Zwei Bemerkungen zum Bernsteinschen Ultrakontinuum.

J. Novák, Brno.

(Eingegangen am 20. März 1939.)

In memoriam † Dr. M. Konečný.

Felix Bernstein hat einen geordneten Raum konstruiert, den er Ultrakontinuum genannt hat. Dieser Raum hat einige bemerkenswerte Eigenschaften, die der Autor in den Math. Ann., **61**, 1905 beschrieben hat.

In dieser Abhandlung werden uns hauptsächlich die Element- und die Lückencharaktere interessieren.

In jedem geordneten Raum X ohne erstes und letztes Element ist der Charakter[1]) der Zerlegung $X = P + (x) + Q$, wo $P < x < Q$, definiert und der mit $(\omega_\varrho, \omega_\sigma^*)$ bezeichnet wird. Dieses Symbol bedeutet nach Hausdorff, daß die Menge P mit der regulären Ordnungszahl ω_ϱ konfinal und die Menge Q^* (d. i. die invers geordnete Menge Q) mit der regulären Ordnungszahl ω_σ konfinal ist. Ist der Raum X dicht, so bezeichnet man nach Hausdorff $(\omega_\varrho, \omega_\sigma^*) = c_{\varrho\sigma}$.

Durch die Zerlegung $X = P + Q$, $P < Q$, $P \neq \emptyset \neq Q$, wobei die Menge P kein letztes und die Menge Q kein erstes Element besitzt, ist die Lücke definiert. Da dieselbe ein Element des geordneten Raumes ist, der aus der Menge X durch Ausfüllung der Lücken entsteht, ist in der obigen Definition schon der Begriff des Lückencharakters enthalten. Statt der Bezeichnung Charakter der Zerlegung werden wir die Bezeichnung Typus verwenden.

Die Konfinalität der Menge P läßt sich durch die minimal wohlgeordnete Menge[2]) bestimmen, die wir als transfinite Punktfolge oder einfacher Folge bezeichnen werden. Diese Bezeichnung benützen wir auch bei der inversen Anordnung solcher

[1]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 142.

[2]) d. i. die Menge, deren jeder Abschnitt eine kleinere Mächtigkeit als die Mächtigkeit der ganzen Menge hat.

Mengen. Die Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots$$

oder

$$x^1 > x^2 > \ldots > x^\xi > \ldots \quad (\xi < \omega_\varrho)$$

bezeichnen wir $\{x^\xi\}_1^{\omega_\varrho}$ oder einfacher $\{x^\xi\}$. Wir sagen, daß fast alle Punkte dieser Folge eine bestimmte Eigenschaft haben, wenn die Punkte, die diese Eigenschaft nicht besitzen, eine Menge von der Mächtigkeit $< \aleph_\varrho$ bilden.

Das Bernsteinsche Ultrakontinuum X_u ist ein Raum, dessen Elemente die unendlichen einfachen Folgen

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots = [\alpha_n] \in X_u$$

sind, wo α_n die Ordnungszahlen der ersten und der zweiten Zahlenklasse sind ($0 \leqq \alpha_n < \omega_1$). In diesen Raum wird die Ordnung folgendermaßen eingeführt: Der Punkt $x = [\alpha_n]$ ist vor dem Punkt $y = [\beta_n]$, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$, wogegen $\alpha_k < \beta_k$ bei ungeradem k oder $\alpha_k > \beta_k$ bei geradem k ist.

Die Topologie des Bernsteinschen Ultrakontinuums ist durch die Ordnung gegeben. Unter der Umgebung des Punktes $x \in X_u$ verstehen wir ein solches Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$, daß $x_1 < x < x_2$ ist.

Ein ultrarationaler Punkt ist ein solcher Punkt des Ultrakontinuums, dessen fast alle Koordinaten $\alpha_n = 0$ sind. Bernstein hat bewiesen, daß die Menge der ultrarationalen Punkte im Ultrakontinuum dicht liegt und ihre Mächtigkeit $\aleph_1$ ist.

Satz. Das Bernsteinsche Ultrakontinuum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Es sei $x = [\alpha_n] \in X_u$. Wir wählen die Punkte

$$x^m = [\alpha_n^m], \ (m = 1, 2, \ldots),$$

wo $\alpha_i^m = \alpha_i$ für $1 \leqq i \leqq 2m - 1$, $\alpha_{2m}^m > \alpha_{2m}$, wogegen die anderen Koordinaten α_i^m beliebig sind. Die Punktfolge $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ konvergiert zum Punkt x, da jede Umgebung dieses Punktes fast alle Punkte der Punktfolge $\{x^m\}$ enthält. Um das zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß die Punktfolge $\{x^m\}$ eine wachsende ist und daß jeder ihr Punkt vor dem Punkt x ist. Es sei $\langle x', x'' \rangle$ eine beliebige Umgebung des Punktes x. Bezeichnen wir $x' = [\alpha'_n]$; weil $x' < x$, so existiert eine kleinste natürliche Zahl p derart, daß $\alpha'_p \neq \alpha_p$; es ist $\alpha'_p < \alpha_p$, wenn p eine ungerade Zahl ist, oder $\alpha'_p > \alpha_p$, wenn p eine gerade Zahl ist. In beiden Fällen haben die Punkte x' und x^p folgende Koordinaten:

$$x' = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha'_p, \ldots$$
$$x^p = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \ldots$$

sodaß $x' < x^p$ ist. Damit ist bewiesen, daß die Punktfolge $\{x^m\}_{m=1}^\infty$

von links zum Punkte x konvergiert. Auf ähnliche Weise beweist man, daß die Punktfolge $\{y^m\}_{m=1}^{\infty}$, wo

$$y^m = [\beta_n^m], \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

von rechts zum Punkte x konvergiert. Dabei ist $\beta_i^m = \alpha_i$ für alle $1 \leqq i \leqq 2m$, $\beta_{2m+1}^m > \alpha_{2m+1}$, wogegen anders β_i^m beliebige Koordinaten sind. Das System von Intervallen $\langle x^n, y^n \rangle$ ist ein vollständiges System der Umgebungen des Punktes x. Ist nämlich $\langle y', y'' \rangle$ eine beliebige Umgebung des Punktes x, so existiert eine natürliche Zahl n derart, daß $y' < x^n < x < y^n < y''$, daher $\langle x^n, y^n \rangle \subseteq \subset \langle y', y'' \rangle$.

Satz. Jede monotone Punkfolge (d. i. eine steigende oder fallende) hat höchstens $\aleph_1$ Punkte.

Beweis. Es sei $x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots$, $x^\xi \in X_u$ eine steigende Punktfolge. Jedem Punkte x^ξ ordnen wir irgendeinen ultrarationalen Punkt im Inneren des Intervalls $\langle x^\xi, x^{\xi+1} \rangle$ zu. Da das System dieser offenen Intervalle disjunkt ist, ist eine eineindeutige Abbildung vorhanden und da die Menge der ultrarationalen Punkte von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist, hat die angegebene Folge höchstens $\aleph_1$ Punkte.

Nach diesem Satze kann das Ultrakontinuum a priori Lücken von viererlei Typus, und zwar $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$, enthalten. Die Lücke des Ultrakontinuums ist nämlich durch die Zerlegung $X_u = A + B$, $A < B$, $A \neq \emptyset \neq B$ definiert, wobei die Menge A kein letztes und die Menge B kein erstes Element hat. Da $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, so läßt sich durch transfinite Induktion eine steigende Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots, \quad x^\xi \in A$$

und eine fallende Punktfolge

$$y^1 > y^2 > \ldots > y^\eta > \ldots, \quad y^\eta \in B$$

konstruieren, wobei die erste mit der Menge A konfinal, die zweite mit der Menge B koinitial ist. Die Behauptung folgt aus dem Satze, daß jede unendliche monotone Punktfolge die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder $\aleph_1$ hat.

Satz. Das Bernsteinsche Ultrakontinuum enthält Lücken von dreierlei Typus: c_{01}, c_{10} und c_{11}. Die Lückenmenge jedes Typus ist im Ultrakontinuum dicht.

Der Beweis wird durchgeführt sein, wenn wir in jedem beliebigen Intervall einen Vertreter der angeführten drei Typen bekanntgeben und beweisen, daß eine Lücke vom Typus c_{00} nicht existiert. Es sei daher $x < y$, wo

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$$
$$y = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_n, \beta_{n+1}, \ldots,$$

wobei $\alpha_n \neq \beta_n$. Bezeichnen wir

$$x^m = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} + m, 0, 0, \ldots$$
$$y^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n}, \quad \lambda, \qquad \xi, 0, \ldots$$

für $m = 1, 2, \ldots$ und $\xi < \omega_1$, wo $\lambda = \lim\,(\alpha_{2n+1} + m) < \omega_1$. Es bezeichne $A \subset X_u$ die Menge aller Punkte, die vor jedem Punkte y^ξ sind, und $B \subset X_u$ die Menge aller Punkte, die nach jedem Punkte x^m folgen. Ist nun $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n}, \lambda, \beta, \ldots$ ein beliebiger Punkt, der nach allen Punkten x^m folgt, so ist $y^{\beta+1} < z$. Ist aber $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n}, \gamma, \ldots$ ein Punkt, der vor allen Punkten y^ξ ist, so ist $z < x^p$, wobei die natürliche Zahl p die Beziehung $\gamma < \alpha_{2n+1} + p$ erfüllt. Da alle Punkte der Folge $\{x^m\}_1^\infty$ vor allen Punkten der transfiniten Folge $\{y^\xi\}_1^{\omega_1}$ sind, ist $X_u = A + B$, die Menge A ist konfinal mit der Punktfolge $\{x^m\}$ und die Menge B ist koinitial mit der Punktfolge $\{y^\xi\}$; A besitzt kein letztes und B kein erstes Element. Es ist daher eine Lücke (A, B) vom Typus c_{01} definiert, die innerhalb des Intervalls $\langle x, y\rangle$ liegt.[3])

Auf ähnliche Weise überzeugen wir uns leicht, daß durch eine wachsende transfinite Punktfolge $\{x^\xi\}_1^{\omega_1}$ und durch eine einfach unendliche Punktfolge $\{y^m\}_1^\infty$, wo

$$x^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_n, \ldots, \beta_{2n-1}, \lim\,(\beta_{2n} + m), \xi, 0, \ldots$$
$$y^m = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_n, \ldots, \beta_{2n-1}, \beta_{2n} + m, \qquad 0, 0, \ldots$$

im Inneren des Intervalls $\langle x, y\rangle$ eine Lücke vom Typus c_{10} definiert ist.

Durch transfinite Punktfolgen

$$x^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n-1}, \qquad 0, \alpha_{2n+1} + \xi, 0, \ldots$$
$$y^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots, \alpha_{2n-1} + 1, \xi, \qquad 0, \qquad 0, \ldots$$

ist endlich im Inneren des Intervalls $\langle x, y\rangle$ eine Lücke vom Typus c_{11} definiert. Tatsächlich, es ist $x < x^\xi < y^\eta < y$ für jedes ξ und η und im Ultrakontinuum existiert kein Punkt, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^η wäre.

Es bleibt zu beweisen, daß keine Lücke vom Charakter c_{00} existiert. Wir nehmen, per absurdum, an, daß eine Lücke vom Typus c_{00} existiert, die durch die Zerlegung des Ultrakontinuums

$$X_u = A + B,\ A < B,\ A \neq \emptyset \neq B$$

definiert ist. Da die Menge A kein letztes Element besitzt, existiert eine einfach unendliche wachsende Punktfolge $x^1 < x^2 < \ldots$, die

[3]) Bernstein führt in der zit. Abhandlung folgenden Satz an: Jede einfach unendliche Folge von ständig wachsenden Elementen hat einen Limes. Es widerspricht der Tatsache, denn die Punktfolge $\{x^m\}_1^\infty$ hat keinen Limes.

mit der Menge A konfinal ist. Es können zwei Fälle eintreten. Entweder für jede natürliche Zahl n haben fast alle Punkte die gleiche n-te Koordinate — bezeichnen wir sie α_n — oder es existiert eine kleinste natürliche Zahl p derart, daß unendlich viele Punkte die p-te Koordinate verschieden haben. Man sieht leicht ein, daß die Zahl p ungerade ist. Im ersten Falle läßt sich beweisen, daß die Folge $\{x^n\}$ von links zum Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ konvergiert; das ist aber unmöglich. Im zweiten Falle können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß alle Punkte der Folge mit den ersten $p - 1$ Koordinaten gleich beginnen, und zwar

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1},$$

wogegen die p-te Koordinate fortwährend wächst. Wir bezeichnen ihren Limes λ. Die transfinite Punktfolge $y^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \xi, \ldots$ hat dann diese Eigenschaft: Ist der Punkt $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \lambda, \ldots$ nach allen Punkten x^n, so existiert ein Punkt $y^\xi < z$. Die Folge $\{y^\xi\}$ ist daher koinitial mit der Menge B, so daß die angenommene Lücke einen Charakter c_{01} hat. Das ist ein Widerspruch.

Satz. Jede Lücke des Ultrakontinuums ist durch die geordnete Gruppe einer endlichen Anzahl von Ordnungszahlen der ersten und der zweiten Zahlenklasse charakterisiert. Die Lücke vom Typus c_{01} ist durch die Gruppe einer ungeraden Anzahl von Ordnungszahlen, die mit einer Limeszahl enden, charakterisiert; die Lücke vom Typus c_{10} ist durch die Gruppe von einer geraden Anzahl von Ordnungszahlen, die gleichfalls mit einer Limeszahl enden, charakterisiert; die Lücke vom Typus c_{11} ist durch die endliche Gruppe von Ordnungszahlen, die mit 0 enden, charakterisiert — mit Ausschließung der einzigen Gruppe, die nur die Zahl 0 enthält.

Beweis. Es sei (A, B) eine Lücke vom Typus c_{10}. Es sei

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots \quad (\xi < \omega_1)$$

eine transfinite Punktfolge, die konfinal mit der Menge A ist. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl $p + 1$ (man sieht leicht ein, daß die Zahl p gerade ist und daß $p > 0$), derart, daß die $(p + 1)$-ten Koordinaten fast aller Punkte x^ξ eine unabzählbare ständig wachsende Folge von Ordnungszahlen bilden, wogegen die i-te Koordinate fast aller dieser Punkte x^ξ gemeinsam ist. Bezeichnen wir diese i-te Koordinate α_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, so beginnen fast alle diese Punkte x^ξ mit den ersten p Koordinaten folgendermaßen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Die Ordnungszahl α_p ist eine Limeszahl. Wenn nämlich α_p eine isolierte Zahl wäre und $\alpha_p \neq 0$, wäre die fallende transfinite Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \ldots > z^\xi > \ldots \qquad (\xi < \omega_1),$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p - 1, 0, \xi, 0, 0, \ldots,$$

koinitial mit der Menge B, was jedoch nicht möglich ist. Wenn $\alpha_p = 0$ wäre, würde derselbe Umstand eintreten, wenn wir nämlich

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, 0, 0, \ldots$$

definieren.

Ist nun

$$y^1 < y^2 < \ldots < y^\xi < \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$

eine andere unabzählbare Punktfolge, die konfinal mit der Menge A ist, so ist wiederum eine natürliche Zahl $q + 1$ und die Gruppe der Ordnungszahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ von der schon angeführten Eigenschaft vorhanden. Wenn nun $p > q$ oder $p < q$, wären unabzählbar viele Punkte x^ξ vor oder nach unabzählbar vielen Punkten y^ξ. Das ist jedoch unmöglich, da beide Folgen konfinal mit der Menge A sind. Daher ist $p = q$. Aus demselben Grunde ist $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, \ldots, p$.

Damit ist bewiesen, daß jeder Lücke vom Typus c_{10} eindeutig eine geordnete Gruppe von gerader Anzahl von Ordnungszahlen zugeordnet ist, von denen die letzte eine Limeszahl ist.

Es gilt auch das Umgekehrte. Jeder geordneten Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ \alpha_i < \omega_1, \ (i = 1, 2, \ldots, p),$$

wo p eine gerade natürliche Zahl ist und α_p eine Limeszahl ist, entspricht eine Lücke vom Typus c_{10}. Diese ist durch die Punktfolgen

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$
$$y^1 > y^2 > \ldots > y^n > \ldots \qquad (n < \omega_0)$$

definiert, wo

$$x^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \quad \xi, 0, 0, \ldots$$
$$y^n = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_n, 0, 0, \ldots$$

und $\lim \beta_n = \alpha_p$. Tatsächlich, alle Punkte x^ξ sind vor allen Punkten y^n und im Ultrakontinuum existiert kein Punkt, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^n wäre. Leicht sieht man ein, daß zwei verschiedenen solchen Gruppen zwei verschiedene Lücken vom Typus c_{10} entsprechen.

Eine völlig gleiche Überlegung führt uns zum Ergebnis, daß der Lücke vom Typus c_{01} eineindeutig eine Gruppe von ungerader Anzahl von Ordnungszahlen entspricht, wobei die letzte Zahl eine Limeszahl ist.

Beachten wir nun die Lücken vom Typus c_{11}. Es sei (A, B) eine solche Lücke. Die transfinite Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$

sei mit der Menge A konfinal und die Punktfolge

$$y^1 > y^2 > \ldots > y^\xi > \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$

möge mit der Menge B koinitial sein. Der ersten Folge entspricht eine geordnete Gruppe von gerader Anzahl $p > 1$ von Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, wobei α_p keine Limeszahl ist (sonst wäre hier eine Lücke vom Typus c_{10} definiert), wogegen der zweiten Folge eine Gruppe von ungerader Anzahl $q > 0$ von Ordnungszahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ entspricht. Wir untersuchen diese zwei Fälle: $\alpha_p = 0$ und $\alpha_p \neq 0$. Aus der Tatsache, daß kein Punkt des Ultrakontinuums existiert, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^ξ wäre, folgern wir, daß im ersten Falle fast alle Punkte y^ξ in den ersten $p - 1$ Koordinaten folgendermaßen beginnen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} + 1$, wogegen höchstens abzählbar viele Punkte y^ξ die p-te Koordinate gleich haben und daß im zweiten Falle fast alle Punkte y^ξ in den ersten $p + 1$ Koordinaten folgendermaßen beginnen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p - 1, 0$, wogegen höchstens abzählbar viele Punkte y^ξ die $(p + 2)$-te Koordinate gleich haben.

Daraus folgt sogleich, daß jeder Lücke vom Typus c_{11} auf zweifache Art eine geordnete Gruppe von Ordnungszahlen sich zureihen läßt, von denen eine mit 0 endet, die andere jedoch nicht. Entschließen wir uns für die erste Wahl, dann ist auch in diesem Falle die Zuordnung eindeutig.

Auch umgekehrt: Der geordneten Gruppe von p $(p > 1)$ Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, 0$ entspricht eindeutig eine Lücke vom Typus c_{11}, die durch die Punktfolgen

$$u^1 < u^2 < \ldots < u^\xi < \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$
$$v^1 > v^2 > \ldots > v^\xi > \ldots \qquad (\xi < \omega_1)$$

definiert ist, wobei

$$u^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \quad 0, \xi, \ldots$$
$$v^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, \ldots,$$

wenn die Zahl p gerade ist, und

$$u^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, \ldots$$
$$v^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \quad 0, \xi, \ldots,$$

wenn die Zahl p ungerade ist.

Es ist notwendig noch den Ausnahmsfall $p = 1$ zu beachten, d. h. den Fall, in dem die Gruppe nur die Zahl 0 enthält. Jede Punktfolge, deren erste Koordinate die Zahl 0 ist und deren zweite Koordinate fortwährend wächst, ist koinitial mit dem Ulrakontinuum. Daher entspricht der Gruppe, die nur die Zahl 0 enthält, keine Lücke (nach unserer Definition der Lücke).

Satz.[4]) Die Menge aller Lücken von jedem Typus hat die Mächtigkeit $\aleph_1$.

Beweis. Wir beachten die Lücken vom Typus c_{01}. Es sind ihrer soviele als es geordnete Gruppen von ungerader Anzahl von Ordnungszahlen $< \omega_1$, die mit einer Limeszahl enden, gibt. Alle geordneten Gruppen von $2n + 1$ Ordnungszahlen, die mit einer Limeszahl enden ($n \geqq 0$), ist $\aleph_1^{2n}$, so daß alle solche Gruppen $\sum_{n=0}^{\infty} \aleph_1^{2n+1} = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ sind.

Auf ähnliche Weise beweist man den Satz für die Lücken vom Typus c_{10} und c_{11}.

Die erste Bemerkung zum Bernsteinschen Ultrakontinuum

berührt das Problem von Prof. E. Čech in den Annals of Mathematics **38**, 1937, S. 843 (On bicompact spaces). Im Wesentlichen handelt es sich um die Konstruktion eines vollständig regulären[5]) Raumes, der in keinem seiner Punkte lokal normal[5]) ist.

Bezeichnen wir P als geordneten Raum, der aus dem Bernsteinschen Ultrakontinuum durch Ausfüllung seiner Lücken und P' als geordneten Raum, der aus dem Ultrakontinuum durch Ausfüllung der Lücken vom Typus c_{01} und c_{10} (jedoch nicht der Lücken vom Typus c_{11}) entsteht, so hat diese Eigenschaft das Kartesische Produkt $P \times P'$, wie der folgende Satz beweist.

Satz. Der Raum $P \times P'$ ist in keinem seinem Punkte normal.

Beweis. Es sei $c = (a, b)$, $a \in P$, $b \in P'$. Es sei $0(c) \subset P \times P'$ eine beliebige Umgebung des Punktes c im Raum $P \times P'$. Dann gibt es Punkte $a_1 \in P$, $a_2 \in P$, weiter Punkte $b_1 \in P$, $b_2 \in P$ derart, daß $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$ und daß

$$\underset{z}{E}\,[z = (x, y);\ a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2] \subset 0(c).$$

Es seien (A, B) und (C, D) Lücken vom Typus c_{11} der Eigenschaft, daß

$$a_1 < (A, B) < a_2,\ b_1 < (C, D) < b_2,$$

sodaß transfinite unabzählbare ständig wachsende Punktfolgen im Bernsteinschen Ultrakontinuum — wir bezeichnen sie

$$a_1 < x^1 < x^2 < \ldots < x^\xi < \ldots,\ b_1 < y^1 < y^2 < \ldots < y^\xi < \ldots \quad (\xi < \omega_1),$$

[4]) Dieser Satz gibt die Lösung des Problems von Prof. Čech im topologischen Seminar vom Jahre 1938: Wieviele Lücken gibt es im Bernsteinschen Ultrakontinuum?

[5]) Die entsprechenden Definitionen findet man in l. c. S. 826 und 843.

existieren, von denen die erste mit der Menge A, die zweite mit der Menge C konfinal ist (und beide Punktfolgen sind ähnlich mit der Folge aller Ordnungszahlen $< \omega_1$). Die Mengen

$$\underset{\xi<\omega_1}{E}\,[(x^\xi, y^\xi)] \text{ und } \underset{\xi<\omega_1}{E}\,[((A, B), y^\xi)]$$

sind im Raum $P \times P'$, daher auch in $\bar{0}(c)$ abgeschlossen. In der Tat, ist nämlich $z = (x, y) \neq (x^\xi, y^\xi)$, dann ist entweder $x \neq x^\xi$ oder $x = x^\xi$ und $y \neq y^\xi$ für $\xi < \omega_1$. Weil weiter die Lücke (C, D) kein Element des Raumes P' ist, existiert immer eine Umgebung des Punktes z, die keinen Punkt (x^ξ, y^ξ) enthält, sodaß

$$P \times P' - \underset{\xi<\omega_1}{E}\,[(x^\xi, y^\xi)]$$

eine offene Menge ist. In ähnlicher Weise beweist man die Abgeschlossenheit der zweiten Menge. Diese zwei Mengen sind jedoch nicht in $\bar{0}(c)$ durch offene Mengen trennbar. Tatsächlich, es sei $V \subset \bar{0}(c)$ eine Umgebung der Menge $\underset{\xi<\omega_1}{E}\,[(A, B), y^\xi)]$. Wir wählen den Punkt $((A, B), y^{\xi_1}) \in V$. Dann gibt es einen Punkt $(x^{\xi_2}, y^{\xi_1}) \in V$ derart, daß $\xi_1 < \xi_2$. Wenn wir schon in V die Punkte

$$(x^{\xi_2}, y^{\xi_1}), (x^{\xi_4}, y^{\xi_3}), \ldots, (x^{\xi_{2n}}, y^{\xi_{2n-1}})$$

von der Eigenschaft $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{2n}$ definiert haben, konstruieren wir nach der Methode der vollständigen Induktion einen Punkt $(x^{\xi_{2n+2}}, y^{\xi_{2n+1}}$ (folgendermaßen: wir wählen zunächst die Ordnungszahl $\xi_{2n+1} > \xi_{2n}$, $\xi_{2n+1} < \omega_1$ und den Punkt $((A, B), y^{\xi_{2n+1}}) \in V$. Es ist dann ein Punkt $(x^{\xi_{2n+2}}, y^{\xi_{2n+1}}) \in V$ derart vorhanden, daß $\xi_{2n+1} < \xi_{2n+2}$.

Bezeichnen wir $\lim \xi_n = \eta$. Dann konvergiert die Punktfolge $\{x^{\xi_{2n}}\}_{n=1}^{\infty}$ im Raum P zum Punkt x^η und die Punktfolge $\{y^{\xi_{2n-1}}\}_{n=1}^{\infty}$ im Raum P' zum Punkt y^η (in der Tat, der Punkt y^η ist entweder ein Punkt des Ultrakontinuums, oder eine Lücke vom Typus c_{01}, daher $y^\eta \in P'$). Die Punktfolge $\{(x^{\xi_{2n}}, y^{\xi_{2n-1}})\}_1^\infty$ konvergiert in $\bar{0}(c)$ zum Punkt $(x^\eta, y^\eta) \in \bar{0}(c)$, so daß die angeführten Mengen wirklich nicht durch die offenen Mengen trennbar sind, w. z. b. w.

Aus diesem Satze folgt weiter, daß die lokale Normalität keine Eigenschaft des Kartesischen Produktes ist, d. h. die Kartesische Operation muß die Eigenschaft nicht erhalten.

Die zweite Bemerkung zum Bernsteinschen Ultrakontinuum.

In jedem geordneten Raum X sind zwei Charaktere definiert. Es ist dies zunächst der Charakter des Punktes $x \in X$ im topologischen Sinne, d. i. die kleinste Mächtigkeit des vollständigen

Umgebungssystems des Punktes x und dann der Charakter der Zerlegung $X = P + (x) + Q$, wo $P < x < Q$, den wir als den Typus des Punktes (der Lücke) bezeichnet haben.

Zwischen dem unendlichen Charakter $\aleph_\lambda$ des Punktes $x \in X$ und dem Charakter $(\omega_\varrho, \omega_\sigma^*)$ der Zerlegung $X = P + (x) + Q$ gilt diese Beziehung: $\lambda = \max(\varrho, \sigma)$. Der Charakter des Punktes ist daher eindeutig durch den Charakter der Zerlegung bestimmt.

P. Alexandroff und P. Urysohn haben bewiesen,[6]) daß durch die Ausfüllung der Lücken aus dem geordneten Raum X ein bikompakter Raum entsteht (da ist es notwendig auch die uneigentlichen Lücken $(X, \emptyset)$ und $(\emptyset, X)$ in Betracht zu ziehen).

Durch Ausfüllung der Lücken im geordneten Raum X ändert sich nicht der Charakter der Punkte. In der Tat, ist $x \in X$ und sind dann (A, B) und (C, D) zwei Lücken derart, daß $(A, B) < x <$ $< (C, D)$, dann gibt es Punkte $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, die die Beziehung $(A, B) < x_1 < x < x_2 < (C, D)$ befriedigen.

Wir haben schon bewiesen, daß die Punktcharaktere im Bernsteinschen Ultrakontinuum abzählbar sind. Füllen wir alle Lücken im Ultrakontinuum aus, so hat jeder Punkt $x \in X_u$ in dem umfassenden Raum wieder einen abzählbaren Charakter. Das ist im Widerspruch mit der Behauptung, die die Autoren P. Alexandroff und P. Urysohn in zit. Arbeit in der Bemerkung unter dem Strich anführen, daß man nämlich durch Ausfüllung aller Lücken im Bernsteinschen Ultrakontinuum durch neue Punkte einen bikompakten Raum mit unabzählbaren Charakteren bekommt.[7]) Die Verfasser hatten vielleicht im Auge einen anderen Raum, dessen Konstruktion ähnlich ist wie diejenige des Ultrakontinuums. Diese Konstruktion wollen wir hier anführen und zwar gleich allgemein für die Punktcharaktere von regulären Alefs.

Wir bezeichnen mit T einen Raum, dessen Elemente die transfiniten Folgen von Ordnungszahlen

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\xi, \ldots = [\alpha_\xi] \in T, \ \alpha_\xi < \omega_\varrho$$

sind, wobei ω_ϱ die reguläre Anfangszahl ist. In diesen Raum wird die Ordnung folgendermaßen eingeführt: Der Punkt $x = [\alpha_\xi]$ ist vor dem Punkt $y = [\beta_\xi]$, wenn $\alpha_\eta = \beta_\eta$ für $\eta < \xi_0$, wogegen $\alpha_{\xi_0} < \beta_{\xi_0}$ bei ungeradem ξ_0 oder $\alpha_{\xi_0} > \beta_{\xi_0}$ bei geradem ξ_0 ist.

Die Topologie dieses Raumes ist durch die Ordnung gegeben. Dieser Raum hat dann die angeführte Eigenschaft. Den Beweis dieser Behauptung teilen wir in drei Abschnitte.

I. **Hilfsatz.** Jede monotone Punktfolge im Raum T hat höchstens die Mächtigkeit $\aleph_\varrho$.

[6]) P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterodam 1929, S. 52.

[7]) P. Alexandroff et P. Urysohn, l. c. S. 54.

Zum indirekten Beweis setzen wir voraus, daß eine wachsende Punktfolge existiert (für die fallende Punktfolge ist der Beweis derselbe), die wir

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\eta < \ldots \qquad (\eta < \omega_{\varrho+1}),$$

wo

$$x^\eta = [\alpha^\eta{}_\xi] \in T,$$

bezeichnen. Zu jeder Ordnungszahl $\vartheta < \omega_\varrho$ gibt es dann eine Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\vartheta$$

von Ordnungszahlen $< \omega_\varrho$, mit der fast alle Punkte x^η beginnen. Diese Behauptung beweisen wir durch transfinite Induktion. Es sei $\pi < \vartheta$. Wir setzen voraus, daß die Aussage für alle Ordnungszahlen $\zeta < \pi$ richtig ist und beweisen ihre Richtigkeit auch für π. Nach der Voraussetzung beginnen fast alle Punkte folgendermaßen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\zeta, \ldots \qquad (\zeta < \pi).$$

Weil die Mächtigkeit der Menge dieser fast aller Punkte $\aleph_{\varrho+1}$ ist, wogegen die Koordinate $\alpha_\pi{}^\eta$ nur die Ordnungszahlen $< \omega_\varrho$ (daher die Menge der Mächtigkeit $\aleph_\varrho$) durchlaufen kann, ist eine Koordinate vorhanden — bezeichnen wir sie α_π — die $\aleph_{\varrho+1}$ Punkten der Folge $\{x^\eta\}$ gemeinsam ist. Eine solche Koordinate gibt es nur eine, denn sonst wären die $\aleph_{\varrho+1}$ Punkte x^η vor $\aleph_{\varrho+1}$ Punkten x^η, was nicht möglich ist. Damit ist bewiesen, daß fast alle Punkte der Folge mit der Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi$$

beginnen.

Alle Punkte x^η teilen wir in Klassen nach folgender Regel ein: Den Punkt x^η reihen wir in die Klasse $T(\xi)$, $\xi < \omega_\varrho$, dann und nur dann ein, wenn ξ die erste Ordnungszahl derart ist, daß $\alpha_\xi{}^\eta \neq \alpha_\xi$ ist. Leicht sieht man ein, daß jeder Punkt genau in einer Klasse liegt. Da die Mächtigkeit jeder Klasse $< \aleph_{\varrho+1}$, daher $\leqq \aleph_\varrho$, ist und weil es solcher Klassen höchstens $\aleph_\varrho$ gibt, ist die Mächtigkeit der Punktfolge höchstens $\aleph_\varrho \,.\, \aleph_\varrho = \aleph_\varrho$, was ein Widerspruch ist.

II. **Satz.** Jeder Punkt $x = [\alpha_\xi] \in T$ ist vom Charakter (ϱ, ϱ).

Beweis. Wir setzen

$$x^\eta = [\alpha^\eta_\xi],$$

wobei die Koordinaten α^η_ξ durch die Bedingungen $\alpha^\eta_\xi = \alpha_\xi$ für $\xi \leqq 2\eta + 1$, $\alpha^\eta_{2\eta+2} > \alpha_{2\eta+2}$ bestimmt sind, sonst sind jedoch die Koordinaten α^η_ξ beliebig. Weiter bezeichnen wir

$$y^\eta = [\beta^\eta_\xi],$$

wo $\beta^\eta_\xi = \alpha_\xi$ für $\xi \leqq 2\eta$, $\beta^\eta_{2\eta+1} > \alpha_{2\eta+1}$, wogegen die Koordinaten

β_ξ^η beliebig sind. Aus diesen Definitionen folgt

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\eta < \ldots$$
$$y^1 > y^2 > \ldots > y^\eta > \ldots$$

und ist $\vartheta < \omega_\varrho$, dann beginnen fast alle Punkte der ersten Folge in den ersten ϑ Koordinaten gleich. Dasselbe gilt auch von der zweiten Punktfolge. Daraus ersieht man leicht, daß in jedem Intervall $\langle x', x\rangle$ ein Punkt der ersten Folge und in jedem Intervall $\langle x, x''\rangle$ ein Punkt der zweiten Folge vorhanden ist. Die erste Punktfolge ist daher konfinal mit der Menge aller Punkte, die $< x$ und die zweite Punktfolge ist koinitial mit der Menge aller Punkte, die $> x$ sind.

III. **Satz.** Jede Lücke des Raumes T ist vom Typus $c_{\mu\varrho}$ oder $c_{\varrho\mu}$, wobei ω_μ eine reguläre Zahl $\leqq \omega_\varrho$ ist.[8]) Die Lückenmenge der ersten und auch der zweiten Art liegt im Raum T dicht.

Die Beweisart dieses Satzes wird ähnlich sein, wie es im Falle des Bernsteinschen Ultrakontinuums war. Es sei $x = [\alpha_\xi] < < [\beta_\xi] = y$, wo

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi, \ldots, \quad y = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_\pi, \ldots \qquad (\pi \geqq 1).$$

Es sei ω_μ eine reguläre Zahl $< \omega_\varrho$ und es sei π' eine ungerade Ordnungszahl, die nach der Zahl π ist. Wir definieren die transfiniten Punktfolgen

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\eta < \ldots$$
$$y^1 > y^2 > \ldots > y^\xi > \ldots$$
$$z^1 < z^2 < \ldots < z^\xi < \ldots \quad (\xi < \omega_\varrho)$$
$$t^1 > t^2 > \ldots > t^\eta > \ldots \quad (\eta < \omega_\mu < \omega_\varrho)$$
$$u^1 < u^2 < \ldots < u^\xi < \ldots$$
$$v^1 > v^2 > \ldots > v^\xi > \ldots,$$

wobei

$$x^\eta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi, \ldots, \alpha_{\pi'} + \eta, 0, 0, \ldots$$
$$y^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi, \ldots, \lim\, (\alpha_{\pi'} + \eta), \xi, 0, \ldots$$
$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_\pi, \ldots, \lim\, (\beta_{\pi'+1} + \eta), \xi, 0, \ldots$$
$$t^\eta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_\pi, \ldots, \beta_{\pi'+1} + \eta, 0, 0, \ldots$$
$$u^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi, \ldots, \alpha_{\pi'}, 0, \alpha_{\pi'+2} + \xi, 0, 0, \ldots$$
$$v^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\pi, \ldots, \alpha_{\pi'} + 1, \xi, 0, 0, \ldots$$

Der Leser überzeugt sich leicht, daß durch die ersten zwei Folgen im Intervall $\langle x, y\rangle$ eine Lücke vom Typus $c_{\mu\varrho}$, durch die zwei anderen Folgen eine Lücke vom Typus $c_{\varrho\mu}$ und endlich durch die letzten zwei Folgen eine Lücke vom Typus $c_{\varrho\varrho}$ definiert ist.

---

[8]) Diese Eigenschaft war schon F. Hausdorff bekannt; vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 181.

Es bleibt noch zu beweisen, daß keine Lücke vom Typus $c_{\mu\nu} = (\omega_\mu, \omega_\nu^*)$ existiert, wo ω_μ und ω_ν reguläre Zahlen kleiner als ω_ϱ sind. Zum indirekten Beweis setzen wir voraus, daß eine solche Lücke existiere. Diese ist durch die Zerlegung

$$T = A + B, \; A < B, \; A \neq \emptyset \neq B$$

definiert. Die Menge A ist konfinal mit der Folge

$$x^1 < x^2 < \ldots < x^\eta < \ldots, \qquad (\eta < \omega_\mu)$$

$$x^\eta = [\alpha_\xi^\eta] \in T$$

und die Menge B ist koinitial mit der Folge

$$y^1 > y^2 > \ldots > y^\zeta > \ldots, \qquad (\zeta < \omega_\nu).$$

Beachten wir die erste Punktfolge. Ihre Punkte teilen wir in Klassen, die wir durch die transfinite Konstruktion definieren. Es sei $\pi < \omega_\varrho$. Es wären schon die Klassen $T(1), T(2), \ldots, T(\zeta), \ldots$ und die Gruppe der Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\zeta, \ldots, \zeta < \pi$, definiert. Wir definieren die Klasse $T(\pi)$ folgendermaßen:

1. Entweder sind alle Punkte x^η der Folge in den schon definierten Klassen eingeteilt und es verbleiben keine weiteren Punkte — dann definieren wir $\alpha_\pi = 0$ und $T(\pi)$ bedeutet die leere Klasse.

2. Oder fast alle verbleibenden Punkte haben die π-te Koordinate gleich — existiert sie, dann ist sie die einzige und wir bezeichnen sie mit α_π; in die Klasse $T(\pi)$ reihen wir dann alle verbleibenden Punkte x^η ein, für welche $x_\pi^\eta \neq \alpha_\pi$ ist.

3. Oder endlich existiert keine Menge von fast allen verbleibenden Punkten x^η derart, die die π-te Koordinate gleich hätten — und dann definieren wir $\alpha_\pi = \lim x_\pi^\eta$, wenn dieser Limes existiert, anderenfalls $\alpha_\pi = 0$ und in die Klasse $T(\pi)$ reihen wir alle verbleibenden Punkte ein.

Leicht sieht man ein, daß jeder Punkt x^η — bis vielleicht auf einen einzigen Punkt $[\alpha_\xi] \in T$ — in irgendeine Klasse eingereiht ist und daß diese Klassen disjunkt sind. Tatsächlich, existiert nämlich eine Klasse, die ad 3. definiert ist, dann ist dies selbstverständlich. Existiert sie nicht, dann ist $x^\eta = [x_\xi^\eta] \in T(\pi)$, wo π die kleinste derartige Ordnungszahl ist, daß $x_\pi^\eta \neq \alpha_\pi$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

E r s t e r F a l l. Es gibt eine Klasse von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Es sei ϑ die kleinste Ordnungszahl derart, daß die Klasse $T(\vartheta)$ diese Eigenschaft hat. Dann ist die Zahl ϑ ungerade und jede Klasse $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ ist die, welche ad 2. definiert ist. Der Punkt $x^\eta \in T(\vartheta)$ beginnt daher in den ersten ϑ Koordinaten folgendermaßen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\zeta, \ldots, x_\vartheta^\eta \qquad (\zeta < \vartheta).$$