Über Reihen von der Form $A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z}$.

I. Abhandlung.

Ernst Lammel, Prag.

(Eingegangen am 29. März 1938.)

In einer früheren Arbeit wurden folgende Sätze bewiesen:[1])

Ist $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, für die $\overline{\lim\limits_{\mu \to \infty}} |a_\mu| < 1$ ist, so konvergiert eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \tag{1}$$

dann und nur dann für jeden Wert von z aus $|z| < 1$, wenn die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ der Limesbedingung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|A_\nu|} \leqq 1 \tag{2}$$

genügen.

Besitzt die Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ und erfüllen die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Bedingung (2), so konvergiert eine Reihe von der Form (1) gleichmäßig auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge und stellt also eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktion dar.

Umgekehrt: Hat die Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$, so läßt sich jede in $|z| < 1$ reguläre Funktion in eine Reihe von der Form (1) entwickeln. Für

[1]) E. Lammel, Zum Interpolationsprobleme im Einheitskreise regulärer Funktionen. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **66** (1936-37), 57—61.

die zu einer Funktion $f(z)$ gehörigen Entwicklungskoeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt die Limesbeziehung (2).

In dieser Abhandlung sollen die beiden folgenden Sätze bewiesen werden:

Satz I. Analogon des Abelschen Stetigkeitssatzes über Potenzreihen. Es sei $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, welche keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ besitzt und $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Folge, die der Limesbedingung (2) genügt.

Besitzt dann die auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < 1$ gleichmäßig konvergente Reihe (1) auch noch im Punkte $z = e^{i\varphi_0}$ eine endliche Summe $S(e^{i\varphi_0})$, so ist bei Annäherung an die Stelle $z = e^{i\varphi_0}$ aus dem Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ längs eines Stolzschen Weges[2])

$$\lim_{z \to e^{i\varphi_0}} f(z) = S(e^{i\varphi_0}),$$

wenn $f(z)$ die durch (1) dargestellte in $|z| < 1$ reguläre Funktion bedeutet.

Satz II. Analogon der Tauberschen Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes über Potenzreihen. Es sei $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, welche auf $|z| = 1$ keinen Häufungspunkt besitzt und die Folge $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ genüge der Bedingung

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu A_\nu = 0. \tag{3}$$

Die Reihe (1) konvergiert dann also auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig und stellt also eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ dar.

Ist dann für $z \to e^{i\varphi_0}$ bei radialer Annäherung aus dem Innern von $|z| < 1$

$$f(z) \to F(\varphi_0), \tag{4}$$

so gilt

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{e^{i\varphi_0} - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu e^{i\varphi_0}} = F(\varphi_0).$$

Die Beweise bilden wir den gebräuchlichen Beweisen für die analogen Sätze über Potenzreihen nach.

---

[2]) Unter einem Stolzschen Weg versteht man nach Hardy und Littlewood eine in $|z| < 1$ verlaufende und in $z = e^{i\varphi_0}$ einmündende Jordankurve, welche zwischen zwei in $z = e^{i\varphi_0}$ endenden Sehnen des Kreises $|z| \leqq 1$ verläuft.

§ 1. *Beweis des Satzes I.*

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß $S(e^{i\varphi_0}) = 0$ ist. Sonst betrachte man $f(z) - S(e^{i\varphi_0})$.

Die durch (1) gegebene Funktion $f(z)$ läßt sich in der Form

$$f(z) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} + R_{n+1}(z) \tag{5}$$

schreiben, worin $R_{n+1}(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion bedeutet, für welche auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(z) = 0 \tag{6}$$

ist.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = p(z, a) \text{ und demgemäß } \frac{e^{i\varphi_0} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi_0}} = p(e^{i\varphi_0}, a).$$

Setzen wir

$$A_0 = s_0(e^{i\varphi_0})$$

und

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} p(e^{i\varphi_0}, a_\mu) = s_m(e^{i\varphi_0}), \tag{7}$$

so hat man nach Voraussetzung

$$\lim_{m \to \infty} s_m(e^{i\varphi_0}) = S(e^{i\varphi_0}) = 0. \tag{8}$$

Da für $\nu \geqq 1$

$$A_\nu = \frac{s_\nu(e^{i\varphi_0}) - s_{\nu-1}(e^{i\varphi_0})}{\prod_{\mu=1}^{\nu} p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)}$$

ist, so ergibt sich aus (5)

$$f(z) = (e^{i\varphi_0} - z)\left\{s_0(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - |a_1|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_1)(1 - \bar{a}_1 z)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} s_\nu(e^{i\varphi_0}) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1 - |a_{\nu+1}|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_{\nu+1})(1 - \bar{a}_{\nu+1} z)} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)}\right\} +$$

$$+ s_n(e^{i\varphi_0}) \prod_{\mu=1}^{n} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} + R_{n+1}(z). \tag{9}$$

Da die Folge $\{a_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ besitzt, so existiert ein ϱ $(0 < \varrho < 1)$, so daß

$$| a_\mu | \leqq \varrho; \; \mu = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

ist. Weiter überzeugt man sich leicht, daß für

$$| a | \leqq \varrho < 1 \text{ und } | z | < 1$$

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leqq \frac{| z | + | a |}{1 + | a | \, | z |} \leqq \frac{| z | + \varrho}{1 + \varrho \, | z |} < 1 \tag{11}$$

ist und $| p(e^{i\varphi_0}, a) | = 1$ gilt.

Aus (9) erhalten wir so mit Rücksicht auf (6), (8) und (11)

$$f(z) = (e^{i\varphi_0} - z) \left\{ s_0(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - | a_1 |^2}{(e^{i\varphi_0} - a_1)(1 - \bar{a}_1 z)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - | a_{\nu+1} |^2}{(e^{i\varphi_0} - a_{\nu+1})(1 - \bar{a}_{\nu+1} z)} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right\}.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$| f(z) | \leqq | e^{i\varphi_0} - z | \frac{1}{(1 - \varrho)^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} | s_\nu(e^{i\varphi_0}) | \left(\frac{| z | + \varrho}{1 + \varrho \, | z |} \right)^{\nu} + \varepsilon_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left(\frac{| z | + \varrho}{1 + \varrho \, | z |} \right)^{\nu} \right\},$$

worin $\varepsilon_m = \underset{m+1 \leqq \nu < \infty}{\operatorname{Max}} | s_\nu(e^{i\varphi_0}) |$ bedeutet.

Also ergibt sich schließlich

$$| f(z) | \leqq \frac{| e^{i\varphi_0} - z |}{(1 - \varrho)^2} \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} | s_\nu(e^{i\varphi_0}) | \left(\frac{| z | + \varrho}{1 + \varrho \, | z |} \right)^{\nu} + \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \frac{\varepsilon_m}{1 - | z |} \right\},$$

woraus die zu beweisende Behauptung genau wie im Falle der Potenzreihen folgt.

§ 2. Beweis des Satzes II.

Wieder ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $F(\varphi_0) = 0$ voraussetzen.

Wird $s_m(e^{i\varphi_0})$ für $m > 0$ durch (7) erklärt, so erhält man, wenn $| z | < 1$ ist,

$$s_m(e^{i\varphi_0}) - f(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} p(e^{i\varphi_0}, a_\mu) \left(1 - \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right) -$$

$$- \sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} p(z, a_\mu).$$

Da mit Rücksicht auf (10) und (11) für $\varrho < | z | < 1$