Remarque à l'article précédent de M. Mahler.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Reçu le 29 novembre 1938.)

Au juillet de cette année, j'ai résolu un problème sur les approximations diophantiques linéaires. Presque en même temps, M. Mahler a trouvé indépendemment un théorème général sur les corps convexes[1]) qui contient comme une conséquence facile mon résultat principal. C'est pourquoi, au lieu de publier ma démonstration originale, je vais seulement montrer comment mon résultat peut être déduit du théorème de Mahler.

Pour commencer, je vais citer les résultats de Mahler. Soit $F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction réelle[2]) du point $x = (x_1, \ldots, x_n)$, définie dans l'espace euclidien à n dimensions et jouissante des propriétés suivantes (où t signifie un nombre réel, $o = (0, \ldots, 0)$):

$$F(o) = 0, \ F(x) > 0 \text{ pour } x \neq o,$$
$$F(tx) = |t| F(x), \ F(x + y) \leqq F(x) + F(y).$$

L'inégalité $F(x) \leqq t$ $(t > 0)$ définit alors un corps convexe symétrique par rapport au point o; soit J le volume du corps $F(x) \leqq 1$.

Définissons n points $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ comme il suit: parmi tous les points à coordonnées entières (= points à c. e.) différents de o, choisissons un point $x^{(1)}$ avec la plus petite valeur possible de $F(x)$. En général, $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ $(r < n)$ étant définis, choisissons, parmi tous les points à c. e. qui sont linéairement indépendents de $x^{(1)}$ $\ldots, x^{(r)}$ (c'est-à-dire qui ne sont pas représentables sons la forme $a_1 x^{(1)} + \ldots + a_r x^{(r)}$, a_i étant des nombres réels), un point $x^{(r+1)}$ avec la plus petite valeur possible de $F(x)$. Les nombres

$$\sigma_i = F(x^{(i)}) \quad (0 < \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n),$$

---

[1]) Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper, Časopis **68** (1938—9), p. 93—102.

[2]) Tous les nombres de cette note sont réels; $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ étant deux points et a, b deux nombres, on pose $ax + by = (ax_1 + by_1, \ldots, ax_n + by_n)$.

appelés les „minima successifs de $F(x)$", jouissent des propriétés suivantes:

I. $$\frac{2^n}{n!\,J} \leqq \sigma_1 \dots \sigma_n \leqq \frac{2^n}{J}. \tag{1}$$

(Minkowski, Geometrie der Zahlen, p. 192.)

II. A chaque point $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, on peut faire correspondre un point y à c. e. tel que

$$F(y + \xi) \leqq \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \dots + \sigma_n) \leqq \tfrac{1}{2}n\sigma_n. \tag{2}$$

Démonstration (d'après Minkowski, Geometrie der Zahlen, p. 226): Il existe n nombres $v_1, \dots, v_n$ avec $\xi = v_1x^{(1)} + \dots + v_nx^{(n)}$; soient y_i $(1 \leqq i \leqq n)$ des nombres entiers tels que $|\, y_i + v_i \,| \leqq \frac{1}{2}$; en posant $y = y_1x^{(1)} + \dots + y_nx^{(n)}$, on a

$$F(y + \xi) = F\Big(\sum_{i=1}^{n}(y_i + v_i)\, x^{(i)}\Big) \leqq \sum_{i=1}^{n} F((y_i + v_i)\, x^{(i)}) \leqq \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(x^{(i)}).$$

Remarque: Les inégalités (2) sont les meilleures inégalités de ce genre; en effet, en posant $F(x) = |\, x_1 \,| + \dots + |\, x_n \,|$, $\xi = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, on a $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 1$ et pour chaque point y à c. e. $F(y + \xi) \geqq \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \dots + \sigma_n) = \frac{1}{2}n\sigma_n$.

Définissons maintenant $G(x) = G(x_1, \dots, x_n)$ par l'équation

$$G(x) = \max_{F(x) \leqq 1} |\, xy \,| \quad (\text{où } xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n).$$

Alors la fonction $G(x)$ possède aussi les propriétés

$$G(o) = 0,\ G(x) > 0 \text{ pour } x \neq o,$$
$$G(tx) = |\, t \,|\, G(x),\ G(x + y) \leqq G(x) + G(y).$$

Soit J' le volume du corps $G(x) \leqq 1$ et soient $\tau_1, \dots, \tau_n$ les minima successifs de $G(x)$.

Alors, les résultats de M. Mahler peuvent s'énoncer comme il suit:

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqq JJ' \leqq 4^n;\ 1 \leqq \sigma_h\tau_{n-h+1} \leqq (n!)^2 \ (1 \leqq h \leqq n). \tag{3}$$

En particulier, soient

$$X_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k, \quad Y_h = \sum_{k=1}^{n} A_{hk}y_k \quad (h = 1, \dots, n)$$

deux substitution telles que $X_1Y_1 + \dots + X_nY_n = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Alors, en posant

$$F(x) = \max_{1 \leqq h \leqq n} \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k\Big|, \tag{4}$$

on obtient

$$G(x) = \sum_{h=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} A_{hk} x_k \right| .$$

Dans ce cas particulier, on peut remplacer les inégalités (3) par les relations plus précises

$$JJ' = 4^n/n!,$$
$$1 \leqq \sigma_h \tau_{n-h+1} \leqq n! \ (1 \leqq h \leqq n). \tag{3'}$$

D'après II, (3'), on a, pour ce cas particulier, le résultat suivant: à chaque point $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, il existe n nombres entiers $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$F(x + \xi) = \max_{1 \leqq h \leqq n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{hk} (x_k + \xi_k) \right| \leqq \tfrac{1}{2} n \sigma_n \leqq \frac{n!\, n}{2\tau_1} \cdot \qquad (5)^{3)}$$

Dans tout ce qui suit, on désigne par les lettres a, b, c, d (pourvus d'indices éventuellement) des nombres entiers. Soient $r > 0$, $s > 0$ deux nombres entiers, Θ_{ij} $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq s)$ rs nombres réels. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ étant des nombres réels quelconques, posons (pour $t \geqq 1$)

$$\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \min_{\substack{0 < \max |a_j| \leqq t \\ 1 \leqq j \leqq s}} (\max_{1 \leqq i \leqq r} | \Theta_{i1} a_1 + \ldots + \Theta_{is} a_s + a_{i+s} + \alpha_i |);$$

$$\psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \min_{\substack{\max |a_j| \leqq t \\ 1 \leqq j \leqq s}} (\max_{1 \leqq i \leqq r} | \Theta_{i1} a_1 + \ldots + \Theta_{is} a_s + a_{i+s} + \alpha_i |);$$

$$\psi_2(t; \beta_1, \ldots, \beta_s) = \min_{\substack{0 < \max |b_{s+i}| \leqq t \\ 1 \leqq i \leqq r}} (\max_{1 \leqq j \leqq s} | \Theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j + \beta_j |);$$

$$\psi'_2(t; \beta_1, \ldots, \beta_s) = \min_{\substack{\max |b_{s+i}| \leqq t \\ 1 \leqq i \leqq r}} (\max_{1 \leqq j \leqq s} | \Theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j + \beta_j |).$$

Soit $A > 0$, soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t > A$ et supposons qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $\varphi(t) \cdot t^{-\varepsilon}$ soit — pour $t > A$ — une fonction croissante, $\varphi(t) \cdot t^{-\varepsilon} \to \infty$ pour $t \to \infty$. Soit $\varrho(t)$ la fonction inverse de $\varphi(t)$ (donc $\varphi(t) \to \infty$, $\varrho(t) \to \infty$ pour $t \to \infty$). Alors, on a les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Soit*

$$\liminf_{t \to \infty} \varphi(t)\, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 1; \tag{6}$$

[3]) Pour le cas général, on obtient — d'après II, (3) — un résultat analogue, avec $(n!)^2$ au lieu de $n!$ Pour tout ce qui précède, on peut consulter la note citée de M. Mahler.

alors[4])

$$\limsup_{t\to\infty} \varrho(t) \,.\, \operatorname*{Sup}_{\substack{0\leqq\alpha_1<1\\ \cdots\cdots\\ 0\leqq\alpha_r<1}} \psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq ((r+s)!\,(r+s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}};$$

donc, a fortiori,

$$\limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq$$

$$\leqq \limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq ((r+s)!\,(r+s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}} \tag{7}$$

pour chaque système $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$.

Théorème 2. *Soit*

$$\liminf_{t\to\infty} \varphi(t)\,\psi_2(t;0,\ldots,0) < \infty; \tag{8}$$

alors

$$\limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \geqq$$

$$\geqq \limsup_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) > 0$$

pour presque tous les systèmes $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$.

Remarque 1. Le théorème 2 caractérise le degré de précision du théorème 1. Ce sont précisément les théorèmes 1 et 2 dans deux cas particuliers $s = 1$ ou $r = 1$, dont j'étais en possession avant de connaître la méthode de Mahler. Soit en particulier $s = 1$ et posons $\Theta_{i1} = \Theta_i$; alors

$$\psi_2(t;0,\ldots,0) = \min_{\substack{0<\max|b_i|\leqq t\\ 1\leqq i\leqq r}} |\,\Theta_1 b_1 + \ldots + \Theta_r b_r + b_{r+1}\,|,$$

$$\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) = \min_{|a|\leqq t} (\max_{1\leqq i\leqq r} |\,\Theta_i a + c_i + \alpha_i\,|).$$

Supposons que l'équation $\Theta_1 b_1 + \ldots + \Theta_r b_r + b_{r+1} = 0$ entraîne $b_1 = \ldots = b_{r+1} = 0$; on a alors $\psi_2(t;0,\ldots,0) > 0$ et l'on peut trouver une fonction $\varphi(t)$ satisfaisant aux conditions énoncées avant le théorème 1 et à l'inégalité (6); on a donc pour chaque système $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ d'après (7) $\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \to 0$, d'où le théorème bien connu de Kronecker: *les points* $(\Theta_1 a + c_1,\ldots,\Theta_r a + c_r)$ *sont partout denses* (dans l'espace à r dimensions). Mais les théorèmes 1, 2 donnent, de plus, un résultat quantitatif très précis.

Remarque 2. Une fonction $f(t)$ continue et croissante pour $t > 0$ soit appelée „du type A", si $f(t) \to 0$ pour $t \to 0$, $f(t) \to \infty$

[4]) $\operatorname*{Sup}_{\substack{0\leqq\alpha_1<1\\ \cdots\cdots\\ 0\leqq\alpha_r<1}} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ = borne supérieure de $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ pour $0 \leqq \alpha_1 < 1,\ldots, 0 \leqq \alpha_r < 1$.

pour $t \to \infty$. Evidemment, il est permis de supposer que $\varphi(t)$ et $\varphi(t)\,t^{-s}$ sont du type A. Donc $\varrho(t)$, la fonction $\lambda(t) = t\,\varphi(t)$ et la fonction inverse de λ, désignons la par $\mu(t)$, sont des fonctions du type A. En définissant, pour $x > 0$, le nombre $y > 0$ par $x = \lambda(y)$ (donc $y = \mu(x)$), on a

$$\frac{x}{\mu(x)} = \frac{\lambda(y)}{y} = \varphi(y) = \varphi(\mu(x));$$

donc la fonction $x/\mu(x)$ et sa fonction inverse — désignons la par $\zeta(x)$ — sont du type A. Pour $x > 0$, définissons $w > 0$ et $v > 0$ par les relations

$$\mu(\zeta(x)) = \varrho(w), \quad w = \varphi(v),$$

d'où

$$\zeta(x) = \varrho(w)\,\varphi(\varrho(w)) = v\,\varphi(v) = \lambda(v),$$

$$x = \frac{\lambda(v)}{\mu(\lambda(v))} = \frac{v\varphi(v)}{v} = w,$$

donc

$$\mu(\zeta(x)) = \varrho(x) \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

Remarque 3. Pour $0 < x < y$, on a

$$\varrho(y) < \left(\frac{y}{x}\right)^{1/s} \varrho(x).$$

En effet, en posant $z = \varrho(x)$, $v = \varrho(y)$, on a $0 < z < v$, d'où

$$\frac{x}{\varrho^s(x)} = \frac{\varphi(z)}{z^s} < \frac{\varphi(v)}{v^s} = \frac{y}{\varrho^s(y)}\,.$$

Démonstration du théorème 1. Soit t un nombre suffisamment grand; définissons $z > 0$ par l'équation

$$z^{r+s} = \zeta\left(\frac{2t}{(r+s)!\,(r+s)}\right), \quad \text{donc} \quad \frac{(r+s)!\,(r+s)\,z^{r+s}}{2\mu(z^{r+s})} = t; \tag{9}$$

donc $z \to \infty$ pour $t \to \infty$.

Posons, dans (4), $n = r + s$,

$$F(x) =$$
$$= \max\,(|\,\Theta_{11}x_1 + \ldots + \Theta_{1s}x_s + x_{s+1}\,|\,z^s, \ldots$$
$$\ldots, |\,\Theta_{r1}x_1 + \ldots + \Theta_{rs}x_s + x_{s+r}\,|\,z^s, \left|\frac{-x_1}{z^r}\right|, \ldots, \left|\frac{-x_s}{z^r}\right|);$$

on obtient alors

$$G(y) = \sum_{i=1}^{r} \left|\frac{y_{s+i}}{z^s}\right| + \sum_{j=1}^{s} z^r\,|\,\Theta_{1j}y_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj}y_{s+r} - y_j|.$$

Le volume J' du corps $G(y) \leqq 1$ (provenant du corps $|x_1| + \ldots + |x_{r+s}| \leqq 1$ par une transformation linéaire du déterminant 1) est égal à $2^{r+s}/(r+s)!$; donc (voir (1))

$$\tau_1 \leqq (\tau_1 \ldots \tau_n)^{1/n} \leqq ((r+s)!)^{1/n}. \tag{10}$$

D'autre part, il existe $r + s$ nombres entiers $b_1, \ldots, b_{r+s}$ non tous nuls tels que $G(b_1, \ldots, b_{r+s}) = \tau_1$, donc

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| \leqq \tau_1 z^s, \quad \max_{1 \leqq j \leqq s} |\Theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j| \leqq \frac{\tau_1}{z^r}; \tag{11}$$

d'après (6), la fonction $\psi_2(t; 0, \ldots, 0)$ étant non croissante, on a $\psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 0$ pour $t \geqq 1$. Pour $z^r > ((r+s)!)^{1/n}$ on a donc

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| > 0, \quad \max_{1 \leqq j \leqq s} |\Theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j| > 0;$$

d'après (10), (11) on a donc pour $z \to \infty$

$$\frac{\tau_1}{z^r} \to 0, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| \to \infty, \quad \tau_1 z^s \to \infty;$$

d'après (6), (11), on a donc pour $t > t_0$

$$\frac{1}{\varphi(\tau_1 z^s)} < \frac{\tau_1}{z^r}; \quad \tau_1 z^s \varphi(\tau_1 z^s) > z^{s+r}, \quad \tau_1 z^s > \mu(z^{s+r}).$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de nombres quelconques, $0 \leqq \alpha_i < 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$, $t > t_0$. D'après (5) (avec $\xi_1 = \ldots = \xi_s = 0$, $\xi_{s+1} = \alpha_1, \ldots, \xi_{s+r} = \alpha_r$) il existe $r + s$ nombres $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tels que

$$F(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1} + \alpha_1, \ldots, a_{s+r} + \alpha_r) < \frac{(r+s)!\,(r+s)\, z^s}{2\mu(z^{s+r})};$$

donc, d'après la définition de $F(x)$ et d'après (9),

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| < \frac{(r+s)!\,(r+s)}{2} \cdot \frac{z^{r+s}}{\mu(z^{r+s})} = t,$$

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |\Theta_{i1} a_1 + \ldots + \Theta_{is} a_s + a_{s+i} + \alpha_i| < \frac{(r+s)!\,(r+s)}{2\mu(z^{r+s})} =$$

$$= \frac{(r+s)!\,(r+s)}{2\mu\left(\zeta\left(\dfrac{2t}{(r+s)!\,(r+s)}\right)\right)} = \frac{(r+s)!\,(r+s)}{2\varrho\left(\dfrac{2t}{(r+s)!\,(r+s)}\right)} <$$

$$< \left(\frac{(r+s)!\,(r+s)}{2}\right)^{1+\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{\varrho(t)} = M < \tfrac{1}{2},$$

si $t > t_1 > t_0$ (voir les remarques 2 et 3). S'il existe un i $(1 \leqq i \leqq r)$ tel que $M \leqq \alpha_i \leqq 1 - M$, on voit que $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| > 0$.

Dans le cas contraire, posons $\gamma_i = \alpha_i$ pour $2 \leqq i \leqq r$, $\gamma_1 = M$ pour $0 \leqq \alpha_1 < M$, $\gamma_1 = 1 - M$ pour $1 - M < \alpha_1 < 1$. Il existe donc $r + s$ nombres $c_1, \ldots, c_{r+s}$ avec

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} | c_j | < t, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} | \Theta_{i1}c_1 + \ldots + \Theta_{is}c_s + c_{s+i} + \gamma_i | < M;$$

d'après ce que l'on a dit, on aura

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} | c_j | > 0, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} | \Theta_{i1}c_1 + \ldots + \Theta_{is}c_s + c_{s+i} + \alpha_i | < 2M.$$

Donc: pour chaque $t > t_1$ et pour chaque système $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ $(0 \leqq \alpha_i < 1$ pour $1 \leqq i \leqq r)$, on a

$$\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < 2M < \frac{((r + s)!\,(r + s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}}}{\varrho(t)},$$

c. q. f. d.

Démonstration du théorème 2. D'après une remarque de M. Mahler, on peut déduire la démonstration du théorème 2 des considérations de Minkowski.[5]) Je donne ici une démonstration directe, basée sur une idée de M. Khintchine.[6]) Sans restreindre la généralité, nous allons nous borner aux systèmes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ du „cube“ $0 \leqq \alpha_i < 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$, en considérant chaque système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ comme un point de l'espace euclidien à r dimensions.

D'après (8), il existe un $k > 0$ et une suite de systèmes

$$t_m, b_{1,m}, b_{2,m}, \ldots, b_{s+r,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\lim_{m \to \infty} t_m = \infty, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} | b_{s+i,m} | = t_m,$$

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} | \Theta_{1j}b_{s+1,m} + \ldots + \Theta_{rj}b_{s+r,m} - b_{j,m} | < \frac{k}{\varphi(t_m)}. \qquad (12)$$

En effet, s'il existe un système $(b_1, \ldots, b_{r+s}) \neq (0, \ldots, 0)$ avec $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} | \Theta_{1j}b_{s+1} + \ldots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j | = 0$, on aura $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} | b_{s+i} | > 0$ et il suffit de poser $b_{k,m} = mb_k$.

Dans le cas contraire, il existe, d'après (8), une suite de systèmes $T_m, b_{1,m}, \ldots, b_{s+r,m}$ telle que

$$T_m \to \infty, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} | b_{s+i,m} | \leqq T_m,$$

$$0 < \max_{1 \leqq j \leqq s} | \Theta_{1j}b_{s+1,m} + \ldots + \Theta_{rj}b_{s+r,m} - b_{j,m} | < \frac{k}{\varphi(T_m)}$$

---

[5]) Voir le § 4 de la note citée de M. Mahler.

[6]) Voir p. ex. A. Khintchine, Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, Math. Annalen **113** (1936), p. 398—415, en particulier p. 399—401.

et il suffit de poser $t_m = \max_{1 \leq i \leq r} | b_{s+i,m} |$, car évidemment $t_m \to \infty$, $\varphi(t_m) \leqq \varphi(T_m)$.

Soit M l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ avec $\limsup_{t \to \infty} \varrho(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$. Pour $u, v = 1, 2, 3, \ldots$ soit $M_{u,v}$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ tels que l'inégalité $\varrho(t)\, \psi'_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < 1/v$ soit vérifiée pour chaque $t > u$, de sorte que l'on a pour chaque v_0

$$M = \prod_{v=v_0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} M_{u,v} = \prod_{v=v_0}^{\infty} M_v, \quad \text{où } M_v = \sum_{u=1}^{\infty} M_{u,v}.$$

Si μA désigne la mesure de l'ensemble A, on a (à cause de $M_{u,v} \subset \subset M_{u+1,v}$)

$$\mu M_v = \lim_{u \to \infty} \mu M_{u,v}, \quad \mu M \leqq \mu M_v$$

pour chaque v.

Evaluons μM_{uv}. Choisissons un m tel que $v^{-\varepsilon/2}\, \varphi(t_m) > u$ et posons

$$t = v^{-\varepsilon/2}\, \varphi(t_m), \tag{13}$$

donc (voir la remarque 3)

$$t_m = \varrho(v^{\varepsilon/2} t) \leqq v^{\frac{1}{2}}\, \varrho(t). \tag{14}$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ étant un point de $M_{u,v}$, il existe un système $a_1, \ldots, a_{r+s}$ avec $\max_{1 \leq j \leq s} | a_j | \leqq t$,

$$-\frac{1}{v\varrho(t)} < \Theta_{i1} a_1 + \ldots + \Theta_{is} a_s + a_{s+i} + \alpha_i < \frac{1}{v\varrho(t)} \quad (1 \leqq i \leqq r). \tag{15}$$

En multipliant la première inégalité (15) par $b_{s+1,m}$, la seconde par $b_{s+2,m}$ etc. et en faisant la somme, on obtient, d'après (12),

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i b_{s+i,m} + d \right| < \frac{r t_m}{v \varrho(t)} + \frac{skt}{\varphi(t_m)}, \tag{16}$$

d étant un certain nombre entier. Il existe un l $(1 \leqq l \leqq r)$ tel que $b_{s+l,m} = \pm t_m$. Donc, α_i $(i \neq l,\ 1 \leqq i \leqq r)$ et d étant donnés, le nombre α_l est restreint, par l'inégalité (16), à l'intérieur d'un intervalle de longueur

$$L = \frac{2r}{v\varrho(t)} + \frac{2skt}{t_m \varphi(t_m)}.$$

En outre, s'il doit exister un point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ avec (16), il faut que (à cause de $0 \leqq \alpha_i < 1$)