t. j. mezery $(\emptyset, X_u)$ a $(X_u, \emptyset)$, dostaneme bikompaktní prostor, o němž se zmiňují P. Alexandroff a P. Urysohn ve své knize Mémoire sur les espaces topologiques compacts, 1929, str. 54 pozn. 1 pod čarou, tvrdíce, že charaktery bodů jsou nespočetné. To je však ve sporu s tím, co jsme dříve uvedli. Autoři měli asi na mysli jiný prostor, jehož konstrukce je podobná jako u Bernsteinova ultrakontinua. V článku je to provedeno obecně pro regulární mohutnost.