

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1939

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0068|log32

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

7
ROČNÍK 68.

SEŠIT 3—4.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ,
V. KNICHAL, V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER,
K. RYCHLÍK, J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, ST.
TEPLÝ, FRANT. VYČICHLO, AL. WANGLER,
FR. ZÁVIŠKA, AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1939

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 K

JOURNAL TCHÈQUE DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE.

Éditeur: Jednota českých matematiků a fyziků, Praha II-609.

Abonnement pour un an 120 Kč.

Chèques postaux: Praha 13103.

Année 68

Fascicule 3—4

1988/89

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická — Travaux mathématiques

- Karel Koutský, Brno, Legionářská 8: O oddělenosti množin v topologických prostorech — Sur la séparabilité des ensembles dans les espaces topologiques 81
- Kurt Mahler, Manchester 14, Donner House, Oak Drive: Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen — Princip přenosu pro lineární nerovnosti 85
- Kurt Mahler, Manchester: Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper — Věta o přenosu pro konvexní tělesa 93
- Vojtěch Jarník, Praha II, U Karlova 3: Remarque à l'article précédent de M. Mahler — Poznámka k předcházejícímu článku p. Mahlera 103
- Štefan Schwarz, Turč. Sv. Martin: Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal; Anwendung auf die Faktorzerlegung der Polynome in algebraischen Zahlkörpern — O rozložitelnosti mnohočlenů s celistvými algebraickými součiniteli podle prvoideálu; užití k rozkladu polynomů v různých alg. čís. tělesech 112
- Ernst Lammell, Praha I, Husova 5: Über die Reihen von der Form $A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_{\mu}}{1 - \bar{a}_{\mu} z}$ — O řadách tvaru 127
- Otomar Pankraz, Praha II, Na Výtoni 6: On integral relations in economical cinematics — O integrálních vztazích hospodářské kinematiky 132
- Bohumil Bydžovský, Praha II, U Karlova 3: Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane — O sextatických bodech a kuželosečkách rovinné kubiky 137
- Josef Novák, Brno, Kounicova 63: Zwei Bemerkungen zum Bernsteinschen Ultrakontinuum — Dvě poznámky k Bernsteinově ultrakontinuu 147
- K. Petr, Praha II, U Karlova 3: Poznámka o kvadratických formách — Remarque sur les formes quadratiques 162

Část fyzikální — Travaux de physique

- Konstantin Hladký, Brno, Na poříčí 31: Une méthode de la détermination du coefficient balistique et de la portée — Způsob stanovení balistického koeficientu a dostřelu 174
- Zdeněk Horák, Praha II, Karlovo nám. 14: Sur une méthode approximative de compensation des fonctions empiriques — Přibližná metoda vyrovnání pozorovaných závislostí 177

Tento sešit vyšel 20. června 1989.

ČÁST MATEMATICKÁ

O oddělenosti množin v topologických prostorech.

Karel Koutský, Brno.

(Došlo 16. března 1938.)

Nechť P je prostor. Když pro každé dvě neprázdné, v P oddělené množiny platí, že

(1) jedna z nich je otevřená v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_1 ;

(2) obě jsou otevřené v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_2 ;

(3) jedna je uzavřená v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_3 ;

(4) obě jsou uzavřené v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_4 ;

(5) jedna je zároveň otevřená i uzavřená v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_5 ;

(6) obě jsou zároveň otevřené i uzavřené v P , pravíme, že prostor P má vlastnost f_6 .

Snadno se nahlédne, že platí následující vztahy

$$f_6 \Rightarrow f_2 \Rightarrow f_1; \quad f_6 \Rightarrow f_4 \Rightarrow f_3; \quad f_6 \Rightarrow f_5 \Rightarrow f_1, f_2.$$

Prof. E. Čech položil v topologickém semináři otázku, týkající se prostorů, které mají jednu z právě definovaných vlastností.

Řešením této otázky došel jsem k celé řadě vět, jejichž důkazy jsou vesměs dosti snadné, a proto je předkládám čtenáři jako úlohy k cvičení.¹⁾

1.1. Nechť množina P skládá se ze čtyř bodů a, b, c, d . Uzávěry v P nechť jsou definovány takto: $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = (a) + (c)$, $\bar{b} = (b) + (d)$, $\bar{c} = \bar{d} = (b) + (c) + (d)$, uzávěr více než jednobodové množiny rovná se součtu uzávěrů jejích bodů. Potom prostor P má vlastnost f_1 , avšak nemá žádnou z vlastností f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 .

¹⁾ Ve větách užívám pojmů a názvosloví z Čechových Topologických prostorů. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 66 (1937), str. D 225 až D 264.

1.2. Necht' $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že $Q \neq \emptyset$, $P - Q$ má aspoň dva body. Uzávěry v P necht' jsou definovány takto: (1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$, (2) $\emptyset \neq M \subset P \Rightarrow \bar{M} = M + Q$. Potom prostor P má vlastnost f_2 , avšak nemá žádnou z vlastností f_3, f_4, f_5, f_6 .

1.3. Necht' množina P skládá se ze tří bodů a, b, c . Uzávěry v P necht' jsou definovány takto: $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{a} = (a) + (b)$, $\bar{b} = (b) + (c)$, $\bar{c} = (c)$, kdežto pro každou jinou $M \subset P$ necht' je $\bar{M} = P$. Potom prostor P má vlastnost f_3 , avšak nemá žádnou z vlastností f_1, f_2, f_4, f_5, f_6 .

1.4. Necht' $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že Q má aspoň dva body, $P - Q \neq \emptyset$. Uzávěry v P necht' jsou definovány takto: (1) $M \subset P$, $M - Q = \emptyset \Rightarrow \bar{M} = M$, (2) $M \subset P$, $M - Q \neq \emptyset \Rightarrow \bar{M} = P$. Potom prostor P má vlastnost f_4 , avšak nemá žádnou z vlastností f_1, f_2, f_5, f_6 .

1.5. Necht' $Q \subset P$ jsou dané množiny takové, že každá z množin $Q, P - Q$ má aspoň dva body. Uzávěry v P necht' jsou definovány takto: (1) $M \subset P$, $QM = \emptyset \Rightarrow \bar{M} = M$, (2) $M \subset P$, $QM \neq \emptyset \Rightarrow \bar{M} = M + Q$. Potom prostor P má vlastnost f_5 , ale nemá žádnou z vlastností f_2, f_4, f_6 .

1.6. Necht' P je daná množina. Uzávěry v P necht' jsou definovány takto: $M \subset P \Rightarrow \bar{M} = M$. Potom prostor P má vlastnost f_6 .

2.1. Prostor P má vlastnost f_1 , když a jen když má jednu z následujících dvou vlastností: (1) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\bar{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je dědičně otevřená v P .²⁾ (2) $x \in P$, $y \in P$, $\bar{x} \cdot (y) = (x) \cdot \bar{y} = \emptyset \Rightarrow$ buď x nebo y je otevřený v P .

2.2. Prostor P má vlastnost f_2 , když a jen když má jednu z následujících dvou vlastností: (1) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\bar{N} = \emptyset \Rightarrow$ množiny M, N jsou dědičně otevřené v P . (2) $x \in P$, $y \in P$, $\bar{x} \cdot (y) = (x) \cdot \bar{y} = \emptyset \Rightarrow$ body x, y jsou otevřené v P .

2.3. Prostor P má vlastnost f_3 , když a jen když má následující vlastnost: $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\bar{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je dědičně uzavřená v P .²⁾

2.4. Prostor P má vlastnost f_4 , když a jen když má následující vlastnost: $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\bar{N} = \emptyset \Rightarrow$ množiny M, N jsou dědičně uzavřené v P .

²⁾ Množina $M \subset P$ nazývá se dědičně otevřená v P , když a jen když každá $M_1 \subset M$ je otevřená v P .

Množina $M \subset P$ nazývá se dědičně uzavřená v P , když a jen když každá $M_1 \subset M$ je uzavřená v P .

V následujících větách 3.1—3.6 značí P prostor, $B \subset P$ množinu všech B -bodů prostoru P , $I \subset P$ množinu všech v P otevřených bodů,³⁾ $U \subset P$ množinu všech v P uzavřených bodů.³⁾

3.1. Necht' prostor P má vlastnost f_1 . Potom platí:

(1) $x \in P - I \Rightarrow P - I \subset \bar{x} + x^s$ a množina $\bar{x} + x^s$ je uzavřená v P .

(2) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je izolovaný prostor.⁴⁾

(3) Množiny $B - I$, $U - I$ jsou nanejvýš jednobodové.⁵⁾

(4) Když P je AU -prostor, pak P je dědičný N -prostor.

3.2. Necht' prostor P má vlastnost f_2 . Potom platí:

(1) $x \in P - I \Rightarrow \bar{x} + x^s = P$, $I \subset x^s$; $x \in I \Rightarrow P - I \subset \bar{x}$.

(2) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow M, N$ jsou izolované prostory.

(3) $U = B \Rightarrow$ buď U je jednobodová množina nebo $B = I = U$.⁶⁾

3.3. Necht' prostor P má vlastnost f_3 . Potom platí:

(1) $x \in P - U \Rightarrow P - U \subset \bar{x} + x^s$.

(2) $x \in P - U$ je R -bod prostoru $P^7)$ $\Rightarrow \bar{x} + x^s = P - U$ a x není B -bod prostoru P .

(3) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} = M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow$ buď M nebo N je izolovaný prostor.

3.4. Necht' prostor P má vlastnost f_4 . Potom platí:

(1) $x \in P - U \Rightarrow \bar{x} + x^s = P$, $U \subset \bar{x}$; $x \in U \Rightarrow P - U \subset x^s$.

(2) $x \in P - U$ je R -bod prostoru $P^7)$ $\Rightarrow$ žádný $x \in P$ není uzavřený v P .

(3) $\emptyset \neq M \subset P$, $\emptyset \neq N \subset P$, $\overline{MN} \subseteq M\overline{N} = \emptyset \Rightarrow M, N$ jsou izolované prostory.

(4) Když P není B -prostor, pak množina $P - U$ je hustá v prostoru P .⁸⁾

³⁾ Je vždy $I \subset B$. Snadno se dokáže, že platí následující tři relace:

(1) $x \in P - B \Rightarrow \bar{x} \subset P - B$; (2) $x \in P - I \Rightarrow \bar{x} \subset P - I$;

(3) $x \in P - U \Rightarrow x^s \subset P - U$.

⁴⁾ Prostor P nazývá se izolovaný prostor, když a jen když každý $x \in P$ je otevřený v P , neboli když $P = I$.

⁵⁾ Odtud snadno následuje, že když P je B -prostor, pak každý $x \in P$, nanejvýš s výjimkou jediného bodu, je otevřený v P .

⁶⁾ Odtud snadno následuje, že když P je B -prostor, pak P je izolovaný prostor.

⁷⁾ Stačí předpokládati pouze, že bod $x \in P - U$ má vlastnost $\bar{x} \subset x^s$.

⁸⁾ Množina $M \subset P$ nazývá se hustá v prostoru P , když a jen když $\overline{M} = P$.

3.5. Necht' prostor P má vlastnost f_5 . Potom platí:

(1) $x \in P - (I + U) \Rightarrow \bar{x} + x^s = P - IU$.

(2) $x \in P - (I + U)$ je B -bod prostoru $P^9) \Rightarrow I \subset U$.

3.6. Necht' prostor P má vlastnost f_6 . Potom platí:

(1) Buď neexistují neprázdné, v P oddělené množiny a pak množiny B , U jsou nanejvýš jednobodové nebo, když existují neprázdné, v P oddělené množiny, pak P je izolovaný prostor.

(2) Když P je U -prostor, pak neexistují neprázdné, v P oddělené množiny, když a jen když uzávěry v P všech bodů prostoru P tvoří monotonní systém.¹⁰⁾

Topologický seminář, Brno.

*

Sur la séparabilité des ensembles dans les espaces topologiques.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans cet article je donne quelques théorèmes et exemples des espaces topologiques au sens de M. Čech qui ont une des propriétés suivantes: Si deux ensembles sont séparés et non-vides, alors un ou tous deux sont ouverts ou fermés ou fermés et ouverts en même temps.

⁹⁾ Stačí předpokládati pouze, že bod $x \in P - (I + U)$ má vlastnost $x^s \subset \bar{x}$.

¹⁰⁾ Monotonní systém $\mathfrak{S}$ je takový systém množin, který má následující vlastnost: $M_1 \in \mathfrak{S}$, $M_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow$ buď $M_1 \subset M_2$ nebo $M_2 \subset M_1$. Věta (2) pochází od p. J. Nováka.

Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen.

Kurt Mahler, Manchester.

(Eingegangen am 4. Oktober 1937.)

Vor kurzem gab ich für die zweite Hälfte des Khintchineschen Übertragungssatzes einen neuen Beweis, der sich auf den Minkowskischen Linearformensatz stützte (Matematitscheskij Sbornik T. 1 (43), 961). In dieser Note will ich mit der gleichen Methode allgemeinere Sätze über lineare Ungleichungen ableiten.

Satz 1: Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl; seien ferner

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k, \quad g_h(x) = \sum_{k=1}^n b_{hk} x_k \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

je n Linearformen mit reellen Koeffizienten; die Determinante

$$d = |b_{hk}|_{h,k=1,2,\dots,n}$$

verschwinde nicht, und die Bilinearform

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^n f_h(x) g_h(y) = \sum_{i,k=1}^n e_{ik} x_i y_k$$

habe lauter ganze rationale Koeffizienten e_{ik} . Die n Zahlen

$$t_1, t_2, \dots, t_n$$

seien positiv. Existieren n ganze rationale Zahlen

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

die nicht gleichzeitig verschwinden und die den Ungleichungen

$$|f_1(x)| = t_1, \quad |f_2(x)| \leq t_2, \quad \dots, \quad |f_n(x)| \leq t_n \quad (\text{A})$$

genügen, so gibt es noch n weitere ganze rationale Zahlen

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

die ebenfalls nicht alle zugleich Null sind, und für die

$$|g_1(y)| \leq \frac{(n-1)\lambda}{t_1}, |g_2(y)| \leq \frac{\lambda}{t_2}, \dots, |g_n(y)| \leq \frac{\lambda}{t_n} \\ \text{mit } \lambda^{n-1} = |d| \prod_{h=1}^n t_h \quad (\text{B})$$

ist.

Beweis: Die Koeffizienten der Form Φ sind offenbar gleich

$$e_{ik} = \sum_{h=1}^n a_{hi} b_{hk};$$

es ist daher

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n e_{ik} x_i = \sum_{h=1}^n f_h(x) b_{hk}.$$

Die Determinante des Systems der n Linearformen in $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\Phi(x, y), g_2(y), g_3(y), \dots, g_n(y),$$

die ausgeschrieben gleich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ist, hat demnach den Wert

$$df_1(x)$$

und ist insbesondere bis auf das Vorzeichen gleich

$$dt_1,$$

wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit dem ganzzahligen Lösungssystem von (A) gleichgesetzt werden, dessen Existenz angenommen wurde.

Nach dem Minkowskischen Linearformensatz gibt es folglich n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden und die den Ungleichungen

$$|\Phi(x, y)| < 1, |g_2(y)| \leq \frac{\lambda}{t_2}, \dots, |g_n(y)| \leq \frac{\lambda}{t_n}$$

$$\text{mit } \lambda^{n-1} = |d| \prod_{h=1}^n t_h$$

genügen. Da nach unseren Voraussetzungen Φ eine ganze rationale Zahl ist, muß sogar

$$\Phi(x, y) = 0$$

und folglich

$$f_1(x) g_1(y) = - \sum_{h=2}^n f_h(x) g_h(y)$$

sein; aus den letzten Ungleichungen und aus (A) folgen damit ohne Mühe die behaupteten Ungleichungen (B).

Satz 2: Seien $f_h(x), g_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) $2n$ Linearformen mit den gleichen Eigenschaften wie in Satz 1. Auch die Determinante

$$|a_{hk}|_{h,k=1,2,\dots,n}$$

verschwinde nicht. Zu jedem positiven ε gebe es n ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden und so daß

$$\left| \prod_{h=1}^n f_h(x) \right| \leq \varepsilon \quad (a)$$

ist. Alsdann gibt es auch für jedes positive ϑ n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die nicht alle zugleich Null sind, und für welche

$$\left| \prod_{h=1}^n g_h(y) \right| \leq \vartheta. \quad (b)$$

Beweis: Sei für die Lösungen von (a) genauer

$$|f_1(x)| = t_1, |f_2(x)| \leq t_2, \dots, |f_n(x)| \leq t_n \text{ mit } \prod_{h=1}^n t_h = \varepsilon;$$

indem man die Veränderlichen nötigenfalls umbenennt, kann man sich auf Lösungen von (a) mit $t_1 > 0$ beschränken. Für die Zahlen x_h und t_h treffen alle Voraussetzungen aus Satz 1 zu. Also gibt es n weitere ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen (B) aus Satz 1, also erst recht der einen Ungleichung

$$\left| \prod_{h=1}^n g_h(y) \right| \leq (n-1) \frac{n}{n-1} \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$$

genügen; für genügend kleines ε folgt also die Behauptung.

Um ein Beispiel zu geben, werde $n = m + 1$ und

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_0 + \Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m, & f_h(x) &= x_h \quad (h = 1, 2, \dots, m) \\ g_0(y) &= y_0, & g_h(y) &= y_h - \Theta_h y_0 \end{aligned}$$

genommen, wo $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ reelle Zahlen sind. Beide Formensysteme haben die Determinante 1; es wird

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=0}^m f_h(x) g_h(y) = \sum_{h=0}^m x_h y_h.$$

Satz 1 kann also angewendet werden, auch noch, wenn die f mit den g vertauscht werden. Auf diese Weise ergibt sich insbesondere:

a) Sei $\beta \geq 0$ und $x > 1$. Ist das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} |x_0 + \Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m| &= x^{-(m+\beta)}, \\ \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|) &\leq x \end{aligned}$$

lösbar in ganzen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_m$, von denen die m letzten nicht alle zugleich verschwinden, so läßt sich auch das Ungleichungssystem

$$|y_0| \leq my, \quad \max_{h=1,2,\dots,m} (|y_h - \Theta_h y_0|) \leq y^{\frac{1+\beta^*}{m}}$$

mit

$$\beta^* = \frac{\beta}{m^2 + (m-1)\beta}, \quad y = x^{\frac{m^2 + (m-1)\beta}{m}}$$

in ganzen Zahlen $y_0 \neq 0, y_1, \dots, y_m$ lösen.

b) Sei $\beta \geq 0$ und $y > m^{\frac{m}{m+\beta}}$. Ist das Ungleichungssystem

$$|y_0| = y, \quad \max_{h=1,2,\dots,m} |y_h - \Theta_h y_0| \leq y^{\frac{1+\beta}{m}}$$

in ganzen Zahlen $y_0 \neq 0, y_1, \dots, y_m$ lösbar, so läßt sich auch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} |x_0 + \Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m| &\leq mx^{-(m+\beta^*)}, \\ \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|) &\leq x \end{aligned}$$

mit

$$\beta^* = \beta, \quad x = y^{\frac{1}{m}}$$

in ganzen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_m$, von denen die m letzten nicht alle gleichzeitig verschwinden, lösen.

Aus Satz 1 folgen also beide Hälften des Khintchineschen Übertragungsprinzipes (Rend. Palermo 50 (1926), 170—195).

Es ist möglich, die bisherigen Ergebnisse zu verallgemeinern, indem man Φ durch allgemeinere Bilinearformen in den $f_h(x), g_h(y)$ oder durch Multilinearformen in mehr als zwei Systemen von Linearformen ersetzt. Weiter kann man die Beschränkung auf reelle Formen fallen lassen und z. B. für jeden imaginär quadratischen Zahlkörper ein Analogon zum Khintchineschen Satz ableiten. Ohne hierauf einzugehen, wollen wir statt dessen lineare Formen mit p -adischen Koeffizienten betrachten. Dabei sei p eine feste Primzahl und der p -adische Wert $|\alpha|_p$, wie üblich, so normiert, daß $|p|_p = \frac{1}{p}$ ist. Dann gilt:

Satz 3: Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl; seien ferner

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k, \quad g_h(x) = \sum_{k=1}^n b_{hk} x_k \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

je n Linearformen mit ganzen p -adischen Koeffizienten, derart daß die aus ihnen gebildete Bilinearform

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^n f_h(x) g_h(y) = \sum_{i,k=1}^n e_{ik} x_i y_k$$

lauter ganze rationale Koeffizienten hat. Wir setzen

$$c = 1 + \sum_{i,k=1}^n |e_{ik}|.$$

Sei X eine positive Zahl. Unter

$$s_1, s_2, \dots, s_n, s$$

seien $n + 1$ nicht negative ganze rationale Zahlen verstanden mit

$$s \geq \max(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Existieren n ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq X, \quad (A)$$

$$|f_1(x)|_p = p^{-s_1}, |f_2(x)|_p \leq p^{-s_2}, \dots, |f_n(x)|_p \leq p^{-s_n}$$

genügen, so gibt es noch n weitere ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die ebenfalls nicht alle zugleich Null sind, und für die

$$\max(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|) \leq Y = \left\{ CXp^{1+(n-1)s - \sum_{h=2}^n s_h} \right\}^{\frac{1}{n-1}}, \quad (B)$$

$|g_1(y)|_p \leq p^{s_1-s}, |g_2(y)|_p \leq p^{s_2-s}, \dots, |g_n(y)|_p \leq p^{s_n-s}$

ist.

Beweis: Werden für die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ihre ganzen rationalen Zahlwerte eingesetzt, so geht Φ in eine Linearform in $y_1, y_2, \dots, y_n$ mit ganzen rationalen, also erst recht ganzen p -adischen Koeffizienten über. Nach meinem p -adischen Analogon zum Minkowskischen Linearformen-Satz (Jber. D. Math. Ver. 44 (1934), 250—255) existieren daher n ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, und die den Ungleichungen

$$\max(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|) \leq Y,$$

$$|\Phi(x, y)|_p \leq \frac{1}{CXY}, \quad |g_h(y)|_p \leq p^{s_h-s} \quad (h = 2, 3, \dots, n)$$

genügen. Andererseits ist das hiermit gebildete Φ ganz rational und

$$|\Phi(x, y)| < CXY;$$

es muß also

$$\Phi(x, y) = 0$$

und demnach

$$f_1(x) g_1(y) = - \sum_{h=2}^n f_h(x) g_h(y)$$

sein, sodaß sich wegen (A) und des schon bewiesenen Teiles von (B) die Behauptung ergibt.

Für die Anwendungen wird man die Indizes so wählen, daß gerade s_1 möglichst klein ist.

Um ein Beispiel zu geben, leiten wir das p -adische Analogon zum Khintchineschen Satz ab. Seien zu diesem Zwecke $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ m ganze p -adische Zahlen; wir setzen in Satz 3 $n = m + 1$ und alsdann

$$\begin{aligned} f_h(x) &= x_h \\ g_h(y) &= y_h - \Theta_h y_{m+1} \quad (h = 1, 2, \dots, m), \\ f_{m+1}(x) &= \Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m + x_{m+1} \\ g_{m+1}(y) &= y_{m+1}, \end{aligned}$$

so daß also

$$\Phi(x, y) = \sum_{h=1}^{m+1} f_h(x) g_h(y) = \sum_{h=1}^{m+1} x_h y_h$$

und $C = m + 2$ ist. Satz 3 läßt sich wieder auf zwei Arten anwenden, indem man das einmal die f mit den g vertauscht. Man erhält so folgende Ergebnisse:

a) Sei $\beta \geq 0$ und $x > 1$, ferner das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} |\Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m + x_{m+1}|_p &\leq x^{-(m+\beta+1)}, \\ \max(|x_1|, \dots, |x_m|, |x_{m+1}|) &\leq x \end{aligned} \quad (1)$$

in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ erfüllt, die nicht alle verschwinden und sogar nicht alle durch p teilbar sind. Alsdann ist evidenterweise sogar eine der Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_m$, etwa ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Zahl x_1 , zu p teilerfremd, also

$$|x_1|_p = 1, |x_2|_p \leq 1, \dots, |x_m|_p \leq 1.$$

Folglich existieren wegen (1) nach Satz 3 auch $m + 1$ ganze rationale Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$, die nicht alle gleich Null sind, und die den Ungleichungen

$$\max(|y_1 - \Theta_1 y_{m+1}|_p, \dots, |y_m - \Theta_m y_{m+1}|_p) \leq y^{-1 - \frac{1+\beta^*}{m}},$$

$$\max(|y_1|, \dots, |y_m|, |y_{m+1}|) \leq (m+2)^{\frac{1}{m}} p y$$

mit

$$\beta^* = \frac{\beta}{m^2 + (m-1)\beta}, \quad y = x^{\frac{m^2 + (m-1)\beta}{m}}$$

genügen. Sei p^a alsdann die größte Potenz von p , die gleichzeitig in den y_h aufgeht, und werde

$$y_h = p^a \eta_h \quad (h = 1, 2, \dots, m+1)$$

gesetzt, so daß also mindestens eine der Zahlen η_h zu p teilerfremd wird. Diese Zahlen genügen offenbar den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \max(|\eta_1 - \Theta_1 \eta_{m+1}|_p, \dots, |\eta_m - \Theta_m \eta_{m+1}|_p) &\leq \\ &\leq p^a y^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}} = p^{-a\frac{1+\beta^*}{m}} \eta^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}} \leq \eta^{-1-\frac{1+\beta^*}{m}}, \end{aligned} \quad (1')$$

$$\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{m+1}|) \leq (m+2)^{\frac{1}{m}} p \eta, \quad \text{wo } \eta = p^{-a} y.$$

Kann den Ungleichungen (1) mit beliebig großen x genügt werden, so folgt leicht, daß auch (1') für beliebig große η Lösungen hat.

b) Sei $\beta \geq 0$ und $y > 1$, ferner das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \max(|y_1 - \Theta_1 y_{m+1}|_p, \dots, |y_m - \Theta_m y_{m+1}|_p) &\leq y^{-1-\frac{1+\beta}{m}}, \\ \max(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_{m+1}|) &\leq y \end{aligned} \quad (2)$$

in ganzen Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$ erfüllt, die nicht alle verschwinden und sogar nicht sämtlich durch p teilbar sind; dann ist insbesondere

$$|y_{m+1}|_p = 1.$$

Folglich existieren wegen (2) nach Satz 3 auch $m+1$ ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, die nicht alle gleich Null sind, und die den Ungleichungen

$$|\Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_m x_m + x_{m+1}|_p \leq x^{-(m+\beta^*+1)},$$

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m+1}|) \leq ((m+2)p)^{\frac{1}{m}} x$$

mit

$$\beta^* = \beta, \quad x = y^{\frac{1}{m}}$$

genügen. Sei p^b die größte Potenz von p , die gleichzeitig in allen x_h aufgeht, und werde

$$x_h = p^b \xi_h \quad (h = 1, 2, \dots, m+1)$$

gesetzt, so daß mindestens eine der Zahlen ξ_h zu p teilerfremd ist. Diese Zahlen genügen offenbar den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\Theta_1 \xi_1 + \dots + \Theta_m \xi_m + \xi_{m+1}|_p &\leq p^b x^{-(m+\beta^*+1)} = \\ &= p^{-(m+\beta^*)b} \xi^{-(m+\beta^*+1)} \leq \xi^{-(m+\beta^*+1)}, \end{aligned} \quad (2')$$

$$\max(|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_{m+1}|) \leq ((m+2)p)^{1/m} \xi, \quad \text{wo } \xi = p^{-b} x.$$

Haben insbesondere die Ungleichungen (2) für beliebig große y Lösungen, so lassen sich auch die Ungleichungen (2') mit beliebig großem ξ lösen.

Der Khintchinesche Satz ist damit fast ohne Änderung auf p -adische übertragen. Teil b wurde schon 1936 von Herrn Turkstra (Diss. Vrije Univ. Amsterdam, III stelling 4*, p. 52) und zwar ebenso bewiesen.

*

Princip přenosu pro lineární nerovnosti.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte

$$f_h(x) = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k, \quad g_h(x) = \sum_{k=1}^n b_{hk} x_k \quad (h = 1, \dots, n)$$

dva systémy lineárních reálných forem, při čemž budiž $d \neq 0$ determinant čísel b_{hk} . Bilineární forma $f_1(x)g_1(y) + \dots + f_n(x)g_n(y)$ nechť má celistvé koeficienty. Nechť $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$ a nechť existuje mřížový bod $x = (x_1, \dots, x_n)$ tak, že

$$|f_1(x)| = t_1, \quad |f_2(x)| \leq t_2, \quad \dots, \quad |f_n(x)| \leq t_n.$$

Potom existuje mřížový bod $y \neq 0$ tak, že

$$|g_1(y)| \leq (n-1) \lambda t_1^{-1}, \quad |g_h(y)| \leq \lambda t_h^{-1} \quad (h = 2, 3, \dots, n),$$

kde $\lambda > 0$, $\lambda^{n-1} = |d| t_1 \dots t_n$.

Následují aplikace této věty, hlavně důkaz dvou vět Chinčinnových. Druhá část práce obsahuje analogické úvahy pro případ, že a_{hk}, b_{hk} jsou celá čísla p -adická.

Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper.

Kurt Mahler, Manchester.

Herrn Prof. M. Dehn zum 60. Geburtstag gewidmet.

(Eingegangen am 8. August 1938.)

Der bekannte A. Khintchinesche Übertragungssatz¹⁾ verknüpft die Lösungsmaße der beiden Probleme, die Linearform

$$x_1\theta_1 + \dots + x_n\theta_n + x_0$$

bzw. die n simultanen linearen Formen

$$y_h - y_0\theta_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

möglichst klein zu machen, mit einander, und besagt ungefähr, daß wenn eines dieser Maße sehr klein sein kann, dasselbe auch für das andere gilt. Der ursprüngliche Beweis von Khintchine war geometrisch und wurde dann von mir durch einen arithmetischen Beweis mittels des Minkowskischen Linearformensatzes ersetzt.²⁾ Im vergangenen Jahr verallgemeinerte ich diese Methode und gab ein Übertragungsprinzip für zwei Systeme von je n reellen Formen

$$\xi_h = \sum_{k=1}^n a_{hk}x_k, \quad \eta_h = \sum_{k=1}^n A_{hk}y_k \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

für die identisch

$$\sum_{h=1}^n \xi_h \eta_h = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

ist.³⁾

Alle diese Resultate sind enthalten in dem Hauptsatz der vorliegenden Arbeit. Seien $F(x)$ und $G(x)$ die Distanzfunktionen zweier in bezug auf die Einheitskugel polaren konvexen Körper K und K' mit Mittelpunkt im Ursprung; die Punkte der Oberfläche jedes dieser Körper sind also die Polaren der Stützebenen des

¹⁾ Rendiconti Palermo 50 (1926), besonders S. 189—195.

²⁾ Matematitscheskij Sbornik 43 (1937), 961—962.

³⁾ K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Časopis 68 (1938/39), S. 85—92.

anderen Körpers. Seien ferner $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}$, bzw. $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)}$ die n successiven Minkowskischen Minima dieser beiden Körper⁴⁾; d. h. also z. B. für den ersten Körper, daß es n linear unabhängige Gitterpunkte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ mit $F(x^{(h)}) = \sigma^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, n$) gibt, derart, daß $\sigma^{(1)}$ das Minimum von $F(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und $\sigma^{(r)}$ für $r \geq 2$ das Minimum von $F(x)$ in allen von $x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}$ linear unabhängigen Gitterpunkten ist. Mein Übertragungsprinzip besagt alsdann, daß

$$(I): \quad 1 \leq \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ist; es berücksichtigt also sämtliche Minima und nicht nur $\sigma^{(1)}$ und $\tau^{(1)}$. Dies ist vor allem nützlich für Anwendungen auf inhomogene Probleme.

Der Beweis beruht auf elementargeometrischen Überlegungen und auf den Minkowskischen Ungleichungen

$$\frac{2^n}{n! J} \leq \sigma^{(1)} \dots \sigma^{(n)} \leq \frac{2^n}{J} \quad \text{und} \quad \frac{2^n}{n! J'} \leq \tau^{(1)} \dots \tau^{(n)} \leq \frac{2^n}{J'},$$

wo J und J' die Volumen von K und K' bedeuten.

§ 1. Polare konvexe Körper.

Die reellwertige Funktion $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ der Punkte des n -dimensionalen Euklidischen Raumes R habe folgende Eigenschaften⁵⁾:

$$F(0) = 0, \quad F(x) > 0 \text{ für } x \neq 0. \quad (1)$$

$$F(tx) = |t| F(x) \text{ für reelles } t. \quad (2)$$

$$F(x + y) \leq F(x) + F(y). \quad (3)$$

Die Ungleichung

$$F(x) \leq t \quad (t > 0)$$

definiert alsdann einen konvexen Körper $K(t)$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zwar vom Volumen Jt^n , wenn J das Volumen des Eichkörpers $K = K(1)$ ist.

Der Körper K bildet eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge. Für jeden Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ in R existiert demnach das Maximum

$$G(x) = G(x_1, \dots, x_n) = \max_{F(y) \leq 1} |xy| = \max_{y \neq 0 \text{ in } R} \frac{|xy|}{F(y)}, \quad (4)$$

⁴⁾ Siehe das letzte Kapitel der „Geometrie der Zahlen“.

⁵⁾ Die Punkte von R schreiben wir $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, usw.; insbesondere bedeute $0 = (0, \dots, 0)$ den Ursprung. Für reelles t sei $tx = (tx_1, \dots, tx_n)$, ferner $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. Mit $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ und $|xy|$ bezeichnen wir das skalare Produkt von x und y , bzw. dessen Absolutbetrag. Untere Indizes beziehen sich auf die verschiedenen Koordinaten, obere auf verschiedene Punkte.

(die zweite Darstellung folgt aus der ersten wegen (2)). Auf Grund dieser Definition ist offenbar für zwei beliebige Punkte x und y

$$|xy| \leq F(x) G(y). \quad (5)$$

Wie man leicht zeigt, hat $G(x)$ analog zu $F(x)$ folgende Eigenschaften:

$$G(0) = 0, \quad G(x) > 0 \text{ für } x \neq 0. \quad (1')$$

$$G(tx) = |t| G(x) \text{ für reelles } t. \quad (2')$$

$$G(x+y) \leq G(x) + G(y). \quad (3')$$

Auch die Ungleichung

$$G(x) \leq t \quad (t > 0)$$

definiert somit einen konvexen Körper $K'(t)$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zwar vom Volumen $J't^n$, wenn J' das Volumen des Eichkörpers $K' = K'(1)$ bedeutet.

Während $F(x)$ die Distanzfunktion von K ist, stellt $G(x)$ die Stützfunktion von K dar; d. h. die sämtlichen Stützebenen von K werden durch

$$xy = G(y)$$

gegeben, wenn der Parameter y alle Punkte von R durchläuft. Die beiden Körper K und K' stehen in der Beziehung zu einander, daß die Randpunkte (bzw. die Stützebenen) von K die Polaren der Stützebenen (bzw. der Randpunkte) von K' in bezug auf die Einheitskugel sind. Wegen dieser Reziprozität muß demnach auch

$$F(x) = \max_{G(y) \leq 1} |xy| = \max_{y \neq 0 \text{ in } R} \frac{|xy|}{G(y)} \quad (4')$$

sein. Die beiden Körper K und K' und ebenso die zugehörigen Distanzfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ heißen polar zueinander.⁶⁾

Falls K nur aus regulären Punkten besteht, d. h. durch jeden seiner Randpunkte nur eine einzige Stützebene geht, so sind die partiellen Ableitungen

$$F_h(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

stetige Funktionen von x ; man erhält alsdann $G(y)$ durch Elimination von $x_1, \dots, x_n$ aus den $n+1$ Gleichungen

$$xy = G(y), \quad y_1 = F_1(x), \dots, y_n = F_n(x),$$

und entsprechender Weise ergibt sich $F(x)$ aus $G(y)$.

§ 2. Ungleichungen für das Produkt JJ' .

⁶⁾ Wegen dieser Definitionen und Sätze verweise ich auf Bonnesen-Fenchel, Konvexe Körper, Erg. d. Math. III/1, 1934.

Seien

$$x_h^* = \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k \text{ und } y_h^* = \sum_{k=1}^n A_{hk} y_k \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

zwei zu einander kontragrediente lineare Transformationen, d. h. zwei Transformationen, die das skalare Produkt xy invariant lassen:

$$x^* y^* = xy.$$

Sind dann $F(x)$ und $G(x)$ zwei polare Distanzfunktionen und gehen diese durch die vorigen Transformationen über in

$$F^*(x^*) = F^*(x_1^*, \dots, x_n^*) = F(x_1, \dots, x_n)$$

und

$$G^*(y^*) = G^*(y_1^*, \dots, y_n^*) = G(y_1, \dots, y_n),$$

so sind auch $F^*(x)$ und $G^*(x)$ wieder einander polare Distanzfunktionen. Sei

$$d = |a_{hk}|_{h,k=1,2,\dots,n} \text{ und } D = |A_{hk}|_{h,k=1,2,\dots,n},$$

so daß

$$d \neq 0, D \neq 0, dD = 1$$

ist. Die transformierten Eichbereiche

$$F^*(x) \leq 1 \text{ und } G^*(x) \leq 1$$

haben alsdann die Inhalte

$$J^* = dJ \text{ und } J'^* = DJ',$$

so daß bei der betrachteten Transformation das Produkt der Inhalte

$$\Delta = J^* J'^* = JJ'$$

ungeändert geblieben ist. Wir werden jetzt zeigen, daß Δ für jedes konvexe Körperpaar zwischen zwei positiven, allein von der Dimension n abhängigen Schranken bleibt.

Wahrscheinlich lauten die exacten Ungleichungen

$$\frac{4^n}{n!} \leq JJ' \leq \frac{\pi^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2},$$

wobei die linke Seite zutrifft für das polare Körperpaar von Parallelepiped und Oktaeder

$$F(x) = \max_{h=1,2,\dots,n} \left(\left| \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k \right| \right) \leq 1 \text{ und } G(x) = \sum_{h=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{hk} x_k \right| \leq 1$$

mit

$$J = 2^n d, \quad J' = \frac{2^n D}{n!}, \quad JJ' = \frac{4^n}{n!}$$

und die rechte Seite für die polaren Ellipsoide

$$F(x) = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{hk} x_k \right)^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad G(x) = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{hk} x_k \right)^2 \leq 1$$

mit

$$J = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} d}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad J' = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} D}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad JJ' = \frac{\pi^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2}.$$

Für unsere Zwecke reicht es jedoch aus, die folgenden schwächeren Ungleichungen zu beweisen:

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leq JJ' \leq 4^n, \quad (6)$$

deren Beweis durch folgende einfache geometrische Betrachtung gelingt:

Wir wählen auf der Oberfläche $F(x) = 1$ von K der Reihe nach n Paare von diametral gelegenen Punkten $(x^{(1)}, -x^{(1)}), \dots, (x^{(n)}, -x^{(n)})$ mit n zugehörigen Paaren paralleler Stützebenen, die mit $(\xi^{(1)}, -\xi^{(1)}), \dots, (\xi^{(n)}, -\xi^{(n)})$ bezeichnet seien, so daß also $\xi^{(h)}$, bzw. $-\xi^{(h)}$ eine Stützebene in $x^{(h)}$, bzw. in $-x^{(h)}$ ist. Diese Auswahl geschieht nach folgendem Prinzip: Das Punktepaar $(x^{(1)}, -x^{(1)})$ ist beliebig. Das Punktepaar $(x^{(2)}, -x^{(2)})$ genüge der Bedingung, daß die zugehörigen Stützebenen $(\xi^{(2)}, -\xi^{(2)})$ parallel zum Durchmesser von K durch $x^{(1)}$ und $-x^{(1)}$ sind. Allgemein werde das Punktepaar $(x^{(r)}, -x^{(r)})$ so ausgewählt, daß die zugehörigen Stützebenen $(\xi^{(r)}, -\xi^{(r)})$ parallel zu den sämtlichen Durchmessern von K durch $x^{(h)}$ und $-x^{(h)}$ ($h = 1, 2, \dots, r-1$) sind.

Durch diese Konstruktion erhalten wir zwei konvexe Körper K_1 und K_2 , so daß K in K_1 und K_2 in K enthalten ist: K_1 sei nämlich das von den $2n$ Stützebenen $(\xi^{(1)}, -\xi^{(1)}), \dots, (\xi^{(n)}, -\xi^{(n)})$ berandete Parallelepiped, und K_2 das Oktaeder, das die kleinste konvexe Hülle der $2n$ Punkte $(x^{(1)}, -x^{(1)}), \dots, (x^{(n)}, -x^{(n)})$ darstellt, d. h. K_2 besteht aus allen Punkten x der Form

$$x = t_1 x^{(1)} + \dots + t_n x^{(n)}, \quad |t_1| + \dots + |t_n| \leq 1.$$

Sei J_1 , bzw. J_2 das Volumen von K_1 , bzw. K_2 ; dann ist also

$$J_1 \geq J \geq J_2. \quad (7)$$

Hierneben besteht aber auch noch die Gleichung

$$J_1 = n! J_2, \quad (8)$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, daß nach Konstruktion der Abstand des Punktes $x^{(r)}$ von der durch $\mp x^{(1)}, \dots, \mp x^{(r-1)}$ gelegten linearen Mannigfaltigkeit ebenso groß ist wie der der zugehörigen Stützebene $\xi^{(r)}$.

Bei der Polarentransformation von K in K' gehen nun die $2n$ Punkte $x^{(h)}, -x^{(h)}$ auf K über in $2n$ paarweise parallele Stützebenen $\eta^{(h)}, -\eta^{(h)}$ von K' , und die $2n$ Stützebenen $\xi^{(h)}, -\xi^{(h)}$ von K in $2n$ paarweise einander diametrale Punkte $y^{(h)}, -y^{(h)}$ auf K' . Die $2n$ Stützebenen $\eta^{(h)}, -\eta^{(h)}$ bilden die Berandung eines Parallelepipedes K_1' , das K' in seinem Innern enthält, und die kleinste konvexe Hülle K_2' der $2n$ Punkte $y^{(h)}, -y^{(h)}$ ist ein ganz in K' enthaltenes Oktaeder. Bedeuten J_1' und J_2' die Volumina von K_1' und K_2' , so ist also

$$J_1' \geq J' \geq J_2'. \quad (7')$$

Offenbar ist K_2' der zu K_1 und K_1' der zu K_2 polare konvexe Körper. Weiter genügen nach der Bemerkung zu Beginn dieses Paragraphen die Volumina j_1 und j_2 eines Parallelepipedes und des dazu polaren Oktaeders der Gleichung

$$j_1 j_2 = \frac{4^n}{n!}.$$

Somit ist insbesondere

$$J_1 J_2' = J_1' J_2 = \frac{4^n}{n!} \quad (9)$$

Wegen (8) erhalten wir demnach die Gleichungen

$$J_2 = \frac{J_1}{n!}, \quad J_1' = \frac{4^n}{n! J_2} = \frac{4^n}{J_1}, \quad J_2' = \frac{4^n}{n! J_1},$$

also wegen (7) und (7') die Ungleichungen

$$J_1 \geq J \geq \frac{J_1}{n!} \quad \text{und} \quad \frac{4^n}{J_1} \geq J' \geq \frac{4^n}{n! J_1},$$

und hieraus folgt (6) unmittelbar durch Multiplikation.

§ 3. Anwendung auf die Minkowskischen Minima.

Wir betrachten nunmehr die beiden polaren konvexen Körper K und K' und deren Distanzfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ in bezug auf das Gitter aller Punkte x in R mit ganzen rationalen Koordinaten.

Zur Funktion $F(x)$ können wir n linear unabhängige Gitterpunkte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ bestimmen, derart daß für

$$\sigma^{(h)} = F(x^{(h)}) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

$\sigma^{(1)}$ das Minimum von $F(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und ferner $\sigma^{(r)}$ für $r = 2, 3, \dots, n$ das Minimum von $F(x)$ in allen von $x^{(1)}, \dots, x^{(r-1)}$ unabhängigen Gitterpunkten darstellt. Alsdann ist nach Minkowski⁴⁾:

$$0 < \sigma^{(1)} \leq \sigma^{(2)} \leq \dots \leq \sigma^{(n)}, \quad \frac{2^n}{n! J} \leq \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} \dots \sigma^{(n)} \leq \frac{2^n}{J}. \quad (10)$$

Entsprechenderweise gibt es zu $G(x)$ ein System von n linear unabhängigen Gitterpunkten $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, so daß für

$$\tau^{(h)} = G(y^{(h)}) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

$\tau^{(1)}$ das Minimum von $G(x)$ in allen Gitterpunkten $x \neq 0$ und ferner $\tau^{(r)}$ für $r = 2, 3, \dots, n$ das Minimum von $G(x)$ in allen von $y^{(1)}, \dots, y^{(r-1)}$ unabhängigen Gitterpunkten ist; analog zu (10) gilt

$$0 < \tau^{(1)} \leq \tau^{(2)} \leq \dots \leq \tau^{(n)}, \quad \frac{2}{n! J'} \leq \tau^{(1)} \tau^{(2)} \dots \tau^{(n)} \leq \frac{2^n}{J'}. \quad (10')$$

Aus (10) und (10') folgt insbesondere

$$\frac{4^n}{(n!)^2 J J'} \leq \prod_{h=1}^n \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq \frac{4^n}{J J'},$$

also wegen (6):

$$\frac{1}{(n!)^2} \leq \prod_{h=1}^n \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq (n!)^2. \quad (11)$$

Es ist nun wichtig, daß nicht nur das Produkt $\prod_{h=1}^n \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)}$ nach oben und unten durch nur von n abhängige positive Schranken begrenzt wird, sondern daß solche Schranken auch noch für die einzelnen Faktoren $\sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)}$ bestehen. Man erhält diese folgendermaßen:

Für jeden Index $h = 1, 2, \dots, n$ betrachten wir das System der $n+1$ Punkte

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(h)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-h+1)}.$$

Die h ersten sowohl als die $n-h+1$ letzten dieser Punkte sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Daraus folgt aber sogleich, daß die $h(n-h+1)$ skalaren Produkte

$$x^{(i)} y^{(j)} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \dots, h) \\ (j = 1, 2, \dots, n-h+1) \end{matrix}$$

nicht alle gleichzeitig verschwinden können. Denn sonst würde jedes dieser $x^{(i)}$ auf jedem der $y^{(j)}$ senkrecht stehen, also auch die durch $0, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}$ gelegte lineare h -dimensionale Mannigfaltig-

keit $L^{(h)}$ auf der durch $0, y^{(1)}, \dots, y^{(n-h+1)}$ gelegten linearen $(n-h+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M^{(n-h+1)}$. Das ist aber unmöglich, da $L^{(h)}$ und $M^{(n-h+1)}$ im Raum R von der Dimension n liegen, und $n < h + (n-h+1)$ ist.

Sei also etwa

$$x^{(i_0)} y^{(j_0)} \neq 0.$$

Hier steht links das skalare Produkt zweier Gitterpunkte, somit eine ganze rationale Zahl. Daher folgt, daß

$$|x^{(i_0)} y^{(j_0)}| \geq 1$$

ist. Aus der Ungleichung (5) ergibt sich also

$$1 \leq |x^{(i_0)} y^{(j_0)}| \leq F(x^{(i_0)}) G(y^{(j_0)}) = \sigma^{(i_0)} \tau^{(j_0)}$$

und wegen

$$\sigma^{(h)} \geq \sigma^{(i_0)}, \quad \tau^{(n-h+1)} \geq \tau^{(j_0)}$$

schließlich die Ungleichung

$$\sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \geq 1 \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{A})$$

Wir wenden diese Ungleichung auf alle Faktoren $\sigma^{(k)} \tau^{(n-k+1)}$ mit $k = 1, 2, \dots, n$ und $k \neq h$ in der rechten Hälfte von (11) an; dann ergibt sich auch noch eine obere Schranke

$$\sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{B})$$

Diese beiden Ungleichungen (A) und (B) bilden das allgemeine Übertragungsprinzip für die Minkowskischen Minima polarer konvexer Körper.

Das Übertragungsprinzip nimmt eine von den speziellen Körpern unabhängige und daher besonders einfache Form an, wenn wir zwei Systeme von je n positiven Zahlen $s^{(1)}, \dots, s^{(n)}$ und $t^{(1)}, \dots, t^{(n)}$ durch

$$\sigma^{(h)} = \frac{2s^{(h)}}{\sqrt[n]{J}}, \quad \tau^{(h)} = \frac{2t^{(h)}}{\sqrt[n]{J'}} \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

definieren. Wir nennen diese Zahlen die reduzierten Minima von $F(x)$, bzw. $G(x)$; sie stimmen mit den Minkowskischen Minima überein, falls $J = 2^n$ oder $J' = 2^n$ ist. Die Formeln (10), (10'), (A) und (B) ergeben für sie:

$$\begin{aligned} 0 < s^{(1)} \leq s^{(2)} \leq \dots \leq s^{(n)}, \quad \frac{1}{n!} \leq s^{(1)} s^{(2)} \dots s^{(n)} \leq 1, \\ 0 < t^{(1)} \leq t^{(2)} \leq \dots \leq t^{(n)}, \quad \frac{1}{n!} \leq t^{(1)} t^{(2)} \dots t^{(n)} \leq 1, \quad (13) \\ (n!)^{-\frac{2}{n}} \leq s^{(h)} t^{(n-h+1)} \leq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Es ist hiernach insbesondere

$$s^{(1)}t^{(n)} \geq (n!)^{-\frac{2}{n}}, \quad s^{(1)n-1}s^{(n)} \leq 1, \quad t^{(1)n-1}t^{(n)} \leq 1,$$

und also ergeben sich hieraus folgende Ungleichungen für die ersten und letzten Minima:

$$t^{(1)} \leq (n!)^{\frac{2}{n(n-1)}} s^{(1)\frac{1}{n-1}} \quad \text{und} \quad t^{(n)} \geq (n!)^{-\frac{2}{n}} s^{(n)\frac{1}{n-1}}. \quad (14)$$

Indem man s und t vertauscht, erhält man noch zwei analoge Abschätzungen nach der anderen Richtung. Die erste der beiden Ungleichungen (14) enthält das Khintchinesche Übertragungsprinzip und auch meinen allgemeineren Satz aus dem vorigen Jahr ^{1), 2), 3)}.

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß die numerischen Koeffizienten in den Übertragungssätzen dieses Paragraphen verschärft werden können. Nimmt man z. B. für K und K' das durch die Distanzfunktionen

$$F(x) = \max_{h=1,2,\dots,n} \left(\left| \sum_{k=1}^n a_{hk} x_k \right| \right) \quad \text{und} \quad G(x) = \sum_{h=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{hk} x_k \right|$$

bestimmte Parallelepipeden und Oktaeder, so daß

$$JJ' = \frac{4^n}{n!}$$

ist, so erhält man u. a. die Ungleichungen

$$1 \leq \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq n! \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

§ 4. Bemerkungen über das inhomogene Problem.

Im Beweis eines von mir kürzlich veröffentlichten Satzes⁷⁾ ist implizit folgendes Resultat enthalten: Ist $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein willkürlicher reeller Punkt in R , so gibt es einen Gitterpunkt x mit

$$F(x + \xi) \leq (n+1)^2 \sigma^{(n)}.$$

Wegen (B) ist also erst recht die Ungleichung

$$F(x + \xi) \leq \frac{\{(n+1)!\}^2}{\tau^{(1)}} \quad (15)$$

lösbar, so daß die Schärfe der Lösbarkeit des inhomogenen F -Problems von der des homogenen G -Problems abhängt. Dieses Resultat ist bis auf den von n abhängigen Faktor im wesentlichen das Bestmögliche. Denn aus Minkowskischen Überlegungen im letzten Kapitel der „Geometrie der Zahlen“ geht hervor, daß die Menge aller Punkte

$$\xi = t_1 x^{(1)} + \dots + t_n x^{(n)},$$

⁷⁾ Proceedings Academy Amsterdam **41** (1938), 634—637.

für die $(t_1, \dots, t_n)$ im Einheitswürfel $0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_n \leq 1$ liegt und

$$F(x + \xi) \leq \frac{\varepsilon \sigma^{(n)}}{2} \quad (0 < \varepsilon \leq 1)$$

durch einen Gitterpunkt x lösbar ist, in bezug auf den t -Raum höchstens das Maß ε hat; wegen (A) gilt daher erst recht dieselbe Maßabschätzung für die Ungleichung

$$F(x + \xi) \leq \frac{\varepsilon!}{2\tau^{(1)}}. \quad (16)$$

Die Sätze über inhomogene Probleme in diesem Paragraphen enthalten als sehr spezielle Fälle insbesondere einige Resultate, die V. Jarník vor kurzem gefunden hat und so freundlich war, mir schon vor der Veröffentlichung zur Verfügung zu stellen.

Montana, Juli 1938. *)

*

Věta o přenosu pro konvexní tělesa.

(Obsah předešlého článku.)

Bud'te K, K' dvě konvexní n -rozměrná tělesa (symetrická vzhledem k počátku), jež jsou navzájem polární vzhledem k jednotkové kouli; bud'ž dále J obsah tělesa K a bud'te $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(n)}$ postupná minima, příslušná k tělesu K ; bud'te $J', \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)}$ obdobná čísla pro těleso K' . Potom jest

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leq JJ' \leq 4^n,$$

$$1 \leq \sigma^{(h)} \tau^{(n-h+1)} \leq (n!)^2 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

*) Anmerkung im Mai 1939. Herr Chabauty macht mich auf den Vortrag von Herrn M. Riesz, C. R. Congress Oslo, II, 36—37, aufmerksam, den ich ganz vergessen hatte. Herr Riesz gibt dort folgenden Satz, mit dem mein Resultat eng zusammenhängt: Zu den polaren konvexen Körpern $F(x) \leq 1$ und $G(x) \leq 1$ in n Dimensionen gibt es je n Gitterpunkte der Determinante 1,

$$X^{(1)}, \dots, X^{(n)} \text{ und } Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)},$$

so daß

$$1 \leq F(X^{(h)}) G(Y^{(h)}) \leq c \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten $c > 0$ ist. Darüber hinaus gilt, daß man diese Gitterpunkte polar zu einander annehmen kann, dh. $(X^{(h)}, Y^{(k)}) = \delta_{hk}$, wo δ_{hk} das Kroneckersche Zeichen ist. Die Beziehung zu den Minkowskischen Minima wird dagegen nicht in der Rieszschen Note gegeben. — Verf. möchte zum zweiten Teil des Rieszschen Satzes bemerken, daß dieser kein Analogon für die n unabhängigen Gitterpunkte $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ und $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ hat, die die Minkowskischen Minima liefern; man kann leicht Beispiele konstruieren, für die einige der skalaren Produkte $(x^{(h)}, y^{(k)})$ beliebig große Werte annehmen.

Remarque à l'article précédent de M. Mahler.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Reçu le 29 novembre 1938.)

Au juillet de cette année, j'ai résolu un problème sur les approximations diophantiques linéaires. Presque en même temps, M. Mahler a trouvé indépendamment un théorème général sur les corps convexes¹⁾ qui contient comme une conséquence facile mon résultat principal. C'est pourquoi, au lieu de publier ma démonstration originale, je vais seulement montrer comment mon résultat peut être déduit du théorème de Mahler.

Pour commencer, je vais citer les résultats de Mahler. Soit $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$ une fonction réelle²⁾ du point $x = (x_1, \dots, x_n)$, définie dans l'espace euclidien à n dimensions et jouissant des propriétés suivantes (où t signifie un nombre réel, $o = (0, \dots, 0)$):

$$F(o) = 0, \quad F(x) > 0 \text{ pour } x \neq o, \\ F(tx) = |t| F(x), \quad F(x+y) \leq F(x) + F(y).$$

L'inégalité $F(x) \leq t$ ($t > 0$) définit alors un corps convexe symétrique par rapport au point o ; soit J le volume du corps $F(x) \leq 1$.

Définissons n points $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ comme il suit: parmi tous les points à coordonnées entières (= points à c. e.) différents de o , choisissons un point $x^{(1)}$ avec la plus petite valeur possible de $F(x)$. En général, $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$ ($r < n$) étant définis, choisissons, parmi tous les points à c. e. qui sont linéairement indépendants de $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$ (c'est-à-dire qui ne sont pas représentables sous la forme $a_1 x^{(1)} + \dots + a_r x^{(r)}$, a_i étant des nombres réels), un point $x^{(r+1)}$ avec la plus petite valeur possible de $F(x)$. Les nombres

$$\sigma_i = F(x^{(i)}) \quad (0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n),$$

¹⁾ Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper, Časopis 68 (1938—9), p. 93—102.

²⁾ Tous les nombres de cette note sont réels; $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ étant deux points et a, b deux nombres, on pose $ax + by = (ax_1 + by_1, \dots, ax_n + by_n)$.

appelés les „minima successifs de $F(x)$ “, jouissent des propriétés suivantes:

$$\text{I.} \quad \frac{2^n}{n!J} \leq \sigma_1 \dots \sigma_n \leq \frac{2^n}{J}. \quad (1)$$

(Minkowski, Geometrie der Zahlen, p. 192.)

II. A chaque point $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, on peut faire correspondre un point y à c. e. tel que

$$F(y + \xi) \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \dots + \sigma_n) \leq \frac{1}{2}n\sigma_n. \quad (2)$$

Démonstration (d'après Minkowski, Geometrie der Zahlen, p. 226): Il existe n nombres $v_1, \dots, v_n$ avec $\xi = v_1x^{(1)} + \dots + v_nx^{(n)}$; soient y_i ($1 \leq i \leq n$) des nombres entiers tels que $|y_i + v_i| \leq \frac{1}{2}$; en posant $y = y_1x^{(1)} + \dots + y_nx^{(n)}$, on a

$$F(y + \xi) = F\left(\sum_{i=1}^n (y_i + v_i) x^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^n F((y_i + v_i) x^{(i)}) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F(x^{(i)}).$$

Remarque: Les inégalités (2) sont les meilleures inégalités de ce genre; en effet, en posant $F(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$, $\xi = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, on a $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 1$ et pour chaque point y à c. e. $F(y + \xi) \geq \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \dots + \sigma_n) = \frac{1}{2}n\sigma_n$.

Définissons maintenant $G(x) = G(x_1, \dots, x_n)$ par l'équation

$$G(x) = \max_{F(x) \leq 1} |xy| \quad (\text{où } xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n).$$

Alors la fonction $G(x)$ possède aussi les propriétés

$$G(o) = 0, \quad G(x) > 0 \text{ pour } x \neq o,$$

$$G(tx) = |t| G(x), \quad G(x + y) \leq G(x) + G(y).$$

Soit J' le volume du corps $G(x) \leq 1$ et soient $\tau_1, \dots, \tau_n$ les minima successifs de $G(x)$.

Alors, les résultats de M. Mahler peuvent s'énoncer comme il suit:

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leq JJ' \leq 4^n; \quad 1 \leq \sigma_h \tau_{n-h+1} \leq (n!)^2 \quad (1 \leq h \leq n). \quad (3)$$

En particulier, soient

$$X_h = \sum_{k=1}^n a_{hk}x_k, \quad Y_h = \sum_{k=1}^n A_{hk}y_k \quad (h = 1, \dots, n)$$

deux substitution telles que $X_1Y_1 + \dots + X_nY_n = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Alors, en posant

$$F(x) = \max_{1 \leq h \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{hk}x_k \right|, \quad (4)$$

on obtient

$$G(x) = \sum_{h=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{hk} x_k \right|.$$

Dans ce cas particulier, on peut remplacer les inégalités (3) par les relations plus précises

$$JJ' = 4^n/n!.$$

$$1 \leq \sigma_h \tau_{n-h+1} \leq n! \quad (1 \leq h \leq n). \quad (3')$$

D'après II, (3'), on a, pour ce cas particulier, le résultat suivant: à chaque point $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, il existe n nombres entiers $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$F(x + \xi) = \max_{1 \leq h \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{hk} (x_k + \xi_k) \right| \leq \frac{1}{2} n \sigma_n \leq \frac{n!}{2\tau_1}. \quad (5)^3$$

Dans tout ce qui suit, on désigne par les lettres a, b, c, d (pourvus d'indices éventuellement) des nombres entiers. Soient $r > 0$, $s > 0$ deux nombres entiers, Θ_{ij} ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$) rs nombres réels. $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ étant des nombres réels quelconques, posons (pour $t \geq 1$)

$$\psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq j \leq s} |a_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq s}} (\max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1}a_1 + \dots + \Theta_{is}a_s + a_{i+s} + \alpha_i|);$$

$$\psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \min_{\substack{\max_{1 \leq j \leq s} |a_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq s}} (\max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1}a_1 + \dots + \Theta_{is}a_s + a_{i+s} + \alpha_i|);$$

$$\psi_2(t; \beta_1, \dots, \beta_s) = \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| \leq t \\ 1 \leq i \leq r}} (\max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j + \beta_j|);$$

$$\psi'_2(t; \beta_1, \dots, \beta_s) = \min_{\substack{\max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| \leq t \\ 1 \leq i \leq r}} (\max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j + \beta_j|).$$

Soit $A > 0$, soit $\varphi(t)$ une fonction continue pour $t > A$ et supposons qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la fonction $\varphi(t) \cdot t^{-\varepsilon}$ soit — pour $t > A$ — une fonction croissante, $\varphi(t) \cdot t^{-\varepsilon} \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$. Soit $\varrho(t)$ la fonction inverse de $\varphi(t)$ (donc $\varphi(t) \rightarrow \infty$, $\varrho(t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$). Alors, on a les théorèmes suivants:

Théorème 1. Soit

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \psi_2(t; 0, \dots, 0) > 1; \quad (6)$$

³⁾ Pour le cas général, on obtient — d'après II, (3) — un résultat analogue, avec $(n!)^2$ au lieu de $n!$ Pour tout ce qui précède, on peut consulter la note citée de M. Mahler.

alors⁴⁾

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \cdot \sup_{\substack{0 \leq \alpha_1 < 1 \\ \vdots \\ 0 \leq \alpha_r < 1}} \psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq ((r+s)! (r+s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}};$$

donc, a fortiori,

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq \\ & \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq ((r+s)! (r+s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (7)$$

pour chaque système $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Théorème 2. Soit

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \psi_2(t; 0, \dots, 0) < \infty; \quad (8)$$

alors

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \geq \\ & \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) > 0 \end{aligned}$$

pour presque tous les systèmes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Remarque 1. Le théorème 2 caractérise le degré de précision du théorème 1. Ce sont précisément les théorèmes 1 et 2 dans deux cas particuliers $s = 1$ ou $r = 1$, dont j'étais en possession avant de connaître la méthode de Mahler. Soit en particulier $s = 1$ et posons $\Theta_{i1} = \Theta_i$; alors

$$\begin{aligned} \psi_2(t; 0, \dots, 0) &= \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq i \leq r} |b_i| \leq t}} | \Theta_1 b_1 + \dots + \Theta_r b_r + b_{r+1} |, \\ \psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) &= \min_{|a| \leq t} (\max_{1 \leq i \leq r} | \Theta_i a + c_i + \alpha_i |). \end{aligned}$$

Supposons que l'équation $\Theta_1 b_1 + \dots + \Theta_r b_r + b_{r+1} = 0$ entraîne $b_1 = \dots = b_{r+1} = 0$; on a alors $\psi_2(t; 0, \dots, 0) > 0$ et l'on peut trouver une fonction $\varphi(t)$ satisfaisant aux conditions énoncées avant le théorème 1 et à l'inégalité (6); on a donc pour chaque système $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ d'après (7) $\psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \rightarrow 0$, d'où le théorème bien connu de Kronecker: les points $(\Theta_1 a + c_1, \dots, \Theta_r a + c_r)$ sont partout denses (dans l'espace à r dimensions). Mais les théorèmes 1, 2 donnent, de plus, un résultat quantitatif très précis.

Remarque 2. Une fonction $f(t)$ continue et croissante pour $t > 0$ soit appelée „du type A “, si $f(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow 0$, $f(t) \rightarrow \infty$

⁴⁾ $\sup_{\substack{0 \leq \alpha_1 < 1 \\ \vdots \\ 0 \leq \alpha_r < 1}} f(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ = borne supérieure de $f(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ pour $0 \leq \alpha_1 < 1, \dots, 0 \leq \alpha_r < 1$.

pour $t \rightarrow \infty$. Evidemment, il est permis de supposer que $\varphi(t)$ et $\varphi(t) t^{-s}$ sont du type A . Donc $\varrho(t)$, la fonction $\lambda(t) = t \varphi(t)$ et la fonction inverse de λ , désignons la par $\mu(t)$, sont des fonctions du type A . En définissant, pour $x > 0$, le nombre $y > 0$ par $x = \lambda(y)$ (donc $y = \mu(x)$), on a

$$\frac{x}{\mu(x)} = \frac{\lambda(y)}{y} = \varphi(y) = \varphi(\mu(x));$$

donc la fonction $x/\mu(x)$ et sa fonction inverse — désignons la par $\zeta(x)$ — sont du type A . Pour $x > 0$, définissons $w > 0$ et $v > 0$ par les relations

$$\mu(\zeta(x)) = \varrho(w), \quad w = \varphi(v),$$

d'où

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \varrho(w) \varphi(\varrho(w)) = v \varphi(v) = \lambda(v), \\ x &= \frac{\lambda(v)}{\mu(\lambda(v))} = \frac{v \varphi(v)}{v} = w, \end{aligned}$$

donc

$$\mu(\zeta(x)) = \varrho(x) \text{ pour } x > 0.$$

Remarque 3. Pour $0 < x < y$, on a

$$\varrho(y) < \left(\frac{y}{x}\right)^{1/s} \varrho(x).$$

En effet, en posant $z = \varrho(x)$, $v = \varrho(y)$, on a $0 < z < v$, d'où

$$\frac{x}{\varrho^s(x)} = \frac{\varphi(z)}{z^s} < \frac{\varphi(v)}{v^s} = \frac{y}{\varrho^s(y)}.$$

Démonstration du théorème 1. Soit t un nombre suffisamment grand; définissons $z > 0$ par l'équation

$$z^{r+s} = \zeta\left(\frac{2t}{(r+s)!(r+s)}\right), \quad \text{donc} \quad \frac{(r+s)!(r+s)z^{r+s}}{2\mu(z^{r+s})} = t; \quad (9)$$

donc $z \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow \infty$.

Posons, dans (4), $n = r + s$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \\ &= \max(|\Theta_{11}x_1 + \dots + \Theta_{1s}x_s + x_{s+1}| z^s, \dots \\ &\dots, |\Theta_{r1}x_1 + \dots + \Theta_{rs}x_s + x_{s+r}| z^s, \left|\frac{-x_1}{z^r}\right|, \dots, \left|\frac{-x_s}{z^r}\right|); \end{aligned}$$

on obtient alors

$$G(y) = \sum_{i=1}^r \left| \frac{y_{s+i}}{z^s} \right| + \sum_{j=1}^s z^r |\Theta_{1j}y_{s+1} + \dots + \Theta_{rj}y_{s+r} - y_j|.$$

Le volume J' du corps $G(y) \leq 1$ (provenant du corps $|x_1| + \dots + |x_{r+s}| \leq 1$ par une transformation linéaire du déterminant 1) est égal à $2^{r+s}/(r+s)!$; donc (voir (1))

$$\tau_1 \leq (\tau_1 \dots \tau_n)^{1/n} \leq ((r+s)!)^{1/n}. \quad (10)$$

D'autre part, il existe $r+s$ nombres entiers $b_1, \dots, b_{r+s}$ non tous nuls tels que $G(b_1, \dots, b_{r+s}) = \tau_1$, donc

$$\max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| \leq \tau_1 z^s, \quad \max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j} b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j| \leq \frac{\tau_1}{z^r}; \quad (11)$$

d'après (6), la fonction $\psi_2(t; 0, \dots, 0)$ étant non croissante, on a $\psi_2(t; 0, \dots, 0) > 0$ pour $t \geq 1$. Pour $z^r > ((r+s)!)^{1/n}$ on a donc

$$\max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| > 0, \quad \max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j} b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj} b_{s+r} - b_j| > 0;$$

d'après (10), (11) on a donc pour $z \rightarrow \infty$

$$\frac{\tau_1}{z^r} \rightarrow 0, \quad \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| \rightarrow \infty, \quad \tau_1 z^s \rightarrow \infty;$$

d'après (6), (11), on a donc pour $t > t_0$

$$\frac{1}{\varphi(\tau_1 z^s)} < \frac{\tau_1}{z^r}, \quad \tau_1 z^s \varphi(\tau_1 z^s) > z^{s+r}, \quad \tau_1 z^s > \mu(z^{s+r}).$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de nombres quelconques, $0 \leq \alpha_i < 1$ ($1 \leq i \leq r$), $t > t_0$. D'après (5) (avec $\xi_1 = \dots = \xi_s = 0$, $\xi_{s+1} = \alpha_1, \dots, \xi_{s+r} = \alpha_r$) il existe $r+s$ nombres $a_1, \dots, a_{r+s}$ tels que

$$F(a_1, \dots, a_s, a_{s+1} + \alpha_1, \dots, a_{s+r} + \alpha_r) < \frac{(r+s)! (r+s) z^s}{2\mu(z^{s+r})};$$

donc, d'après la définition de $F(x)$ et d'après (9),

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq s} |a_j| &< \frac{(r+s)! (r+s)}{2} \cdot \frac{z^{r+s}}{\mu(z^{r+s})} = t, \\ \max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1} a_1 + \dots + \Theta_{is} a_s + a_{s+i} + \alpha_i| &< \frac{(r+s)! (r+s)}{2\mu(z^{r+s})} = \\ &= \frac{(r+s)! (r+s)}{2\mu \left(\zeta \left(\frac{2t}{(r+s)! (r+s)} \right) \right)} = \frac{(r+s)! (r+s)}{2\varrho \left(\frac{2t}{(r+s)! (r+s)} \right)} < \\ &< \left(\frac{(r+s)! (r+s)}{2} \right)^{1+\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{\varrho(t)} = M < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

si $t > t_1 > t_0$ (voir les remarques 2 et 3). S'il existe un i ($1 \leq i \leq r$) tel que $M \leq \alpha_i \leq 1 - M$, on voit que $\max_{1 \leq j \leq s} |a_j| > 0$.

Dans le cas contraire, posons $\gamma_i = \alpha_i$ pour $2 \leq i \leq r$, $\gamma_1 = M$ pour $0 \leq \alpha_1 < M$, $\gamma_1 = 1 - M$ pour $1 - M < \alpha_1 < 1$. Il existe donc $r + s$ nombres $c_1, \dots, c_{r+s}$ avec

$$\max_{1 \leq j \leq s} |c_j| < t, \quad \max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1}c_1 + \dots + \Theta_{is}c_s + c_{s+i} + \gamma_i| < M;$$

d'après ce que l'on a dit, on aura

$$\max_{1 \leq j \leq s} |c_j| > 0, \quad \max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1}c_1 + \dots + \Theta_{is}c_s + c_{s+i} + \alpha_i| < 2M.$$

Donc: pour chaque $t > t_1$ et pour chaque système $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ($0 \leq \alpha_i < 1$ pour $1 \leq i \leq r$), on a

$$\varphi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) < 2M < \frac{((r+s)! (r+s))^{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}}}{\varrho(t)},$$

c. q. f. d.

Démonstration du théorème 2. D'après une remarque de M. Mahler, on peut déduire la démonstration du théorème 2 des considérations de Minkowski.⁵⁾ Je donne ici une démonstration directe, basée sur une idée de M. Khintchine.⁶⁾ Sans restreindre la généralité, nous allons nous borner aux systèmes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ du „cube“ $0 \leq \alpha_i < 1$ ($1 \leq i \leq r$), en considérant chaque système $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ comme un point de l'espace euclidien à r dimensions.

D'après (8), il existe un $k > 0$ et une suite de systèmes

$$t_m, b_{1,m}, b_{2,m}, \dots, b_{s+r,m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

avec

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty, \quad \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i,m}| = t_m,$$

$$\max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1,m} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r,m} - b_{j,m}| < \frac{k}{\varphi(t_m)}. \quad (12)$$

En effet, s'il existe un système $(b_1, \dots, b_{r+s}) \neq (0, \dots, 0)$ avec $\max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j| = 0$, on aura $\max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i}| > 0$ et il suffit de poser $b_{k,m} = mb_k$.

Dans le cas contraire, il existe, d'après (8), une suite de systèmes $T_m, b_{1,m}, \dots, b_{s+r,m}$ telle que

$$T_m \rightarrow \infty, \quad \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i,m}| \leq T_m,$$

$$0 < \max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1,m} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r,m} - b_{j,m}| < \frac{k}{\varphi(T_m)}$$

⁵⁾ Voir le § 4 de la note citée de M. Mahler.

⁶⁾ Voir p. ex. A. Khintchine, Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, Math. Annalen **113** (1936), p. 398—415, en particulier p. 399—401.

et il suffit de poser $t_m = \max_{1 \leq i \leq r} |b_{s+i,m}|$, car évidemment $t_m \rightarrow \infty$, $\varphi(t_m) \leq \varphi(T_m)$.

Soit M l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ avec $\limsup_{t \rightarrow \infty} \varrho(t) \psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$. Pour $u, v = 1, 2, 3, \dots$ soit $M_{u,v}$ l'ensemble de tous les points $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tels que l'inégalité $\varrho(t) \psi'_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) < 1/v$ soit vérifiée pour chaque $t > u$, de sorte que l'on a pour chaque v_0

$$M = \prod_{v=v_0}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} M_{u,v} = \prod_{v=v_0}^{\infty} M_v, \quad \text{où } M_v = \sum_{u=1}^{\infty} M_{u,v}.$$

Si μA désigne la mesure de l'ensemble A , on a (à cause de $M_{u,v} \subset M_{u+1,v}$)

$$\mu M_v = \lim_{u \rightarrow \infty} \mu M_{u,v}, \quad \mu M \leq \mu M_v$$

pour chaque v .

Évaluons μM_v . Choisissons un m tel que $v^{-\epsilon/2} \varphi(t_m) > u$ et posons

$$t = v^{-\epsilon/2} \varphi(t_m), \quad (13)$$

donc (voir la remarque 3)

$$t_m = \varrho(v^{\epsilon/2} t) \leq v^{\frac{1}{2}} \varrho(t). \quad (14)$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ étant un point de $M_{u,v}$, il existe un système $a_1, \dots, a_{r+s}$ avec $\max_{1 \leq j \leq s} |a_j| \leq t$,

$$-\frac{1}{v\varrho(t)} < \Theta_{i1}a_1 + \dots + \Theta_{is}a_s + a_{s+i} + \alpha_i < \frac{1}{v\varrho(t)} \quad (1 \leq i \leq r). \quad (15)$$

En multipliant la première inégalité (15) par $b_{s+1,m}$, la seconde par $b_{s+2,m}$ etc. et en faisant la somme, on obtient, d'après (12),

$$\left| \sum_{i=1}^r \alpha_i b_{s+i,m} + d \right| < \frac{rt_m}{v\varrho(t)} + \frac{skt}{\varphi(t_m)}, \quad (16)$$

d étant un certain nombre entier. Il existe un l ($1 \leq l \leq r$) tel que $b_{s+l,m} = \pm t_m$. Donc, α_i ($i \neq l$, $1 \leq i \leq r$) et d étant donnés, le nombre α_l est restreint, par l'inégalité (16), à l'intérieur d'un intervalle de longueur

$$L = \frac{2r}{v\varrho(t)} + \frac{2skt}{t_m\varphi(t_m)}.$$

En outre, s'il doit exister un point $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ avec (16), il faut que (à cause de $0 \leq \alpha_i < 1$)

$$|d| < rt_m + \frac{rt_m}{v\varrho(t)} + \frac{skt}{\varphi(t_m)} = R.$$

On a donc $\mu M_{u,v} \leq L(2R + 1)$.

Mais (voir (13), (14))

$$L \leq \frac{2r}{v^{\frac{1}{2}}t_m} + \frac{2sk}{v^{\varepsilon/2}t_m} < \frac{1}{v^{\lambda}t_m},$$

si $\lambda = \min(\frac{1}{3}, \varepsilon/3)$, $v > v_1$. D'autre part

$$2R + 1 = 2rt_m + 1 + t_m L < 2rt_m + 1 + v^{-\lambda} < 3rt_m$$

pour $v > v_0 > v_1$. On a donc pour $v > v_0$

$$\mu M_{u,v} < \frac{3r}{v^{\lambda}}, \quad \mu M_v = \lim_{u \rightarrow \infty} \mu M_{u,v} \leq \frac{3r}{v^{\lambda}}, \quad \mu M \leq \mu M_v \leq \frac{3r}{v^{\lambda}},$$

d'où $\mu M = 0$.

*

Poznámka k předcházejícímu článku p. Mahlera.

(Obsah předešlého článku.)

Užívaje Mahlerových výsledků, odvozují v tomto článku vztah mezi řádem funkcí $\psi_2(t; 0, \dots, 0)$ a $\psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ pro $t \rightarrow \infty$, kde

$$\psi_1(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq j \leq s} |a_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq s}} (\max_{1 \leq i \leq r} |\Theta_{i1}a_1 + \dots + \Theta_{is}a_s + a_{i+s} + \alpha_i|),$$

$$\psi_2(t; 0, \dots, 0) = \min_{\substack{0 < \max_{1 \leq j \leq s} |b_{s+1}| \leq t \\ 1 \leq i \leq r}} (\max_{1 \leq j \leq s} |\Theta_{1j}b_{s+1} + \dots + \Theta_{rj}b_{s+r} - b_j|).$$

Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal; Anwendung auf die Faktorzerlegung der Polynome in algebraischen Zahlkörpern.¹⁾

Štefan Schwarz, Praha.

Herausgegeben mit Unterstützung des Masarykfondes bei dem Nationalforschungsrat.

(Eingegangen am 10. Jänner 1938.)

Unter einer ganzen algebraischen Zahl n -ten Grades verstehen wir eine komplexe Zahl, die einer im Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung n -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit höchstem Koeffizienten 1 genügt.

Der Körper der rationalen Zahlen sei K .

Wir betrachten Polynome der Gestalt

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad (1)$$

wo α_i ganze algebraische Zahlen des Körpers $K(\vartheta)$ sind (ϑ primitives Element). Durch π bezeichnen wir die Primideale dieses Körpers.

Ein Polynom $f(x)$ nennt man reduzibel (mod π) d. h.

$$f(x) \equiv g(x) \cdot h(x) \pmod{\pi}, \text{ oder } f(x) - g(x) \cdot h(x) \equiv 0 \pmod{\pi}, \quad (2)$$

wo g, h , wieder ganze algebraische Koeffizienten besitzen, wenn jeder Koeffizient von (2) eine Zahl des Ideals π ist (oder auch — was dasselbe bedeutet — durch das Primideal π teilbar ist).

Im Folgenden werden wir als Koeffizienten der Polynome Elemente des Körpers der Restklassen nach dem Primideal π (π fest) $K_\pi(\vartheta)$ zulassen und werden deswegen oft direkt die Gleich-

¹⁾ Diese Arbeit ist ein neugefaßter Teil meiner Disertation, die an der Karlsuniversität im Sommer 1937 vorgelegt wurde.

heit $f(x) = g(x) \cdot h(x) \pmod{\pi}$ schreiben. Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist — z. B. im ganzen ersten Teile — lassen wir das Zeichen $\pmod{\pi}$ weg.

· Erster Teil.

I.

Es sei $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ ein Polynom aus $K_\pi(\vartheta)$. [Es genügt sich auf Polynome mit dem höchsten Koeffizienten 1 (Einsklasse) zu beschränken.]

Die ganzen alg. Zahlen α_i (Repräsentanten der Klassen) können so viele Werte annehmen wieviel die Anzahl der Restklassen beträgt, also $N(\pi)$ (Norm von π). Die Anzahl aller Polynome n -ten Grades aus $K_\pi(\vartheta)$ ist also $N(\pi)^n$. Einige unter ihnen sind in $K_\pi(\vartheta)$ reduzibel — andere irreduzibel.

Nun führen wir die verallgemeinerte Galoissche Imaginäre ein. Es soll ein ganz bestimmtes irreduzibles Polynom $f(x)$ n -ten Grades gewählt werden. Durch das Symbol j bezeichnen wir die Größe, die dieser Gleichung genügt, d. h. $j^n + \alpha_1 j^{n-1} + \dots + \alpha_n \equiv 0 \pmod{\pi}$ gilt. Wir adjungieren diese Größe j zum Körper $K_\pi(\vartheta)$; dann gilt:

1. $K_\pi(\vartheta; j)$ ist ein endlicher Körper, dessen Elemente von der Gestalt $\omega_0 + \omega_1 j + \dots + \omega_{n-1} j^{n-1}$ sind [wo $\omega_i \in K_\pi(\vartheta)$] und die Anzahl der Elemente dieses Körpers beträgt $N(\pi)^n$.

2. Die sämtlichen Körperelemente des Körpers $K_\pi(\vartheta; j)$ genügen der Gleichung

$$x^{N(\pi)^n} - x = 0. \quad (3)$$

3. Das Polynom (3) ist durch jedes irreduzible Polynom n -ten Grades aus $K_\pi(\vartheta)$ teilbar. (Ist $n = n' \cdot n''$, so gilt dies auch für irreduzible Polynome n' -ten resp. n'' -ten Grades.)

4. Ist j eine Nullstelle des in $K_\pi(\vartheta)$ irreduziblen Polynoms $f(x)$ vom Grad n , so sind die sämtlichen Nullstellen durch

$$j, j^{N(\pi)}, j^{N(\pi)^2}, \dots, j^{N(\pi)^{n-1}}, \quad (4)$$

gegeben.

II.

In erster Reihe stellen wir ein Kriterium für die Reduzibilität eines gegebenen Polynoms $\pmod{\pi}$ auf. Dies ist eine Verallgemeinerung eines ähnlichen Satzes, der von Herrn Prof. K. Petr stammt und in dieser Zeitschrift 66 (1936—37), S. 85—94 veröffentlicht wurde.

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_k(x),$$

wo $f_h(x)$ nur Polynome h -ten Grades als irreduzible Teiler besitzt.

[Bemerkung. Was die Berechnung des g. g. Teilers anbelangt, verfahren wir folgendermaßen. Durch sukzessive Potenzierung berechnen wir

$$x^{N(\pi)h} = \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} + \dots + \delta_n$$

und suchen dann den größten gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $\delta_1 x^{n-1} + \dots + (\delta_{n-1} - 1)x + \delta_n$. Siehe übrigens Abschnitt IV der genannten Arbeit.]

b)

Es bleibt uns also nur die Aufgabe übrig, das Polynom $f_h(x)$ (sein Grad sei m) in Polynome h -ten Grades zu zerlegen. Es ist $m = h \cdot l$, wo l die Anzahl der irreduziblen Bestandteile bedeutet.

Die Wurzeln von $f_h(x)$ lassen sich in folgenden Reihen darstellen

$$\begin{aligned} j_1, j_1^{N(\pi)}, j_1^{N(\pi)^2}, \dots, j_1^{N(\pi)^{h-1}} \\ \dots \dots \dots \\ j_l, j_l^{N(\pi)}, j_l^{N(\pi)^2}, \dots, j_l^{N(\pi)^{h-1}} \end{aligned}$$

Die Wurzeln in einzelnen Zeilen gehören denselben irreduziblen Faktoren an.

Wir wählen eine beliebige ganze symmetrische Funktion $\Phi(t_1, \dots, t_h)$ der Größen $t_1, \dots, t_h$. Wenn wir $t_1, \dots, t_h$ durch die Wurzeln z. B. der ersten Reihe ersetzen, wird der Ausdruck $\Phi(j_1, \dots, j_1^{N(\pi)^{h-1}})$ Funktion einer einzigen Veränderlichen j_1 , die wir durch $F(j_1)$ bezeichnen wollen.

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} u_1 = F(j_1) = F(j_1^{N(\pi)}) = \dots = F(j_1^{N(\pi)^{h-1}}). \\ \dots \dots \dots \\ u_l = F(j_l) = F(j_l^{N(\pi)}) = \dots = F(j_l^{N(\pi)^{h-1}}). \end{aligned}$$

Die Größen $u_1, u_2, \dots, u_l$ sollen der Gleichung

$$g(u) = u^l + g_1 u^{l-1} + \dots + g_l = 0 \quad (5)$$

genügen. Den Wert der Koeffizienten g_i können wir in $K_\pi(\theta)$ berechnen, da für die l -ten Potenzsummen $[x_i]$ sind die Wurzeln von $f_h(x) = 0$

$$\begin{aligned} u_1^l + u_2^l + \dots + u_l^l &= \frac{1}{h} \{ F^l(j_1) + \dots + F^l(j_1^{N(\pi)^{h-1}}) \} + \\ &+ \frac{1}{h} \{ F^l(j_2) + \dots + F^l(j_2^{N(\pi)^{h-1}}) \} + \dots = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \{F^\lambda(x_1) + F^\lambda(x_2) + \dots + F^\lambda(x_m)\}, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l) \quad (6)$$

gilt und die Ausdrücke (6) kann man, als symmetrische Funktionen der Wurzeln der Gleichung $f_h(x)$ aus $K_\pi(\vartheta)$, wirklich berechnen.

Dabei ist wesentlich, daß alle Wurzeln der Gleichung (5) Elemente aus $K_\pi(\vartheta)$ sind; $f_h(x)$ ist nämlich nach der Voraussetzung in ein Produkt von irreduziblen Polynomen h -ten Grades zerlegbar und $u_1 = F(j_1), \dots$ usw. sind symmetrische Funktionen der Wurzeln einzelner Faktoren, also aus $K_\pi(\vartheta)$.

Wir können also die u_i als bekannt annehmen.

Durch geeignete Wahl der Funktion F ist es stets möglich zu erreichen, daß die Größen $u_1, \dots, u_l$ voneinander verschieden sind. Es genügt z. B. bei unbestimmten t die Funktion in der Gestalt

$$u_\varrho = (t - j_\varrho) \dots (t - j_\varrho^{N(\pi)^{h-1}})$$

zu wählen; denn die Gleichung $u_\varrho = u_\tau$ kann nur dann bestehen, wenn alle $j_\varrho, \dots$ mit $j_\tau, \dots$ identisch sind, was nur für $\varrho = \tau$ der Fall ist.

Wir zeigen nun, daß durch die Bestimmung der Größen u_i ($i = 1, \dots, l$) aus $K_\pi(\vartheta)$ das Problem der Faktorzerlegung schon als gelöst angesehen werden kann.

Es ist zweierlei Verfahren möglich.

α) Das Polynom $F(x) - u_i$ und das gegebene Polynom $f_h(x)$ haben die Wurzeln $j_i, \dots, j_i^{N(\pi)^{h-1}}$ gemein, und falls u_i eine einfache Wurzel von $g(x)$ ist, nur diese. Darum gibt der g. g. Teiler von $f(x)$ und $F(x) - u_i$ die gesuchten irreduziblen Faktoren.

β) Oft ist das folgende Verfahren bequemer.

Wir behaupten: Wird eine beliebige symmetrische Funktion $S(j_\varrho, \dots, j_\varrho^{N(\pi)^{h-1}}) = \varphi(j_\varrho)$ gewählt, dann ist diese durch die Größe $u_\varrho = F(j_\varrho)$ rational ausdrückbar und es ist also möglich ihren Wert in $K_\pi(\vartheta)$ anzugeben.

Beweis: Wir konstruieren den Ausdruck

$$H(u) = \frac{\varphi(j_1)}{u - F(j_1)} + \frac{\varphi(j_2)}{u - F(j_2)} + \dots + \frac{\varphi(j_l)}{u - F(j_l)} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \frac{\varphi(x_i)}{u - F(x_i)},$$

wo die Summe sich auf alle Wurzeln der gegebenen Gleichung $f_h(x) = 0$ bezieht. Die rechte Seite zeigt, daß dieser Ausdruck eine gebrochene symmetrische Funktion der Wurzeln des gegebenen Polynoms ist und er wird zu einer ganzen Funktion $G(u)$ mit bekannten Koeffizienten aus $K_\pi(\vartheta)$, wenn wir ihn mit dem Polynome (5) multiplizieren; also

$$G(u) = g(u) \cdot \left[\frac{\varphi(j_1)}{u - F(j_1)} + \dots + \frac{\varphi(j_l)}{u - F(j_l)} \right]. \quad (7)$$

Wir setzen $u = u_\varrho = F(j_\varrho)$ ein und erhalten $\varphi(j_\varrho) = \frac{G(u_\varrho)}{g'(u_\varrho)}$, wo der Strich die Ableitung nach u bezeichnet. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wählen nun, der Reihe nach, statt der Funktion S die elementarsymmetrischen Funktionen der Größen $j_\varrho, \dots, j_\varrho^{N(\pi)h-1}$; so erhält man die Koeffizienten jenes der irreduziblen Faktoren, der gerade diese Größen als Wurzeln besitzt. Dies führen wir für jedes ϱ durch, erhalten so alle irreduziblen Faktoren und das Polynom $j_h(x)$ ist in Polynome h -ten Grades zerlegt.

Zusatz. Wir führen folgende Bezeichnung ein: Ein Polynom nennen wir normiert, wenn der Koeffizient seiner höchsten Potenz gleich 1 ist. Nach dem Vorhergehenden ist es evident, daß die Faktorzerlegung von $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ in $K_\pi(\vartheta)$ in lauter normierte Polynome möglich ist.

Zweiter Teil.

Wir zeigen nun, wie die Überlegungen des ersten Teiles die Zerlegung der Polynome im Körper der rationalen Zahlen K , resp. in irgendeiner algebraischen Erweiterung desselben, ermöglichen.

I.

Wir brauchen zwei Hilfssätze.

Hilfssatz A. Hat das Polynom $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ (im Körper aller komplexen Zahlen) einen Faktor r -ten Grades ($1 \leq r \leq n$), so sind die Koeffizienten desselben, dem absoluten Betrage nach, nicht größer als die Zahl $D_r = \text{Min}(B_r, C_r)$, wo

$$B_r = 2^r \cdot \sqrt{|\alpha_0|^2 + \dots + |\alpha_n|^2} \leq 2^r \{|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n|\},$$

$$1 \leq r \leq n$$

$$C_r = \{|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n|\}, \text{ für } r = n, n-1,$$

$$C_r = \{|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n|\} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (r+2),$$

für $1 \leq r \leq n-2$.

Beweis. 1. Die Koeffizienten der Faktoren von $f(x) = \alpha_0(x-x_1)\dots(x-x_n)$ sind dem absoluten Betrage nach höchstens gleich denjenigen von $f(x) = |\alpha_0| \cdot (x+|x_1|)\dots(x+|x_n|)$. Also der Faktor r -ten Grades, dessen Nullpunkte

$x_{v_1}, \dots, x_{v_r}$ sind, hat die Koeffizienten höchstens gleich $|\alpha_0| \cdot (1 + |x_{v_1}|) \dots (1 + |x_{v_r}|)$. Dieses Produkt kann nun nach einer Methode von J. Schur (siehe Pólya-Szegő: Aufgaben II. S. 265) abgeschätzt werden, und wir erhalten gerade die genannte Zahl B_r .

2. Die Zahl C_r (die für höhere r günstiger ist) erhalten wir folgendermaßen. Ist α ein Nullpunkt von $f(x)$, so ist $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$ und die Koeffizienten von $g(x)$, also des Quotienten $\frac{f(x)}{x - \alpha}$ sind der Reihe nach gleich $\alpha_0, \alpha_0\alpha + \alpha_1, \alpha_0\alpha^2 + \alpha_1\alpha + \alpha_2, \dots$. Ist $|\alpha| \leq 1$, so sind sie höchstens gleich $\sum_i |\alpha_i|$.

Ist $|\alpha| > 1$, so folgt aus $f\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{y} - \alpha\right) \cdot g\left(\frac{1}{y}\right)$ nach Umformung — da nun $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$ — dasselbe Resultat. Spalten wir nun von $g(x)$ nacheinander die einzelnen Linearfaktoren ab, so erhalten wir als obere Abschätzung für den absoluten Betrag der Koeffizienten des gebliebenen Polynoms die Zahl C_r .

Bemerkung. Zerfällt also $f(x)$ beliebig, so sind die Koeffizienten der einzelnen Faktoren dem absoluten Betrage nach nicht größer als die Zahl $D = \max D_r$ ($r = 1, \dots, n$).

Hilfssatz B. Es sei $f(x)$ ein normiertes Polynom in $K(\vartheta)$. Es sei (π) Hauptideal, wo π eine unzerlegbare Zahl ist, die das Ideal erzeugt. π sei kein Teiler der Diskriminante von $f(x)$. Ist die Zerlegung des Polynoms $f(x) \pmod{\pi}$ in normierte irreduzible Faktoren bekannt, so ist es immer möglich durch rationale Operationen seine eindeutige normierte Zerlegung $\pmod{\pi^2}$ anzugeben.

Der Beweis gibt gleich das Konstruktionsverfahren.

Die Zerlegung von $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$ in normierte irreduzible Faktoren sei

$$f(x) \equiv f_1(x) \dots f_k(x) \pmod{\pi}$$

d. h.
$$f(x) = f_1(x) \dots f_k(x) + \pi \cdot \varphi(x).$$

[$\varphi(x)$ bedeutet ein Polynom aus $K(\vartheta)$, dessen Grad kleiner als der Grad von $f(x)$ ist.] Bekanntlich gibt es k Polynome $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ [der Grad von $\varphi_v(x)$ ist kleiner als der Grad von $f_v(x)$], die folgender Relation genügen:

$$\frac{\varphi(x)}{f_1 \cdot f_2 \dots f_k} \equiv \frac{\varphi_1}{f_1} + \frac{\varphi_2}{f_2} + \dots + \frac{\varphi_k}{f_k} \pmod{\pi}.$$

[Partialbruchzerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f_1 \cdot f_2 \dots f_k}$ in $K_\pi(\vartheta)$; die φ_v sind

(mod π) eindeutig bestimmt; dabei ist nötig, daß alle f_k voneinander verschieden seien; durch Voraussetzung über π und der Diskriminante ist dies gesichert.]

Dann gilt aber

$$f(x) \equiv (f_1 + \pi\varphi_1) \cdot (f_2 + \pi\varphi_2) \cdot \dots \cdot (f_k + \pi\varphi_k) \pmod{\pi^2} \quad (*)$$

Denn, um diese Identität zu beweisen, genügt es an der linken Seite $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_k + \pi\varphi$ zu schreiben und an der rechten Seite ausmultiplizieren. Da sich die Ausdrücke $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ wegheben, kann man durch π teilen, womit man zu der identisch geltenden Partialbruchzerlegung gelangt.

Aus der Gestalt von (*) sieht man, daß die Faktoren normiert bleiben.

Ähnlich — da wir die Zerlegung (mod π^2) schon kennen — kann man die Zerlegung von $f(x) \pmod{\pi^3}$ usw. bestimmen.²⁾

II.

Wir betrachten in $K(\vartheta)$ das Polynom $f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_n$ (mit ganzen algebraischen Koeffizienten), das eine von Null verschiedene Diskriminante besitzt.

Wir wählen ein beliebiges Primideal (π) aus $K(\vartheta)$, welches ein Hauptideal ist — also π ganz algebraisch — für praktische Zwecke am bequemsten eine rationale Primzahl, die in dem betrachteten Körper unzerlegbar ist. π soll nicht die Diskriminante teilen.

Die Zerlegung von $f(x)$ in normierte irreduzible Faktoren (mod π) sei

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_m(x) \pmod{\pi}. \quad (8)$$

Wir konstruieren nun, von (8) ausgehend, die Zerlegung mod π^2 , $\pi^3, \dots, \pi^k$ so weit, bis $|\pi^k| > 2D$ (π ist eine ganze alg. Zahl, $|\pi| > 1$)

$$f(x) \equiv f_1^*(x) \cdot f_2^*(x) \cdot \dots \cdot f_m^*(x) \pmod{\pi^k}.$$

Ich behaupte: ist das Polynom $f(x)$ in $K(\vartheta)$ in m Faktoren zerlegbar, so müssen die Polynome $f_h^*(x)$ ($h = 1, \dots, m$) [wo wir

²⁾ Die Zerlegung (*) ist eindeutig; denn wäre $f \equiv f'_1 \cdot f'_2 \cdot \dots \cdot f'_k \pmod{\pi^2}$ eine andere Zerlegung, so wäre auch $f \equiv f'_1 \cdot \dots \cdot f'_k \pmod{\pi}$ und nun hat man aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $f \equiv f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k \pmod{\pi}$: $k = k'$; $f_1 \equiv f'_1, \dots, f_k \equiv f'_k \pmod{\pi}$ d. h. $f'_1 = f_1 + \pi\varphi_1$ usw., und die Zahlen $\varphi_1, \dots$ usw. sind eindeutig bestimmt.

Es sei bemerkt, daß die Zerlegung eines Polynoms nach einem Primzahlpotenzmodul (also auch π^v , $v > 1$) in irreduzible Faktoren im allgemeinen nicht eindeutig sein muß. Wohl aber in unserem Falle, wo wir die Polynome normiert denken und wo keine mehrfachen Faktoren existieren ist die Eindeutigkeit erfüllt. Den allgemeinen Fall siehe bei Oystein Ore im III. B. der „Algebra“ von Fricke.

uns die Koeffizienten an die „absolut kleinsten Reste“ $(\text{mod } \pi^k)$ reduziert denken], mit den normierten Faktoren der Zerlegung des gegebenen Polynoms in $K(\vartheta)$ übereinstimmen. Denn die Grade der Faktoren sind dann notwendig gleich und was die Koeffizienten anbelangt, unterscheiden sich die Koeffizienten von $f^*_h(x)$ von den Koeffizienten der eventuellen Faktoren von $f(x)$ nur um ein Vielfaches $\gamma \cdot \pi^k$, wo γ eine ganze Zahl ist; da aber $|\gamma \pi^k| > 2 |\gamma| \cdot D$, muß $\gamma = 0$, da sonst der Faktor einen Koeffizienten hätte, der dem absoluten Betrage nach größer als D wäre, was aber nach Satz A als unmöglich gefunden wurde. Dabei wird der Begriff des „absolut kleinsten Restes“ im Sinne des absoluten Betrages einer komplexen Zahl gemeint.

Es ist wohl möglich, daß das Polynom in $K(\vartheta)$ weniger als m Faktoren besitzt. Auch in diesem Falle kommen in erster Reihe die Polynome $f^*_1, f^*_2, \dots, f^*_m$ in Betracht. Irgend eines von ihnen könnte Teiler von $f(x)$ sein. Nun konstruieren wir weiter die Polynome $f^*_i \cdot f^*_k$, reduzieren sie $(\text{mod } \pi^k)$ an absolut kleinsten Reste, dann sind dies wieder mögliche Faktoren. Denn das so gebaute Polynom kann in $K(\vartheta)$ irreduzibel sein, aber zufällig $(\text{mod } \pi)$ zerfällt es und wird darum in der Zerlegung $(\text{mod } \pi^k)$ durch zwei Polynome vertreten. So fahren wir fort. Es ist also nötig, folgende Polynome zu konstruieren und zu untersuchen [die stets an absolut kleinsten Reste $(\text{mod } \pi^k)$ reduziert gemeint sind]:

$$\begin{aligned} &\text{Polynome } f^*_i \text{ der Anzahl } \binom{m}{1}, \\ &,, \quad f^*_i \cdot f^*_k \text{ der Anzahl } \binom{m}{2}, \\ &,, \quad f^*_i \cdot f^*_k \cdot f^*_l \text{ der Anzahl } \binom{m}{3}, \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{9}$$

Wir haben also $2^m - 2$ Polynome, die als einzige mögliche Faktoren in Betracht kommen, wodurch die Aufgabe an wenig Proben reduziert wird (es genügt schon $2^{m-1} - 2$), die in der Praxis vielfach unnötig sind, da wir aus den Graden, Absolutgliedern usw. die Antwort nach der Frage über die Reduzibilität gleich bekommen.

Zusatz. Wir betrachteten bis jetzt nur Polynome mit dem höchsten Koeffizienten 1. Sei nun dieser gleich der Zahl α_0 . Wir multiplizieren das gegebene Polynom mit der Zahl α , wo $\bar{\alpha} \alpha_0 \equiv 1 \pmod{\pi}$. Wie im Vorgehenden zerlegen wir $\bar{\alpha} \cdot f(x) \pmod{\pi, \pi^2, \dots}$. Die Untersuchung ändert sich nur in dem Sinne, daß nun außer den Polynomen (9) auch diejenigen Polynome zu

untersuchen sind, die aus ihnen durch Multiplizieren mit jedem Teiler der Zahl α_0 entstehen. Solcher Zahlen gibt es im Sinne der Teilbarkeit nur endlich viele, so daß die Anzahl der Polynome endlich bleibt.

Beispiele.

Einige Beispiele sollen zur Erläuterung dienen.

1. Es soll im Körper der Restklassen (mod 5) K_5 das folgende Polynom zerlegt werden, von welchem bekannt ist (wie man nach II oder IIIa erkennt), daß es in K_5 in drei Polynome zweiten Grades zerlegbar ist.

$$f_1(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 2. \quad (10)$$

Hier ist $\pi = p = 5$ und da wir im Ringe der ganzen rationalen Zahlen uns befinden $N(\pi) = p = 5$.

Wir wählen in IIIb die Funktion $\Phi(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$, $F(j) = j \cdot j^5 = j^6$. Die Größen $u_i = F(j_i)$ (es ist klar, daß sie die Absolutglieder der gesuchten Faktoren darstellen), genügen wegen

$$u_1^\lambda + u_2^\lambda + u_3^\lambda = \frac{1}{2}s_{6\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, 3)$$

der Gleichung $g(u) = u^3 + 2u^2 + 4u + 3$, also $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$. [Die Potenzsummen sind aus (10) durch sukzessive Potenzierung leicht zu finden.] Der größte g. Teiler von (10) und $x^6 - 1$, $x^6 - 3$, $x^6 - 4$ gibt der Reihe nach die gesuchten Faktoren.

Hier ist es aber vorteilhaft, nach der zweiten Methode zu verfahren.

Um den negativ genommenen Koeffizienten v_i bei x zu finden, schreiben wir $\varphi(x) = x + x^5$

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{61} \frac{x_i + x_i^5}{u - x_i^6} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{x_i + x_i^5}{u} \cdot \left\{ 1 + \frac{x_i^6}{u} + \frac{x_i^{12}}{u^2} + \dots \right\}.$$

Den periodischen Charakter der Potenzsummen s_k betrachtend (auf die ausführliche Untersuchung dieser Periodizität gehen wir nicht ein), erhalten wir vier geometrische Reihen und durch Summieren

$$H(u) = \frac{s_1 u^3 + s_7 u^2 + s_{13} u + s_{19}}{u^4 - 1}.$$

Weiter

$$G(u) = (u^3 + 2u^2 + 4u + 3) \cdot \frac{4u^3 + 3u^2 + 4u + 3}{u^4 - 1},$$

schließlich

$$v = \frac{G(u)}{g'(u)} = \frac{-u^2 + u + 1}{3u^2 + 4u + 4}.$$

Wenn man nun $u_1 = 1$ einsetzt, bekommt man $v_1 = -4$; für $u_2 = 3$, $v_2 = 0$; für $u_3 = 4$ ist $v_3 = -2$.

Es ist also

$$f_1(x) = (x^2 + 4x + 1) \cdot (x^2 + 3) \cdot (x^2 + 2x + 4).$$

Bemerkung. Ähnlich findet man allgemein, bei der Wahl

$$\Phi(t_1, \dots, t_h) = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_h, \quad F(j) = j^q, \quad q = \frac{p^h - 1}{p - 1}$$

für den Ausdruck, der zu dem negativ genommenen Koeffizienten bei x^{h-1} gehört

$$G(u) = g(u) \cdot \frac{s_1 u^{p-2} + s_{1+q} u^{p-3} + \dots + s_{1+(p-2)q}}{u^{p-1} - 1}.$$

Jedenfalls muß bei dieser Wahl von Φ die Gleichung $g(u)$ nicht alle Wurzeln verschieden haben und dann bekommen wir so nur einen Teil der Faktoren.

2. Es ist im Bereiche der ganzen Gausschen Zahlen das Polynom

$$f_2(x) = x^3 + (1 - i)x^2 + (5 - i)x - (1 + 8i) \quad (11)$$

zu zerlegen.

Als Modul wählen wir die rationale Primzahl $\pi = 3$. Diese ist bekanntlich auch im Ringe der ganzen Gausschen Zahlen unzerlegbar. $N(3) = 0$. Die Klassen mod 3 sind $a + bi$, $a, b = 0, \pm 1$. (Wir nehmen die absolut kleinsten Reste.) Um zu erfahren, wie (11) (mod 3) zerfällt, berechnen wir aus (11) sukzessiv die Potenzen

$$\begin{aligned} x^3 &\equiv (i - 1)x^2 + (i + 1)x + (1 - i) \\ x^4 &\equiv (1 - i)x^2 + (-1 - i)x - i \\ x^8 &\equiv x + (i - 1) \\ x^9 &\equiv x^2 + (i - 1)x \\ x^{18} &\equiv (1 - i)x^2 + (1 - i)x. \end{aligned} \quad (\text{mod } 3)$$

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & i - 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - i & 1 - i - \lambda \end{vmatrix} \equiv (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) \pmod{3}$$

zeigt, daß (11) (mod 3) in einen Faktor ersten und zweiten Grades zerfällt.

Der Linearfaktor ist der größte g. Teiler von (11) und $x^9 - x \equiv x^2 + (i + 1)x$, also der Ausdruck $x + i + 1$.

Den Faktor zweiten Grades erhält man durch Dividieren

$$f_2 \equiv (x + i + 1) \cdot (x^2 + ix + i). \pmod{3}$$

Um die Zerlegung in $K(i)$ zu finden, genügt es, die Zerlegung nach

einem solchen mod 3^k zu bestimmen, daß

$$3^k > 2 \sum |\alpha_i| = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{65}),$$

also $k = 4$.

Wir versuchen die Ausdrücke α , $\beta x + \gamma$ so zu bestimmen, damit

$$\begin{aligned} & x^3 + (1-i)x^2 + (5-i)x - (1+8i) \equiv \\ & \equiv (x+i+1+3\alpha) \cdot [x^2+ix+i+3(\beta x+\gamma)] \pmod{3^2} \end{aligned}$$

sei.

Dies führt zu der Relation

$$\frac{-ix^2 + (2-i)x - 3i}{(x+i+1) \cdot (x^2+ix+i)} \equiv \frac{\alpha}{x+i+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+ix+i} \pmod{3}$$

und daraus $\alpha = -i$, $\beta = 0$, $\gamma = 1-i$.

Also

$$f_2 \equiv (x+2i+1)(x^2+ix+3-2i) \pmod{3^2}. \quad (12)$$

(Wir reduzieren die Koeffizienten an absolut kleinste Reste $a+bi$, $a, b = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$). Wenn wir nun die Zerlegung mod 3^3 bestimmen, so bekommen wir ebenfalls das Ergebnis von (12), weil das Produkt der beiden Faktoren gerade (11) gibt.

Wir haben hier also die Zerlegung gleich bei erstem Schritte gefunden und in (12) kann man direkt Gleichheit — die in $K(i)$ gilt — schreiben, womit unsere Aufgabe gelöst ist.

3. Es ist in $K(\sqrt{-3})$ das Polynom

$$f_3 = 2x^3 + (5\sqrt{-3}-1)x^2 + (-1-\sqrt{-3})x + (-4+2\sqrt{-3}) \quad (13)$$

zu zerlegen.

Jede ganze Zahl des Körpers ist der Gestalt $a+b\omega$, $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, a, b ganz rational. Wir führen deswegen $\sqrt{-3} = 2\omega - 1$ ein. Die Größe ω erfüllt $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. Das Polynom (13) geht in

$$f_3 = 2[x^3 + (5\omega - 3)x^2 - \omega x + (2\omega - 3)]$$

über. Als Modul wählen wir $\pi = 5$. [Nach den bekannten Eigenschaften des quadratischen Körpers ist klar, daß (5) hier ein Primideal ist.] $N(5) = 25$.

Aus dem Polynome

$$\bar{f}_3 = x^3 + (5\omega - 3)x^2 - \omega x + (2\omega - 3) \quad (13a)$$

erhält man durch sukzessives Potenzieren mod 5, mit Berücksichtigung von $\omega^2 = \omega - 1$,

$$\begin{aligned}
x^3 &\equiv 3x^2 + \omega x + (3 - 2\omega) \\
x^4 &\equiv (\omega - 1)x^2 + (\omega + 3)x + (4 + 4\omega) \\
x^8 &\equiv (3\omega + 4)x^2 + (1 - \omega)x + (2\omega - 3) \pmod{5} \\
x^{16} &\equiv (2\omega + 1)x^2 + (\omega - 1)x + (3\omega + 2) \\
x^{24} &\equiv 1.
\end{aligned}$$

Daraus geht gleich hervor, daß $\bar{f}_3 \pmod{5}$ in drei Linearfaktoren zerfällt. Von den Größen $a + b\omega$, $a, b = 0, \pm 1, \pm 2$ genügen die folgenden drei der Gleichung (13a)

$$2\omega + 2, -\omega, -\omega + 1.$$

Also

$$\bar{f}_3 \equiv (x + \omega) \cdot (x + \omega - 1) \cdot (x - 2\omega - 2) \pmod{5}.$$

Die Summe der Absolutbeträge der Koeffizienten von (13) ist < 20 , es genügt also die Zerlegung $\pmod{5^2}$ und $\pmod{5^3}$ zu bestimmen. Wir setzen

$$\bar{f}_3 \equiv (x + \omega + 5\alpha) \cdot (x + \omega - 1 + 5\beta) \cdot (x - 2\omega - 2 + 5\gamma) \pmod{5^2},$$

durch Einsetzen von (13a)

$$\begin{aligned}
\frac{\omega x^2 + (\omega - 1)x - 1}{(x + \omega)(x + \omega - 1)(x - 2\omega - 2)} &\equiv \frac{\alpha}{x + \omega} + \frac{\beta}{x + \omega - 1} + \\
&+ \frac{\gamma}{x - 2\omega - 2} \pmod{5},
\end{aligned}$$

$$\alpha = 2\omega, \beta = 0, \gamma = 4\omega.$$

$$\bar{f}_3 \equiv (x + 11\omega) \cdot (x + \omega - 1) \cdot (x - 7\omega - 2) \pmod{25}.$$

Es sei weiter

$$\bar{f}_3 \equiv (x + 11\omega + 25\alpha) \cdot (x + \omega - 1 + 25\beta) \cdot (x - 2 - 7\omega + 25\gamma) \pmod{5^3},$$

setzt man wieder (13a) ein

$$\begin{aligned}
&\frac{(4\omega - 3)x - 1 - 3\omega}{(x + 11\omega)(x + \omega - 1)(x - 2 - 7\omega)} \equiv \\
&\equiv \frac{\alpha}{x + 11\omega} + \frac{\beta}{x + \omega - 1} + \frac{\gamma}{x - 2 - 7\omega} \pmod{5},
\end{aligned}$$

$$\alpha = 2\omega + 2, \beta = 0, \gamma = 3\omega - 2,$$

$$\bar{f}_3 \equiv (x + 61\omega + 50) \cdot (x + \omega - 1) \cdot (x - 57\omega - 52) \pmod{125}.$$

Diese Zerlegung zeigt gleich, daß der erste und dritte Faktor der rechten Seite nicht in Betracht kommen können, da der Absolutbetrag der Koeffizienten größer als 20 ist. Dagegen teilt der zweite Faktor, wie man sich durch Einsetzen überzeugt, das gegebene Polynom.

Den Teiler zweiten Grades bekommt man durch Dividieren, oder bequemer aus dem Polynome

$(x + 61\omega + 50)(x - 57\omega - 52) = x^2 + (4\omega - 2)x - 9499\omega + 877$
nach Reduktion (mod 125) an absolut kleinsten Reste, d. h.

$$x^2 + (4\omega - 2)x + (\omega + 2).$$

Wir haben also schließlich

$$f_3(x) = 2(x + \omega - 1) \cdot [x^2 + (4\omega - 2)x + (\omega + 2)].$$

4. Es ist im kubischen Körper $K(\vartheta)$, wo ϑ der Gleichung $\vartheta^3 + \vartheta + 1 = 0$ genügt, das Polynom

$$f_4 = 5x^2 + (1 - \vartheta + \vartheta^2)x + (3\vartheta - 2) \quad (14)$$

zu zerlegen.

Da die Diskriminante dieses Körpers $d = -31$ ist, kann die Basis der ganzen Zahlen in der Gestalt $1, \vartheta, \vartheta^2$ geschrieben werden. Die Zahl 2 ist zu d prim und $\vartheta^3 + \vartheta + 1 \pmod{2}$ irreduzibel, also ist 2 in $K(\vartheta)$ nach dem bekannten Satze unzerlegbar. Als Modul kann also 2 gewählt werden.

$$f_4 \equiv x^2 + (1 + \vartheta + \vartheta^2)x + \vartheta \pmod{2}.$$

$$x^2 \equiv (1 + \vartheta + \vartheta^2)x + \vartheta$$

$$x^4 \equiv \vartheta x + \vartheta \pmod{2}$$

$$x^8 \equiv x + (1 + \vartheta + \vartheta^2).$$

Daraus, da $x^{N(2)} = x^8$ nicht kongruent x ist, sieht man augenscheinlich, daß (14) — da es schon mod (2) irreduzibel ist — auch in $K(\vartheta)$ irreduzibel ist.

Bemerkung. Es ist selbstverständlich nicht notwendig als Modul eine rationale Primzahl zu wählen, wie wir es in den Beispielen getan haben. Es kann auch ein anderes Hauptideal gewählt werden; dies hat sogar den Vorteil, daß die Norm nicht zu hoch ausfällt. Der Nachteil ist hier aber die Konstruktion der absolut kleinsten Reste, die schließlich auch für eine rationale Primzahl, beim Körper höheren als zweiten Grades, genug mühsam sein kann. Im speziellen Falle des Körpers der rationalen Zahlen fallen natürlich alle Schwierigkeiten weg.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Petr für Anregung und Hilfe bei der Gestaltung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank sagen.

*

O rozložiteľnosti mnohočlenov s celistvými algebraickými koeficientami dľa prvoideálu; užitie k rozkladu mnohočlenov v rôznych alg. čís. telesách.

(Obsah predošlého článku.)

V článku uvažujeme mnohočleny, ktorých koeficienty sú celé alg. čísla patriace do ľubovoľného telesa $K(\vartheta)$, ktoré vznikne adjunkciou alg. elementu ϑ k telesu rac. čísel K .

Vyložená je metoda úplného rozkladu takého polynomu dľa zvoleného prvoideálu v ireducibilné faktory a zároveň je podané kritérium rozložiteľnosti, ktoré je zobecnením jednej vety p. prof. Petra (vid' Časopis 66).

V druhej časti je vyložené potom ako užiť získaných výsledkov k rozkladu numericky daného polynomu v telese $K(\vartheta)$ v ireducibilné faktory.

Nakoniec podané je niekoľko príkladov.

Über Reihen von der Form $A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v \prod_{\mu=1}^v \frac{z - a_{\mu}}{1 - \bar{a}_{\mu} z}$.

I. Abhandlung.

Ernst Lammell, Prag.

(Eingegangen am 29. März 1938.)

In einer früheren Arbeit wurden folgende Sätze bewiesen:¹⁾

Ist $\{a_{\mu}\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, für die $\lim_{\mu \rightarrow \infty} |a_{\mu}| < 1$ ist, so konvergiert eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{v=1}^{\infty} A_v \prod_{\mu=1}^v \frac{z - a_{\mu}}{1 - \bar{a}_{\mu} z} \quad (1)$$

dann und nur dann für jeden Wert von z aus $|z| < 1$, wenn die Koeffizienten $\{A_v\}$, ($v = 0, 1, 2, \dots$) der Limesbedingung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|A_v|} \leq 1 \quad (2)$$

genügen.

Besitzt die Folge $\{a_{\mu}\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ und erfüllen die Koeffizienten $\{A_v\}$, ($v = 0, 1, 2, \dots$) die Bedingung (2), so konvergiert eine Reihe von der Form (1) gleichmäßig auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge und stellt also eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktion dar.

Umgekehrt: Hat die Folge $\{a_{\mu}\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$, so läßt sich jede in $|z| < 1$ reguläre Funktion in eine Reihe von der Form (1) entwickeln. Für

¹⁾ E. Lammell, Zum Interpolationsprobleme im Einheitskreise regulärer Funktionen. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **66** (1936-37), 57—61.

die zu einer Funktion $f(z)$ gehörigen Entwicklungskoeffizienten $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) gilt die Limesbeziehung (2).

In dieser Abhandlung sollen die beiden folgenden Sätze bewiesen werden:

Satz I. Analogon des Abelschen Stetigkeitssatzes über Potenzreihen. Es sei $\{a_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, welche keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ besitzt und $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) eine Folge, die der Limesbedingung (2) genügt.

Besitzt dann die auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < 1$ gleichmäßig konvergente Reihe (1) auch noch im Punkte $z = e^{i\varphi_0}$ eine endliche Summe $S(e^{i\varphi_0})$, so ist bei Annäherung an die Stelle $z = e^{i\varphi_0}$ aus dem Innern des Einheitskreises $|z| < 1$ längs eines Stolzischen Weges²⁾

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_0}} f(z) = S(e^{i\varphi_0}),$$

wenn $f(z)$ die durch (1) dargestellte in $|z| < 1$ reguläre Funktion bedeutet.

Satz II. Analogon der Tauberschen Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes über Potenzreihen. Es sei $\{a_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) eine Folge von Punkten aus $|z| < 1$, welche auf $|z| = 1$ keinen Häufungspunkt besitzt und die Folge $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) genüge der Bedingung

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu A_\nu = 0. \quad (3)$$

Die Reihe (1) konvergiert dann also auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig und stellt also eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ dar.

Ist dann für $z \rightarrow e^{i\varphi_0}$ bei radialer Annäherung aus dem Innern von $|z| < 1$

$$f(z) \rightarrow F(\varphi_0), \quad (4)$$

so gilt

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{e^{i\varphi_0} - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu e^{i\varphi_0}} = F(\varphi_0).$$

Die Beweise bilden wir den gebräuchlichen Beweisen für die analogen Sätze über Potenzreihen nach.

²⁾ Unter einem Stolzischen Weg versteht man nach Hardy und Littlewood eine in $|z| < 1$ verlaufende und in $z = e^{i\varphi_0}$ einmündende Jordankurve, welche zwischen zwei in $z = e^{i\varphi_0}$ endenden Sehnen des Kreises $|z| \leq 1$ verläuft.

§ 1. Beweis des Satzes I.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man annimmt, daß $S(e^{i\varphi_0}) = 0$ ist. Sonst betrachte man $f(z) - S(e^{i\varphi_0})$.

Die durch (1) gegebene Funktion $f(z)$ läßt sich in der Form

$$f(z) = A_0 + \sum_{v=1}^n A_v \prod_{\mu=1}^v \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} + R_{n+1}(z) \quad (5)$$

schreiben, worin $R_{n+1}(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion bedeutet, für welche auf jeder in $|z| < 1$ abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(z) = 0 \quad (6)$$

ist.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} = p(z, a) \text{ und demgemäß } \frac{e^{i\varphi_0} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi_0}} = p(e^{i\varphi_0}, a).$$

Setzen wir

$$A_0 = s_0(e^{i\varphi_0})$$

und

$$A_0 + \sum_{v=1}^m A_v \prod_{\mu=1}^v p(e^{i\varphi_0}, a_\mu) = s_m(e^{i\varphi_0}), \quad (7)$$

so hat man nach Voraussetzung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(e^{i\varphi_0}) = S(e^{i\varphi_0}) = 0. \quad (8)$$

Da für $v \geq 1$

$$A_v = \frac{s_v(e^{i\varphi_0}) - s_{v-1}(e^{i\varphi_0})}{\prod_{\mu=1}^v p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)}$$

ist, so ergibt sich aus (5)

$$\begin{aligned} f(z) = (e^{i\varphi_0} - z) & \left\{ s_0(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - |a_1|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_1)(1 - \bar{a}_1 z)} + \sum_{v=1}^{n-1} s_v(e^{i\varphi_0}) \times \right. \\ & \times \frac{1 - |a_{v+1}|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_{v+1})(1 - \bar{a}_{v+1} z)} \prod_{\mu=1}^v \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \Big\} + \\ & + s_n(e^{i\varphi_0}) \prod_{\mu=1}^n \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} + R_{n+1}(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Da die Folge $\{a_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ besitzt, so existiert ein ϱ ($0 < \varrho < 1$),

so daß

$$|a_\mu| \leq \varrho; \mu = 1, 2, \dots \quad (10)$$

ist. Weiter überzeugt man sich leicht, daß für

$$\begin{aligned} |a| &\leq \varrho < 1 \text{ und } |z| < 1 \\ \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| &\leq \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|} \leq \frac{|z|+\varrho}{1+\varrho|z|} < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

ist und $|p(e^{i\varphi_0}, a)| = 1$ gilt.

Aus (9) erhalten wir so mit Rücksicht auf (6), (8) und (11)

$$\begin{aligned} f(z) &= (e^{i\varphi_0} - z) \left\{ s_0(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - |a_1|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_1)(1 - \bar{a}_1 z)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu(e^{i\varphi_0}) \frac{1 - |a_{\nu+1}|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_{\nu+1})(1 - \bar{a}_{\nu+1} z)} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |e^{i\varphi_0} - z| \frac{1}{(1 - \varrho)^2} \times \\ &\times \left\{ \sum_{\nu=0}^m |s_\nu(e^{i\varphi_0})| \left(\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} \right)^\nu + \varepsilon_m \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left(\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} \right)^\nu \right\}, \end{aligned}$$

worin $\varepsilon_m = \max_{m+1 \leq \nu < \infty} |s_\nu(e^{i\varphi_0})|$ bedeutet.

Also ergibt sich schließlich

$$|f(z)| \leq \frac{|e^{i\varphi_0} - z|}{(1 - \varrho)^2} \left\{ \sum_{\nu=0}^m |s_\nu(e^{i\varphi_0})| \left(\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} \right)^\nu + \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \frac{\varepsilon_m}{1 - |z|} \right\},$$

woraus die zu beweisende Behauptung genau wie im Falle der Potenzreihen folgt.

§ 2. Beweis des Satzes II.

Wieder ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $F(\varphi_0) = 0$ voraussetzen.

Wird $s_m(e^{i\varphi_0})$ für $m > 0$ durch (7) erklärt, so erhält man, wenn $|z| < 1$ ist,

$$\begin{aligned} s_m(e^{i\varphi_0}) - f(z) &= \sum_{\nu=1}^m A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} p(e^{i\varphi_0}, a_\mu) \left(1 - \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right) - \\ &\quad - \sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} p(z, a_\mu). \end{aligned}$$

Da mit Rücksicht auf (10) und (11) für $\varrho < |z| < 1$

$$\left| 1 - \prod_{\mu=1}^v \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right| = \left| (e^{i\varphi_0} - z) \left\{ \frac{1 - |a_1|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_1)(1 - \bar{a}_1 z)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=2}^v \frac{1 - |a_k|^2}{(e^{i\varphi_0} - a_k)(1 - \bar{a}_k z)} \prod_{\mu=1}^{k-1} \frac{p(z, a_\mu)}{p(e^{i\varphi_0}, a_\mu)} \right\} \right| \leq |e^{i\varphi_0} - z| \frac{v}{(1 - \varrho)^2}$$

ist und

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^v \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z} \right| \leq \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |A_\nu| \left(\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} \right)^v \leq \\ \leq \frac{\varepsilon_m}{m} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left(\frac{|z| + \varrho}{1 + \varrho|z|} \right)^v \leq \frac{\varepsilon_m}{m} \frac{1}{(1 - \varrho)^2 (1 - |z|)}$$

gilt, wenn $\varepsilon_m = \max_{m+1 \leq \nu < \infty} \{\nu |A_\nu|\}$ bedeutet, so erhalten wir schließlich

$$|s_m(e^{i\varphi_0}) - f(z)| \leq \frac{1}{(1 - \varrho)^2} \left\{ |e^{i\varphi_0} - z| \sum_{\nu=0}^m \nu |A_\nu| + \frac{\varepsilon_m}{m(1 - |z|)} \right\}.$$

Wird $z = \left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{i\varphi_0}$ gewählt, so ergibt sich

$$|s_m(e^{i\varphi_0}) - f\left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{i\varphi_0}\right]| \leq \frac{1}{(1 - \varrho)^2} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^m \nu |A_\nu| + \varepsilon_m \right\}.$$

Hieraus folgt die Behauptung $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(e^{i\varphi_0}) = 0$, da nach (3)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^m \nu |A_\nu| = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$$

und wegen (4)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right) e^{i\varphi_0}\right\} = 0$$

ist.

Prag, im März 1938.

O řadách tvaru

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_\mu}{1 - \bar{a}_\mu z}.$$

I. pojednání.

(Obsah předešlého článku.)

Pro řady tohoto tvaru odvozuje autor věty, analogické větě Abelově a Tauberově z teorie mocninných řad.

On integral relations in economical cinematics.

Otomar Pankraz, Praha.

(Received February 11, 1939.)

In addition to my two papers 1. Zum Problem der Maßenfabrication (Aktuárské vědy, Prague 1935.) and 2. Über eine Bedingung für den stationären wirtschaftlichen Güterkreislauf (Bull. intern. Acad. Tchèque des Sci. 1936.) I intend to deal in this communication with two integral relations concerning the cinematics of the economy of a territorial unit. We shall be therefore interested in the temporal development of the relations between the elements in a certain economic system. If we suppose that the economy in question is a system of economic elements in equilibrium, then it is possible to distinguish two sides: one consisting of goods (and services) and the other of money. The definition of an economic element depends on the object of the examination. In our study we shall understand „an economic element“ to mean a place of production (i. e. factory etc.) and a consumption area served by it. The circulation of goods can be represented either for the whole system of economic elements or inside every element. We propose to study the second case.

I.

In order to find the numerical conditions for the equilibrium of the circulation of consumption goods in an economic element, we shall distinguish two parts of it:

a) Consumption. Every place of production has its own consumption area. Let us therefore denote by

$$A(t) \cdot dt$$

the number of units of consumption goods received from a certain place of production and consumed during the interval $(t, t + dt)$, thus $A(t)$ is the rate of consumption.

b) Production. Let us denote by $l(t)$ the total production in the

period $(0, t)$, i. e. the number of all units of consumption goods from the initial moment till the moment t .

For each of two moments $t_1 \leq t_2$ we have $l(t_1) \leq l(t_2)$. The function $l(t)$ need not be continuous, but if it has a derivation

$$l'(t) = \frac{dl(t)}{dt}$$

then always $0 \leq l'(t)$. The function $l'(t)$ is, by definition, the rate of production.

The unit of consumption goods leaving the place of production is either immediately consumed or added to stock. Therefore we introduce the number $k(t)$, called the coefficient of immediate consumption, to denote that proportion of the quantity of consumption goods under production in the interval $(t, t + dt)$, which is consumed in the same period. So $0 \leq k(t) \leq 1$ for every moment t and

$$\{1 - k(t)\} \cdot dl(t)$$

denotes the number of units of consumption goods put into stock during $(t, t + dt)$. Let us call this „the stock corresponding to the interval $(t, t + dt)$ “.

If we put

$$1 - k(t) = q(t),$$

then we can write this stock in the simple form

$$q(t) \cdot dl(t).$$

II.

Now we introduce the number $K(\xi, \tau) \cdot d\xi$ denoting the proportion of stock corresponding to the interval $(\tau, \tau + d\tau)$ consumed during $(\xi, \xi + d\xi)$.*) For the moments τ and ξ the relation $0 \leq \tau \leq \xi$ is valid.

For the function $K(\xi, \tau)$ we can establish two conditions:

1.

$$0 \leq K(\xi, \tau)$$

for every ξ and τ .

2. From $q(\tau) \cdot dl(\tau)$ units of stock corresponding to $(\tau, \tau + d\tau)$ there are

$$q(\tau) \cdot dl(\tau) \cdot K(\xi, \tau) \cdot d\xi$$

units taken out during $(\xi, \xi + d\xi)$ and therefore

*) The definition of the kernel $K(\xi, \tau)$ is based on the supposition that goods on stock are ear-marked. I agree with the criticism that this can be actually done only in few cases. But this gives a suggestion to new researches, in what manner can we bring the function K in touch with the capital theory.

$$q(\tau) \cdot dl(\tau) \cdot \int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi$$

units taken out during the interval (τ, t) where $0 \leq \tau \leq \xi \leq t$. But this quantity cannot be greater than the stock mentioned above, i. e.

$$q(\tau) \cdot dl(\tau) \cdot \int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi \leq q(\tau) \cdot dl(\tau).$$

Therefore for every τ and t the condition

$$\int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi \leq 1$$

holds true.

In order to establish equilibrium between production on one side and consumption on the other it is necessary that the condition

$$A(t) \cdot dt = k(t) \cdot dl(t) + dt \cdot \int_0^t K(t, \tau) \cdot dl(\tau)$$

or

$$A(t) = k(t) \cdot l'(t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot l'(\tau) \cdot d\tau \quad (\text{I})$$

should hold true. We also assume that the beginning of production and of consumption occur generally at the same moment, which is without any restriction of our problem. The condition (I) is an equation for the rate of production. The functions $A(t)$ and $k(t)$ are supposed to be known, but $K(t, \tau)$ we do not usually know, and therefore our problem involves a further equation.

III.

Instead of the function $K(t, \tau)$ we know the function $H(t, \tau)$, which we introduce with this definition: $H(t, \tau) \cdot dt$ is the number denoting the proportion of stock corresponding to the interval $(\tau, \tau + d\tau)$ and being left on hand during (τ, t) , which is consumed during $(t, t + dt)$.

By means of the function $H(t, \tau)$ we can analyse the structure of the stock on hand at the moment t . This stock is composed of the units of consumption goods arriving from different stocks $q(\tau) \cdot dl(\tau)$ corresponding to $(\tau, \tau + d\tau)$. During (t, τ) there are not consumed

$$\left\{1 - \int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi\right\} \cdot q(\tau) \cdot dl(\tau)$$

units of goods, and therefore this quantity is a part of the stock actually on hand at the moment t , from which in $(t, t + dt)$

$$H(t, \tau) \cdot dt \cdot \left\{1 - \int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi\right\} \cdot q(\tau) \cdot dl(\tau)$$

units of goods are taken out. But by the definition of the function $K(t, \tau)$ this quantity must be equal to

$$K(t, \tau) \cdot dt \cdot q(\tau) \cdot dl(\tau).$$

Therefore the relation

$$H(t, \tau) \cdot \left\{1 - \int_{\tau}^t K(\xi, \tau) \cdot d\xi\right\} = K(t, \tau) \quad (\text{II})$$

should be true. This is the second equation which we need in our problem.

From the definition of the function $H(t, \tau)$ we can easily establish these two of its properties:

1. For every t and τ is $0 \leq H(t, \tau)$.
2. If T is the last moment of consumption (it can be $T = \infty$), then for every t

$$\int_t^T H(\sigma, t) \cdot d\sigma \leq 1.$$

IV.

As a simple example let us put $A = \text{constant}$, $k = \text{constant} > 0$, $K = \text{constant}$, $l(0) = 0$.

Then from (I) we get the differential equation

$$A = k \cdot l'(t) + K \cdot l(t),$$

which has the solution

$$l(t) = \frac{A}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{k} t}\right).$$

From the equation (II) it follows

$$H(t, \tau) = \frac{K}{1 - K \cdot (t - \tau)}.$$

From this we can establish that for $t \rightarrow \infty$ there is

$$l(t) \rightarrow \text{constant} < \infty$$

$$H(t, \tau) \rightarrow 0 \text{ for } t \neq \tau;$$

this result has a very simple economic meaning.

*

0 integrálních vztazích hospodářské kinematiky.

(Obsah předešlého článku.)

Doplňkem k uvedeným svým dvěma pojednáním podává autor další integrální vztah pro oběh hospodářských statků, čímž po formální stránce teorii tohoto oběhu uvádí v sobě uzavřený logický celek.

Sur les points et les coniques sextactiques d'une cubique plane.

B. Bydžovský, Praha.

(Reçu le 24 février 1939.)

Dédié en hommage à M. K. Petr.

1. Étant donnés, sur une cubique, trois points dont les points tangentiels sont situés sur une droite, les points donnés ou sont situés de même sur une droite, ou bien ce sont des points de contact de la cubique avec une conique. Donc, supposons que les points A, B, C de la cubique ne sont pas alignés, mais que leurs points tangentiels A', B', C' sont situés sur une droite q . Alors, il existe une conique qui touche la cubique aux points A, B, C . Les trois tangentes en ces points forment un triangle que j'appellerai tout court triangle de Brianchon et qui possède la propriété bien connue que les droites joignant les points A, B, C aux sommets du triangle passent par un même point Q (point de Brianchon). Je me suis demandé s'il est possible que le point Q et la droite q soient pôle et polaire par rapport au triangle des trois tangentes aux points A, B, C .

2. Prenons pour triangle de référence un triangle de Brianchon, formé par trois tangentes de la cubique, son point de Brianchon pour point-unité. Alors, les points de contact de ces trois tangentes sont, respectivement, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ et l'équation de la cubique a la forme

$$(x_1 - x_2)^2 (ax_1 + bx_2) + (x_1 - x_3)^2 (ax_1 + cx_3) + (x_2 - x_3)^2 (bx_2 + cx_3) - (ax_1^3 + bx_2^3 + cx_3^3) + 2kx_1x_2x_3 = 0.$$

Les trois points tangentiels des tangentes choisies se trouvent sur la droite

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Pour que cette droite soit la polaire du point-unité par rapport au triangle de référence, il faut et il suffit que

$$a = b = c.$$

L'équation de la cubique prend, en ce cas, la forme

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_2^2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2) + 2kx_1x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

les trois points tangentiels ont, respectivement, les coordonnées $0, 1, -1$; $1, 0, -1$; $1, -1, 0$. La polaire quadratique du point $(0, 1, -1)$ est

$$(x_2 - x_3)[2a(x_2 + x_3) - (k + a)x_1] = 0$$

ce qui veut dire que ce point est un point d'inflexion, la droite

$$x_2 - x_3 = 0$$

est sa polaire harmonique. On trouve, de même, que les points $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$ sont des points d'inflexion avec, respectivement, les polaires harmoniques

$$x_3 - x_1 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Donc, les points $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ sont des points sextactiques, puisque ce sont des points dont les points tangentiels sont des points d'inflexion. On a le résultat:

„La condition, nécessaire et suffisante, pour que le point de Brianchon d'un triangle de Brianchon formé par les tangentes en trois points de la cubique dont les points tangentiels se trouvent sur une droite, et cette droite soient pôle et polaire par rapport à ce triangle, est celle que ces points soient des points sextactiques de la cubique“.

Nous verrons à l'instant que la cubique (1) est, en général, une courbe de genre un. Exprimons les coordonnées de ses points, de la manière bien connue, par un paramètre elliptique de sorte que la collinéarité de trois points aux paramètres u, v, w soit exprimée par la congruence

$$u + v + w \equiv 0 \pmod{\text{per}}.$$

Les points d'inflexion sont donnés par la congruence

$$3u \equiv 0.$$

Les trois points d'inflexion aux paramètres

$$0, \frac{2\omega_1}{3}, \frac{4\omega_1}{3},$$

$2\omega_1$ désignant les périodes des fonctions elliptiques, se trouvent sur une droite. Les tangentes menées de ces points à la cubique la touchent aux points sextactiques:

$$\begin{array}{llll} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \text{point tangentiel } 0, \\ -\frac{\omega_1}{3}, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_2, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_3, & \text{point tangentiel } \frac{2\omega_1}{3}, \end{array}$$

$$\frac{\omega_1}{3}, -\frac{2\omega_1}{3} + \omega_2, -\frac{2\omega_1}{3} + \omega_3, \text{ point tangentiel } \frac{4\omega_1}{3}.$$

On s'assure facilement de ce que les seuls triples de ces points, aux points tangentiels différents, qui ne sont pas situés sur une droite, sont les suivants:

$$\begin{aligned} \omega_1, -\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1}{3}, \\ \omega_2, -\frac{2\omega_1}{3} + \omega_2, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_3, \\ \omega_3, -\frac{2\omega_1}{3} + \omega_3, -\frac{\omega_1}{3} + \omega_2. \end{aligned} \quad (I)$$

Donc, les tangentes aux points de chaque triple forment un triangle de Brianchon, la droite polaire du point de Brianchon par rapport à ce triangle étant la droite de jonction des trois points d'inflexion.

Le point unité est commun aux polaires harmoniques des trois points d'inflexion alignés; ce point est toujours le même, n'importe lequel des trois triples de points sextactiques on considère. Ainsi on a le résultat suivant:

„Les neuf points sextactiques dont les trois points (d'inflexion) tangentiels sont situés sur une droite, peuvent être disposés en trois triples tels que les tangentes aux points de chaque triple forment un triangle de Brianchon. Ces trois triangles ont le même point de Brianchon, lequel est pôle de la droite des trois points d'inflexion par rapport à chacun de ces triangles.“

La conique touchant la cubique aux trois points sextactiques situés sur les axes de coordonnées possède l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0. \quad (1a)$$

Le point-unité et la droite-unité sont pôle et polaire par rapport à cette conique. Le point-unité a pour droite polaire par rapport à la cubique la droite unité, puisque ce point est l'intersection des polaires quadratiques de trois des points de la droite. Donc:

„Le point de Brianchon commun des triangles de Brianchon dont il est question dans le théorème précédent a pour droite polaire par rapport à la cubique, par rapport aux coniques dont chacune est inscrite dans un des trois triangles de Brianchon et touche ses côtés aux points sextactiques, ainsi que par rapport à ces trois triangles, la même droite.“

3. L'équation (1) nous permet d'établir les équations des coniques sextactiques, à savoir des coniques ayant, au points sextactiques, un contact du cinquième ordre avec la cubique. Une conique

ayant, p. ex. au point $(1, 1, 0)$, la tangente $x_3 = 0$, a une équation de la forme

$$(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0 \quad (2)$$

et il s'agit de déterminer les constantes a_i de telle sorte que cette conique n'ait pas, en dehors du point $(1, 1, 0)$, de point commun avec la cubique. La cubique

$$(x_1 + x_2) [(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)] = 0 \quad (3)$$

coupe la cubique (1) aux mêmes points que la conique précédente et la droite

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Multiplions (3) par a et soustrayons de l'équation obtenue l'équation (1); on obtient

$$x_3 [a (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 2k x_1 x_2 + a (x_1 + x_2) \times (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)] = 0.$$

Les points communs se trouvent sur la droite $x_3 = 0$ et sur la conique

$$a (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - 2k x_1 x_2 + a (x_1 + x_2) (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0. \quad (4)$$

Donc, il faut que les coniques (2) et (4) ne se coupent qu'au point $(1, 1, 0)$, ce qui veut dire que l'équation (4) doit avoir la forme

$$k_1 [(x_1 - x_2)^2 + x_3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)] + k_2 x_3^2 = 0. \quad (5)$$

En comparant les coefficients de (4) et (5), on obtient les relations:

$$2aa_1 = k - a, \quad a_1 = a_2, \quad 2k_1 = k + a, \quad 4a^2 a_3 = k^2 - 5a^2, \\ k_1 a_3 + k_2 = -a.$$

L'équation (2) devient

$$4a^2 (x_1 - x_2)^2 + 2a (k - a) (x_1 + x_2) x_3 + (k^2 - 5a^2) x_3^2 = 0 \quad (2')$$

et ceci est la conique sextactique au point $(1, 1, 0)$ de la cubique. L'équation (4) se réduit à l'équation

$$2a (k + a) (x_1 - x_2)^2 + (k^2 - a^2) (x_1 + x_2) x_3 - 4a^2 x_3^2 = 0. \quad (4')$$

Cette conique coupe la cubique au point $(1, 1, 0)$, qui est point de surosculation des deux courbes, et aux points où la cubique est coupée par la droite $x_1 + x_2 = 0$, excepté le point d'inflexion $(1, -1, 0)$.

Faisons remarquer que les coniques (2'), (4') sont deux coniques ayant une surosculation avec la cubique au point sextactique et que, par conséquent, le faisceau de toutes les coniques jouissant de cette propriété est exprimé par l'équation

$$2a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 + \lambda x_3^2 = 0,$$

λ désignant un paramètre.

4. L'équation (2') nous fournit des éléments géométriques nécessaires pour la détermination géométrique de la conique sextactique. Pour ce but, considérons la polaire quadratique du point d'inflexion $(1, -1, 0)$:

$$(x_1 - x_2) [2a (x_1 + x_2) - (a + k) x_3] = 0.$$

Elle est composée de la polaire harmonique

$$x_1 - x_2 = 0$$

du point d'inflexion considéré et de la tangente en ce point:

$$2a (x_1 + x_2) - (a + k) x_3 = 0.$$

On trouve facilement que cette polaire harmonique est en même temps la droite polaire du point d'inflexion considéré par rapport à la conique sextactique.

En deuxième lieu, considérons la polaire quadratique du point sextactique $(1, 1, 0)$:

$$a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 - ax_3^2 = 0. \quad (6)$$

L'équation (4') peut être mise sous la forme

$$4a [a (x_1 - x_2)^2 + (k - a) (x_1 + x_2) x_3 - ax_3^2] - (k - a) [2a (x_1 + x_2) - (k + a) x_3] x_3 = 0$$

qui fait voir que la conique (6) et la conique sextactique qui se touchent, bien entendu, au point sextactique, se coupent, de plus, sur la tangente d'inflexion. On a donc le théorème suivant:

„La conique ayant, en un point sextactique, avec la cubique un contact du cinquième ordre coupe la polaire quadratique de ce point sur la tangente au point d'inflexion, point tangentiel du point sextactique considéré; la droite polaire de ce point d'inflexion par rapport à la conique est identique avec la polaire harmonique de ce point.“

Les deux données fournies par ce théorème ne sont pas, cependant, indépendantes, puisque, comme on s'en rend facilement compte, la même droite est droite polaire du point d'inflexion par rapport à la polaire quadratique du point sextactique. Pour caractériser géométriquement la conique sextactique d'une manière suffisante, faisons usage de ce que cette conique et la conique (4') sont en surosculation au point sextactique, la droite $x_3 = 0$ étant la tangente commune. On sait que deux coniques dans ces conditions ont, pour chaque point de la tangente commune, la même droite polaire. Donc, si l'on connaît la conique (4') et que l'on détermine la polaire d'un des points (différent, bien entendu, du point d'inflexion) de la tangente commune par rapport à cette conique, on connaît un pôle et sa polaire par rapport à la conique sextactique; comme on connaît un de ses points avec la tangente

et, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, un couple de ses points sur la tangente d'inflexion, la conique se trouve parfaitement déterminée.

5. Ceci suppose, bien entendu, qu'on possède des éléments qui suffisent à caractériser géométriquement la conique (4'). Son équation peut être écrite sous la forme

$$2(k+a)[a(x_1-x_2)^2 + (k-a)(x_1+x_2)x_3 - ax_3^2] - (k-a)[(k+a)(x_1+x_2) - 2ax_3]x_3 = 0$$

qui fait voir que la conique (4') et la polaire quadratique du point sextactique se coupent sur la droite

$$(k+a)(x_1+x_2) - 2ax_3 = 0 \quad (7)$$

(en outre, elles se touchent au point sextactique).

Or, cette équation peut être écrite de la manière suivante:

$$(k+3a)(x_1+x_2-x_3) + (k-a)(x_1+x_2+x_3) = 0.$$

L'équation de la tangente au point d'inflexion respectif, trouvée plus haut, peut être mise sous la forme

$$(k+3a)(x_1+x_2-x_3) - (k-a)(x_1+x_2+x_3) = 0$$

qui fait voir que les deux droites sont divisées harmoniquement par la droite des trois inflexions et par la droite joignant le point d'inflexion respectif aux points sextactiques $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$. Donc, on connaît la construction de la droite sur laquelle se trouvent deux points d'intersection de la conique en question avec la polaire quadratique (6). Puisque nous connaissons dès l'abord un point de la conique avec sa tangente et deux de ses points d'intersection avec la cubique, la conique se trouve parfaitement déterminée.

6. Pour approfondir l'étude des coniques sextactiques, considérons les trois coniques sextactiques appartenant aux points sextactiques de notre triangle de Brianchon. Le calcul pour les points $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ est tout à fait analogue à celui exécuté plus haut pour le point $(1, 1, 0)$. On a ainsi les trois coniques:

$$4a^2(x_2-x_3)^2 + 2a(k-a)(x_2+x_3)x_1 + (k^2-5a^2)x_1^2 = 0, \quad (8)$$

$$4a^2(x_1-x_3)^2 + 2a(k-a)(x_1+x_3)x_2 + (k^2-5a^2)x_2^2 = 0, \quad (9)$$

$$4a^2(x_1-x_2)^2 + 2a(k-a)(x_1+x_2)x_3 + (k^2-5a^2)x_3^2 = 0. \quad (10)$$

En faisant la soustraction de ces équations deux à deux, on obtient, après réduction et en supposant que $k+3a \neq 0$ (nous y reviendrons) les résultats suivants:

$$(8) - (9) : (x_1-x_2)[(k-3a)(x_1+x_2) + 2ax_3] = 0,$$

$$(8) - (10) : (x_1-x_3)[(k-3a)(x_1+x_3) + 2ax_2] = 0,$$

$$(9) - (10) : (x_2-x_3)[(k-3a)(x_2+x_3) + 2ax_1] = 0.$$

Les droites $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$ sont les polaires harmoniques des trois points d'inflexion. On a donc le théorème suivant:

„Les coniques sextactiques aux trois points sextactiques, dont les tangentes forment un triangle de Brianchon, se coupent deux à deux sur les polaires harmoniques des trois points d'inflexion qui sont points tangentiels des points sextactiques considérés; deux de ces coniques se coupent sur la polaire harmonique du point d'inflexion qui n'est pas tangentiel pour les deux points sextactiques, points de contact des deux coniques.“

Considérons p. ex. la droite

$$(k - 3a)(x_1 + x_2) + 2ax_3 = 0.$$

Sa conjuguée harmonique par rapport aux deux droites

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

est

$$2a(x_1 + x_2) + (k - 3a)x_3 = 0$$

dont la conjuguée harmonique par rapport aux droites

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_3 = 0$$

est

$$2a(x_1 + x_2) - (k + a)x_3 = 0$$

à savoir, la tangente au point d'inflexion $(1, -1, 0)$. Donc, on obtient la seconde droite, sur laquelle se coupent les coniques (8), (9), en partant de cette tangente et en construisant deux conjuguées harmoniques. Ainsi, on sait construire, pour chaque paire des coniques sextactiques, deux droites, sur lesquelles se trouvent leurs points d'intersection.

Cette circonstance peut aussi être utilisée pour la détermination géométrique de ces coniques. En particulier, si une de ces trois coniques est construite, on peut, en vertu du résultat acquis, construire facilement les deux autres.

7. L'équation

$$a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_2^2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2) + 2kx_1x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

de la cubique ayant les points $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ pour points sextactiques avec les tangentes respectives

$$x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$$

contient deux paramètres homogènes, ce qui fait voir que les cubiques satisfaisant aux conditions énoncées forment un faisceau. Déterminons les cubiques de ce faisceau contenant des points singuliers. Les conditions pour l'existence d'un point singulier

sont exprimées par les équations

$$\begin{aligned} a(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2kx_2x_3 &= 0, \\ a(-x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) + 2kx_1x_3 &= 0, \\ a(-x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + 2kx_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

On trouve, sans trop de peine, les solutions suivantes de ce système d'équations:

- a) pour $2k = 3a$ la cubique possède le point singulier 1, 1, 1;
- b) pour $k = a$ la cubique possède trois points singuliers, à savoir: 0, 1, 1; 1, 0, 1; 1, 1, 0;
- c) pour $k = -3a$ la cubique possède deux points singuliers qui sont les intersections de la droite

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

et de la conique

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0;$$

- d) pour $a = 0$ la cubique possède trois points singuliers, à savoir (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Le cas a) donne une cubique de genre 0 à l'équation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2x_2 - x_1^2x_3 - x_1x_2^2 - x_2^2x_3 - x_1x_3^2 - x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3 = 0.$$

Les tangentes au point double de cette cubique sont

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = 0, \quad x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = 0$$

où α désigne une racine cubique imaginaire de l'unité. La cubique possède un noeud; puisque toutes les cubiques à un noeud sont projectivement équivalentes, on a démontré le théorème suivant:

„La cubique de genre 0 possédant un noeud a trois points sextactiques; les tangentes en ces points forment un triangle de Brianchon. Le noeud et la droite joignant les trois points d'inflexion sont pôle et polaire par rapport à ce triangle; ils sont aussi pôle et polaire par rapport à la conique touchant les côtés de ce triangle aux points sextactiques.“

Cette conique est une conique covariante de la cubique de genre zéro caractérisée par la propriété d'être l'enveloppe des droites joignant les paires de points conjugués de la cubique; points conjugués sont deux points de la cubique au même point tangentiel. Pour prouver cet énoncé, faisons remarquer d'abord que parmi ces droites de jonction figurent les tangentes au point double et les trois tangentes aux points sextactiques. Par ces cinq tangentes la conique covariante est déterminée d'une manière univoque. Or, la conique (1a) touche les trois tangentes aux points

sextactiques et un calcul élémentaire fait voir qu'elle touche aussi les tangentes au noeud. *)

8. Pour toutes les cubiques du faisceau (1) le point unité et la droite unité sont pôle et polaire. De plus, il est facile de montrer que les sommets d'un triangle d'inflexion — triangle dont les cotés contiennent les neuf points d'inflexion — situés sur un de ses cotés sont donnés par l'Hessienne de la forme binaire cubique donnant les trois points d'inflexion situés sur ce côté. Si l'on se rappelle la propriété polaire du triangle d'inflexion, on trouve le résultat:

„Toutes les cubiques du faisceau (1) ont un même triangle d'inflexion“.

Donc, toutes ces cubiques ont trois points d'inflexion communs, le lieu des six autres points d'inflexion sont deux droites.

Une cubique du faisceau considéré est déterminée p. ex., par un point sextactique ultérieur. Il est facile de construire, en ce cas, les neuf points sextactiques dont les points tangentiels se trouvent sur la droite unité. Le tableau (I) fait voir que par chaque point de ce tableau passent trois droites contenant, chacune, trois des neuf points sextactiques. Ainsi, on a, p. e.:

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &\equiv 0, \\ \omega_1 - \frac{\omega_1}{3} + \omega_2 - \frac{2\omega_1}{3} + \omega_3 &\equiv 0, \\ \omega_1 - \frac{\omega_1}{3} + \omega_3 - \frac{2\omega_1}{3} + \omega_3 &\equiv 0.\end{aligned}$$

Alors, la construction suivante a lieu. Soient I_1, I_2, I_3 les trois points d'inflexion alignés, S_7 le point sextactique dont I_7 est le point tangentiel; les trois polaires harmoniques des points I_7 passent par un même point I ; IS_7 est la polaire harmonique du point I_7 par rapport à toutes les cubiques du faisceau. Soit S'_1 un deuxième point sextactique sur IS_1 . Soit A le point d'intersection de $I_1S'_1$ et de IS_3 ; alors I_2A est une deuxième tangente sextactique, son point d'intersection avec IS_2 est S'_2 , un deuxième point sextactique dont I_2 est le point tangentiel. On construit de la même manière le point S'_3 , un deuxième point sextactique dont I_3 est le point tangentiel. Le point commun aux droites $S_1S'_2, S_2S'_1$ est S''_3 , le troisième point sextactique dont I_3 est le point tangentiel; on construit, d'une manière analogue, les points S''_1, S''_2 .

*

*) On retrouve ainsi le théorème disant que la polaire du noeud par rapport à la conique covariante définie ci-dessus est la droite des trois inflexions. J'ai énoncé ce théorème dans Časopis pro pěst. mat. a fys. 35 (1906), p. 16 („Inflekční přímka kubické křivky racionálné“).

O sextaktických bodech a kuželosečkách rovinné kubiky.

(Obsah předešlého článku.)

Tečné ve třech bodech kubiky neležících v přímce, jichž tečnové body však v přímce leží, dotýkají se v těchto bodech kuželosečky a tvoří tudíž trojúhelník, který nazývám stručně Brianchonovým; spojnice jeho vrcholů s dotyčnými body protějších stran procházejí bodem Brianchonovým. Ukazuje se, že jen v případě, kdy tři body ležící v přímce jsou body inflexní, tři tečné tvoří trojúhelník Brianchonův tedy tečné sextaktické, je Brianchonův bod zároveň pólem přímky tří tečnových bodů vzhledem k Brianchonovu trojúhelníku. Jsou odvozeny rovnice sextaktických kuželoseček v uvedených třech sextaktických bodech. Kubiky mající společné tři inflexní body v přímce a tři sextaktické body ležící na stranách uvedeného Brianchonova trojúhelníku tvoří svazek; tento svazek obsahuje také jednu křivku s bodem uzlovým, mimo to křivky složené. Je-li dán další sextaktický bod, jehož bodem tečnovým je jeden z daných tří bodů inflexních, lze snadno sestrojiti všech devět sextaktických bodů, jichž body tečnové jsou dané tři body inflexní ležící v přímce.

Zwei Bemerkungen zum Bernsteinschen Ultrakontinuum.

J. Novák, Brno.

(Eingegangen am 20. März 1939.)

In memoriam † Dr. M. Konečný.

Felix Bernstein hat einen geordneten Raum konstruiert, den er Ultrakontinuum genannt hat. Dieser Raum hat einige bemerkenswerte Eigenschaften, die der Autor in den Math. Ann., **61**, 1905 beschrieben hat.

In dieser Abhandlung werden uns hauptsächlich die Element- und die Lückencharaktere interessieren.

In jedem geordneten Raum X ohne erstes und letztes Element ist der Charakter¹⁾ der Zerlegung $X = P + (x) + Q$, wo $P < x < Q$, definiert und der mit $(\omega_e, \omega_\sigma^*)$ bezeichnet wird. Dieses Symbol bedeutet nach Hausdorff, daß die Menge P mit der regulären Ordnungszahl ω_e konfinal und die Menge Q^* (d. i. die invers geordnete Menge Q) mit der regulären Ordnungszahl ω_σ konfinal ist. Ist der Raum X dicht, so bezeichnet man nach Hausdorff $(\omega_e, \omega_\sigma^*) = c_{e\sigma}$.

Durch die Zerlegung $X = P + Q$, $P < Q$, $P \neq \emptyset \neq Q$, wobei die Menge P kein letztes und die Menge Q kein erstes Element besitzt, ist die Lücke definiert. Da dieselbe ein Element des geordneten Raumes ist, der aus der Menge X durch Ausfüllung der Lücken entsteht, ist in der obigen Definition schon der Begriff des Lückencharakters enthalten. Statt der Bezeichnung Charakter der Zerlegung werden wir die Bezeichnung Typus verwenden.

Die Konfinalität der Menge P läßt sich durch die minimal wohlgeordnete Menge²⁾ bestimmen, die wir als transfinite Punktfolge oder einfacher Folge bezeichnen werden. Diese Bezeichnung benützen wir auch bei der inversen Anordnung solcher

¹⁾ F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 142.

²⁾ d. i. die Menge, deren jeder Abschnitt eine kleinere Mächtigkeit als die Mächtigkeit der ganzen Menge hat.

Mengen. Die Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots$$

oder

$$x^1 > x^2 > \dots > x^\xi > \dots \quad (\xi < \omega_\theta)$$

bezeichnen wir $\{x^\xi\}_1^{\omega_\theta}$ oder einfacher $\{x^\xi\}$. Wir sagen, daß fast alle Punkte dieser Folge eine bestimmte Eigenschaft haben, wenn die Punkte, die diese Eigenschaft nicht besitzen, eine Menge von der Mächtigkeit $< \aleph_\theta$ bilden.

Das Bernsteinsche Ultrakontinuum X_u ist ein Raum, dessen Elemente die unendlichen einfachen Folgen

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots = [\alpha_n] \in X_u$$

sind, wo α_n die Ordnungszahlen der ersten und der zweiten Zahlenklasse sind ($0 \leq \alpha_n < \omega_1$). In diesen Raum wird die Ordnung folgendermaßen eingeführt: Der Punkt $x = [\alpha_n]$ ist vor dem Punkt $y = [\beta_n]$, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$, wogegen $\alpha_k < \beta_k$ bei ungeradem k oder $\alpha_k > \beta_k$ bei geradem k ist.

Die Topologie des Bernsteinschen Ultrakontinuums ist durch die Ordnung gegeben. Unter der Umgebung des Punktes $x \in X_u$ verstehen wir ein solches Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$, daß $x_1 < x < x_2$ ist.

Ein ultrarationaler Punkt ist ein solcher Punkt des Ultrakontinuums, dessen fast alle Koordinaten $\alpha_n = 0$ sind. Bernstein hat bewiesen, daß die Menge der ultrarationalen Punkte im Ultrakontinuum dicht liegt und ihre Mächtigkeit $\aleph_1$ ist.

Satz. Das Bernsteinsche Ultrakontinuum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis. Es sei $x = [\alpha_n] \in X_u$. Wir wählen die Punkte

$$x^m = [\alpha_n^m], \quad (m = 1, 2, \dots),$$

wo $\alpha_i^m = \alpha_i$ für $1 \leq i \leq 2m-1$, $\alpha_{2m}^m > \alpha_{2m}$, wogegen die anderen Koordinaten α_i^m beliebig sind. Die Punktfolge $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ konvergiert zum Punkt x , da jede Umgebung dieses Punktes fast alle Punkte der Punktfolge $\{x^m\}$ enthält. Um das zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß die Punktfolge $\{x^m\}$ eine wachsende ist und daß jeder ihr Punkt vor dem Punkt x ist. Es sei $\langle x', x'' \rangle$ eine beliebige Umgebung des Punktes x . Bezeichnen wir $x' = [\alpha'_n]$; weil $x' < x$, so existiert eine kleinste natürliche Zahl p derart, daß $\alpha'_p \neq \alpha_p$; es ist $\alpha'_p < \alpha_p$, wenn p eine ungerade Zahl ist, oder $\alpha'_p > \alpha_p$, wenn p eine gerade Zahl ist. In beiden Fällen haben die Punkte x' und x^p folgende Koordinaten:

$$x' = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha'_p, \dots$$

$$x^p = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \dots$$

sodaß $x' < x^p$ ist. Damit ist bewiesen, daß die Punktfolge $\{x^m\}_{m=1}^\infty$

von links zum Punkte x konvergiert. Auf ähnliche Weise beweist man, daß die Punktfolge $\{y^m\}_{m=1}^\infty$, wo

$$y^m = [\beta_n^m], \quad (m = 1, 2, \dots),$$

von rechts zum Punkte x konvergiert. Dabei ist $\beta_i^m = \alpha_i$ für alle $1 \leq i \leq 2m$, $\beta_{2m+1}^m > \alpha_{2m+1}$, wogegen anders β_i^m beliebige Koordinaten sind. Das System von Intervallen $\langle x^n, y^n \rangle$ ist ein vollständiges System der Umgebungen des Punktes x . Ist nämlich $\langle y', y'' \rangle$ eine beliebige Umgebung des Punktes x , so existiert eine natürliche Zahl n derart, daß $y' < x^n < x < y^n < y''$, daher $\langle x^n, y^n \rangle \subseteq \langle y', y'' \rangle$.

Satz. Jede monotone Punktfolge (d. i. eine steigende oder fallende) hat höchstens $\aleph_1$ Punkte.

Beweis. Es sei $x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots$, $x^\xi \in X_u$ eine steigende Punktfolge. Jedem Punkte x^ξ ordnen wir irgendeinen ultrarationalen Punkt im Inneren des Intervalls $\langle x^\xi, x^{\xi+1} \rangle$ zu. Da das System dieser offenen Intervalle disjunkt ist, ist eine eindeutige Abbildung vorhanden und da die Menge der ultrarationalen Punkte von der Mächtigkeit $\aleph_1$ ist, hat die angegebene Folge höchstens $\aleph_1$ Punkte.

Nach diesem Satze kann das Ultrakontinuum a priori Lücken von viererlei Typus, und zwar $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$, enthalten. Die Lücke des Ultrakontinuums ist nämlich durch die Zerlegung $X_u = A + B$, $A < B$, $A \neq \emptyset \neq B$ definiert, wobei die Menge A kein letztes und die Menge B kein erstes Element hat. Da $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, so läßt sich durch transfinite Induktion eine steigende Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots, \quad x^\xi \in A$$

und eine fallende Punktfolge

$$y^1 > y^2 > \dots > y^\eta > \dots, \quad y^\eta \in B$$

konstruieren, wobei die erste mit der Menge A konfinal, die zweite mit der Menge B koinitial ist. Die Behauptung folgt aus dem Satze, daß jede unendliche monotone Punktfolge die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder $\aleph_1$ hat.

Satz. Das Bernsteinsche Ultrakontinuum enthält Lücken von dreierlei Typus: c_{01} , c_{10} und c_{11} . Die Lückensmenge jedes Typus ist im Ultrakontinuum dicht.

Der Beweis wird durchgeführt sein, wenn wir in jedem beliebigen Intervall einen Vertreter der angeführten drei Typen bekanntgeben und beweisen, daß eine Lücke vom Typus c_{00} nicht existiert. Es sei daher $x < y$, wo

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots \\ y &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_n, \beta_{n+1}, \dots \end{aligned}$$

wobei $\alpha_n \neq \beta_n$. Bezeichnen wir

$$\begin{aligned} x^m &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} + m, 0, 0, \dots \\ y^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n}, \quad \lambda, \quad \xi, 0, \dots \end{aligned}$$

für $m = 1, 2, \dots$ und $\xi < \omega_1$, wo $\lambda = \lim (\alpha_{2n+1} + m) < \omega_1$. Es bezeichne $A \subset X_u$ die Menge aller Punkte, die vor jedem Punkte y^ξ sind, und $B \subset X_u$ die Menge aller Punkte, die nach jedem Punkte x^m folgen. Ist nun $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n}, \lambda, \beta, \dots$ ein beliebiger Punkt, der nach allen Punkten x^m folgt, so ist $y^{\beta+1} < z$. Ist aber $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n}, \gamma, \dots$ ein Punkt, der vor allen Punkten y^ξ ist, so ist $z < x^p$, wobei die natürliche Zahl p die Beziehung $\gamma < \alpha_{2n+1} + p$ erfüllt. Da alle Punkte der Folge $\{x^m\}_1^\infty$ vor allen Punkten der transfiniten Folge $\{y^\xi\}_1^{\omega_1}$ sind, ist $X_u = A + B$, die Menge A ist konfinal mit der Punktfolge $\{x^m\}$ und die Menge B ist koinitial mit der Punktfolge $\{y^\xi\}$; A besitzt kein letztes und B kein erstes Element. Es ist daher eine Lücke (A, B) vom Typus c_{01} definiert, die innerhalb des Intervalls $\langle x, y \rangle$ liegt.³⁾

Auf ähnliche Weise überzeugen wir uns leicht, daß durch eine wachsende transfinite Punktfolge $\{x^\xi\}_1^{\omega_1}$ und durch eine einfach unendliche Punktfolge $\{y^m\}_1^\infty$, wo

$$\begin{aligned} x^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_n, \dots, \beta_{2n-1}, \lim (\beta_{2n} + m), \xi, 0, \dots \\ y^m &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_n, \dots, \beta_{2n-1}, \beta_{2n} + m, \quad 0, 0, \dots \end{aligned}$$

im Inneren des Intervalls $\langle x, y \rangle$ eine Lücke vom Typus c_{10} definiert ist.

Durch transfinite Punktfolgen

$$\begin{aligned} x^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n-1}, \quad 0, \alpha_{2n+1} + \xi, 0, \dots \\ y^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_{2n-1} + 1, \xi, \quad 0, \quad 0, \dots \end{aligned}$$

ist endlich im Inneren des Intervalls $\langle x, y \rangle$ eine Lücke vom Typus c_{11} definiert. Tatsächlich, es ist $x < x^\xi < y^\eta < y$ für jedes ξ und η und im Ultrakontinuum existiert kein Punkt, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^η wäre.

Es bleibt zu beweisen, daß keine Lücke vom Charakter c_{00} existiert. Wir nehmen, per absurdum, an, daß eine Lücke vom Typus c_{00} existiert, die durch die Zerlegung des Ultrakontinuums

$$X_u = A + B, \quad A < B, \quad A \neq \emptyset \neq B$$

definiert ist. Da die Menge A kein letztes Element besitzt, existiert eine einfach unendliche wachsende Punktfolge $x^1 < x^2 < \dots$, die

³⁾ Bernstein führt in der zit. Abhandlung folgenden Satz an: Jede einfach unendliche Folge von ständig wachsenden Elementen hat einen Limes. Es widerspricht der Tatsache, denn die Punktfolge $\{x^m\}_1^\infty$ hat keinen Limes.

mit der Menge A konfinal ist. Es können zwei Fälle eintreten. Entweder für jede natürliche Zahl n haben fast alle Punkte die gleiche n -te Koordinate — bezeichnen wir sie α_n — oder es existiert eine kleinste natürliche Zahl p derart, daß unendlich viele Punkte die p -te Koordinate verschieden haben. Man sieht leicht ein, daß die Zahl p ungerade ist. Im ersten Falle läßt sich beweisen, daß die Folge $\{x^n\}$ von links zum Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ konvergiert; das ist aber unmöglich. Im zweiten Falle können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß alle Punkte der Folge mit den ersten $p - 1$ Koordinaten gleich beginnen, und zwar

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1},$$

wogegen die p -te Koordinate fortwährend wächst. Wir bezeichnen ihren Limes λ . Die transfinite Punktfolge $y^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \lambda, \xi, \dots$ hat dann diese Eigenschaft: Ist der Punkt $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \lambda, \dots$ nach allen Punkten x^n , so existiert ein Punkt $y^\xi < z$. Die Folge $\{y^\xi\}$ ist daher koinitial mit der Menge B , so daß die angenommene Lücke einen Charakter c_{01} hat. Das ist ein Widerspruch.

Satz. Jede Lücke des Ultrakontinuums ist durch die geordnete Gruppe einer endlichen Anzahl von Ordnungszahlen der ersten und der zweiten Zahlenklasse charakterisiert. Die Lücke vom Typus c_{01} ist durch die Gruppe einer ungeraden Anzahl von Ordnungszahlen, die mit einer Limeszahl enden, charakterisiert; die Lücke vom Typus c_{10} ist durch die Gruppe von einer geraden Anzahl von Ordnungszahlen, die gleichfalls mit einer Limeszahl enden, charakterisiert; die Lücke vom Typus c_{11} ist durch die endliche Gruppe von Ordnungszahlen, die mit 0 enden, charakterisiert — mit Ausschließung der einzigen Gruppe, die nur die Zahl 0 enthält.

Beweis. Es sei (A, B) eine Lücke vom Typus c_{10} . Es sei

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots \quad (\xi < \omega_1)$$

eine transfinite Punktfolge, die konfinal mit der Menge A ist. Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl $p + 1$ (man sieht leicht ein, daß die Zahl p gerade ist und daß $p > 0$), derart, daß die $(p + 1)$ -ten Koordinaten fast aller Punkte x^ξ eine abzählbare ständig wachsende Folge von Ordnungszahlen bilden, wogegen die i -te Koordinate fast aller dieser Punkte x^ξ gemeinsam ist. Bezeichnen wir diese i -te Koordinate α_i ($i = 1, 2, \dots, p$), so beginnen fast alle diese Punkte x^ξ mit den ersten p Koordinaten folgendermaßen: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Die Ordnungszahl α_p ist eine Limeszahl. Wenn nämlich α_p eine isolierte Zahl wäre und $\alpha_p \neq 0$, wäre die fallende transfinite Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \dots > z^\xi > \dots \quad (\xi < \omega_1),$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p - 1, 0, \xi, 0, 0, \dots,$$

koinitial mit der Menge B , was jedoch nicht möglich ist. Wenn $\alpha_p = 0$ wäre, würde derselbe Umstand eintreten, wenn wir nämlich

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, 0, 0, \dots$$

definieren.

Ist nun

$$y^1 < y^2 < \dots < y^\xi < \dots \quad (\xi < \omega_1)$$

eine andere unabzählbare Punktfolge, die konfinal mit der Menge A ist, so ist wiederum eine natürliche Zahl $q + 1$ und die Gruppe der Ordnungszahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ von der schon angeführten Eigenschaft vorhanden. Wenn nun $p > q$ oder $p < q$, wären unabzählbar viele Punkte x^ξ vor oder nach unabzählbar vielen Punkten y^ξ . Das ist jedoch unmöglich, da beide Folgen konfinal mit der Menge A sind. Daher ist $p = q$. Aus demselben Grunde ist $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2, \dots, p$.

Damit ist bewiesen, daß jeder Lücke vom Typus c_{10} eindeutig eine geordnete Gruppe von gerader Anzahl von Ordnungszahlen zugeordnet ist, von denen die letzte eine Limeszahl ist.

Es gilt auch das Umgekehrte. Jeder geordneten Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_i < \omega_1, \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

wo p eine gerade natürliche Zahl ist und α_p eine Limeszahl ist, entspricht eine Lücke vom Typus c_{10} . Diese ist durch die Punktfolgen

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots \quad (\xi < \omega_1)$$

$$y^1 > y^2 > \dots > y^n > \dots \quad (n < \omega_0)$$

definiert, wo

$$x^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \quad \xi, 0, 0, \dots$$

$$y^n = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_n, 0, 0, \dots$$

und $\lim \beta_n = \alpha_p$. Tatsächlich, alle Punkte x^ξ sind vor allen Punkten y^n und im Ultrakontinuum existiert kein Punkt, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^n wäre. Leicht sieht man ein, daß zwei verschiedenen solchen Gruppen zwei verschiedene Lücken vom Typus c_{10} entsprechen.

Eine völlig gleiche Überlegung führt uns zum Ergebnis, daß der Lücke vom Typus c_{01} eineindeutig eine Gruppe von ungerader Anzahl von Ordnungszahlen entspricht, wobei die letzte Zahl eine Limeszahl ist.

Beachten wir nun die Lücken vom Typus c_{11} . Es sei (A, B) eine solche Lücke. Die transfinite Punktfolge

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots \quad (\xi < \omega_1)$$

sei mit der Menge A konfinal und die Punktfolge

$$y^1 > y^2 > \dots > y^\xi > \dots \quad (\xi < \omega_1)$$

möge mit der Menge B koinitial sein. Der ersten Folge entspricht eine geordnete Gruppe von gerader Anzahl $p > 1$ von Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, wobei α_p keine Limeszahl ist (sonst wäre hier eine Lücke vom Typus c_{10} definiert), wogegen der zweiten Folge eine Gruppe von ungerader Anzahl $q > 0$ von Ordnungszahlen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ entspricht. Wir untersuchen diese zwei Fälle: $\alpha_p = 0$ und $\alpha_p \neq 0$. Aus der Tatsache, daß kein Punkt des Ultrakontinuums existiert, der nach allen Punkten x^ξ und vor allen Punkten y^ξ wäre, folgern wir, daß im ersten Falle fast alle Punkte y^ξ in den ersten $p - 1$ Koordinaten folgendermaßen beginnen: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1} + 1$, wogegen höchstens abzählbar viele Punkte y^ξ die p -te Koordinate gleich haben und daß im zweiten Falle fast alle Punkte y^ξ in den ersten $p + 1$ Koordinaten folgendermaßen beginnen: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p - 1, 0$, wogegen höchstens abzählbar viele Punkte y^ξ die $(p + 2)$ -te Koordinate gleich haben.

Daraus folgt sogleich, daß jeder Lücke vom Typus c_{11} auf zweifache Art eine geordnete Gruppe von Ordnungszahlen sich zureihen läßt, von denen eine mit 0 endet, die andere jedoch nicht. Entschließen wir uns für die erste Wahl, dann ist auch in diesem Falle die Zuordnung eindeutig.

Auch umgekehrt: Der geordneten Gruppe von p ($p > 1$) Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, 0$ entspricht eindeutig eine Lücke vom Typus c_{11} , die durch die Punktfolgen

$$\begin{aligned} u^1 &< u^2 < \dots < u^\xi < \dots & (\xi < \omega_1) \\ v^1 &> v^2 > \dots > v^\xi > \dots & (\xi < \omega_1) \end{aligned}$$

definiert ist, wobei

$$\begin{aligned} u^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \quad 0, \xi, \dots \\ v^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, \dots, \end{aligned}$$

wenn die Zahl p gerade ist, und

$$\begin{aligned} u^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1} + 1, \xi, \dots \\ v^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}, \quad 0, \xi, \dots, \end{aligned}$$

wenn die Zahl p ungerade ist.

Es ist notwendig noch den Ausnahmefall $p = 1$ zu beachten, d. h. den Fall, in dem die Gruppe nur die Zahl 0 enthält. Jede Punktfolge, deren erste Koordinate die Zahl 0 ist und deren zweite Koordinate fortwährend wächst, ist koinitial mit dem Ultrakontinuum. Daher entspricht der Gruppe, die nur die Zahl 0 enthält, keine Lücke (nach unserer Definition der Lücke).

Satz.⁴⁾ Die Menge aller Lücken von jedem Typus hat die Mächtigkeit $\aleph_1$.

Beweis. Wir beachten die Lücken vom Typus c_{01} . Es sind ihrer soviele als es geordnete Gruppen von ungerader Anzahl von Ordnungszahlen $< \omega_1$, die mit einer Limeszahl enden, gibt. Alle geordneten Gruppen von $2n + 1$ Ordnungszahlen, die mit einer Limeszahl enden ($n \geq 0$), ist $\aleph_1^{2n}$, so daß alle solche Gruppen $\sum_{n=0}^{\infty} \aleph_1^{2n+1} = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ sind.

Auf ähnliche Weise beweist man den Satz für die Lücken vom Typus c_{10} und c_{11} .

Die erste Bemerkung zum Bernsteinschen Ultrakontinuum

berührt das Problem von Prof. E. Čech in den *Annals of Mathematics* **38**, 1937, S. 843 (On bicomact spaces). Im Wesentlichen handelt es sich um die Konstruktion eines vollständig regulären⁵⁾ Raumes, der in keinem seiner Punkte lokal normal⁵⁾ ist.

Bezeichnen wir P als geordneten Raum, der aus dem Bernsteinschen Ultrakontinuum durch Ausfüllung seiner Lücken und P' als geordneten Raum, der aus dem Ultrakontinuum durch Ausfüllung der Lücken vom Typus c_{01} und c_{10} (jedoch nicht der Lücken vom Typus c_{11}) entsteht, so hat diese Eigenschaft das Kartesische Produkt $P \times P'$, wie der folgende Satz beweist.

Satz. Der Raum $P \times P'$ ist in keinem seinem Punkte normal.

Beweis. Es sei $c = (a, b)$, $a \in P$, $b \in P'$. Es sei $0(c) \subset P \times P'$ eine beliebige Umgebung des Punktes c im Raum $P \times P'$. Dann gibt es Punkte $a_1 \in P$, $a_2 \in P$, weiter Punkte $b_1 \in P$, $b_2 \in P$ derart, daß $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$ und daß

$$E_z[z = (x, y); a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2] \subset 0(c).$$

Es seien (A, B) und (C, D) Lücken vom Typus c_{11} der Eigenschaft, daß

$$a_1 < (A, B) < a_2, b_1 < (C, D) < b_2,$$

sodaß transfinite abzählbare ständig wachsende Punktfolgen im Bernsteinschen Ultrakontinuum — wir bezeichnen sie

$$a_1 < x^1 < x^2 < \dots < x^\xi < \dots, b_1 < y^1 < y^2 < \dots < y^\xi < \dots$$

($\xi < \omega_1$),

⁴⁾ Dieser Satz gibt die Lösung des Problems von Prof. Čech im topologischen Seminar vom Jahre 1938: Wieviele Lücken gibt es im Bernsteinschen Ultrakontinuum?

⁵⁾ Die entsprechenden Definitionen findet man in l. c. S. 826 und 843.

existieren, von denen die erste mit der Menge A , die zweite mit der Menge C konfinal ist (und beide Punktfolgen sind ähnlich mit der Folge aller Ordnungszahlen $< \omega_1$). Die Mengen

$$E[(x^\xi, y^\xi)] \text{ und } E[(A, B), y^\xi]$$

$\xi < \omega_1$ $\xi < \omega_1$

sind im Raum $P \times P'$, daher auch in $\bar{0}(c)$ abgeschlossen. In der Tat, ist nämlich $z = (x, y) \neq (x^\xi, y^\xi)$, dann ist entweder $x \neq x^\xi$ oder $x = x^\xi$ und $y \neq y^\xi$ für $\xi < \omega_1$. Weil weiter die Lücke (C, D) kein Element des Raumes P' ist, existiert immer eine Umgebung des Punktes z , die keinen Punkt (x^ξ, y^ξ) enthält, sodaß

$$P \times P' - E[(x^\xi, y^\xi)]$$

$\xi < \omega_1$

eine offene Menge ist. In ähnlicher Weise beweist man die Abgeschlossenheit der zweiten Menge. Diese zwei Mengen sind jedoch nicht in $\bar{0}(c)$ durch offene Mengen trennbar. Tatsächlich, es sei $V \subset \bar{0}(c)$ eine Umgebung der Menge $E[(A, B), y^\xi]$. Wir wählen den Punkt $((A, B), y^{\xi_1}) \in V$. Dann gibt es einen Punkt $(x^{\xi_1}, y^{\xi_1}) \in V$ derart, daß $\xi_1 < \xi_2$. Wenn wir schon in V die Punkte

$$(x^{\xi_1}, y^{\xi_1}), (x^{\xi_2}, y^{\xi_2}), \dots, (x^{\xi_{2n}}, y^{\xi_{2n}-1})$$

von der Eigenschaft $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{2n}$ definiert haben, konstruieren wir nach der Methode der vollständigen Induktion einen Punkt $(x^{\xi_{2n+2}}, y^{\xi_{2n+1}})$ (folgendermaßen: wir wählen zunächst die Ordnungszahl $\xi_{2n+1} > \xi_{2n}$, $\xi_{2n+1} < \omega_1$ und den Punkt $((A, B), y^{\xi_{2n+1}}) \in V$. Es ist dann ein Punkt $(x^{\xi_{2n+2}}, y^{\xi_{2n+1}}) \in V$ derart vorhanden, daß $\xi_{2n+1} < \xi_{2n+2}$).

Bezeichnen wir $\lim \xi_n = \eta$. Dann konvergiert die Punktfolge $\{x^{\xi_{2n}}\}_{n=1}^\infty$ im Raum P zum Punkt x^η und die Punktfolge $\{y^{\xi_{2n}-1}\}_{n=1}^\infty$ im Raum P' zum Punkt y^η (in der Tat, der Punkt y^η ist entweder ein Punkt des Ultrakontinuums, oder eine Lücke vom Typus c_{01} , daher $y^\eta \in P'$). Die Punktfolge $\{(x^{\xi_{2n}}, y^{\xi_{2n}-1})\}_1^\infty$ konvergiert in $\bar{0}(c)$ zum Punkt $(x^\eta, y^\eta) \in \bar{0}(c)$, so daß die angeführten Mengen wirklich nicht durch die offenen Mengen trennbar sind, w. z. b. w.

Aus diesem Satze folgt weiter, daß die lokale Normalität keine Eigenschaft des Kartesischen Produktes ist, d. h. die Kartesische Operation muß die Eigenschaft nicht erhalten.

Die zweite Bemerkung zum Bernsteinschen Ultrakontinuum.

In jedem geordneten Raum X sind zwei Charaktere definiert. Es ist dies zunächst der Charakter des Punktes $x \in X$ im topologischen Sinne, d. i. die kleinste Mächtigkeit des vollständigen

Umgebungssystems des Punktes x und dann der Charakter der Zerlegung $X = P + (x) + Q$, wo $P < x < Q$, den wir als den Typus des Punktes (der Lücke) bezeichnet haben.

Zwischen dem unendlichen Charakter $\aleph_\lambda$ des Punktes $x \in X$ und dem Charakter $(\omega_\varrho, \omega_\sigma^*)$ der Zerlegung $X = P + (x) + Q$ gilt diese Beziehung: $\lambda = \max(\varrho, \sigma)$. Der Charakter des Punktes ist daher eindeutig durch den Charakter der Zerlegung bestimmt.

P. Alexandroff und P. Urysohn haben bewiesen,⁶⁾ daß durch die Ausfüllung der Lücken aus dem geordneten Raum X ein bikompakter Raum entsteht (da ist es notwendig auch die un-eigentlichen Lücken $(X, \emptyset)$ und $(\emptyset, X)$ in Betracht zu ziehen).

Durch Ausfüllung der Lücken im geordneten Raum X ändert sich nicht der Charakter der Punkte. In der Tat, ist $x \in X$ und sind dann (A, B) und (C, D) zwei Lücken derart, daß $(A, B) < x < (C, D)$, dann gibt es Punkte $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, die die Beziehung $(A, B) < x_1 < x < x_2 < (C, D)$ befriedigen.

Wir haben schon bewiesen, daß die Punktcharaktere im Bernsteinschen Ultrakontinuum abzählbar sind. Füllen wir alle Lücken im Ultrakontinuum aus, so hat jeder Punkt $x \in X_u$ in dem umfassenden Raum wieder einen abzählbaren Charakter. Das ist im Widerspruch mit der Behauptung, die die Autoren P. Alexandroff und P. Urysohn in zit. Arbeit in der Bemerkung unter dem Strich anführen, daß man nämlich durch Ausfüllung aller Lücken im Bernsteinschen Ultrakontinuum durch neue Punkte einen bikompakten Raum mit unabzählbaren Charakteren bekommt.⁷⁾ Die Verfasser hatten vielleicht im Auge einen anderen Raum, dessen Konstruktion ähnlich ist wie diejenige des Ultrakontinuums. Diese Konstruktion wollen wir hier anführen und zwar gleich allgemein für die Punktcharaktere von regulären Alefs.

Wir bezeichnen mit T einen Raum, dessen Elemente die transfiniten Folgen von Ordnungszahlen

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\xi, \dots = [\alpha_\xi] \in T, \alpha_\xi < \omega_\varrho$$

sind, wobei ω_ϱ die reguläre Anfangszahl ist. In diesen Raum wird die Ordnung folgendermaßen eingeführt: Der Punkt $x = [\alpha_\xi]$ ist vor dem Punkt $y = [\beta_\xi]$, wenn $\alpha_\eta = \beta_\eta$ für $\eta < \xi_0$, wogegen $\alpha_{\xi_0} < \beta_{\xi_0}$ bei ungeradem ξ_0 oder $\alpha_{\xi_0} > \beta_{\xi_0}$ bei geradem ξ_0 ist.

Die Topologie dieses Raumes ist durch die Ordnung gegeben. Dieser Raum hat dann die angeführte Eigenschaft. Den Beweis dieser Behauptung teilen wir in drei Abschnitte.

I. Hilfsatz. Jede monotone Punktfolge im Raum T hat höchstens die Mächtigkeit $\aleph_\varrho$.

⁶⁾ P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Amsterdam 1929, S. 52.

⁷⁾ P. Alexandroff et P. Urysohn, l. c. S. 54.

Zum indirekten Beweis setzen wir voraus, daß eine wachsende Punktfolge existiert (für die fallende Punktfolge ist der Beweis derselbe), die wir

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\eta < \dots \quad (\eta < \omega_{\varrho+1}),$$

wo

$$x^\eta = [\alpha_\eta^\eta] \in T,$$

bezeichnen. Zu jeder Ordnungszahl $\vartheta < \omega_\varrho$ gibt es dann eine Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\vartheta$$

von Ordnungszahlen $< \omega_\varrho$, mit der fast alle Punkte x^η beginnen. Diese Behauptung beweisen wir durch transfinite Induktion. Es sei $\pi < \vartheta$. Wir setzen voraus, daß die Aussage für alle Ordnungszahlen $\zeta < \pi$ richtig ist und beweisen ihre Richtigkeit auch für π . Nach der Voraussetzung beginnen fast alle Punkte folgendermaßen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\zeta, \dots \quad (\zeta < \pi).$$

Weil die Mächtigkeit der Menge dieser fast aller Punkte $\aleph_{\varrho+1}$ ist, wogegen die Koordinate α_π^π nur die Ordnungszahlen $< \omega_\varrho$ (daher die Menge der Mächtigkeit $\aleph_\varrho$) durchlaufen kann, ist eine Koordinate vorhanden — bezeichnen wir sie α_π — die $\aleph_{\varrho+1}$ Punkten der Folge $\{x^\eta\}$ gemeinsam ist. Eine solche Koordinate gibt es nur eine, denn sonst wären die $\aleph_{\varrho+1}$ Punkte x^η vor $\aleph_{\varrho+1}$ Punkten x^η , was nicht möglich ist. Damit ist bewiesen, daß fast alle Punkte der Folge mit der Gruppe

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi$$

beginnen.

Alle Punkte x^η teilen wir in Klassen nach folgender Regel ein: Den Punkt x^η reihen wir in die Klasse $T(\xi)$, $\xi < \omega_\varrho$, dann und nur dann ein, wenn ξ die erste Ordnungszahl derart ist, daß $\alpha_\xi^\eta \neq \alpha_\xi$ ist. Leicht sieht man ein, daß jeder Punkt genau in einer Klasse liegt. Da die Mächtigkeit jeder Klasse $< \aleph_{\varrho+1}$, daher $\leq \aleph_\varrho$, ist und weil es solcher Klassen höchstens $\aleph_\varrho$ gibt, ist die Mächtigkeit der Punktfolge höchstens $\aleph_\varrho \cdot \aleph_\varrho = \aleph_\varrho$, was ein Widerspruch ist.

II. Satz. Jeder Punkt $x = [\alpha_\xi] \in T$ ist vom Charakter (ϱ, ϱ) .

Beweis. Wir setzen

$$x^\eta = [\alpha_\xi^\eta],$$

wobei die Koordinaten α_ξ^η durch die Bedingungen $\alpha_\xi^\eta = \alpha_\xi$ für $\xi \leq 2\eta + 1$, $\alpha_{2\eta+2}^\eta > \alpha_{2\eta+2}$ bestimmt sind, sonst sind jedoch die Koordinaten α_ξ^η beliebig. Weiter bezeichnen wir

$$y^\eta = [\beta_\xi^\eta],$$

wo $\beta_\xi^\eta = \alpha_\xi$ für $\xi \leq 2\eta$, $\beta_{2\eta+1}^\eta > \alpha_{2\eta+1}$, wogegen die Koordinaten

β_ξ^η beliebig sind. Aus diesen Definitionen folgt

$$\begin{aligned} x^1 &< x^2 < \dots < x^\eta < \dots \\ y^1 &> y^2 > \dots > y^\eta > \dots \end{aligned}$$

und ist $\vartheta < \omega_\varrho$, dann beginnen fast alle Punkte der ersten Folge in den ersten ϑ Koordinaten gleich. Dasselbe gilt auch von der zweiten Punktfolge. Daraus ersieht man leicht, daß in jedem Intervall $\langle x', x \rangle$ ein Punkt der ersten Folge und in jedem Intervall $\langle x, x'' \rangle$ ein Punkt der zweiten Folge vorhanden ist. Die erste Punktfolge ist daher konfinal mit der Menge aller Punkte, die $< x$ und die zweite Punktfolge ist koinitial mit der Menge aller Punkte, die $> x$ sind.

III. Satz. Jede Lücke des Raumes T ist vom Typus $c_{\mu\varrho}$ oder $c_{\varrho\mu}$, wobei ω_μ eine reguläre Zahl $\leq \omega_\varrho$ ist.⁸⁾ Die Lückemenge der ersten und auch der zweiten Art liegt im Raum T dicht.

Die Beweisart dieses Satzes wird ähnlich sein, wie es im Falle des Bernsteinschen Ultrakontinuums war. Es sei $x = [\alpha_\xi] < [\beta_\xi] = y$, wo

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi, \dots, y = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_\pi, \dots \quad (\pi \geq 1).$$

Es sei ω_μ eine reguläre Zahl $< \omega_\varrho$ und es sei π' eine ungerade Ordnungszahl, die nach der Zahl π ist. Wir definieren die transfiniten Punktfolgen

$$\begin{aligned} x^1 &< x^2 < \dots < x^\eta < \dots \\ y^1 &> y^2 > \dots > y^\xi > \dots \\ z^1 &< z^2 < \dots < z^\xi < \dots \quad (\xi < \omega_\varrho) \\ t^1 &> t^2 > \dots > t^\eta > \dots \quad (\eta < \omega_\mu < \omega_\varrho) \\ u^1 &< u^2 < \dots < u^\xi < \dots \\ v^1 &> v^2 > \dots > v^\xi > \dots, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} x^\eta &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi, \dots, \alpha_{\pi'} + \eta, 0, 0, \dots \\ y^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi, \dots, \lim (\alpha_{\pi'} + \eta), \xi, 0, \dots \\ z^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_\pi, \dots, \lim (\beta_{\pi'+1} + \eta), \xi, 0, \dots \\ t^\eta &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_\pi, \dots, \beta_{\pi'+1} + \eta, 0, 0, \dots \\ u^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi, \dots, \alpha_{\pi'}, 0, \alpha_{\pi'+2} + \xi, 0, 0, \dots \\ v^\xi &= \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\pi, \dots, \alpha_{\pi'} + 1, \xi, 0, 0, \dots \end{aligned}$$

Der Leser überzeugt sich leicht, daß durch die ersten zwei Folgen im Intervall $\langle x, y \rangle$ eine Lücke vom Typus $c_{\mu\varrho}$, durch die zwei anderen Folgen eine Lücke vom Typus $c_{\varrho\mu}$ und endlich durch die letzten zwei Folgen eine Lücke vom Typus $c_{\varrho\varrho}$ definiert ist.

⁸⁾ Diese Eigenschaft war schon F. Hausdorff bekannt; vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 181.

Es bleibt noch zu beweisen, daß keine Lücke vom Typus $c_{\mu\nu} = (\omega_\mu, \omega_\nu^*)$ existiert, wo ω_μ und ω_ν reguläre Zahlen kleiner als ω_ζ sind. Zum indirekten Beweis setzen wir voraus, daß eine solche Lücke existiere. Diese ist durch die Zerlegung

$$T = A + B, \quad A < B, \quad A \neq \emptyset \neq B$$

definiert. Die Menge A ist konfinal mit der Folge

$$x^1 < x^2 < \dots < x^\eta < \dots, \quad (\eta < \omega_\mu) \\ x^\eta = [\alpha_\xi^\eta] \in T$$

und die Menge B ist koinitial mit der Folge

$$y^1 > y^2 > \dots > y^\zeta > \dots, \quad (\zeta < \omega_\nu).$$

Beachten wir die erste Punktfolge. Ihre Punkte teilen wir in Klassen, die wir durch die transfinite Konstruktion definieren. Es sei $\pi < \omega_\zeta$. Es wären schon die Klassen $T(1), T(2), \dots, T(\zeta), \dots$ und die Gruppe der Ordnungszahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\zeta, \dots, \zeta < \pi$, definiert. Wir definieren die Klasse $T(\pi)$ folgendermaßen:

1. Entweder sind alle Punkte x^η der Folge in den schon definierten Klassen eingeteilt und es verbleiben keine weiteren Punkte — dann definieren wir $\alpha_\pi = 0$ und $T(\pi)$ bedeutet die leere Klasse.

2. Oder fast alle verbleibenden Punkte haben die π -te Koordinate gleich — existiert sie, dann ist sie die einzige und wir bezeichnen sie mit α_π ; in die Klasse $T(\pi)$ reihen wir dann alle verbleibenden Punkte x^η ein, für welche $x_\pi^\eta \neq \alpha_\pi$ ist.

3. Oder endlich existiert keine Menge von fast allen verbleibenden Punkten x^η derart, die die π -te Koordinate gleich hätten — und dann definieren wir $\alpha_\pi = \lim x_\pi^\eta$, wenn dieser Limes existiert, anderenfalls $\alpha_\pi = 0$ und in die Klasse $T(\pi)$ reihen wir alle verbleibenden Punkte ein.

Leicht sieht man ein, daß jeder Punkt x^η — bis vielleicht auf einen einzigen Punkt $[\alpha_\xi] \in T$ — in irgendeine Klasse eingereiht ist und daß diese Klassen disjunkt sind. Tatsächlich, existiert nämlich eine Klasse, die ad 3. definiert ist, dann ist dies selbstverständlich. Existiert sie nicht, dann ist $x^\eta = [x_\xi^\eta] \in T(\pi)$, wo π die kleinste derartige Ordnungszahl ist, daß $x_\pi^\eta \neq \alpha_\pi$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. Es gibt eine Klasse von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Es sei ϑ die kleinste Ordnungszahl derart, daß die Klasse $T(\vartheta)$ diese Eigenschaft hat. Dann ist die Zahl ϑ ungerade und jede Klasse $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ ist die, welche ad 2. definiert ist. Der Punkt $x^\eta \in T(\vartheta)$ beginnt daher in den ersten ϑ Koordinaten folgendermaßen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\zeta, \dots, x_\vartheta^\eta \quad (\zeta < \vartheta).$$

Da die Mächtigkeit der Klasse $T(\vartheta)$ gleich $\aleph_\mu$ ist, läßt sich aus ihr eine ständig wachsende Folge von Ordnungszahlen der Mächtigkeit $\aleph_\vartheta$ herausgreifen. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir voraussetzen, daß alle Punkte der Folge $\{x^\eta\}$ in der Klasse $T(\vartheta)$ liegen. Beachten wir nun die Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \dots > z^\xi > \dots, \quad (\xi < \omega_\vartheta)$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\xi, \dots, \alpha_\vartheta, \xi, 0, 0, \dots$$

ist. Es ist $x^\eta < z^\xi$ für jedes $\eta < \omega_\mu$ und jedes $\xi < \omega_\vartheta$. Leicht sieht man jedoch, daß nach jedem Punkte $z \in T$, der vor allen z^ξ liegt, ein Punkt $x^\eta > z$ existiert. Daher ist die Menge B koinitial mit der Punktfolge $\{z^\xi\}$, was ein Widerspruch ist.

Zweiter Fall. Es existiert keine Klasse von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Da die Punktfolge $\{x^\eta\}$ $\aleph_\mu$ ($\aleph_\mu < \aleph_\vartheta$) Punkte enthält, wogegen $\aleph_\vartheta$ die Mächtigkeit aller Klassen $T(\zeta)$ ist, existiert eine kleinste Ordnungszahl $\vartheta < \omega_\vartheta$ derart, daß in den Klassen $T(1), T(2), \dots, T(\zeta), \dots, \zeta < \vartheta$, $\aleph_\mu$ Punkte der Punktfolge $\{x^\eta\}$ eingereiht sind. Leicht erkennt man, daß die Zahl ϑ eine Limeszahl ist und daß jede Klasse $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ die ad 2. definierte Klasse ist. Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, können wir wieder voraussetzen, daß alle Punkte der Folge $\{x^\eta\}$ in den Klassen $T(\zeta)$, $\zeta < \vartheta$ eingeteilt sind. Nun betrachten wir die Punktfolge

$$z^1 > z^2 > \dots > z^\xi > \dots, \quad (\xi < \omega_\vartheta),$$

wo

$$z^\xi = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\xi, \dots, \xi, 0, 0, \dots \quad (\xi < \omega_\mu).$$

Ähnlicherweise wie im ersten Falle kommen wir zum Schluß, daß die Menge B koinitial mit der Punktfolge $\{z^\xi\}$ ist, was einen Widerspruch ergibt.

Das topologische Seminar der Masaryk Universität, Brno.

*

Dvě poznámky k Bernsteinově ultrakontinuu.

(Obsah předešlého článku.)

F. Bernstein sestrojil uspořádaný prostor, jež nazval ultrakontinuem (Math. Ann. 61, 1905, str. 152). Jeho prvky jsou obyčejné nekonečné posloupnosti

$$[\alpha_n] = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

kde α_n jsou ordinální čísla první a druhé číselné třídy ($0 \leq \alpha_n < \omega_1$). Uspořádání je definováno podle tohoto pravidla: bod $[\alpha_n]$ je před bodem $[\beta_n]$, když $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$, kdežto $\alpha_k < \beta_k$ pro liché k nebo $\alpha_k > \beta_k$ pro sudé k .

V předešlém článku jsou studovány především charaktery bodů a mezer v ultrakontinuu. Charakter rozkladu ultrakontinua

$$X_u = P + (x) + Q, \quad P < x < Q$$

resp.

$$X_u = P + Q, \quad P < Q, \quad P \neq \emptyset \neq Q$$

označujeme podle obecné definice Hausdorffovy c_{σ} ; tento symbol znamená, že množina P je konfinální s regulárním ordinálním číslem ω_σ a že množina Q^* (jež se liší od Q jen inversním uspořádáním) je konfinální s regulárním číslem ω_σ .

V článku je dokázáno, že body ultrakontinua mají charakter c_{00} , kdežto mezery jsou trojího typu, a to c_{01} , c_{10} a c_{11} . Množina mezer každého typu je v ultrakontinuu hustá a má mohutnost $\aleph_1$. Mezery dají se charakterisovati určitými konečnými uspořádanými skupinami ordinálních čísel prvé a druhé číselné třídy.

Nechť prostor P' vznikne z Bernsteinova ultrakontinua vyplněním všech jeho mezer typu c_{01} a c_{10} a prostor P vyplněním všech mezer vůbec. Topologie těchto prostorů je definována jejich uspořádáním. Kartézský součin $P \times P'$ jest úplně regulární prostor avšak v žádném svém bodě není lokálně normální. Touto vlastností je dána odpověď (kladná) na Čechův problém v Ann. of Math. 38, 1937, str. 843 (On bicomact spaces).

Vyplníme-li všechny mezery Bernsteinova ultrakontinua novými body, dostaneme opět uspořádaný prostor, v němž body ultrakontinua mají zase charakter c_{00} . Přidáme-li pak k tomuto rozšířenému prostoru ještě dvě nevlastní mezery, t. j. mezery $(\emptyset, X_u)$ a $(X_u, \emptyset)$, dostaneme bikompaktní prostor, o němž se zmiňují P. Alexandroff a P. Urysohn ve své knize Mémoire sur les espaces topologiques compacts, 1929, str. 54 pozn. 1 pod čarou, tvrdíce, že charaktery bodů jsou nespočetné. To je však ve sporu s tím, co jsme dříve uvedli. Autoři měli asi na mysli jiný prostor, jehož konstrukce je podobná jako u Bernsteinova ultrakontinua. V článku je to provedeno obecně pro regulární mohutnost.

Poznámka o kvadratických formách.

K. Petr, Praha.

(Došlo dne 10. května 1939.)

Budu uvažovati k vůli zjednodušení kvadratické formy o diskriminantu různém od nuly. Budiž dána taková forma ve tvaru ($a_{ik} = a_{ki}$)

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k; \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Diskriminant její jest determinant

$$| a_{ik} |; \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Hlavní subdeterminant jeho mající elementy o indexech řádkových (a sloupcových) $i_1, i_2, \dots, i_s$ označím $(i_1, i_2, \dots, i_s)$. Jest tedy na př.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{označeno symbolem } (1, 2).$$

Hlavní subdeterminant stupně s -tého obsahující prvky o všech indexech od 1 až do s budu značiti ještě stručněji znakem Δ_s . Jest tedy $\Delta_1 = (1) = a_{11}$, $\Delta_2 = (1, 2)$, $\Delta_3 = (1, 2, 3)$ atd. Pak, jak známo, je-li diskriminant (který značíme Δ_n) různý od nuly a rovněž tak hlavní subdeterminanty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$, lze převéstí danou kvadratickou formu na tvar

$$\Delta_1 X_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} X_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} X_n^2, \quad (2)$$

ve kterém jsou $X_1, X_2, \dots, X_n$ lineární formy proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ v tělese $K(a_{ik})$. Předpokládejme dále, že součinitelé formy (1) jsou vesměs čísla reálná. Pak i součinitelé formy (2) jsou čísla reálná (různá od nuly). Počet záporných součinitelů ve (2) jest pak očividně dán počtem změn znaménkových v řadě

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n. \quad (3)$$

Převédeme-li nějakým jiným způsobem formu (1) na tvar

$$A_1 Y_1^2 + A_2 Y_2^2 + \dots + A_n Y_n^2, \quad (4)$$

kde $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ jsou lineární formy prom. $x_1, x_2, \dots, x_n$ s reálnými součiniteli, jsou $A_1, A_2, \dots, A_n$ čísla reálná, od nuly různá a záporných jest právě tolik, kolik jest záporných čísel v součinitelích formy (2). To nám právě praví všeobecně známá věta nazývaná zákonem setrvačnosti u kvadratických forem s reálnými koeficienty.*) Formu (4) nazývají tu budeme kanonický tvar formy (1). Počet záporných koeficientů kanonického tvaru lze tedy ustanoviti vyčíslením počtu změn znaménkových v řadě (3), jsou-li ovšem všechna čísla řady (3) různá od nuly. Řada (3) však počtem změn znaménkových dává zmíněné číslo i tenkrát, jsou-li některé její členy rovny nule, jsou-li jenom členy, jež s nimi (se členy rovnými nule) sousedí v řadě (3) od nuly různé (jakož obecně známo). V následujícím pak chci ukázati nejprve, že i když jsou dva sousední členy rovny nule, lze vhodným počítáním změn znaménkových dospěti k cíli řadou (3). Pak totiž, je-li ve (3) takovýto sled

$$a, 0, 0, b,$$

kde a, b jsou nuly různá čísla, pak čítati jest při tomto sledu dvě změny znaménkové, jsou-li a, b stejného znaménka; jednu pak změnu, jsou-li protivného znaménka. Ba lze i v případě, že i více po sobě následujících členů řady (3) jest rovno nule, naléztí účelné prostředky, jak na základě (3) lze vyčísleti počet záporných součinitelů. Provedu v následujícím příslušné úvahy ještě pro případ, že 3, 4 a 5 po sobě následujících členů řady (3) jest rovno nule.

I.

Formu (1) lze, jak známo, ortogonální substitucí převést na tento kanonický tvar

$$\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + \dots + \lambda_n Z_n^2,$$

kde λ_k jsou kořeny rovnice

$$\begin{aligned} |a_{ik} - \lambda \delta_{ik}| &= 0; \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \\ \delta_{ii} &= 1, \quad \delta_{ik} = 0 \text{ při } i \neq k. \end{aligned} \quad (5)$$

Počet záporných koeficientů ve (4) jest tudíž (podle zákona setrvačnosti) též dán počtem záporných kořenů rovnice (5). Jelikož pak tyto kořeny (které jsou všechny reálné), jsou vesměs od nuly různé (neboť $\Delta_n \neq 0$) a jelikož kořeny jsou spojité funkce součinitelů, má i na př. forma

$$f' = \sum_{i,k} a'_{ik} x_i x_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (1')$$

*) Vývody, jež v tomto článku jsou podávány, lze bez potíží rozšířiti na formy Hermitovy (v nichž a_{ik} a a_{ki} nejsou čísla stejná, nýbrž komplexně sdružená).

kde

$$a'_{ik} = a_{ik} + \varepsilon b_{ik}, \quad b_{ik} = b_{ki} \quad (6)$$

stejný počet záporných koeficientů ve svém kanonickém tvaru, je-li ovšem ε dosti malé; budeme stručně říkati, je-li ε nekonečně malé. Tak současně vyhovíme i jiným případným podmínkám požadujícím, aby ε bylo dosti malé. Při nekonečně malém ε znaménko mnohočlenu

$$c_i \varepsilon^i + c_{i+1} \varepsilon^{i+1} + c_{i+2} \varepsilon^{i+2} + \dots, \quad c_i \neq 0$$

souhlasí se znaménkem členu $c_i \varepsilon^i$, členu nejnižšího stupně v ε od nuly různého. Nahradíme-li pak v řadě (3) čísla a_{ik} čísly a'_{ik} podle (6), dostaneme řadu

$$1, \Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n; \quad (3')$$

jsou-li pak b_{ik} voleny tak, aby žádný z členů této řady nebyl rovný nule, dostáváme spočtením změn znaménkových v (3') hledané číslo. Volbu čísel b_{ik} lze však vždy tak provést; stačí na př. klásti $b_{ii} = 1$, $b_{ik} = 0$ při $i \neq k$. Za předpokladu takovéto volby a za předpokladu, že $\Delta_r \neq 0$ jest dále počet změn znaménkových v řadě

$$1, \Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_r; \text{ sign } \Delta'_r = \text{sign } \Delta_r$$

roven počtu záporných koeficientů v kanonickém tvaru příslušném k f_r , kde f_r jest kvadratická forma plynoucí z f , klademe-li v této za proměnné $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_n$ vesměs nuly. Počet záporných koef. v kanonickém tvaru k f_r označíme P_r ; pak jest počet záporných koeficientů v (4) označen P_n . Dále budiž $\Delta_{r+s} \neq 0$. Potom bude počet změn znaménkových v řadě

$$\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}, \dots, \Delta'_{r+s}, \text{ sign } \Delta'_{r+s} = \text{sign } \Delta_{r+s} \quad (7)$$

rovný $P_{r+s} - P_r$ (jsou-li b'_{ik} voleny, jak svrchu předpokládáno).

Předpokládajíce stále $\Delta_r \neq 0$, $\Delta_{r+s} \neq 0$ provedme postupně tyto změny

$$a'_{ik} = a_{ik} + \varepsilon c_{ik}, \quad c_{ik} = c_{ki}, \quad (8)$$

ε „nekonečně malé“,

$$a''_{ik} = a'_{ik} + \varepsilon^2 b_{ik}, \quad b_{ik} = b_{ki}$$

Při tom čísla c_{ik} volme tak, aby byla všechna rovna nule, jichž oba indexy nejsou uvnitř intervalu $(r, r+s)$, zbývající c_{ik} pak tak, aby $\Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}, \dots, \Delta'_{r+s-1}$ byly vesměs různé od nuly. Že taková volba jest vždy možná, to vyplývá z okolnosti, že oběma podmínkám hovoří na př. tato čísla $c_{ii} = 1$ pro $i = r+1, r+2, \dots, r+s-1$, ostatní $c_{ik} = 0$. Čísla b_{ik} pak volíme tak, aby žádné z čísel

$$1, \Delta''_1, \Delta''_2, \dots, \Delta''_n \quad (8')$$

nebylo rovno nule (což jak svrchu vytčeno, jest vždy možné). Při tom jest

$$\text{sign } \Delta'_k = \text{sign } \Delta''_k \text{ pro } k = r, r+1, r+2, \dots, r+s;$$

neboť Δ'_k jsou polynomy v ε stupně nejvýš $s-1$ a zavedením a''_{ik} místo a'_{ik} , čímž přejde Δ'_k ve Δ''_k , se nemohou změnit součinitelé při ε^k , kde $k < s$. Dává tedy řada (7) číslo $P_{r+s} - P_r$, jsou-li a'_{ik} dány vztahy (8). Stačí tudíž, abychom dospěli na základě řady (3) k stanovení čísla P_n , rozdělití řadu tu na úseky, v nichž krajní členové jsou různé od nuly, vnitřní pak jsou vesměs rovny nule; obecně pro takový úsek tedy platí

$$\Delta_r, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \dots, \Delta_{r+s-1} = 0, \Delta_{r+s};$$

při tom

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+s} \neq 0.$$

Pak pro jednotlivé úseky vypočítá na základě substituce (8) číslo $P_{r+s} - P_r$.

V následujícím odstavci zevrubně vyložím, jak lze v nejjednodušších případech ($s = 2, 3, 4, 5$) postupovati, abychom zjistili, kolik změn znaménkových úsek takový zastupuje při vyčíslování P_k řadou (3).

II.

1. $s = 2$. V tomto případě máme

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} \neq 0.$$

Nahradíme $a_{r+1, r+1}$ výrazem $a_{r+1, r+1} + \varepsilon$; ostatní a_{ik} buďtež beze změny.

$$\Delta'_r = \Delta_r, \Delta'_{r+1} = \varepsilon \Delta_r, \Delta'_{r+2} = \Delta_{r+2} + \varepsilon(\dots).$$

Znaménka čísel $\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \Delta'_{r+2}$ při nekonečně malém ε jsou tedy dána čísly

$$\Delta_r, \varepsilon \Delta_r, \Delta_{r+2}.$$

Počet změn znaménkových v této řadě čísel od nuly různých dává $P_{r+2} - P_r$; avšak prostřední člen má znaménko závislé na znaménku čísla ε ; abychom dostali pro $P_{r+2} - P_r$ číslo nezávislé na ε , jest nutno (a post.), aby Δ_r, Δ_{r+2} měla znaménka protivná. V případě $s = 2$ zastupuje tedy úsek jednu změnu znaménkovou, jak obecně známo. Zároveň jest tady prokázáno, že je-li v řadě po sobě jdoucích hlavních subdeterminantů symetrického determinantu, jeden rovný nule a oba sousední od nuly různé, že tyto sousední mají protivná znaménka.

2. $s = 3$. Tu máme

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \Delta_{r+3} \neq 0.$$

V tomto případě volíme nejprve

$$a'_{r+1, r+2} = a_{r+1, r+2} + \varepsilon, \quad a'_{r+2, r+1} = a_{r+2, r+1} + \varepsilon.$$

Tu dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta'_r &= \Delta_r \neq 0, \quad \Delta'_{r+1} = \Delta_{r+1} = 0, \quad \Delta'_{r+2} = -\varepsilon^2 \Delta_r, \\ \Delta'_{r+3} &= \Delta_{r+3} + \varepsilon(\dots). \end{aligned} \quad (m)$$

Označíme-li totiž minory, které patří v Δ_{r+2} k a_{ik} znakem A_{ik} , jest

$$A_{r+2, r+2} A_{r+1, r+1} - A_{r+1, r+2}^2 = \Delta_{r+2} \Delta_r = 0$$

a jelikož $A_{r+2, r+2} = \Delta_{r+1} = 0$, jest i $A_{r+1, r+2} = 0$. Redukuje se tedy řada (m) na řadu

$$\Delta_r, 0, -\varepsilon^2 \Delta_r, \Delta_{r+3}$$

obsahující ještě jednu nulu, jež bychom také mohli odstraniti (na př. zavedením $a'_{r+1, r+1} = a_{r+1, r+1} + \varepsilon^3$). Avšak od provádění této substituce, jež znamená členů od nuly různých nemění možno upustiti, stačí, máme-li vědomí, že i poslední nulu můžeme odstraniti, neboť na znaménku členu zastupujícího nulu nezávisí tu očividně hledaný počet změn zn. Zastupují tedy členy

$$\Delta_r \neq 0, \quad \Delta_{r+1} = 0, \quad \Delta_{r+2} = 0, \quad \Delta_{r+3} \neq 0$$

dvě změny znaménkové, jsou-li Δ_r, Δ_{r+3} stejného znaménka, a jednu změnu znam., jsou-li Δ_r, Δ_{r+3} protivného znaménka.

K výsledku tomuto můžeme ještě jednodušší cestou, již užijeme i při $s = 4, 5, 6$, dospěti; cesta ta má nad to výhodu, že nepoužívá vět o determinantech, jež bývají často málo přehledné. Volíme

$$a'_{r+1, r+1} = a_{r+1, r+1} + \varepsilon, \text{ ostatní } a'_{ik} \text{ rovny } a_{ik}.$$

Pro stručnost označíme ten hlavní subdeterminant diskriminantu Δ_n , který obsahuje v hlavní diagonále vedle prvků hlavní diagonály v Δ_r ještě prvky $a_{ii}, a_{kk}, \dots$ znakem

$$[i, k, \dots]$$

Pak po učiněné právě volbě dostáváme (je-li $\Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = 0$)

$$\Delta'_r = \Delta_r, \quad \Delta'_{r+1} = \varepsilon \Delta_r, \quad \Delta'_{r+2} = \varepsilon[r+2], \quad \Delta'_{r+3} = \Delta_{r+3} + \varepsilon(\dots).$$

Není možno, aby za učiněných předpokladů ($\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+3} \neq 0$) bylo $[r+2] = 0$; neboť pak by čísla $\varepsilon \Delta_r, \Delta_{r+3}$, od nuly různá a sousedící s $\varepsilon[r+2]$, měla protivná znaménka a znaménko čísla Δ_{r+3} by bylo závislo na ε . Jest tedy $[r+2] \neq 0$ a řada dávající znaménka jest

$$\Delta_r, \varepsilon \Delta_r, \varepsilon[r+2], \Delta_{r+3}.$$

Má-li počet změn znaménkových v této řadě čísel od nuly různých býti nezávislý od ε , k tomu jest nutno a post., aby $\text{sign } [r+2] =$

$= -\text{sign } \Delta_{r+3}$. Tak obdržíme, bereme-li ε kladně, konečně řadu

$$\Delta_r, -\Delta_{r+3}, \Delta_{r+3}$$

aneb řadu dávající týž výsledek

$$\Delta_r, -\Delta_r, \Delta_{r+3};$$

což se shoduje s výrokem svrchu odvozeným.

3. $s = 4$. Nyní uvažujeme řadu

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \Delta_{r+3} = 0, \Delta_{r+4} \neq 0. \quad (u)$$

Jako v případě $s = 3$ volíme

$$a'_{r+1, r+1} = a_{r+1, r+1} + \varepsilon_1, \text{ ostatní } a'_{ik} \text{ jsou rovny } a_{ik}.$$

Tu dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta'_r &= \Delta_r, \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1 \Delta_r, \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1[r+2], \Delta'_{r+3} = \varepsilon_1[r+2, r+3], \\ \Delta'_{r+4} &= \Delta_{r+4} + \varepsilon_1(\dots). \end{aligned}$$

Je-li $[r+2] \neq 0$, jest i $[r+2, r+3]$ různě od nuly; neboť kdyby bylo $[r+2, r+3]$ rovno nule při $[r+2] \neq 0$, bylo by znaménko Δ_{r+4} podle poslední řady protivně znaménku čísla $\varepsilon_1[r+2]$ a tedy závislo na znaménku čísla ε_1 . Dále jsou v poslední řadě nejvýše dva členy rovny nule, takže řada ta na základě výsledků pro $s = 3, 2$ nám dává snadno ihned hledaný výsledek.

a) Buď nejprve $[r+2, r+3] \neq 0$, pak $\text{sign } [r+2, r+3] = -\text{sign } \Delta_{r+4}$, neboť počet změn znaménkových jest nezávislý na znaménku ε_1 . Volíme-li ε_1 kladně, obdržíme řadu

$$\Delta_r, [r+2], -\Delta_{r+4}, \Delta_{r+4}.$$

b) Budiž $[r+2, r+3] = 0$, pak i $[r+2] = 0$; dospíváme pak k řadě

$$\Delta_r, \varepsilon \Delta_r, 0, 0, \Delta_{r+4},$$

již podle výsledku pro $s = 3$ lze nahraditi řadou

$$\Delta_r, \varepsilon \Delta_r, -\varepsilon \Delta_r, \Delta_{r+4},$$

ze které následuje, jelikož počet změn jest nezávislý na znaménku ε , že v tomto případě $\text{sign } \Delta_r = \text{sign } \Delta_{r+4}$, čímž získáváme konečně řadu o 2 změnách znaménkových.

Máme tak v každém případě: Úsek $\Delta_r, \Delta_{r+1}, \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}$ splňující podmínky (u) zastupuje tolik změn znaménkových, kolik jich obsahuje řada

$$\Delta_r, [r+2], -\Delta_{r+4}, \Delta_{r+4}.$$

V této řadě, je-li $[r+2] = 0$, mají členy sousední s členem $[r+2]$ protivná znaménka (t. j. $\text{sign } \Delta_r = \text{sign } \Delta_{r+4}$).

4. $s = 5$. Postupujeme úplně stejně jako v případě $s = 4$ a nahradíme řadu

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \Delta_{r+3} = \Delta_{r+4} = 0, \Delta_{r+5} \neq 0 \quad (v)$$

řadou

$$\Delta'_r = \Delta_r, \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1 \Delta_r, \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1[r+2], \Delta'_{r+3} = \varepsilon_1[r+2, r+3], \\ \Delta'_{r+4} = \varepsilon_1[r+2, r+3, r+4], \Delta'_{r+5} = \Delta_{r+5} + \varepsilon_1(\dots).$$

Jenom tři členy v této řadě mohou být rovny nule a vystačíme tudíž při výpočtu $P_{r+5} - P_r$ s větami získanými pro $s = 2, 3, 4$.

a) $[r+2, r+3, r+4] \neq 0$; pak $\text{sign}[r+2, r+3, r+4] = -\text{sign} \Delta_{r+5}^*$ a máme řadu (volíme ε_1 kladně, neboť v důsledku právě vytčeného vztahu jest počet změn zn. nezávislý na ε_1)

$$\Delta_r, [r+2], [r+2, r+3], -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5}.$$

V této řadě oba prostřední členy, je-li jeden z nich anebo oba rovny nule, jest nahraditi (v důsledku pro $s = 2, 3$ získaných pravidel) číslem $-\Delta_r$ anebo Δ_{r+5} (obojí náhrada vede k témuž výsledku).

b) $[r+2, r+3, r+4] = 0, [r+2, r+3] = 0$; je-li $[r+2, r+3, r+4] = 0$, nemůže býti $[r+2, r+3]$ různě od nuly (viz svrchu přísl. úvahu pro $s = 4$). Budiž dále $[r+2] \neq 0$. Pak máme řadu

$$\Delta_r, \varepsilon_1 \Delta_r, \varepsilon_1[r+2], 0, 0, \Delta_{r+5}.$$

již podle výsledku pro $s = 3$ nahradíme řadou čísel od nuly různých

$$\Delta_r, \varepsilon_1 \Delta_r, \varepsilon_1[r+2], -\varepsilon_1[r+2], \Delta_{r+5}.$$

Jelikož počet změn znaménkových v této řadě jest nezávislý na znaménku čísla ε_1 , jest $\text{sign}[r+2] = \text{sign} \Delta_{r+5}$ a tak máme na konec tuto řadu při ε_1 kladném

$$\Delta_r, \Delta_{r+5}, -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5} \quad (w)$$

dávající 2 resp. 3 změny znaménkové.

$$c) [r+2, r+3, r+4] = [r+2, r+3] = [r+2] = 0.$$

Obdržíme řadu

$$\Delta_r, \varepsilon_1 \Delta_r = \Delta'_{r+1}, 0, 0, 0, \Delta_{r+5}.$$

V tomto případě můžeme s výhodou použití substitute

$$a'_{r+i, r+i} = a_{r+i, r+i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2$$

ostatní $a'_{ik} = a_{ik}$. Tu dostaneme pro první tři členy řady Δ'_{r+j} tyto výsledky

$$\Delta'_r = \Delta_r, \Delta'_{r+1} = \varepsilon_1 \Delta_r, \Delta'_{r+2} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_r.$$

Tyto tři členy poskytují při vhodné volbě znamének u $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dvě změny a při jiné volbě 2 sledy znaménkové. Zastupuje tedy řada

*) Neboť $[r+2, r+3, r+4], [r+1, r+2, r+3, r+4], [r+1, r+2, r+3, r+4, r+5]$ jsou tři po sobě následující hlavní subdeterminanty a prostřední jest rovný nule.

Δ_{r+j} aspoň 2 a nejvýše 3 změny znaménkové a jest počet změn znaménkových dán opět řadou (w), již ostatně můžeme nahraditi řadou

$$\Delta_r, -\Delta_r, -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5}. \quad (w')$$

Lze tedy uzavíratí celkem: Řada (v) zastupuje tolik změn znaménkových, kolik jich jest v řadě

$$\Delta_r, [r+2], [r+2, r+3], -\Delta_{r+5}, \Delta_{r+5}.$$

při čemž, je-li jeden nebo oba ze členů $[r+2]$, $[r+2, r+3]$ rovný nule, jest oba ty členy nahraditi číslem $-\Delta_r$ (anebo číslem Δ_{r+5}).

Můžeme výsledek tento vysloviti též stručně takto: Řada (v) zastupuje buď 2 anebo 3 změny znaménkové, vyjma v případech, kdy $\text{sign } [r+2] = -\text{sign } \Delta_r = -\text{sign } [r+2, r+3] = -\text{sign } \Delta_{r+5}$, kdy počet změn znaménkových jest 4, a v případě, kdy $\text{sign } \Delta_r = \text{sign } [r+2] = \text{sign } [r+2, r+3] = -\text{sign } \Delta_{r+5}$, kdy počet změn znaménkových jest 1.

III.

V tomto odstavci poněkud stručněji naznačím vyšetření případu $s=6$, při čemž jasně vysvitne, jak lze v případech dalších postupovati, a zároveň objasním některé další obraty přibližující nás k definitivnímu výsledku. Budiž tedy

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \Delta_{r+3} = \Delta_{r+4} = \Delta_{r+5} = 0, \Delta_{r+6} \neq 0.$$

Zavedeme

$$a'_{r+1, r+1} = a_{r+1, r+1} + \varepsilon_1, \text{ ostatní } a'_{ik} = a_{ik}.$$

Pak dostaneme pro $\Delta'_r, \Delta'_{r+1}, \dots, \Delta'_{r+6}$ po řadě tyto hodnoty

$$\Delta_r, \varepsilon_1 \Delta_r, \varepsilon_1[r+2], \varepsilon_1[r+2, r+3], \varepsilon_1[r+2, r+3, r+4], \\ \varepsilon_1[r+2, r+3, r+4, r+5], \Delta_{r+6} + \varepsilon_1(\dots).$$

V této řadě počet členů, které mohou (ε_1 pokládáme za nekonečně malé, od nuly různé) býti rovny nule, jest 4. Můžeme tedy v důsledku toho, co jsme v předch. odst. podali, dospěti na základě vět odvozených získati číslo $P_{r+6} - P_r$.

Nejprve možno opět tvrditi, že člen předposlední jest různý od nuly, je-li člen třetí od konce různý od nuly; dále, že $\text{sign } [r+2, r+3, r+4, r+5] = -\text{sign } \Delta_{r+6}$ je-li předposlední člen $\neq 0$. Budeme pak probíratí postupně jednotlivé možnosti se vyskytující.

a) $[r+2, r+3, r+4, r+5] \neq 0$. Pak v důsledku toho co bylo řečeno máme dáno číslo $P_{r+6} - P_r$ počtem změn znaménkových v řadě ($\text{sign } \varepsilon_1$ budiž $+1$)

$$\Delta_r, [r+2], [r+2, r+3], [r+2, r+3, r+4], -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6}.$$

V této řadě může každý jednotlivý člen ze členů na místě druhém,

třetím a čtvrtém být roven nule (sousední mají při tom znaménka protivná, jsouce od nuly různá). Avšak i dva členy po sobě následující z oněch členů mohou být rovny nule. Neboť podle toho, co bylo uvedeno pro $s = 3$, stačí, je-li na př.

$$[r + 2] = [r + 2, r + 3] = 0, [r + 2, r + 3, r + 4] \neq 0,$$

nahraditi členy na místě 2. a 3. výrazem $-\Delta_r$. Obdobně, je-li

$$[r + 2] \neq 0, [r + 2, r + 3] = [r + 2, r + 3, r + 4] = 0$$

nahraditi členy na místě 3. a 4. výrazem Δ_{r+6} .

Zbývá tedy jenom vyšetřiti případ, že by všechny tři členy na místech 2., 3. a 4. byly rovny nule, což provedeme později.

b) $[r + 2, r + 3, r + 4, r + 5] = 0, [r + 2, r + 3, r + 4] = 0, [r + 2, r + 3] \neq 0$. Tu nejprve přeměníme přirozený pořad indexů u a_{ik} tím, že místo pořadu

$$r, r + 1, r + 2, r + 3, r + 4, r + 5, r + 6,$$

volíme pořad

$$r, r + 2, r + 3, r + 1, r + 4, r + 5, r + 6,$$

čímž se řada Δ_{r+j} změnila na řadu

$$\Delta_r, [r + 2], [r + 2, r + 3], \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}.$$

Úsek této řady ohraničený členy $[r + 2, r + 3], \Delta_{r+6}$ od nuly různými má podle předpokladu všechny vnitřní členy (početem 3) rovny nule. Užijeme-li tedy věty odvozené svrchu pro $s = 4$, máme ihned dáno $P_{r+6} - P_r$ počtem změn znaménkových v řadě

$$\Delta_r, [r + 2], [r + 2, r + 3], [r + 2, r + 3, r + 4], -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6};$$

avšak $[r + 2, r + 3, r + 4] = 0$ a tedy $\text{sign } [r + 2, r + 3] = = \text{sign } \Delta_{r+6}$, čímž se ta řada redukuje v řadu

$$\Delta_r, [r + 2], \Delta_{r+6}, -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6},$$

která dává počtem změn znaménkových $P_{r+6} - P_r$; $[r + 2]$ není tu rovno nule, jsou-li Δ_r, Δ_{r+6} stejného znaménka.

$$\text{c) } [r + 2, r + 3, r + 4, r + 5] = [r + 2, r + 3, r + 4] = = [r + 2, r + 3] = 0, [r + 2] \neq 0.$$

Tu volíme tento pořad indexů

$$r, r + 2, r + 1, r + 3, r + 4, r + 5, r + 6$$

a dostaneme místo řady Δ_{r+j} řadu

$$\Delta_r, [r + 2], \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}.$$

Použijeme-li pak věty pro $s = 5$ máme místo

$$[r + 2], \Delta_{r+2}, \Delta_{r+3}, \Delta_{r+4}, \Delta_{r+5}, \Delta_{r+6}$$

(ve kterémžto úseku 4 vnitřní členy jsou rovny nule) řadu

$$[r+2], [r+2, r+3], [r+2, r+3, r+4], -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6},$$

kterouž jest nahraditi (jelikož druhý a třetí člen jsou rovny nule) řadou

$$[r+2], \Delta_{r+6}, -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6},$$

čímž dospějeme v uvažovaném případě k řadě

$$\Delta_r, [r+2], \Delta_{r+6}, -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6}$$

jež se shoduje s řadou případu b).

d) $[r+2, r+3] = 0$, $[r+1, r+3] = 0$. Příklad tento uvažovati jest účelno, aby se zkrátily úvahy následující. Tu zavedeme

$$a'_{r+i, r+i} = a_{r+i, r+i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3;$$

ostatní a'_{ik} nechť jsou rovny a_{ik} . První čtyři členy řady Δ'_{r+j} budou

$$\Delta_r, \varepsilon_1 \Delta_r, \varepsilon_1[r+2] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_r, \varepsilon_1 \varepsilon_2[r+3] + \varepsilon_1 \varepsilon_3[r+2] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \Delta_r.$$

Nechť jest nejprve $[r+2] \neq 0$. Poslednímu ze čtyř vypsanych členů můžeme vhodnou volbou znaménka čísla ε_3 dáti libovolné znaménko (při čemž znaménko předch. členů se nezmění). Je-li dále $\text{sign}[r+2] = \text{sign} \Delta_r$, lze vhodnou volbou znamének při $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ docílit, že ve čtyřech členech vypsanych se vyskytnou 3 sledy a při jiné volbě 2 změny znaménkové. V celé řadě Δ'_{r+j} , $j = 0, 1, \dots, 6$ se tedy vyskytnou aspoň 2 změny a nejvýš 3 změny; i máme, jestliže Δ_r má stejné znam. jako Δ_{r+6} , 2 změny; má-li protivné, 3 změny znaménkové. Stejně, je-li $\text{sign}[r+2] = -\text{sign} \Delta_r$; tu jsou v celé řadě Δ'_{r+j} buď 4 anebo 3 změny znam.

Konečně, je-li $[r+2] = 0$ a $[r+3] \neq 0$, získáme výsledky, které vyplývají z předcházejících, zaměníme-li $[r+2]$ s $[r+3]$. Je-li pak $[r+2] = [r+3] = 0$, máme stejným způsobem při vhodné volbě znamének u $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ buď tři sledy anebo 3 změny znam. a tedy v celé řadě jsou přesně 3 změny (a nutně $\text{sign} \Delta_r = -\text{sign} \Delta_{r+6}$).

Shrneme-li výsledky právě odvozené, obdržíme větu: Jestliže v případě $s = 6$ jest $[r+2, r+3] = 0$ a $[r+1, r+3] = 0$, pak řada Δ_{r+j} , $j = 0, 1, \dots, 6$ zastupuje při $[r+2] \neq 0$ počet změn znaménkových daný počtem změn v řadě případu b), t. j. v řadě

$$\Delta_r, [r+2], \Delta_{r+6}, -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6};$$

je-li však $[r+2] = 0$, pak v této řadě jest nahraditi $[r+2]$ číslem $[r+3]$. Jsou-li $[r+2]$ i $[r+3]$ rovny nule, jest $\text{sign} \Delta_r = -\text{sign} \Delta_{r+6}$ a člen $[r+2]$ lze v řadě vypsane potlačit.

Věta právě získaná má pro nás význam proto, že v násl. případech dosud nevyřešených můžeme se omeziti při $[r+2] = 0$, $[r+2, r+3] = 0$ na předpoklad $[r+1, r+3] \neq 0$.

Lze ještě poznamenati, že při $[r+2] = 0$ a při $\text{sign } \Delta_r = -\text{sign } \Delta_{r+6}$ zastupuje řada Δ_{r+j} v případě $s = 6$ vždy 3 změny znaménkové, následkem čehož můžeme vedle $[r+1, r+3] \neq 0$ v následujícím také předpokládati, že Δ_r, Δ_{r+6} mají stejná znaménka.

$$\text{e) } [r+2] = 0, [r+2, r+3] = 0, [r+2, r+3, r+4] = 0, [r+1, r+3] \neq 0.$$

V tomto případě stačí přeměnit pořad indexů v následující

$$r, r+1, r+3, r+2, r+4, r+5, r+6.$$

Príslušná řada Δ_{r+j} se změní v následující

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, [r+1, r+3], \Delta_{r+3} = 0, \Delta_{r+4} = 0, \Delta_{r+5} = 0, \Delta_{r+6},$$

jež se rozpadá ve dva úseky: v prvním $s = 2$, v druhém $s = 4$. Užijeme-li na tyto úseky vět odvozených, máme ihned (se zřetelem k tomu, že z napsané řady vyplývá, že $\text{sign } [r+1, r+3] = -\text{sign } \Delta_r$) tento výsledek: V případě e) zastupuje řada Δ_{r+j} počet změn znaménkových daný počtem změn znam. v řadě

$$\Delta_r, -\Delta_r, [r+1, r+3, r+4], -\Delta_{r+6}, \Delta_{r+6};$$

v případě, že $\text{sign } \Delta_r = \text{sign } \Delta_{r+6}$, nemůže $[r+1, r+3, r+4]$ za učiněných předpokladů býti rovno nule.

Přenechávám čtenáři, aby na základě úvah vyčerpávajících všechny možnosti vzhledem k číslům $[r+2]$, $[r+2, r+3]$, $[r+2, r+3, r+4]$, $[r+2, r+3, r+4, r+5]$ sestavil si přehledné pravidlo pro $s = 6$; jenom podotýkám, že, je-li jedno (anebo více) z uvedených čísel rovno nule a zároveň $\text{sign } \Delta_r = -\text{sign } \Delta_{r+6}$, vždy jest $P_{r+6} - P_r = 3$.*)

*) Podnět k napsání tohoto článku dalo mi pojednání p. R. Košťála „Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením“ Čas. 68, str. 50, ve kterém se autor zabývá signaturou kvadratické formy $\sum_{i+k=2} s_i \lambda_i \lambda_k$. Autor však nesprávně usuzuje, že součet čtverců

$$A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_m^2$$

jest číslo od nuly různé, ačkoliv $A_1, A_2, \dots$ jsou čísla komplexní (viz na str. 51, dole). Odvozuje na základě toho větu, že v řadě hlavních subdeterminantů patřících k jeho kvadratické formě

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$$

ve kterém na př. Δ_r jest různé od nuly, všechny Δ_k , kde $k < r$, jsou rovněž různé od nuly. Že tato věta jest nesprávná a že může v autorově případě dokonce i několik po sobě jdoucích hlavních subdeterminantů býti rovno nule, mohl se p. autor přesvědčiti na zcela jednoduchých příkladech. Kdyby na př. si byl vzal za základ rovnici

$$\lambda^6 + 1 = 0$$

Remarque sur les formes quadratiques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur envisage une forme quadratique

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

à coefficients réels. Il fait voir comment on peut employer la suite des sousdéterminants principaux

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \quad (1)$$

du discriminant

$$\Delta_n = |a_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

au calcul de la signature de la forme quadratique dans le cas, où le discriminant Δ_n est différent de zéro. Ici on a posé

$$\Delta_r = |a_{jl}|, \quad j, l = 1, 2, 3, \dots, r.$$

Si la suite (1) n'a que des termes différents de zéro, le nombre des variations de signes y contenu est égal au nombre des carrés négatifs de la forme canonique

$$A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2 + \dots + A_n X_n^2$$

dans laquelle la forme considérée peut être transformée. Cette chose reste valable même dans le cas, où des termes particuliers de (1) disparaissent pourvu que les termes voisins d'un tel terme disparaissant soient différents de zéro. Ce sont des choses bien connues. L'auteur indique une méthode par laquelle on peut calculer au moyen de la suite (1) le nombre des carrés négatifs dans la forme canonique même au cas, où s termes consécutifs de la suite (1) disparaissent et il traite en détail les cas $s = 2, 3, 4, 5$. Par exemple, si deux termes consécutifs de (1) sont égaux à zéro, c'est-à-dire si la suite (1) contient une tranche suivante

$$\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = 0, \Delta_{r+2} = 0, \Delta_{r+3} \neq 0,$$

il suffit de remplacer cette tranche par la tranche

$$\Delta_r, -\Delta_r, \Delta_{r+3},$$

dont les termes sont différents de zéro.

o kořenech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$, dostal by $(s_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_6^k)$
diskriminant

$$\begin{vmatrix} 6, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -6 \\ 0 & 0, & 0, & 0, & -6, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -6, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -6, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -6, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Řadu hlavních subdeterminantů zastupuje řada čísel

$$1, 6, 0, 0, 0, 0, -6^6.$$

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Une méthode de la détermination du coefficient balistique et de la portée.

Konstantin Hladký, Brno.

(Došlo 22. srpna 1938.)

La question d'existence d'une liaison simple entre les éléments du tir est toujours actuelle. Les résultats des recherches expérimentaux donnent une bonne image du changement de ces éléments; ce sont les tables numériques ou graphiques (abaques).

Nous prendrons pour la fondation de nos considérations les abaques numériques. Nous tâcherons de les transformer et de recevoir une liaison la plus simple. Nous pouvons prendre, par exemple, pour la base la portée pour l'angle de tir $\alpha = 40^\circ$, que nous signerons x_{40} . On peut représenter toutes les autres portées par x_{40} .

Pour cela nous nous borderons, au commencement, dans nos considérations pour les coefficients balistiques $10^4 c$ sur l'intervalle $10^4 c = 4$ jusqu'au $10^4 c = 8$. On peut construire une table numérique I en utilisant la formule

$$\frac{x_{40} - x_\alpha}{x_{40}} \cdot 100 = N$$

pour différentes valeurs de la vitesse initiale v .

Si nous additionnons dans la table I les valeurs N et $10^4 c$ pour la même valeur de l'angle α , nous verrons que les sommes restent presque constantes pour toutes les valeurs de c .

Par exemple, pour $\alpha = 5^\circ$, $v = 1000$ m/sec, $10^4 c = 4, 6, 8$ nous recevrons: 62,42; 62,37; 62,35; ou en général

$$\frac{x_{40} - x_\alpha}{x_{40}} \cdot 100 + 10^4 c = \text{const.} \quad (1)$$

pour la même vitesse initiale et l'angle α .

L'équation (1) donne une liaison très remarquable et indique, que le coefficient balistique est en liaison linéaire avec la portée.

Table I.

α	$10^4 c$	N pour la vitesse v			
		1000 m/sec	800 m/sec	600 m/sec	400 m/sec
5°	4	58,42	62,06	66,17	74,76
	6	56,37	60,11	64,09	72,70
	8	54,35	58,16	62,51	71,30
10°	4	42,70	45,30	50,08	56,45
	6	40,41	43,43	48,00	54,03
	8	38,07	41,54	46,11	51,85
15°	4	35,59	33,14	36,32	40,26
	6	29,46	31,30	34,15	38,48
	8	26,87	29,33	32,34	36,47
20°	4	22,39	23,22	25,16	28,58
	6	20,26	21,04	22,65	26,78
	8	18,17	19,16	21,43	24,36
25°	4	15,07	15,29	16,24	17,80
	6	13,75	13,96	14,54	16,38
	8	10,85	11,44	12,91	14,89
30°	4	8,39	8,51	8,80	10,42
	6	6,72	6,96	7,42	8,51
	8	5,34	5,62	6,40	6,55
35°	4	4,42	4,39	4,36	3,40
	6	3,25	3,09	2,41	2,79
	8	1,89	1,56	1,94	2,28

Table II.

α	$N + 10^4 c$ pour la vitesse:			
	1000 m/sec	800 m/sec	600 m/sec	400 m/sec
5°	62,5	66,3	71,7	78,8
10°	46,5	49,3	54,0	60,5
15°	35,5	37,1	40,3	45,3
20°	26,5	27,2	29,1	32,6
25°	19,0	19,3	20,2	21,8
30°	12,4	12,5	12,8	13,4
35°	7,5	7,4	7,4	7,4

La même équation (1) permet recevoir plus vite la valeur de c sur la base de x_{40} et x_{α} . Pour ça on peut se servir d'une table numérique II transformée où se trouvent les valeurs de $N + 10^4 c = \text{const.}$ et de la table III, où on trouve les valeurs de la portée pour $\alpha = 40^\circ$ et pour une vitesse initiale v m/sec.

Table III.
La portée pour $\alpha = 40^\circ$.

$\begin{matrix} 10^4 c \\ v \end{matrix}$	4	6	8
1000	18 710	14 290	11 610
800	15 630	12 285	10 200
600	12 500	10 175	8 750
400	9 185	7 875	7 020

Sur la base de ces relations on peut aussi solutionner la construction des appareils de pointages du canon quand la vitesse initiale change beaucoup avec chaque coup. Pour cela il faut prendre en considérations les lignes horizontales de la table II et designer une courbe, sur laquelle marche l'appareil.

*

Způsob stanovení balistického koeficientu a dostřelu.

(Obsah předešlého článku.)

Autor na základě numerických tabulek pro dostřel zjistil vztah mezi dostřelem při 40° a dostřelem při náměru menším a odvodil vztah

$$\frac{x_{40} - x_{\alpha}}{x_{40}} \cdot 100 + 10^4 c = \text{const.},$$

což umožňuje při střelbě v terénu rychlé zjištění balistického koeficientu, třebaš při zásilce nového střeliva. Zároveň poukazuje na možnost použití tohoto vztahu ke konstrukci zaměřovačů.

Sur une méthode approximative de compensation des fonctions empiriques.

Zdeněk Horák, Praha.

(Reçu le 19 décembre 1938.)

La solution du problème de la compensation des fonctions empiriques par la méthode des moindres carrés présente l'inconvénient d'un calcul numérique laborieux. C'est pour cela que l'on a imaginé plusieurs méthodes approximatives plus faciles à utiliser. Dans le présent mémoire, je me propose de traiter une nouvelle méthode approximative du calcul des compensations des fonctions paramétriques que j'ai déjà appliquée aux résultats de mes mesures relatives à la conductibilité thermique et à la viscosité en fonction de la température. La méthode se révéla commode et suffisamment précise.

1. Principe de la méthode. Considérons une quantité x fonction de la variable t

$$x = f(t, a_1, a_2, \dots, a_p) \quad (1)$$

dans laquelle $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont des paramètres de valeurs inconnues. Pour les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_m$ de t nous mesurons les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_m$ de x . Le problème consiste à déterminer les meilleures valeurs à adopter pour les paramètres $a_1, \dots, a_p$, en tenant compte de résultats de mesure fournissant un nombre surabondant de relations entre ces paramètres. Or, la méthode des moindres carrés donne pour les paramètres $a_1, \dots, a_p$ les équations

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \sum_{i=1}^m [x_i - f(t_i, a_1, \dots, a_p)]^2 = 0, \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

dont l'établissement et la résolution sont, en général, assez pénibles. Cependant, lorsqu'un des paramètres, a_1 par exemple, intervient dans la fonction f comme une constante additive, la première des équations (2) — pour $r = 1$ — prend la forme relativement très simple

$$\sum_{i=1}^m [x_i - f(t_i, a_1, \dots, a_p)] = 0. \quad (3)$$

On peut profiter de ce fait, en procédant comme suit:

Divisons toutes les mesures en p groupes et remplaçons les p équations (2) par celles (3) appliquées aux p groupes de mesures:

$$\sum_{(1)} (x - f) = 0, \sum_{(2)} (x - f) = 0, \dots, \sum_{(p)} (x - f) = 0 \quad (4)$$

où la somme $\sum_{(r)}$ concerne le r -ième groupe. Si les mesures effectuées satisfont approximativement à la relation (1), on peut s'attendre à ce que les valeurs des paramètres $a_1, \dots, a_p$, obtenues en résolvant les équations (4), ne diffèrent pas beaucoup de celles calculées d'après les équations (2). Néanmoins, il faut admettre que les paramètres $a_1, \dots, a_p$ définis par (4) dépendent du nombre de mesures contenues dans chaque groupe (*répartition quantitative*) et de la manière dont on répartit les mesures individuelles dans les groupes (*répartition qualitative*). Il importe donc de trouver les répartitions quantitative et qualitative des mesures les plus avantageuses, fournissant les valeurs des paramètres les plus exactes, ce dont je parlerai dans la suite.

2. Condition fondamentale pour le choix des groupes de mesures. Nous partirons de la supposition, adoptée ci-dessus, que le paramètre a_1 intervient dans la fonction f comme une constante additive c'est-à-dire que l'équation (1) est de la forme

$$x = a_1 + \varphi(t, a_2, \dots, a_p) \quad (5)$$

où φ est une fonction continue et uniforme d'ailleurs quelconque. Donc les équations (4) prennent la forme suivante

$$\left. \begin{aligned} \sum_{(1)} x_i &= m_{(1)} a_1 + \sum_{(1)} \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p), \\ \sum_{(2)} x_i &= m_{(2)} a_1 + \sum_{(2)} \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p), \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{(p)} x_i &= m_{(p)} a_1 + \sum_{(p)} \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$m_{(1)}, m_{(2)}, \dots, m_{(p)}$ désignant les nombres de mesures contenues dans le premier, le second, $\dots$ le r -ième groupe, de sorte que

$$m_{(1)} + m_{(2)} + \dots + m_{(p)} = m. \quad (7)$$

Si l'on porte les valeurs t_i, x_i dans l'équation hypothétique (5), on arrive aux équations

$$x_i = a_1 + \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p), \quad i = 1, \dots, m \quad (5')$$

auxquelles elles ne satisfont qu'approximativement. Cependant

nous exigeons que les relations (6) qui en résultent par addition et qui définissent, conformément à notre méthode, les valeurs des paramètres inconnus, soient rigoureusement valables. En faisant la somme de toutes les équations (6) et en divisant par m , on obtient l'équation équivalente à (3):

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = a_1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p). \quad (8)$$

Pour simplifier l'écriture, je me servirai des notations suivantes:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p), \quad (9)$$

$$\bar{x}_{(r)} = \frac{1}{m_{(r)}} \sum_{i \in (r)} x_i, \quad \bar{\varphi}_{(r)} = \frac{1}{m_{(r)}} \sum_{i \in (r)} \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p). \quad (9')$$

Or, les paramètres $a_2, \dots, a_p$ supposés connus, le paramètre restant a_1 est donné, en vertu de (8), par la relation

$$a_1 = \bar{x} - \bar{\varphi} \quad (10)$$

qui montre que a_1 ne dépend du choix des groupes de mesures que par l'intermédiaire des autres paramètres. Donc, pour obtenir les groupes les plus avantageux, il suffit de considérer les relations concernant les paramètres $a_2, \dots, a_p$ seuls que l'on obtient en formant les différences, au nombre de $p - 1$, des équations (6) divisées une à une par $m_{(1)}, m_{(2)}, \dots, m_{(p)}$. Alors, les équations (6) deviennent, en raison de (9'),

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{(1)} &= a_1 + \bar{\varphi}_{(1)}, \\ \bar{x}_{(2)} &= a_1 + \bar{\varphi}_{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{x}_{(p)} &= a_1 + \bar{\varphi}_{(p)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ce qui donne $p - 1$ équations indépendantes du type

$$\bar{\varphi}_{(r)} - \bar{\varphi}_{(s)} = \bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)} \quad (12)$$

qui découlent de la relation (12), en y posant par exemple: $s = 1$; $r = 2, 3, \dots, p$.

La précision des valeurs des paramètres $a_2, \dots, a_p$, obtenues par la résolution des équations (12), dépend évidemment de celle des constantes intervenant dans (12). Le rôle essentiel est joué, à cet égard, par les seconds membres de ces équations lesquels ne contiennent pas de paramètres inconnus. A savoir, les constantes intervenant dans les premiers membres des équations (12) sont formées exclusivement des valeurs mesurées t_i de la variable indépendante d'une précision supérieure, en général, à celle des va-

leurs x_i . Par suite, il y a intérêt à avoir les seconds membres possible-ment précis sans s'inquiéter des erreurs de détermination de pre-miers membres des relations (12). Je me propose donc de chercher un tel choix de groupes de mesures qui donne la plus grande préci-sion relative des seconds membres des équations (12) au moyen desquelles nous calculons les paramètres inconnus $a_2, \dots, a_p$. Autrement dit, *je vais considérer comme le plus avantageux le choix des groupes de mesures pour lequel les erreurs relatives des seconds membres des équations (12) sont minima.*

Désignons par $\delta_{(r)}$ l'erreur quadratique moyenne des mesures du r -ième groupe. Alors l'erreur quadratique moyenne $\bar{\delta}_{(r)}$ de la moyenne arithmétique $\bar{x}_{(r)}$ est donnée, comme nous le savons, par l'expression

$$\bar{\delta}_{(r)} = \frac{\delta_{(r)}}{\sqrt{m_{(r)}}}$$

et celle de la différence $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ a pour valeur

$$\sqrt{\bar{\delta}_{(r)}^2 + \bar{\delta}_{(s)}^2} = \sqrt{\frac{\delta_{(r)}^2}{m_{(r)}} + \frac{\delta_{(s)}^2}{m_{(s)}}}. \quad (13)$$

En divisant par la différence elle-même, on obtient l'erreur relative.

On a donc la relation à satisfaire

$$\frac{1}{\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}} \sqrt{\frac{\delta_{(r)}^2}{m_{(r)}} + \frac{\delta_{(s)}^2}{m_{(s)}}} = \text{minimum} \quad (14)$$

remplaçable par les deux conditions simultanées:

$$\frac{\delta_{(r)}^2}{m_{(r)}} + \frac{\delta_{(s)}^2}{m_{(s)}} = \text{minimum}, \quad (14a)$$

$$\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)} = \text{maximum}, \quad (14b)$$

pouvant être regardées comme indépendantes. En effet, on peut évidemment supposer que toutes les mesures sont à peu près de la même précision et les erreurs $\delta_{(r)}$ ont donc — en première appro-ximation — la même valeur pour tous les groupes. Donc l'erreur $\bar{\delta}_{(r)}$ de la moyenne arithmétique $\bar{x}_{(r)}$ dépend très peu du choix des mesures contenues dans le r -ième groupe, mais elle est une fonction du nombre $m_{(r)}$ de ces mesures. Alors, l'expression (14a), qui dépend explicitement des nombres $m_{(r)}, m_{(s)}$, est presque indépendante de la répartition qualitative des mesures dans les deux groupes corres-pondants. D'autre part, la valeur de la moyenne arithmétique $\bar{x}_{(r)}$ dépend essentiellement de cette répartition, c'est-à-dire du choix des mesures individuelles contenues dans le r -ième groupe, tandis que le nombre $m_{(r)}$ peut varier dans une large mesure sans avoir

grande influence sur la valeur de $\bar{x}_{(r)}$. Cela permet de considérer l'expression (14b) comme pratiquement indépendante des nombres $m_{(r)}$, $m_{(s)}$. Il en résulte en somme que les deux conditions (14a) et (14b) sont équivalentes à la condition fondamentale (14) et peuvent être satisfaites, indépendamment l'une de l'autre de la manière suivante: On détermine les nombres $m_{(r)}$, $m_{(s)}$ de sorte que la condition (14a) soit remplie sans tenir compte de la condition (14b) et réciproquement on détermine la répartition qualitative des mesures dans les deux groupes qui satisfasse à la condition (14b), les nombres $m_{(r)}$, $m_{(s)}$, supposés constants.

3. Répartition quantitative des mesures. Nous commençons par la condition (14a), exprimant que l'erreur quadratique moyenne, donnée par (13), de la différence $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ doit être minima. Cette condition conduit à $p - 1$ équations indépendantes qui s'obtiennent pour les différentes valeurs des indices r , s entre 1 et p . Par raison de symétrie et d'indépendance de ces équations, il suffit évidemment d'en résoudre une seule en supposant que les nombres de mesures obtenues dans les autres groupes, qui n'interviennent pas dans l'équation en question, restent invariables. Si nous choisissons l'équation (14a) elle-même, les nombres $m_{(k)}$ peuvent être regardés comme constants pour toutes les valeurs de k sauf r et s . Donc, en vertu de (7),

$$m_{(r)} + m_{(s)} = C^{te}. \quad (15)$$

En annulant la différentielle du premier membre de (14a), on aura

$$\frac{\delta_{(r)}^2}{m_{(r)}^2} dm_{(r)} + \frac{\delta_{(s)}^2}{m_{(s)}^2} dm_{(s)} = 0$$

et d'après (15)

$$dm_{(r)} + dm_{(s)} = 0$$

ce qui donne

$$\frac{\delta_{(r)}^2}{m_{(r)}^2} - \frac{\delta_{(s)}^2}{m_{(s)}^2} = 0.$$

Comme les $m_{(r)}$ et $m_{(s)}$ sont essentiellement positifs, on trouve enfin

$$m_{(r)} : m_{(s)} = \delta_{(r)} : \delta_{(s)}. \quad (16)$$

Dans cette relation, les indices r , s peuvent être choisis arbitrairement, ce qui entraîne

$$m_{(1)} : m_{(2)} : \dots : m_{(p)} = \delta_{(1)} : \delta_{(2)} : \dots : \delta_{(p)}. \quad (16')$$

Cette dernière relation et l'équation (7) déterminent complètement les nombres $m_{(1)}$, $\dots$, $m_{(p)}$, si l'on connaît les rapports des erreurs quadratiques moyennes $\delta_{(k)}$. Or, j'ai déjà signalé que les erreurs $\delta_{(k)}$ sont à peu près égales et c'est en le supposant que j'ai déduit la relation (16'). Donc, les erreurs quadratiques moyennes des seconds

membres des équations (12), définissant les paramètres $a_2, \dots, a_p$, sont minima, lorsqu'on choisit tous les nombres $m_{(k)}$ approximativement égaux:

$$m_{(1)} \doteq m_{(2)} \doteq \dots m_{(p)} \doteq \frac{m}{p}. \quad (17)$$

Le nombre m des mesures n'est pas divisible, en général, par le nombre p des paramètres, donc les nombres $m_{(k)}$ ne peuvent être rigoureusement égaux si nous exigeons qu'ils soient entiers. Dans le cas où le nombre des mesures est assez grand par rapport au nombre des paramètres, on peut satisfaire aux équations (17) avec une approximation suffisante. Autrement il faut distinguer deux cas particuliers:

1° *Les mesures sont d'égale précision.* Alors, on choisit tous les nombres $m_{(k)}$ égaux au rapport m/p , somme d'un nombre entier e et d'une fraction u/v , c'est-à-dire qu'on forme les p équations (6), en faisant p sommes à e équations (5'), en ajoutant à chaque somme une des équations (5') superflues multipliée par u/v ou plusieurs d'entre elles multipliées par des coefficients dont la somme est égale à la fraction u/v .

Si par exemple $m = 20$ et $p = 3$, on a $m/p = 6\frac{2}{3}$ et l'on peut choisir les sommes suivantes:

$$1^{\text{er}} \text{ groupe: } E_1 + E_2 + \dots + E_6 + \frac{2}{3}E_7,$$

$$2^{\text{e}} \text{ groupe: } \frac{1}{3}E_7 + E_8 + \dots + E_{13} + \frac{1}{3}E_{14},$$

$$3^{\text{e}} \text{ groupe: } \frac{2}{3}E_{14} + E_{15} + \dots + E_{19} + E_{20},$$

où le symbole E_l signifie la l -ième équation du système (5').

2° *Les mesures sont d'inégale précision.* Dans ce cas-là, il est inutile d'introduire des nombres fractionnaires, car il est plus avantageux, comme d'ailleurs l'exige la proportion (16'), de choisir les nombres $m_{(k)}$ plus grands pour les groupes contenant des mesures moins précises. Supposons, pour fixer les idées, que la précision s'abaisse avec l'indice croissant de la mesure. Soit, par exemple, $m = 40$, $p = 3$. Alors, on peut prendre: $m_{(1)} = 12$, $m_{(2)} = 13$, $m_{(3)} = 15$ et former les équations (6) d'après le schéma suivant:

$$1^{\text{er}} \text{ groupe: } E_1 + E_2 + \dots + E_{12},$$

$$2^{\text{e}} \text{ groupe: } E_{13} + E_{14} + \dots + E_{25},$$

$$3^{\text{e}} \text{ groupe: } E_{26} + E_{27} + \dots + E_{40}.$$

Les erreurs des mesures ne peuvent être déterminées exactement que la compensation une fois faite. Il faut donc juger de la précision des mesures d'après les conditions de mesure ou d'après les positions relatives des points représentant graphiquement la fonction cherchée. Si l'on connaît les poids des mesures x_i , on peut en tenir compte, lorsqu'on forme les équations (6) en formant les

sommes des équations (5') multipliées par les poids des mesures correspondantes. En même temps, il faut, bien entendu, modifier les nombres m et $m_{(k)}$ conformément aux poids adoptés.

4. Répartition qualitative des mesures. Il nous reste encore à satisfaire à la seconde condition (14b). Comme nous l'avons déjà vu, les valeurs $\bar{x}_{(r)}$ sont pratiquement indépendantes des nombres $m_{(r)}$. Ceci est vrai a fortiori pour leurs différences et il y a même des cas où l'on constate qu'elles sont rigoureusement indépendantes des changements des nombres $m_{(k)}$.

Considérons, par exemple, le cas où les valeurs des x_i contenus dans les deux premiers groupes, forment une progression arithmétique:

$$x_i = x_1 + (i - 1) d.$$

Pour la répartition

1^{er} groupe: $x_1, x_2, \dots, x_{m_{(1)}}$,

2^e groupe: $x_{m_{(1)}+1}, \dots, x_{m_{(1)}+m_{(2)}}$,

on déduit aisément

$$\bar{x}_{(1)} = x_1 + (m_{(1)} - 1) \frac{d}{2},$$

$$\bar{x}_{(2)} = x_1 + m_{(1)} d + (m_{(2)} - 1) \frac{d}{2}.$$

Donc la différence

$$\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)} = (m_{(1)} + m_{(2)}) \frac{d}{2}$$

ne dépend que de la somme des nombres de mesures. Pour la répartition choisie, le changement des nombres $m_{(1)}, m_{(2)}$, leur somme supposée constante, laisse la différence $\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)}$ invariable.

Pour remplir la condition (14b), il suffit donc de chercher, pour les nombres $m_{(k)}$ donnés, une répartition qualitative des mesures dans les groupes qui rende maxima les différences $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$. Il est difficile de donner une méthode détaillée et tout-à-fait générale, pour ranger les mesures par groupes, qui nous garantisse automatiquement — pour toutes les fonctions imaginables — que chacune des différences $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ a vraiment la plus grande valeur possible et qu'il n'existe pas, dans certains cas particuliers, d'autres répartitions également ou peut-être même plus avantageuses. Je vais déduire cependant une règle très générale, définissant une répartition des mesures qui peut être regardée comme la plus avantageuse et cela pour un vaste champ d'applications.

Considérons la différence $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ dépendant uniquement de la répartition des mesures dans les deux groupes correspondants

(r -ième et s -ième) et supposons que la disposition des autres mesures par groupes restants soit fixée. Si l'on admet de plus que les nombres $m_{(r)}$, $m_{(s)}$ restent invariables, on s'assure aisément que la valeur absolue de la différence $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ est maxima, lorsqu'on répartit les mesures de manière que tous les x_i du r -ième groupe soient supérieurs à ceux du s -ième groupe (ou réciproquement). En effet, si l'on substitue l'une à l'autre deux mesures, n'appartenant pas au même groupe, la moyenne $\bar{x}_{(r)}$ ($> \bar{x}_{(s)}$) diminue, tandis que l'autre $\bar{x}_{(s)}$ augmente et donc leur différence subit une diminution. Le même raisonnement peut être fait pour les autres différences et donc, pour un numérotage convenable des groupes, la répartition, satisfaisant le mieux possible à la condition (14b), est caractérisée par le fait que chaque valeur x_i appartenant au k -ième groupe est plus grande que les valeurs de toutes les mesures appartenant au $(k - 1)$ -ième groupe et ainsi de suite.

On peut d'ailleurs remarquer que dans les cas concrets, il n'est pas difficile (en se servant de la représentation graphique) de modifier éventuellement la répartition indiquée pour augmenter, si c'est possible, les différences $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$.

5. Résultat général et application pratique. On voit, en somme, que la répartition qualitative des mesures est déterminée par la condition (14b), tandis que la répartition quantitative est donnée par la relation (17), découlant de la condition (14a). Par suite, la condition fondamentale (14), réunissant les deux conditions précédentes et exprimant que la précision relative des seconds membres des équations (12) doit être maxima, détermine quantitativement et qualitativement la répartition des mesures par groupes. Tenant compte des résultats obtenus, on peut énoncer la règle générale suivante:

On range toutes les m mesures selon la grandeur croissante des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_m$ (correspondant aux valeurs $t_1, t_2, \dots, t_m$ de t) et on en forme p groupes également nombreux de manière que chacun d'eux contienne m/p mesures consécutives. Lorsqu'on suppose l'équation, exprimant la quantité x en fonction de la variable indépendante t sous la forme

$$x = a_1 + \varphi(t, a_2, \dots, a_p), \quad (5)$$

les valeurs les plus avantageuses des paramètres $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont déterminées par les p relations

$$\bar{x}_{(k)} = a_1 + \bar{\varphi}_{(k)}(t, a_2, \dots, a_p), \quad k = 1, \dots, p, \quad (11)$$

où les $\bar{x}_{(k)}$, $\bar{\varphi}_{(k)}$ désignent les moyennes arithmétiques formées pour le k -ième groupe.

Pour se rendre compte de la précision des résultats obtenus, on procède comme suit: On porte les valeurs des paramètres

$a_1, \dots, a_p$, tirées de (11) et les valeurs $t_1, \dots, t_m$ dans l'équation (5) ce qui donne les valeurs compensées $x'_1, \dots, x'_m$ de x :

$$x'_i = a_1 + \varphi(t, a_2, \dots, a_p). \quad (17)$$

On calcule alors les résidus

$$\varepsilon_i = x'_i - x_i$$

qui satisfont aux relations

$$\sum_{(1)} \varepsilon_i = 0, \sum_{(2)} \varepsilon_i = 0, \dots, \sum_{(p)} \varepsilon_i = 0, \sum_{i=1}^m \varepsilon_i = 0, \quad (18)$$

car, en vertu de (17), (6), (8)

$$\begin{aligned} \sum_{(r)} x'_i &= m_{(r)} a_1 + \sum_{(r)} \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p) = \sum_{(r)} x_i, \quad r = 1, \dots, p, \\ \sum_{i=1}^m x'_i &= m a_1 + \sum_{i=1}^m \varphi(t_i, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^m x_i. \end{aligned}$$

D'après les définitions connues, on obtient donc l'erreur quadratique moyenne des mesures du r -ième groupe

$$\delta_{(r)} = \sqrt{\frac{\sum_{(r)} \varepsilon_i^2}{m_{(r)} - 1}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_{(r)}}{m_{(r)} - 1}} \quad (19)$$

et celle commune à toutes les mesures

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}{m - p}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m - p}}. \quad (20)$$

Connaissant les erreurs $\delta_{(r)}$ nous pouvons vérifier la supposition $\delta_{(r)} \doteq \delta_{(s)}$ et modifier, en cas de besoin, la répartition des mesures par groupes. L'erreur commune δ sert à déterminer les erreurs quadratiques moyennes relatives aux paramètres a_k qu'on obtiendra par les méthodes connues du calcul des compensations.

Quant à l'application de notre méthode, il faut avouer que nous l'avons établie en supposant au no 1, que la fonction f , exprimant la dépendance de x de la variable indépendante t , est de la forme (5), c'est-à-dire qu'un des paramètres inconnus intervient dans f comme constante additive. Cela ne signifie pas nécessairement que le domaine d'application de notre méthode soit en réalité restreint à des fonctions du type (5), il est plutôt plausible d'admettre que la dite supposition n'est pas essentielle pour notre méthode et que les résultats obtenus demeurent valables encore pour n'importe quelles fonctions. Or, cette question n'a guère d'importance pratique, car la supposition adoptée admet l'appli-

cation de la méthode aux fonctions algébriques entières. *Notre méthode est donc directement applicable à toutes les fonctions que l'on peut développer en série des puissances de la variable indépendante.* C'est le cas de l'interpolation parabolique, habituel dans la pratique; en remplaçant la fonction par un polynome entier, on facilite le calcul des paramètres inconnus. C'est pourquoi on préfère, dans le calcul des compensations, les fonctions qui sont linéaires par rapport aux paramètres à déterminer et on se sert souvent du développement en série.

Dans certains cas, on peut donner à la fonction f la forme (5) au moyen d'une transformation convenable. Par exemple, si l'on prend le logarithme d'une fonction exponentielle générale

$$f = ab^{u(t)},$$

on obtient une fonction du type (5), linéaire par rapport aux paramètres $\log a$, $\log b$.

6. Cas des fonctions algébriques entières. — Fonction linéaire.

Au numéro précédent, nous avons constaté que le cas le plus général est pratiquement celui des fonctions algébriques entières. En appliquant la règle générale que j'y ai établie on procèdera donc comme suit:

Dans le cas d'une fonction algébrique entière du degré n -ième

$$x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n, \quad (21)$$

on range les mesures d'après la grandeur croissante des valeurs x_i et on en forme $n + 1$ groupes dont le premier contient les premières $\frac{m}{n+1}$ mesures, le deuxième les $\frac{m}{n+1}$ mesures suivantes et ainsi de suite. Alors les valeurs les plus avantageuses des paramètres découlent des $n + 1$ équations

$$\bar{x}_{(r)} = A_0 + A_1 \bar{t}_{(r)} + A_2 \bar{t}_{(r)}^2 + \dots + A_n \bar{t}_{(r)}^n, \quad r = 1, \dots, n + 1 \quad (22)$$

où l'on a posé

$$\bar{t}_{(r)}^q = \frac{1}{m_{(r)}} \sum_{(r)} t_i^q = \frac{1}{m_{(r)}} [t^q]_{(r)}.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux inconnus et leur solution ne présente donc pas de difficultés. Il est recommandé d'éliminer A_0 en formant n différences du type

$$(\bar{t}_{(r)} - \bar{t}_{(s)}) A_1 + \dots + (\bar{t}_{(r)}^n - \bar{t}_{(s)}^n) A_n = \bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}. \quad (23)$$

Après en avoir tiré les n paramètres $A_1, \dots, A_n$, on peut calculer A_0 de l'une quelconque des équations (22) ou bien de l'équation

$$(n + 1) A_0 = \sum_{r=1}^{n+1} \bar{x}_{(r)} - A_1 \sum_{r=1}^{n+1} \bar{t}_{(r)} - \dots - A_n \sum_{r=1}^{n+1} \bar{t}_{(r)}^n \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} x_I &= A + Bt_I, \\ x_{II} &= A + Bt_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Conformément à la règle générale, donnée au no 5, on effectue l'interpolation linéaire de la manière suivante:

On range toutes les mesures par ordre de grandeurs croissantes et l'on calcule les moyennes arithmétiques t_I et x_I des t_i et des x_i correspondant à la première moitié des mesures. Après avoir fait de même pour la seconde moitié, on obtient les moyennes t_{II} , x_{II} . Alors on a deux couples de valeurs de t et de x qui déterminent les deux paramètres de la fonction linéaire cherchée au moyen des équations (27).

En résolvant ces équations, on a

$$B = \frac{x_{II} - x_I}{t_{II} - t_I}, \quad A = \frac{x_I + x_{II}}{2} - B \frac{t_I + t_{II}}{2}, \quad (28)$$

ou aussi

$$A = \bar{x} - B\bar{t}, \quad (29)$$

et par suite les erreurs quadratiques moyennes des paramètres s'écrivent:

$$\delta_B = \frac{1}{t_{II} - t_I} \sqrt{\frac{\delta_I^2}{m_I} + \frac{\delta_{II}^2}{m_{II}}}, \quad \delta_A = \sqrt{(\delta_{\bar{x}})^2 + (\bar{t} \delta_B)^2}, \quad (30)$$

si l'on suppose, bien entendu, que les erreurs des valeurs t_i de la variable indépendante sont négligeables devant celles des valeurs x_i . Les erreurs δ_I , δ_{II} sont données par l'expression (19)

$$\delta_I = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_I}{m_I - 1}}, \quad \delta_{II} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_{II}}{m_{II} - 1}} \quad (31)$$

et

$$\delta_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m(m-2)}}. \quad (32)$$

Dans le cas, d'ailleurs très fréquent, où $m_I = m_{II} = \frac{m}{2}$, on trouve

$$\frac{\delta_I^2}{m_I} + \frac{\delta_{II}^2}{m_{II}} = \frac{4[\varepsilon\varepsilon]}{m(m-2)}$$

ce qui entraîne en vertu de (30)

$$\delta_B = \frac{2}{t_{II} - t_I} \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m(m-2)}} = \frac{2\delta_{\bar{x}}}{t_{II} - t_I}, \quad (33)$$

$$\delta_A = \delta_B \sqrt{\frac{(t_{II} - t_I)^2}{4} + \bar{t}^2} = \delta_B \sqrt{\frac{1}{2}(t_I^2 + t_{II}^2)}. \quad (34)$$

La méthode que je viens d'exposer peut être facilement transformée en une méthode purement graphique, si l'on repré-

sente les mesures dans un système de coordonnées rectangulaires. Cela fait, les points de coordonnées

$$I(t_I, x_I), II(t_{II}, x_{II})$$

sont les centres de gravité respectivement de la première et de la seconde moitié des points représentant les mesures effectuées. Or, le centre de gravité d'un groupe des points est facile à construire, ce qui conduit à la méthode graphique suivante:

Représentons chaque mesure par un point de coordonnées rectangulaires (t_i, x_i) , divisons tous ces points en deux moitiés par une droite orthogonale à l'axe des x et construisons les centres de gravité des points de chaque moitié. Alors, la droite joignant les centres de gravité représente la relation compensée entre x et t .

La droite en question passe évidemment aussi par le centre de gravité des deux moitiés, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les points, comme l'exige la méthode des moments (voir les équations (29) et (25)).

Il serait inutile d'insister sur la généralisation détaillée de la construction au cas de mesures d'inégale précision, car cette généralisation est très claire. On pourrait peut-être seulement rappeler qu'il faut modifier aussi les nombres m_I, m_{II} conformément aux poids adoptés pour les points.

7. Exemples numériques. Par la suite, je vais traiter en détail deux exemples d'application effective de notre méthode qui nous permettront de justifier les résultats théoriques, trouvés aux nos 3 et 4.

Interpolation linéaire.

Je commence par l'application de la méthode, exposée au no 6, aux mesures que j'ai faites pour déterminer la dépendance de la conductibilité thermique du ciment pulvérulent de la température.²⁾ J'ai choisi ces mesures avec l'intention de donner un exemple où l'erreur quadratique moyenne change avec la valeur de la variable indépendante: La précision de mes mesures diminue un peu avec la température croissante, comme on peut le constater simplement à la figure 1. J'y ai représenté les mesures effectuées par 12 points: 1, 2, ..., 12, en portant sur un graphique les x_i (conductibilité thermique en unités techniques) en ordonnées et les températures (en 0°C) t_i en abscisses. Les valeurs correspondantes sont réunies dans la deuxième et la troisième colonnes du tableau 1.

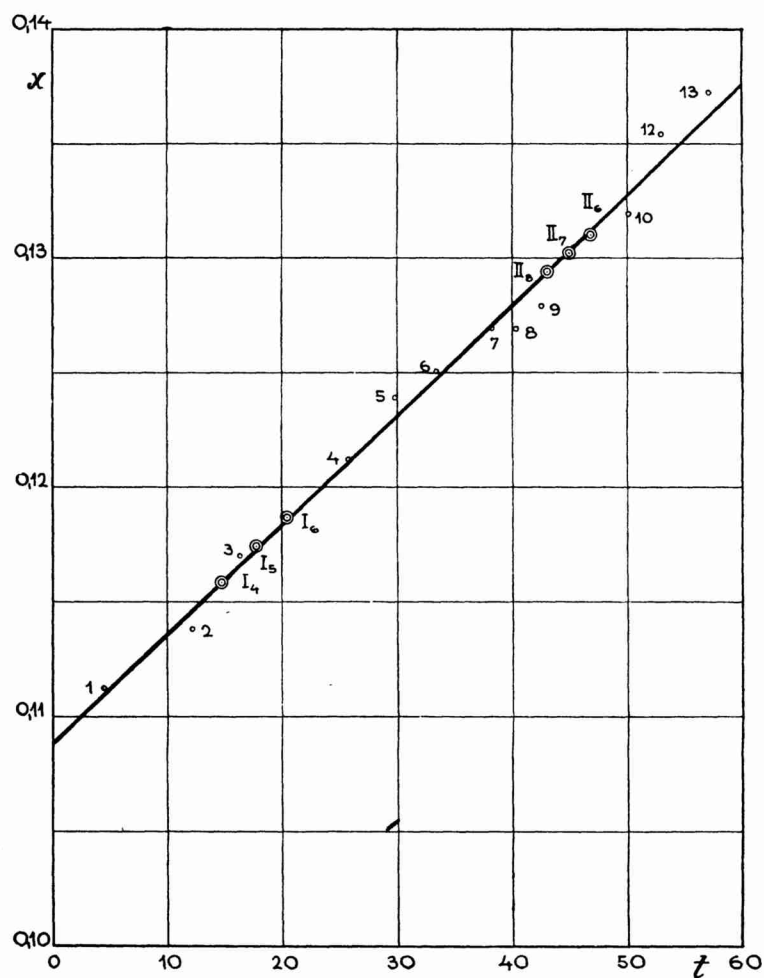
Je suppose que le phénomène étudié peut se représenter avec assez de précision par une fonction linéaire

$$x = A + Bt$$

²⁾ Technický Obzor, XLIV, p. 200—204, Praha 1936.

et je vais d'abord donner les résultats obtenus par la méthode des moments. Les valeurs les plus probables A_0, B_0 des paramètres A, B avec les erreurs quadratiques moyennes, résultant des calculs connus sur lesquels je n'insiste pas ici, sont les suivantes

$$A_0 = 0,1087 \pm 0,0006, B_0 = 0,000482 \pm 0,000017. \quad (35)$$



Appliquons d'abord rigoureusement notre méthode d'après la règle énoncée à la fin du numéro précédent, en choisissant les deux groupes comme suit:

1^{er} groupe: mesures: 1, 2, . . . , 6,
2^e groupe: mesures: 7, 8, . . . , 12.

Alors les moyennes

$$\begin{aligned} t_I &= 20,35, \quad x_I = 0,11866, \\ t_{II} &= 46,83, \quad x_{II} = 0,13103 \end{aligned}$$

Tableau 1.

i	t_i	x_i	$m_I = m_{II} = 6$		$m_I = 5, m_{II} = 7$		$m_I = 4, m_{II} = 8$	
			x'_i	ε_i	x'_i	ε_i	x'_i	ε_i
1	4,5°	0,1112	0,1113	+0,0001	0,1112	0,0000	0,1109	-0,0003
2	12,1	0,1138	0,1148	+0,0010	0,1149	+0,0011	0,1145	+0,0007
3	16,4	0,1170	0,1168	-0,0002	0,1168	-0,0002	0,1166	-0,0004
4	25,8	0,1212	0,1212	0,0000	0,1212	0,0000	0,1211	-0,0001
5	29,9	0,1239	0,1231	-0,0008	0,1232	-0,0007	0,1231	-0,0008
6	33,4	0,1250	0,1248	-0,0002	0,1248	-0,0002	0,1248	-0,0002
7	38,3	0,1269	0,1270	+0,0001	0,1271	+0,0002	0,1271	+0,0002
8	40,4	0,1269	0,1279	+0,0010	0,1280	+0,0011	0,1281	+0,0012
9	42,6	0,1279	0,1290	+0,0011	0,1291	+0,0012	0,1292	+0,0013
10	50,1	0,1319	0,1325	+0,0006	0,1326	+0,0007	0,1328	+0,0009
11	52,9	0,1354	0,1339	-0,0015	0,1340	-0,0014	0,1342	-0,0012
12	56,7	0,1372	0,1354	-0,0016	0,1358	-0,0014	0,1360	-0,0012

et les équations (27) donnent les valeurs approchées des paramètres:

$$A_1 = 0,1092, \quad B_1 = 0,000466. \quad (36)$$

En les portant dans les équations

$$x'_i = A_1 + B_1 t_i$$

on arrive aux valeurs résumées dans le tableau 1 où l'on trouve aussi les résidus correspondants ε_i . En tenant compte de (31) et (32), on obtient

$$\delta_I = 4,47 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{II} = 12,2 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{\bar{x}} = 7,6 \cdot 10^{-4}$$

et en vertu de (33), (34)

$$\delta_{A_1} = 7,5 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{B_1} = 2,1 \cdot 10^{-5}. \quad (37)$$

On voit que les différences

$$A_0 - A_1 = -0,0005, \quad B_0 - B_1 = +0,000016 \quad (38)$$

sont plus petites que les erreurs quadratiques moyennes, indiquées dans (35), et donc les valeurs (36) sont suffisamment précises.

Cependant, les nombres m_I, m_{II} ne satisfont pas à la relation théorique (16'), car le rapport

$$\frac{m_I}{m_{II}} : \frac{\delta_I}{\delta_{II}} = \frac{6}{6} : \frac{4,47}{12,2} = 2,73 \quad (39)$$

n'est pas égal à l'unité. On peut en conclure que la répartition choisie n'est pas la plus avantageuse. C'était évident a priori, puis que nous avons déjà constaté, sur la figure 1, la diminution de la précision des mesures avec la température croissante. Donc, en conséquence de cette constatation, on a du choisir, dès le début, m_I inférieur à m_{II} ce qui imposerait à prendre par exemple

$$m_I = 5, m_{II} = 7. \quad (40)$$

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} t_I &= 17,74, x_I = 0,11742, \\ t_{II} &= 44,91, x_{II} = 0,13017 \end{aligned}$$

et des équations (27) découlent les valeurs

$$A_2 = 0,1091, B_2 = 0,000471 \quad (41)$$

plus voisines de A_0, B_0 que A_1, B_1 de sorte que les écarts

$$A_0 - A_2 = -0,0004, B_0 - B_2 = +0,000011$$

sont plus faibles que les écarts antérieurs (38). Les valeurs x'_i et les résidus ε_i , correspondant à (40), se trouvent dans le tableau 1. On en déduit

$$\delta_I = 6,60 \cdot 10^{-4}, \delta_{II} = 10,9 \cdot 10^{-4}$$

et en raison des relations (32) et (30)

$$\delta_{A_2} = 6,8 \cdot 10^{-4}, \delta_{B_2} = 1,9 \cdot 10^{-5}. \quad (42)$$

Il s'en suit

$$\frac{m_I}{m_{II}} : \frac{\delta_I}{\delta_{II}} = \frac{5}{7} : \frac{6,60}{10,9} = 1,18 \quad (43)$$

et l'on voit que ce rapport est plus voisin de 1 que la valeur (39) et que simultanément les erreurs des paramètres sont plus petites, ce à quoi il fallait s'attendre.

Cependant, même pour le deuxième choix des nombres m_I, m_{II} , le rapport $m_I : m_{II}$ est un peu trop fort. Il est donc plausible d'essayer d'obtenir, en le diminuant, un résultat encore plus précis. Nous poserons donc

$$m_I = 4, m_{II} = 8 \quad (44)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} t_I &= 14,70, x_I = 0,11578, \\ t_{II} &= 43,04, x_{II} = 0,12944, \end{aligned}$$

et donne les valeurs

$$A_3 = 0,1087, B_3 = 0,000482$$

qui coïncident, par hasard, avec les valeurs les plus probables données par la méthode des moments. En portant les valeurs x'_i et ε_i , empruntées au tableau 1, dans les expressions (30) à (32), nous aurons

$$\begin{aligned} \delta_I &= 5,0 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{II} = 10,4 \cdot 10^{-4}, \\ \delta_{A_3} &= 5,9 \cdot 10^{-4}, \quad \delta_{B_3} = 1,6 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{m_I}{m_{II}} : \frac{\delta_I}{\delta_{II}} = \frac{4}{8} : \frac{5,0}{10,4} = 1,04. \quad (46)$$

En effet, le choix (44) est le plus avantageux, parce qu'il conduit aux valeurs identiques à A_0, B_0 . En même temps, les erreurs (45) sont plus petites que les erreurs (37) et (42) et le rapport (46) est, au surplus, pratiquement égal à l'unité.

En somme, on peut dire que l'exemple, que je viens de traiter, correspond bien aux résultats théoriques déduits au no 3. Surtout il vérifie, dans le cas considéré, la condition générale (16) et montre que la méthode donne des résultats d'autant plus précis qu'on satisfait plus rigoureusement à cette condition. Il faut cependant souligner que toutes les répartitions adoptées offrent des résultats tout-à-fait satisfaisants puis que leurs écarts à partir des valeurs les plus probables sont inférieurs aux erreurs quadratiques moyennes.

Interpolation quadratique.

Comme deuxième exemple, je choisis le problème consistant à compenser les mesures des vitesses x_i de l'eau à diverses profondeurs t_i , traité par la méthode des moments par M. Čurík.³⁾ Comme nous le verrons, les mesures sont, dans ce cas-là, d'égale précision et je vais profiter de la simplicité du problème pour mettre en évidence, la manière dont la répartition qualitative des mesures par groupes influence l'exactitude des résultats obtenus par notre méthode.

Les valeurs données par les mesures sont réunies dans le tableau 2 où j'ai déjà rangé ces mesures selon la grandeur croissante des valeurs x_i . Si l'on suppose que la dépendance de la vitesse x de la profondeur t est de la forme

$$x = A + Bt + Ct^2,$$

l'application de la méthode des moments donne les valeurs des paramètres A, B, C les plus probables A_0, B_0, C_0 :

³⁾ Počet vyrovnávací, Praha 1936, p. 234—236.

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,2807 \pm 0,0023, \\ B_0 &= 0,1511 \pm 0,0064, \\ C_0 &= -0,3125 \pm 0,0069 \end{aligned} \quad (47)$$

où l'on a ajouté les erreurs quadratiques moyennes, calculées d'après les formules connues en partant de l'erreur commune aux observations directes

$$\delta = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-p}} = 0,00170. \quad (48)$$

Nous appliquons notre méthode approximative, conformément à la règle énoncée au n° 6, en choisissant les groupes suivants:

$$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{er}} \text{ groupe: mesures } 1, 2, \\ 2^{\text{e}} \text{ groupe: mesures } 3, 4, \\ 3^{\text{e}} \text{ groupe: mesures } 5, 6 \end{array} \right\} \quad (49)$$

Tableau 2.

i	t_i	x_i	t_i^2	$\bar{t}_{(r)}$	$\bar{t}_{(r)}^2$	$\bar{x}_{(r)}$	x'_i	ε_i
1	1,0	0,12	1,00	0,9	0,82	0,16	0,11875	-0,00125
2	0,8	0,20	0,64				0,20125	+0,00125
3	0,6	0,26	0,36				0,25875	-0,00125
4	0,0	0,28	0,00	0,3	0,18	0,27	0,28125	+0,00125
5	0,4	0,29	0,16				0,29125	+0,00125
6	0,2	0,30	0,04	0,3	0,10	0,295	0,29875	-0,00125

selon le numérotage indiqué dans le tableau 2. D'après le même tableau, les équations (22) pour les paramètres inconnus deviennent

$$\left. \begin{aligned} 0,160 &= A + 0,9B + 0,82C, \\ 0,270 &= A + 0,3B + 0,18C, \\ 0,295 &= A + 0,3B + 0,10C \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

d'où l'on tire

$$A = 0,28125, B = 0,1500, C = -0,3125. \quad (51)$$

On voit que tous les résidus ε_i , indiqués au tableau 2, sont — en valeur absolue — exactement égaux. Il en est de même des erreurs $\delta_{(r)}$ et toutes les mesures sont donc d'égale précision. Il vient

$$\delta_{(1)} = \delta_{(2)} = \delta_{(3)} = \delta = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-p}} = 0,00176$$

ce qui montre, par rapport à (48), que les résultats obtenus par notre méthode sont à peu près aussi précis que ceux qu'on obtient par la méthode des moments. Les écarts

$$A_0 - A = -0,0005, B_0 - B = +0,0011, C_0 - C = 0,0000$$

sont, en effet, environ cinq fois plus petits que les erreurs à craindre, indiquées dans les équations (47). Le problème se trouve ainsi complètement résolu; je le reprendrai néanmoins pour étudier la dépendance de la précision des résultats obtenus du choix des groupes, sans changer les nombres $m_{(1)} = m_{(2)} = m_{(3)} = 2$. Outre le choix (49), fait en accord avec la règle générale, je vais considérer, dans ce but, encore cinq répartitions qualitativement différentes,

Tableau 3.

	Groupes			A	B	C
	1 ^{er}	2 ^e	3 ^e			
I	1 2	3 4	5 6	0,2807	0,1500	-0,3125
II	4 6	3 5	1 2	0,2807	0,1500	-0,3125
III	4 5	2 6	1 3	0,2791	0,1543	-0,3125
IV	1 4	3 6	2 5	0,2875	0,1375	-0,3125
V	1 6	2 5	3 4	0,2833	0,1310	-0,2924
VI	2 4	3 6	1 5	0,2777	0,1723	-0,3333
Méthode des moments				A_0 0,2807	B_0 0,1511	C_0 -0,3125

Tableau 3.

$A_0 - A$	$B_0 - B$	$C_0 - C$	$\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)}$	$\bar{x}_{(3)} - \bar{x}_{(1)}$
-0,0005 ₅	+0,0011	0,0000	0,110	0,135
-0,0005 ₅	+0,0011	0,0000	0,115	0,130
+0,0016	-0,0032	0,0000	0,060	0,095
-0,0068	+0,0136	0,0000	0,045	0,080
-0,0026	+0,0201	-0,0201	0,035	0,060
+0,0030	-0,0212	+0,0208	0,035	0,075
erreurs quadratiques moyennes:				
0,0023	0,0064	0,0069		

indiquées dans le tableau 3. On y trouve les numéros des mesures contenues dans le premier, le second et le troisième groupe, les valeurs des paramètres obtenues par notre méthode appliquée à la

répartition choisie, leurs écarts des valeurs les plus probables et enfin les différences des moyennes $\bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(2)}, \bar{x}_{(3)}$ calculées pour le premier, le second et le troisième groupe. La dernière ligne reproduit les résultats (47) donnés par la méthode des moments. J'ai rangé les répartitions considérées selon l'exactitude des résultats, ce qui rend possible de constater que les écarts entre les valeurs obtenues par notre méthode et les valeurs A_0, B_0, C_0 sont grosso modo d'autant plus grands que la répartition diffère de la répartition I , choisie conformément à la règle générale. La répartition II , que j'ai obtenue en appliquant cette règle aux mesures rangées d'après la grandeur croissante de t (au lieu de x , comme je l'avais fait dans le cas I), offre, il est vrai, les résultats identiques à ceux donnés par I . Mais il faut remarquer que la répartition II se confond avec la répartition I , lorsqu'on échange simplement les deux mesures 5 et 6.⁴⁾

Le tableau 3, montre au surplus que les différences $\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)}, \bar{x}_{(3)} - \bar{x}_{(1)}$, grossièrement parlant, diminuent avec les écarts $A_0 - A, B_0 - B, C_0 - C$ croissants conformément à la relation (14b), exprimant que les différences $\bar{x}_{(r)} - \bar{x}_{(s)}$ doivent être maxima pour que la précision des résultats le soit aussi.

*

Přibližná metoda vyrovnání pozorovaných závislostí.

(Obsah předešlého článku.)

Obvyklý způsob aplikace metody nejmenších čtverců na vyrovnání pozorovaných závislostí vyžaduje zdoluhavých výpočtů. Proto se v praktické fyzice a zvláště při měřeních technických málo užívá metody nejmenších čtverců a konstanty empirických funkcí určují se mnohdy postupem, při němž se nebere náležitý zřetel ke všem vykonaným měřením. Z těchto důvodů byly vypracovány přibližné metody a to jak početní tak i grafické, které lze ovšem aplikovati jen ve speciálních případech. Velmi jednoduchou přibližnou metodu vyrovnání lineární závislosti uvedl jsem v článku „Teplotní koeficienty tepelné vodivosti práškových hmot“.^{*)}

V této práci zobecňuji právě zmíněnou metodu do té míry, že lze jí užítí ve všech případech přicházejících obvykle v praxi, zvláště také pro aproximaci racionální funkcí celistvou libovolného stupně. Předpokládám, že pozorovanou závislost veličiny x na proměnné t lze vyjádřiti vztahem

$$x = a_1 + \varphi(t, a_2, a_3, \dots, a_p)$$

⁴⁾ Evidemment le numérotage des groupes n'est pas essentiel.

^{*)} Technický obzor, XLV, str. 68—71; 85—89, Praha 1937.

obsahujícím p konstant $a_1, a_2, \dots, a_p$, z nichž jedna (označil jsem ji a_1) je aditivní, při čemž φ je libovolná funkce zbývajících konstant a proměnné t . Bylo-li měření získáno $m (> p)$ hodnot $x_1, x_2, \dots, x_m$ veličiny x pro hodnoty $t_1, t_2, \dots, t_m$ proměnné t a jsou-li všechna měření přibližně stejně přesná, vede odvozená metoda k tomuto postupu:

Seřadíme měření podle velikosti hodnot $x_1, x_2, \dots, x_m$, rozdělíme je do p skupin stejně početných, takže každá skupina obsahuje m/p měření po sobě jdoucích, a k výpočtu konstant $a_1, \dots, a_p$ použijeme rovnici:

$$\bar{x}_{(k)} = a_1 + \bar{\varphi}_{(k)}(t, a_2, a_3, \dots, a_p), \quad k = 1, \dots, p,$$

kde $\bar{x}_{(k)}$ a $\bar{\varphi}_{(k)}$ jsou aritmetické průměry tvořené pro k -tou skupinu.

Nejsou-li měření stejně přesná, volíme početnější ty skupiny, které obsahují měření méně přesná a to tak, aby byly splněny (aspoň přibližně) vztahy

$$m_{(1)} : m_{(2)} : \dots : m_{(p)} = \delta_{(1)} : \delta_{(2)} : \dots : \delta_{(p)},$$

v nichž $m_{(k)}$ značí počet měření v k -té skupině a $\delta_{(k)}$ jejich střední kvadratickou chybu.

Pro lineární závislost plyne odtud jednoduché pravidlo: *Seřadíme měření podle velikosti a vypočteme pro první polovinu měření průměry hodnot $t_1, \dots, t_m$ a $x_1, \dots, x_m$. Učiníme-li stejně pro druhou polovinu měření, dostaneme dvě dvojice hodnot t a x , které určí přímkovou závislost x na t . Vyrovnání možno provést také graficky: Každé měření znázorníme bodem v pravoúhlé soustavě souřadné (t, x) . Body rozdělíme na dvě stejně početné skupiny přímkou kolmou k ose t a sestrojíme těžiště první i druhé skupiny bodů. Spojnice obou těžišť dává hledanou přímkovou závislost.*

V prve zmíněném článku odvodil jsem také vzorec pro střední kvadratické chyby konstant a užil jsem popsané metody k vyrovnání měření závislosti tepelné vodivosti práškových hmot na teplotě.

Sur une nouvelle construction de microphotomètre de l'Observatoire National de Praha.

F. Link, Praha.

(Reçu le 18 février 1939.)

Description d'un microphotomètre destiné aux besoins astronomiques. L'appareil travaille avec deux cellules à couche d'arrêt au selenium (Tung-sram S 44) par compensation optique à l'aide d'un coin neutre. Il en résulte l'indépendance de l'intensité de la source qui est une lampe de 100 W alimentée sur le secteur. On donne la théorie de l'instrument ainsi que le résultat des essais pratiques.

1. Introduction. — Les problèmes d'astrophysique nécessitent l'usage d'un microphotomètre adapté aux besoins astronomiques. La plupart des appareils existants manquent toujours de quelques détails importants comme par ex. la possibilité de mesurer avec précision les deux coordonnées sur le cliché dont on mesure la densité. Il m'a paru alors utile de construire un appareil simple et muni de tout dont on pourrait avoir besoin dans la pratique astronomique. Cette construction s'imposait d'autant plus que l'Observatoire National de Praha ne possédait aucun instrument de ce genre. J'ai choisi le type d'appareil non-enregistreur, qui suffit dans la majorité des cas. Les récepteurs sont deux cellules à couche d'arrêt au selenium.

Les caractéristiques de notre appareil sont les suivantes:

a) L'aire maxima du spot lumineux sur le cliché est de $0,5 \text{ mm}^2$ ou 4 mm^2 suivant l'optique employée. Dimensions plus faibles à volonté.

b) La densité maxima mesurable à 1% près est de 4,6 ou 2,8 suivant les dimensions du spot ci-dessus dans le même ordre.

c) Surface de la plaque à mesurer est de $13 \times 18 \text{ cm}$ dont la partie centrale de $11 \times 16 \text{ cm}$ est accessible aux mesures. Les coordonnées sont déterminées à $0,01 \text{ mm}$ près¹⁾ et l'angle de position à 1' près à l'aide des deux vis micrométriques et du cercle divisé.

¹⁾ Sans tenir compte des erreurs périodiques.

d) L'appareil travaille par compensation optique à l'aide d'un coin. L'indépendance de la constance de la source qui est alimentée sur le secteur alternatif (lampe Osram 100 W/12 V).

Le seul microphotomètre à cellule à couche d'arrêt entré dans la pratique astronomique est celui de Schilt modifié par Bennet²⁾ qui utilise une seule cellule sans compensation. Les mesures se font par la déviation du galvanomètre.

2. Description. — Le problème principal dont la solution est le but de chaque microphotomètre est d'associer à chaque plage de faibles dimensions sur le cliché à mesurer un nombre pas trop différent de la densité. La valeur absolue de la densité importe peu en général.

La lumière venant de la lampe (voir la fig. 1) L à court filament boudiné (12 V, 8 A) éclaire le condensateur C_1 et la fente F_1 . L'image du filament est alors projeté par C_1 sur l'objectif de microscope O_1 qui à son tour projette l'image de la fente sur la plaque P . L'image de la fente et celle de la plage à mesurer sont reprises par l'objectif identique O_2 et projetées sur la seconde fente F_2 . Entre l'objectif O_2 et la fente F_2 est intercalée une lentille de mise au foyer M et une glace à 45° qui permet de regarder la plage dans l'oculaire V . Derrière la seconde fente se trouve une autre glace qui permet de contrôler ce qui se projette sur la seconde fente. Le flux après avoir traversé la seconde fente tombe sur la première cellule à couche d'arrêt au selenium (Tungsram S 44) T_1 .

D'autre part une autre partie du flux de la lampe est dirigée à l'aide d'un second condensateur C_2 à travers le coin circulaire G et le diaphragme S sur la seconde cellule T_2 . On peut interchanger les deux cellules entre elles pour contrôler leur sensibilité relative. Les deux cellules travaillant en opposition sont connectées suivant le schéma de la figure 1. On règle le coin de façon que le galvanomètre reste au zéro. Dans ce cas la densité de la plage à mesurer est sensiblement une fonction linéaire de la lecture du coin.

3. Théorie de l'instrument. Nous allons chercher maintenant la condition de l'équilibrage optique du galvanomètre. Pour les faibles flux f la force électromotrice de la cellule peut être écrite sous la forme

$$e = a f(1 + \alpha f)$$

et de même pour l'intensité du courant

$$i = b f(1 + \beta f)$$

d'où, la résistance, vu que les constantes α, β sont très faibles,

$$r = \frac{a}{b} [1 + (\alpha - \beta) f].$$

²⁾ Astrophys. Journal, 78 (1933), 305.

Le premier flux rayonné par la lampe vers la plaque subit d'une part des pertes p'_1 dues à l'optique intercalée sur son parcours et d'autre part la perte p_1 due à la densité de la plaque d ; $d = \log p_1$. Ecrivons alors le flux éclairant la cellule

$$f'_1 = f_1 p_1 p'_1.$$

Pour le second flux nous désignerons les pertes par l'optique p'_2 et celle due au coin p_2 et $D = \log p_2$. Le flux tombant sur la seconde

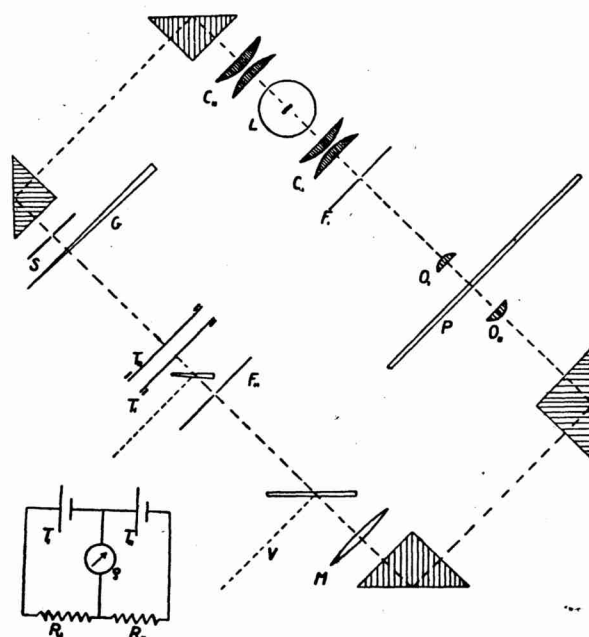


Fig. 1. Schéma optique et électrique du microphotomètre.

cellule sera alors

$$f'_2 = f_2 p_2 p'_2.$$

Les forces électromotrices engendrées dans les deux cellules seront alors

$$e_1 = a_1 f'_1 (1 + \alpha_1 f'_1), \quad e_2 = a_2 f'_2 (1 + \alpha_2 f'_2).$$

Le courant de la première cellule traversant le galvanomètre sera (voir la fig. 1)

$$i_1 = \frac{e_1}{(r_1 + R_1) \left(\frac{e}{r_2 + R_2} + 1 \right) + e}$$

ou très approximativement

$$i_1 = \frac{e_1}{r_1 + R_1 + \varrho}$$

car le rapport $\frac{\varrho}{r_2 + R_2}$ est faible en général ($< 0,1$). De même pour la seconde cellule

$$i_2 = \frac{e_2}{r_2 + R_2 + \varrho}.$$

L'égalité des courants donne

$$\begin{aligned} d_1 &= \log \frac{a_2}{\frac{a_2}{b_2} [1 + (\alpha_2 - \beta_2) f'_2] + R_2 + \varrho} - \\ &- \log \frac{a_1}{\frac{a_1}{b_1} [1 + (\alpha_1 - \beta_1) f'_1] + R_1 + \varrho} + \log \frac{p'_2 f_2}{p'_1 f_1} + D_1. \end{aligned}$$

Dans ce cas le plus général la lecture du coin à laquelle correspond la densité D_1 n'est pas en relation linéaire avec la densité d_1 de la plaque à mesurer puisque les deux premiers termes de notre formule dépendent de la valeur absolue des flux f'_1 et f'_2 . On peut les éliminer par l'inversion des cellules

$$\begin{aligned} d_2 &= \log \frac{a_1}{\frac{a_1}{b_1} [1 - (\alpha_1 - \beta_1) f'_1] + R_2 + \varrho} - \\ &- \log \frac{a_2}{\frac{a_2}{b_2} [1 - (\alpha_2 - \beta_2) f'_2] + R_2 + \varrho} + \log \frac{p'_2 f_2}{p'_1 f_1} + D_2 \end{aligned}$$

et la densité du cliché sera

$$d = \frac{D_1 + D_2}{2} + \log \frac{p'_2 f_2}{p'_1 f_1}.$$

On admet a priori la constance du rapport $\frac{p'_2 f_2}{p'_1 f_1}$ ce qui est toujours réalisé avec une précision suffisante. D'autre part les constantes α, β étant faibles on obtient approximativement

$$d_1 = D_1 + \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{r_1 + R_1 + \varrho}{r_2 + R_2 + \varrho} + \log \frac{p'_2 f_2}{p'_1 f_1}.$$

Il en résulte que la différence de la sensibilité des deux cellules

peut être compensée en ajustant convenablement les résistances R_1 et R_2 .

En pratique l'appareil servira presque toujours à l'interpolation optique des plages inconnues dans l'échelle photométrique imprimée sur la plaque. Dans ces conditions une seule mesure suffit. D'autre part pour connaître en valeur absolue les densités de plages, il faudrait étalonner le coin. Mais dans le cas cité une telle précaution n'est pas nécessaire puisque les lectures du coin sont une fonction sensiblement linéaire de la densité et elles suffisent pour construire la courbe de gradation.

4. Essais pratiques de l'appareil.³⁾ Une partie des essais a donné les résultats donnés dans l'Introduction. D'autres essais sont les suivants:

a) Effet de fatigue. On a équilibré les deux cellules et l'on a noté la position du coin. Puis pendant une minute la cellule en position T_2 fut exposée à l'éclairement 1000 fois plus fort et ramenée ensuite à l'éclairement primitif. On a constaté que la cellule traitée de cette façon demande ensuite un éclairement un peu plus fort pour que le galvanomètre reste au zéro. La différence s'élevait d'abord à 4,5% pour tomber au bout de 4 minutes à une valeur déjà admissible de 1,0%. L'autre cellule traitée de la même façon a donné les résultats analogues. Dans la pratique un tel traitement est d'ailleurs peu probable quant à l'intensité et surtout à la durée de l'exposition.

Pour éliminer autant que possible cet effet on peut procéder de la façon suivante. On équilibre d'abord l'appareil avec la lampe peu poussée. Puis en augmentant progressivement le régime de la lampe on manipule en même temps le coin pour que le galvanomètre reste grossièrement au zéro. Dès que l'on juge la sensibilité assez grande on parachève l'équilibrage fin soit directement soit par l'interpolation. En employant toujours ce procédé on fait subir aux deux cellules le même traitement et l'effet de fatigue ne peut se manifester que par la différence, qui forcément est plus faible que la valeur absolue de la fatigue.

b) Constance des lectures. Après avoir équilibré l'appareil on éteint la lampe et on recommence au bout de certain temps et ainsi de suite. Les écarts des lectures du coin donnent la constance de l'appareil. Plusieurs séries de mesures de ce genre ont donné les variations oscillant de 0,5% autour de la valeur moyenne.

Comme le filament de la lampe est projeté sur l'objectif O_1 il faut que son image soit bien centrée sur le diaphragme de l'objectif. Dans le cas contraire l'allumage de la lampe donne toujours une

³⁾ Effectués dans les laboratoires de l'Observatoire en collaboration de M. Vl. Guth.

faible impulsion au galvanomètre équilibré par l'expérience précédente. Au bout de certain temps le galvanomètre revient au zéro. Ce phénomène est dû à ce que le filament brusquement allumé se déforme un peu et son image change de position sur le diaphragme de l'objectif O_1 .



Fig. 2. L'aspect extérieur du microphotomètre. V_1 et V_2 sont les vis micrométriques pour les deux coordonnées.

c) Lumière diffusée. L'introduction de la seconde fente a pour le but d'éliminer autant que possible l'influence de la lumière diffusée sur l'optique précédente la plaque et de la lumière parasite. Pour fixer les idées supposons que l'on veut mesurer la densité d'une raie noire sur le fond clair. Si l'on projete l'image de la première fente juste sur la raie et la largeur de la deuxième fente couvre exactement les images superposées de la raie et de la première fente, les mesures de la densité seront toujours faussées par la lumière parasite mais beaucoup moins qu'en absence de la deuxième

fente. D'abord l'image de la première fente n'est pas parfaite. Elle est bordée d'une frange due aux multiples défauts de l'optique utilisée. Cette frange pénètre par la partie claire du cliché et, malgré son intensité relativement faible, elle donne un éclaircissement appréciable dans le plan de la seconde fente. Comme le seconde objectif ne forme pas l'image parfaite du cliché, une partie de la frange pénètre par la largeur de la seconde fente. D'autre part l'optique qui suit la plaque et l'émulsion du cliché diffusent une partie de la lumière de la frange à l'intérieur de la seconde fente. Finalement l'optique

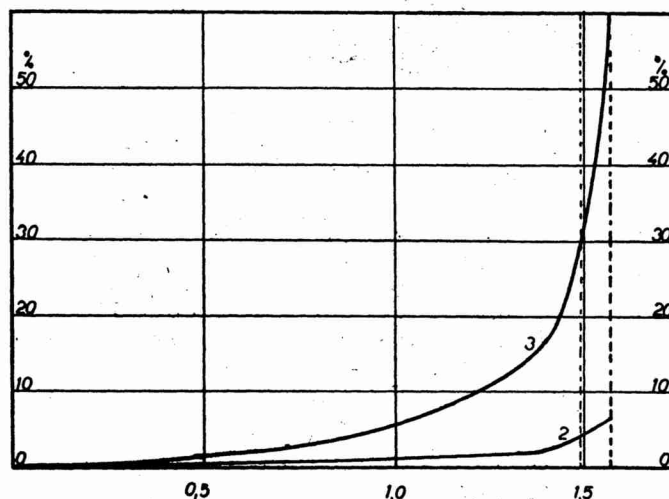


Fig. 3. L'effet de la lumière parasite sur une raie spectrale des densités 3 et 2 en fonction de l'ouverture de la deuxième fente.

qui précède la plaque diffuse de la lumière à travers les parties claires du cliché vers la seconde fente. Toutes ces causes ont pour l'effet de diminuer la densité de la raie.

Pour mesurer l'effet de la diffusion ou mieux de la lumière parasite nous avons procédé de la façon suivante. A la place du cliché on a tendu un fil métallique de 0,102 mm de diamètre. Sur ce fil on a projeté l'image de la première fente large de 0,092 mm soit 10% de moins. A cette dernière largeur correspond la largeur de la seconde fente égale à 1,49 mm. Dans ces conditions la déviation du galvanomètre serait de 630 cm sans fil et de 0,23 cm avec le fil. Si alors à la place du fil opaque se trouvait une raie spectrale dont la densité était de 3, la déviation du galvanomètre serait de 0,63 cm sans lumière parasite et celle-ci fausserait les mesures de 36% soit de

0,133 en densité. En fermant progressivement le seconde fente la lumière parasite diminue comme on le voit sur la fig. 3. Le cas choisi est un cas extrême pour que l'effet étudié soit assez grand. Si un tel cas arrivait dans la pratique l'effet de la lumière parasite serait du même ordre avec les autres microphotomètres car il dépend de l'optique qui est sensiblement la même dans les autres types de microphotomètres.

Depuis son installation dans les laboratoires de l'Observatoire le nouveau microphotomètre sert journellement aux mesures des clichés astronomiques. Les mesures se font très vite. Une seule suffit pour donner la densité à 0,01 près. La mise en place du point à mesurer à l'aide des vis micrométriques, l'allumage progressif de la lampe et l'équilibrage du galvanomètre à l'aide d'un coin optique durent une minute environ de façon qu'un observateur un peu entraîné peut mesurer une cinquantaine des points par heure. Après chaque mesure on éteint la lampe pour déterminer le zéro optique du galvanomètre. Sa position est légèrement variable au cours des mesures. En mesurant à deux nous nous sommes arrivés dernièrement M. Guth et moi à une moyenne de trois mesures complètes par minute.

En terminant qu'il me soit permis de remercier le Conseil National de Recherches ainsi que la Direction de l'Observatoire National de Praha qui ont accordé les subventions nécessaires pour la construction de l'appareil.

*

O nové konstrukci mikrofotometru Státní hvězdárny v Praze.

(Obsah předešlého článku.)

Podle návrhu autorova byl sestaven fotoelektrický mikrofotometr sloužící k měření astronomických snímků. Jest užito dvou hradlových článků Tungstram S 44 zapojených proti sobě. Jeden článek je osvětlován světlem procházejícím měřenou deskou a druhý článek světlem procházejícím optickým klínem, kterým se vyrovnává galvanometr do nulové polohy. Jelikož světlo pochází ze společného zdroje, nemusí býti udržován tento na konstantní svítivosti. Praktické zkoušky ukázaly dobrou použitelnost i velkou rychlost měření jak hustoty tak i přesné polohy měřeného místa, což má důležitost pro většinu astronomických snímků. Přístroj byl postaven z podpory udělené Národní radou badatelskou a Státní hvězdárnou v Praze.

Některé výsledky s novou fokusační metodou užívající Seemannova břitu.

M. Rozsival, Praha.

(Došlo 14. března 1939.)

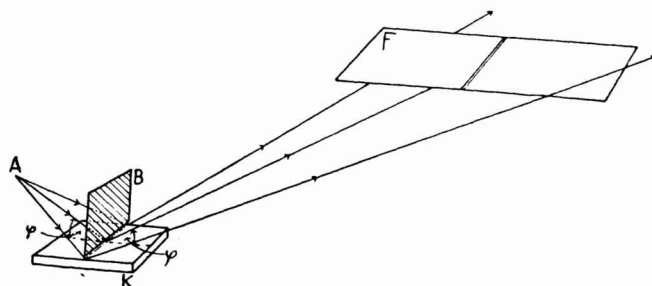
Du Mondův a Kirkpatrickův spektrometr s řadou krystalů se Seemannovými břity jako modifikace fokusačního uspořádání Cauchoisové. Užití vertikální fokusace Gouyovy-Kunzlovky se Seemannovým břittem. Pokus o borcení krystalu do kuželové plochy. Použití válcově zakřiveného krystalu se Seemannovým břittem a výsledky s krystaly NaCl , $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ a SiO_2 broušeného kolmo k elektrické ose. Získání krajní rozlišovací mohutnosti s krystalem SiO_2 a mosaikové struktury s krystaly NaCl a $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ podle výkladu Bačkovského. Zhodnocení světelnosti metody.

Účel práce: Výsledky získané různými autory Seemannovou metodou s břittem (1) („Schneidemethode“) vedly k značným rozporům v posuzování vhodnosti této metody pro přesná měření. Některé výsledky však naznačovaly, že lze při užití této metody docílit jak značné světelnosti tak i rozlišovací mohutnosti. Pro to mluví zejména výsledky Du Mondy a Kirkpatricka (2) získané spektrometrem s řadou krystalů. Tento spektrometr je řada krystalů se Seemannovými břity uspořádaných tak, že je to vlastně modifikace fokusační metody typu Cauchoisové (3) (t. zv. horizontální fokusace). Du Mond a Kirkpatrick použili 50 krystalů kalcitu se Seemannovými břity a docílili takové světelnosti, že mohli tímto způsobem fotograficky studovati zjev Comptonův. To ukazuje jistě na značnou světelnost, i když nutno mít na zřeteli, že expoziční doby při studiu Comptonova zjevu byly až 800 hodinové.

Jak jsem se již zmínil, má Du Mondovo a Kirkpatrickovo uspořádání se Seemannovými břity nahrazovati deformaci krystalu podle Cauchoisové za účelem fokusace. V této práci jsem se pokusil vypracovat fokusační metodu se Seemannovým břittem za použití krystalu zakřiveného do rotační plochy s horizontální osou (4) [t. zv. vertikální fokusace Gouyova (5) a Kunzlova (6)], neboť práce Bačkovského a Neprašové (7), Bačkovského a Do-

lejška (8) a Dolejška a Tayerleho (9) ukázaly, že elasticky i plasticky deformovanými krystaly lze při vertikální fokusaci docílití veliké světelnosti i veliké rozlišovací mohutnosti. Vypracování této fokusační metody je také po mechanické stránce jednodušší než je tomu u metody spektrometru s řadou krystalů.

Princip Seemannovy metody s břitem: Princip původní Seemannovy metody s břitem (10) je udáván obyčejně takto: proti dobrému krystalu K se postaví rovný břit B z kovu silně absorbujícího paprsky X , kterým se z paprsků dopadajících z antikatody A na krystal vymezí úzký svazek, podobně jako u jiných metod užitím štěrbin. Paprsky se pak „reflektují“ na krystalu a dopadají na fotografickou desku F (obr. 1).



Obr. 1.

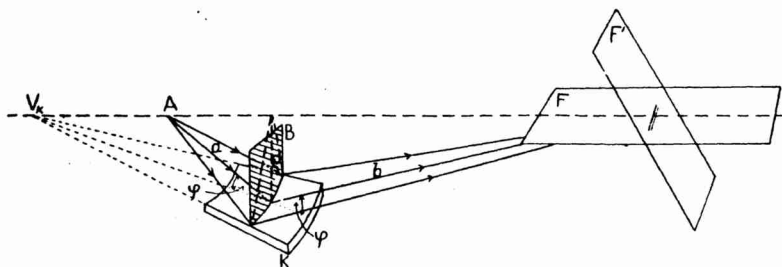
Vzdálenost krystalu od antikatody se volí malá, aby paprsky dopadaly na krystal v co největší intenzitě a kaseta se dává daleko od krystalu, aby disperse byla dostatečně veliká (t. zv. nesymetrické uspořádání).

Fokusace u metody se Seemannovým břitem: Při úvahách o možnosti použití vertikální fokusace pro Seemannovu metodu s břitem vyšel jsem z předpokladu, že světelnost Seemannovy metody může spočívat v tom, že lze krystal dáti těsně k antikatodě. To znamená, chceme-li užít krystalu zakřiveného, že musíme zvoliti takové zakřivení krystalu, aby vedle této podmínky byla zachována také podmínka zobrazovací.

Jak teoreticky ukázal Gouy (5), je možno voliti dvojí způsob zakřivení krystalu, abychom dostali reálné zobrazení fokusu: buď lze krystal zakřiviti do rotační plochy válcové vhodného poloměru, nebo kuželové o vhodném vrcholovém úhlu. Obě požadované podmínky splňuje plocha kuželová, kdežto u plochy válcové podmínka zobrazení není splněna.

Proto jsem zakřivil krystal $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ způsobem, který udal Tayerle (11), do rotační plochy kuželové. Proti tomuto

krystalu K bylo postaveno kruhové ostří B příslušného poloměru. Zdroj paprsků X (antikatóda) A byl umístěn na ose kužele na straně jeho vrcholu V_K tak, aby jeho zobrazení nastalo opět na ose kužele, kde byla umístěna kasety F (obr. 2).

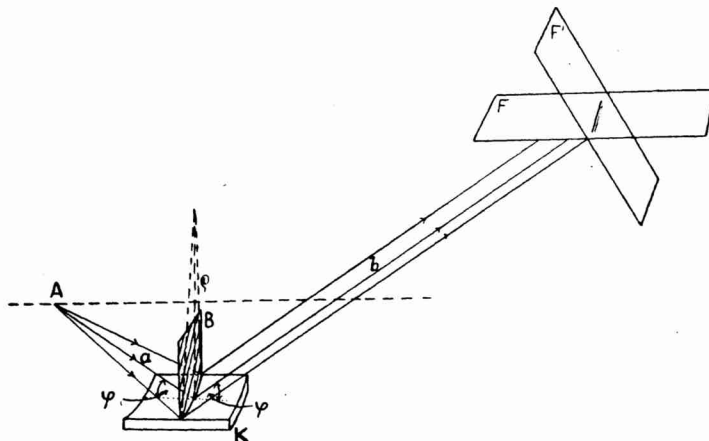


Obr. 2.

Pro křivost břitu ϱ plyne:

$$\varrho = a \sin (\omega + \varphi),$$

označíme-li a vzdálenost antikatódy A od krystalu, ω poloviční vrcholový úhel kužele a φ úhel příslušný podle Braggovy rovnice



Obr. 3.

použité vlnové délce λ . Pro vzdálenost kasety od krystalu b plyne vztah:

$$b = \frac{\varrho}{\sin (\varphi - \omega)} = a \frac{\sin (\varphi + \omega)}{\sin (\varphi - \omega)}.$$

Z tohoto vztahu plyne, že vzdálenost kasety od krystalu b je vždy větší než vzdálenost krystalu od antikatódy a , pokud ω není 0

nebo celistvý násobek π , a dále, že vždy musí $\omega < \varphi$, aby nastalo zobrazení na ose kužele.

Vzhledem k potížím při zakřivení krystalu do kužele učinil jsem pokus zakřivit krystal do plochy válcové. Při tom bylo nebezpečí, že se ztratí možnost dáti krystal blízko k antikatodě. Experimentálně se však ukázalo, že je možné i při válcové ploše nesymetrické uspořádání, jestliže zvolíme zakřivení krystalu takové, aby paprsky na krystalu reflektované byly po reflexi rovnoběžné, tedy aby obraz spektrálních čar měl velikost krystalu (obr. 3).

Z obr. 3 plyne, že takový případ nastane, když poloměr křivosti ϱ splňuje vztah:

$$\varrho = 2a \sin \varphi,$$

kde a a φ mají význam uvedený shora.

Postavení kasety vůči paprskům je možno voliti buď kolmo k dopadajícím paprskům nebo šikmo k nim. Při šikmém postavení je její poloha zpravidla taková, aby paprsky dopadaly na film pod týmž úhlem, pod nímž se reflektovaly na krystalu (t. zv. dispersní směr). Výsledky této práce ukázaly, že, je-li kasetka postavena takto šikmo (tedy rovnoběžně s osou krystalu), zvětší se lineární disperse (v místě fotografické desky), avšak současně se o něco zvětší šířka linií a expoziční doba proti případu, kdy kasetka je postavena kolmo k paprskům.

Uspořádání a dosažené výsledky: Použil jsem krystalů sádrovce ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$), soli kamenné (NaCl) a křemene (SiO_2) broušeného kolmo k elektrické ose, které jsem zakřivil nejprve do rotační plochy kuželové (krystal $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) a pak do plochy válcové ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, NaCl a SiO_2). Proti krystalu, a to vždy kolmo k ose rotační plochy, do níž byl krystal zakřiven, postavil jsem kruhové ostří příslušného poloměru, otupené asi na 0,1 až 0,2 mm, čímž podle Dolejška a Kleina (12) se omezí vliv vnikání záření X do krystalu, které u původní Seemannovy metody způsobuje rozšíření čar na straně kratších vlnových délek.

Pro měření bylo použito čar $\text{Cu K}\alpha_{1,2}$, jichž vlastní šířky podle měření Bačkovského a Dolejška (8) mají hodnoty: $\text{Cu K}\alpha_1$: 0,41 Xj a $\text{Cu K}\alpha_2$: 0,70 Xj. (Měřeno metodou Kunzlovou.)

Při měření bylo postupováno vždy tak, že bylo nalezeno nejprve místo na krystalu, které dávalo nejlepší zobrazení čar při poměrně velké vzdálenosti břitu od krystalu a pak byl postaven břit ke krystalu tak blízko, že dalším přibližováním se čáry už nezúžily, nýbrž se pouze prodloužila expoziční doba.

Nejprve jsem použil krystalu $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Tímto krystalem zborceným nejprve do rotační plochy kuželové byly získány tyto šířky čar:

Krystal	$\Delta\alpha_1$	$\Delta\alpha_2$	Exposice	Metoda
$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	1,3 Xj	1,25 Xj	15'	Seemannova - kužel
Týmž krystalem $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ohnutým do plochy válcové byly získány šířky čar:				

Krystal	$\Delta\alpha_1$	$\Delta\alpha_2$	Exposice	Metoda
$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	0,89 Xj	0,89 Xj	10'	Seemannova - válec, film $\perp$ k ose krystalu
	1,00 Xj	0,99 Xj	30'	Seemannova - válec, film $\parallel$ s osou krystalu

Z těch výsledků s krystalem sádrovce je zřejmo, srovnáme-li získané šířky čar s vlastní jejich šířkou, že šířka čar touto metodou měřená je podstatně větší než vlastní šířka. (Rozdíl v šířkách čar plynoucích z fokusační metody se Seemannovým břítem za použití téhož krystalu jednou zakřiveného do kužele a po druhé do válce lze vysvětlit tím, že nebylo v případě kuželového krystalu nalezeno tak dobré místo krystalu a pak, že u snímku s kuželovým krystalem je menší disperse, takže měření je méně přesné.)

Tento výsledek byl tehdy zklamáním, neboť se sádrovcem docílil Tayerle (9) v Kunzlově uspořádání výsledků mnohem lepších. Vysvětlení tohoto faktu nebylo však tehdy možné.

Rovněž, když bylo použito krystalu NaCl ohnutého do válce, s nímž Bačkovský a Dolejšek (8) v téže době dosáhli veliké rozlišovací mohutnosti za použití metody Kunzlové, obdržel jsem šířky čar značně větší než je vlastní šířka použitých čar. Naměřené šířky čar získané touto metodou jsou obsaženy v tabulce:

Krystal	$\Delta\alpha_1$	$\Delta\alpha_2$	Exposice	Metoda
NaCl	1,36 Xj	1,32 Xj	10'	Seemannova - válec, film $\perp$ k ose krystalu
NaCl	1,60 Xj	1,40 Xj	15'	Seemannova - válec, film $\parallel$ s osou krystalu

Z těchto výsledků ve srovnání s výsledky získanými s krystalem sádrovce je patrné, že získané šířky čar $\text{Cu K}\alpha_{1,2}$ jsou dokonce větší než šířky získané s krystalem sádrovce.

Protože bylo použito bříty otupeného, nebylo lze vyložiti rozšíření čar vnikáním záření do krystalu, nýbrž nedokonalostí krystalu, která se tedy u Seemannovy metody s břítem silně projeví. Shodně s výsledky Bozortha a Hawortha (13), Feifera a Jahody (14) plyne z těchto výsledků, že krystal NaCl má mosaikovou strukturu méně dokonalou než krystal sádrovce.

Podle výsledků Bačkovského (15) publikovaných během této práce je zřejmo, že při této fokusační metodě stejně jako při původní metodě Seemannově se při měření neprojevuje vlastní šířka

čar, nýbrž mosaiková nedokonalost krystalu, pokud mosaika je téhož řádu nebo větší než vlastní šířka čar. Jak totiž ukázal Bačkovský, paprsky reflektované na jednotlivých mosaikových krystalcích po reflexi postupují konvergentně tak, že přibližně v symetrické poloze se mosaiková nedokonalost projeví minimálním rozšířením čar. Ve všech ostatních uspořádáních (tedy nesymetrických) se vliv mosaiky projeví značně. Seemannova metoda s břitem podobně jako „tubusový spektrometr“ a metoda dirkové komory je metoda nesymetrická a proto čáry získané těmito metodami jsou tím širší, čím větší je mosaiková nedokonalost použitých krystalů.

Ze známé vlastní šířky použitých čar a za předpokladu o křivce černání lze z naměřené šířky určit mosaikovou nedokonalost použitého krystalu v místě, kde nastala reflexe.

Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že touto metodou i původní metodou Seemannovou můžeme obdržeti vlastní šířku čar a značnou rozlišovací mohutnost pouze s dokonalými krystaly, jichž mosaiková struktura je nepatrná vůči vlastní šířce čar.

K dosažení značné rozlišovací mohutnosti jsem použil krystalu SiO_2 broušeného kolmo k elektrické ose, tloušťky asi 0,2 mm, který byl ohnut Tayerleovým způsobem do válcové plochy. Výsledky tímto krystalem obdržené obsahuje tabulka:

Krystal	$\Delta\alpha_1$	$\Delta\alpha_2$	Exposice	Metoda
SiO_2	0,54 Xj	0,75 Xj	15'	Seemannova - válec, film $\perp$ k ose krystalu
SiO_2	1,14 Xj	1,14 Xj	30'	Seemannova - válec, film $\parallel$ s osou krystalu

Tyto výsledky znamenají, že principiálně lze dosáhnouti fokusační metodou se Seemannovým břitem veliké rozlišovací mohutnosti, užijeme-li krystalů ideálně dokonalých. Avšak praktické dosažení veliké rozlišovací mohutnosti je spojeno s předpokladem dostatečné světelnosti metody. Srovnání expozičních dob pro různé krystaly ukázalo shodně s výsledky jiných prací v ústavě konaných (16), že čím má krystal dokonalejší mosaikovou strukturu, tím má pro paprsky X menší reflekční mohutnost. Z toho tedy plyne, že Seemannova metoda s břitem je pro přesná měření málo vhodná, což bylo dosud sporné.

Z výsledků této práce lze vysvětlit rozpory v názorech na Seemannovu metodu s břitem. Použijeme-li krystalů s velikou mosaikovou nedokonalostí, dostaneme malou rozlišovací mohutnost a dobrou světelnost, jak tomu bylo u většiny autorů, kteří používali krystalů NaCl, cukru a pod. Du Mond a Kirkpatrick užili však ve své práci krystalu vápence, který má mosaikovou

nedokonalost velikosti mezi nedokonalostí křemene a sádrovce, a proto dostali dobrou rozlišovací mohutnost i světelnost. Protože světelnost fokusační metody se Seemannovým břitem je asi pětkrát větší než světelnost původní Seemannovy metody, bylo by lze při dostatečné světelnosti metody užití i krystalů s malou mosaikovou nedokonalostí (a tedy s menší reflexí mohutností) ve fokusační metodě, čímž by se získalo na rozlišovací mohutnosti. Otázka propracování této fokusační metody je tedy otázkou nalezení vhodných krystalů s malou mosaikovou nedokonalostí, které by bylo možno deformovat tak, jak je to zde žádáno.

Panu prof. dr. V. Dolejškoví, řediteli spektroskopického ústavu, jsem zavázán upřímným díkem za stálý zájem, s nímž mou práci sledoval a cenné rady, jichž jsem v práci použil.

Spektroskopický ústav Karlovy university v Praze.

Seznam citovaných prací:

1. H. Seemann: Physik. Zs.: **18**, 242, 1917. — M. Siegbahn: Spektroskopie der Röntgenstrahlen. II. vyd., 1931. — 2. J. W. M. Du Mond and P. Kirkpatrick: Phys. Rev.: **37**, 136, 1931. — 3. Y. Cauchois: Journ. de Phys.: **3**, 320, 1932. — 4. V. Dolejšek a M. Rozsival: C. R.: **207**, 786, 1938. — 5. G. Gouy: Ann. de Phys.: **5**, 241, 1916. — 6. V. Kunzl: C. R.: **201**, 656, 1935. — 7. J. M. Bačkovský a M. Neprašová: Čas. JČMF: **67**, 177, 1938. — 8. J. M. Bačkovský a V. Dolejšek: Čas. JČMF: **67**, 211, 1938. — 9. V. Dolejšek a M. Tayerle: Journ. de Phys. Série VII, tom IX, 465, 1938. — 10. H. Seemann: Ann. d. Phys.: **49**, 470, 1916. — 11. V. Dolejšek a M. Tayerle: C. R.: **205**, 605, 1937. — 12. V. Dolejšek a J. Klein: Nature: **139**, 886, 1937. — 13. R. M. Bozorth and F. E. Haworth: Phys. Rev.: **45**, 821, 1934. — 14. J. Feifer a M. Jahoda: C. R.: 1938. — 15. J. M. Bačkovský: Nature: **141**, 872, 1938. — 16. V. Dolejšek, M. Jahoda, J. Ježek a M. Rozsival: Nature: **142**, 253, 1938.

*

Quelques résultats obtenus avec une nouvelle méthode de focalisation utilisant le couteau de Seemann.

(Extrait de l'article précédant.)

En se basant sur les résultats de Du Mond et Kirkpatrick, de Bačkovský et de Dolejšek et Klein, l'auteur essaie d'élaborer une méthode de focalisation avec le couteau de Seemann. Il emploie différents cristaux tantôt élastiquement, tantôt plastiquement courbé sur la surface d'un cône ou d'un cylindre de révolution, en plaçant contre le cristal, perpendiculairement à l'axe de la surface rotatoire du cristal une lame circulaire.

Conformément aux résultats de Bačkovský, il montre qu'on obtient avec ce montage, des largeurs de raies qui dépendent de la structure mosaïque du cristal. Employant le doublet $\text{Cu K}\alpha_{1,2}$

il mesure les largeurs des lignes obtenus avec les différents cristaux. Pour les cristaux $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, NaCl et SiO_2 taillé perpendiculairement à l'axe électrique, l'élargissement des lignes correspond à l'imperfection mosaïque du cristal. Cette méthode étant asymétrique, toute l'imperfection se manifeste, et les raies obtenues sont d'autant plus larges que l'imperfection mosaïque est plus grande.

Conclusion:

1. En partant des largeurs des lignes obtenues par cette méthode de focalisation et par la méthode de Seemann, on peut reconnaître l'imperfection mosaïque du cristal employé.

2. On ne peut pas obtenir un grand pouvoir séparateur avec cette méthode et avec la méthode de Seemann, qu'en employant des cristaux à petite mosaïque, par exemple, SiO_2 ou CaCO_3 .

Application d'un faisceau de rayons X légèrement divergents à l'étude des matières polycristallines.

A. Němejcová-Kochanovská, Praha.

(Reçu le 29 mars 1939.)

Nous montrons dans ce travail les analogies entre les cristaux mosaïques et les polycristallites d'où découle la possibilité d'appliquer aux matières polycristallines la même méthode que celle récemment indiquée par Bačkovský pour l'étude des monocristaux mosaïques. Nous donnons les formules pour la largeur et la variation de l'intensité des raies de Debye réfléchies par les polycristallites dans le cas d'un faisceau primaire divergent. Nous donnons une vérification expérimentale de ces formules. Nous indiquons l'application de cette méthode à la solution des principaux problèmes, qui se présentent en pratique dans l'étude des matières polycristallines.

Pour étudier les matières polycristallines on se sert en pratique de la méthode de Debye-Sherrer, qui utilise un faisceau des rayons X parallèles. Pour la définition du faisceau des rayons X parallèles on utilise un système de plusieurs fentes, généralement circulaires, ce qui a pour conséquence d'importantes pertes d'intensité. La matière à étudier a la forme d'une petite tige.

Pour étudier les monocristaux on se sert au contraire d'un faisceau légèrement divergent défini par une fente unique. Les monocristaux appelés mosaïques forment la transition entre les monocristaux idéaux et les polycristallites. La pratique a prouvé que justement les cristaux avec une forte structure mosaïque (sel gemme, blende) sont caractérisés par un grand pouvoir réflecteur.¹⁾ En plus, comme l'a montré Bačkovský,²⁾ on peut obtenir dans l'arrangement symétrique (les distances fente-cristal et cristal-film photographique étant égales) le même pouvoir séparateur c. à. d. des raies de la même finesse qu'avec les monocristaux, qui partiellement, sont parfaits (quarz, calcite). Donc il s'en suit facilement qu'on peut utiliser un arrangement analogue aussi à l'étude des polycristallites.

¹⁾ V. Dolejšek, M. Jahoda, J. Ježek, M. Rozsival, *Nature*, **142** (1938), 253.

²⁾ J. Bačkovský, *Nature*, **141** (1934), 872.

Chez les cristaux mosaïques la quantité des microcristaux qui contribuent à la réflexion (quand on se sert d'un faisceau divergent) est donnée par la grandeur de la structure mosaïque, parce que celle-ci est d'ordinaire plus petite que la divergence du faisceau primaire. Au contraire chez les polycristallites (au moins tant qu'il n'y a pas une certaine orientation sensiblement privilégiée) p. ex. à cause d'un traitement mécanique), la quantité des microcristaux réfléchissants est donnée uniquement par la divergence du faisceau primaire. Une autre différence entre les monocristaux mosaïques et les polycristallites consiste en ce que chez les monocristaux mosaïques la dépendance de la quantité des microcristaux formant le mosaïque et déplacés d'un certain angle de la face de clivage, est donnée par la courbe de Gauss, tandis que chez les polycristallites les microcristaux sont, quant à leur orientation relativement à la surface plane réfléchissante, distribués uniformément, indépendamment de la direction.

Un faisceau primaire divergent a été utilisé pour l'étude des polycristallites par L. S. Palašnik³⁾ (avec application pratique à l'étude de la structure des dépôts électrolytiques). Cet auteur a envisagé dans son travail la question, quelle est la dépendance de la focalisation des raies de Debye réfléchies par un polycristallite plan, en supposant que le foyer de l'anticathode du tube des rayons X a une largeur finie mais une hauteur infiniment petite. Il a établi aussi les conditions pour que la diffusion totale des raies soit minimum.

Dans le travail présent il est montré comment la largeur et le parcours de la courbe d'intensité des raies de Debye, réfléchies par un polycristallite plan, dépendent de l'angle d'incidence, quand la position de la fente linéaire, qui délimite le faisceau primaire divergent, et qui est fixée à la circonférence d'un spectrographe circulaire, est fixe. Le film photographique est appliqué le long de la circonférence du spectrographe.

Par des considérations trigonométriques simples, il est facile de déduire que, si la fente ponctuelle et le film photographique sont situés le long de la circonférence d'un spectrographe circulaire de rayon r , la surface plane réfléchissante du polycristallite étant déplacée du centre du spectrographe de η , en plus la divergence du faisceau primaire, dont le rayon central passe par le centre du spectrographe, étant $2\psi_0$, et α étant l'angle d'incidence du rayon central du faisceau primaire, et en supposant en plus que le foyer de l'anticathode du tube ait une largeur finie mais une hauteur infiniment petite, alors l'angle central γ du rayon réfléchi, qui dans le faisceau primaire était dévié de ψ du rayon central, est donné par l'expression

³⁾ L. S. Palašnik, *Žurnal tehničkoj fiziki*, 7, 20—21 (1937), 1990 — 1996 et 7, 22 (1937), 2103—2110.

suivante:

$$\gamma = 2\varphi - \alpha - \psi - \omega, \quad \sin \omega = \frac{\eta \sin 2\varphi}{r} - \frac{\sin \psi \cdot \sin (2\varphi - \alpha - \psi)}{\sin (\alpha + \psi)}$$

où φ est l'angle de Bragg de la raie en question. De cette relation il suit pour les angles centraux $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_1$, correspondant aux réflexions des deux rayons extrêmes et du rayon central du faisceau primaire:

$$\gamma_1 = 2\varphi - \alpha - \omega_1, \quad \sin \omega_1 = \frac{\eta \sin 2\varphi}{r},$$

$$\gamma_2 = 2\varphi - \alpha - \psi_0 - \omega_2, \quad \sin \omega_2 = \frac{\eta \sin 2\varphi}{r} - \frac{\sin \psi_0 \sin (2\varphi - \alpha - \psi_0)}{\sin (\alpha + \psi_0)} \quad (1)$$

$$\gamma_3 = 2\varphi - \alpha + \psi_0 - \omega_3, \quad \sin \omega_3 = \frac{\eta \sin 2\varphi}{r} + \frac{\sin \psi_0 \sin (2\varphi - \alpha + \psi_0)}{\sin (\alpha - \psi_0)}$$

(voir aussi fig. 1).

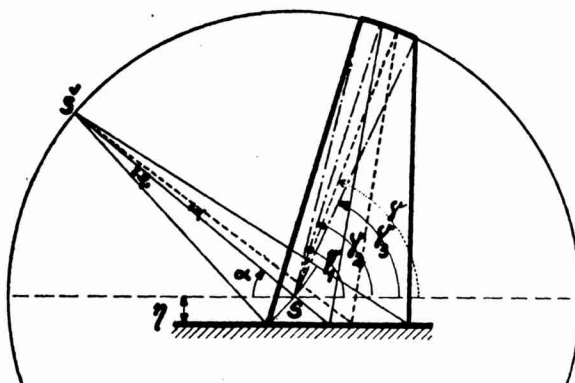


Fig. 1.

Alors la largeur angulaire⁴⁾ de la raie, dans le cas du faisceau primaire légèrement divergent, est donnée par la différence des angles des deux rayons extrêmes du faisceau réfléchi.⁵⁾

⁴⁾ Par l'expression „largeur de la raie“ nous ne comprenons pas la largeur de la raie à la demi-hauteur de la courbe de noircissement, comme d'ordinaire, mais la largeur totale de la raie entre les deux bases de la courbe de noircissement. Ce changement de la terminologie habituelle est bien justifié dans ce cas par le parcours asymétrique de la courbe de noircissement, l'intensité de la raie ne s'abaissant d'aucun côté continuellement jusqu'à zéro.

⁵⁾ Il faut bien remarquer, que les rayons extrêmes du faisceau réfléchi ne correspondent pas toujours forcément aux rayons extrêmes du faisceau primaire.

Dans ce qui suit nous allons envisager seulement le cas où $\eta = 0$, c. à. d. où la surface réfléchissante de la matière est située justement au centre du spectrographe. Ce cas a aussi dans l'application pratique de cette méthode le plus d'importance.

Pour des ψ_0 assez petits en négligeant les grandeurs du troisième et des ordres supérieurs en ψ , et pour $\eta = 0$, on déduit facilement que l'angle γ du rayon réfléchi, qui dans le faisceau primaire était dévié de ψ du rayon central, est donné par la relation suivante:

$$\gamma = 2\varphi - \alpha + 2\psi k_1 - \psi^2 k_2; \quad k_1 = \cos \varphi (\sin \varphi \cotg \alpha - \cos \varphi) \quad (1')$$

$$k_2 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2 \alpha}.$$

La grandeur k_1 est toujours positive, supposé que l'angle d'incidence α est choisi égal ou plus petit que l'angle de Bragg de la raie de Debye, qui est dans l'ensemble des raies réfléchies caractérisée par les plus petits indices.

Pour calculer la largeur de la raie de Debye correspondante à l'angle φ de Bragg, il faut d'abord calculer les angles centraux γ des deux rayons extrêmes du faisceau réfléchi. On trouve facilement que ces deux angles sont donnés par les expressions suivantes:

$$\gamma_{\max} = 2\varphi - \alpha + \frac{k_1^2}{k_2} \quad \text{au cas } \psi_0 \geq \frac{k_1}{k_2} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\min} &= 2\varphi - \alpha - 2\psi_0 k_1 - \psi_0^2 k_2 \\ \gamma_{\max} &= 2\varphi - \alpha + 2\psi_0 k_1 - \psi_0^2 k_2 \\ \gamma_{\min} &= 2\varphi - \alpha - 2\psi_0 k_1 - \psi_0^2 k_2 \end{aligned} \quad \text{au cas } \psi_0 < \frac{k_1}{k_2} \quad (2b)$$

La largeur angulaire l_a de la raie de Debye correspondante à l'angle φ de Bragg est:

$$l_a = \frac{k_1^2}{k_2} + 2k_1\psi_0 + \psi_0^2 k_2 \quad \text{au cas } \psi_0 \geq \frac{k_1}{k_2},$$

$$l_a = 4\psi_0 k_1 \quad \text{au cas } \psi_0 < \frac{k_1}{k_2}. \quad (3)$$

Pour la mesure précise des distances des raies il est nécessaire de connaître la position „du milieu“ de la raie c. à. d. de l'endroit de la raie correspondant au rayon central du faisceau primaire ($\psi = 0$). Des formules déduites il suit que la distance angulaire du milieu de la raie de sa frontière du côté des longueurs d'ondes croissantes est donnée par les expressions suivantes:

$$\Delta_0 = \frac{k_1^2}{k_2} \quad \text{au cas } \psi_0 \geq \frac{k_1}{k_2},$$

$$\Delta_0 = 2\psi_0 k_1 - \psi_0^2 k_2 \quad \text{au cas } \psi_0 < \frac{k_1}{k_2}. \quad (4)$$

De ce qui précède il est évident que la raie est la plus étroite si l'angle d'incidence $\alpha = \varphi$. Alors k_1 est égal à 0 et $k_2 = 2 \cotg \varphi$, ce qui montre que l'influence de la divergence du faisceau primaire ne se fait remarquer que par les grandeurs du deuxième et des plus grands ordres, et est d'autant plus petite, que l'angle de Bragg de la raie envisagée est plus grand.

La variation de l'intensité de la raie réfléchie est déterminée de la façon suivante:

Supposons que dans le faisceau primaire incident l'intensité est distribuée d'une façon uniforme, de sorte que le domaine angulaire $d\psi$, défini par les rayons ψ et $\psi + d\psi$, contient une quantité d'énergie lumineuse $dI = a d\psi$. Chez les polycristallites (à la différence des monocristaux mosaïques) les microcristaux sont distribués, quant à l'orientation du plan cristallographique en question, d'une façon uniforme dans toutes les directions. On peut poser donc l'énergie réfléchie correspondante $dI_r = b d\psi$. Cette énergie réfléchie agit sur le film photographique dans un domaine angulaire $2(k_1 - \psi k_2) d\psi$ (voir la relation 1'). Donc le rayon dévié de ψ du rayon central tombe sur le film, après réflexion, avec une densité d'énergie lumineuse $I = \frac{b}{2(k_1 - \psi k_2)}$.

Pour la détermination de l'intensité de la raie à une place quelconque Δ il suffit de s'assurer quels rayons de faisceau primaire tombent après réflexion à cet endroit, Δ étant mesuré à partir du rayon réfléchi, qui correspond au rayon central du faisceau incident, positivement dans le sens des λ croissants et négativement dans le sens des λ décroissants.

Il faut distinguer deux cas:

a) Pour la raie en question est $\psi_0 \geq \frac{k_1}{k_2}$. A chaque endroit $\frac{k_1^2}{k_2^2} \geq \Delta \geq 2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2$ de la raie tombent après réflexion deux rayons du faisceau primaire dont les ψ sont $\psi_{1,2} = \frac{k_1}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \Delta}$, tandis qu'à chaque autre endroit de la raie c. à d. à l'endroit $-2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2 \leq \Delta < 2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2$ tombe après réflexion seulement un rayon, dont le ψ est $\psi = \frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \Delta}$. On vérifie facilement que l'énergie totale de la raie réfléchie est donnée par l'expression suivante:

$$I = \int_{-2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2}^{\frac{k_1^2}{k_2}} \frac{b}{2\sqrt{k_1^2 - \Delta k_2}} d\Delta + \int_{2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2}^{\frac{k_1^2}{k_2}} \frac{b}{-\sqrt{k_1^2 - \Delta k_2}} d\Delta = 2b\psi_0$$

ce qui est d'accord avec l'énergie totale réfléchie supposée.

b) Pour la raie en question est $\psi_0 < \frac{k_1}{k_2}$. A chaque endroit $2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2 \geq \Delta \geq -2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2$ de la raie tombe après réflexion un seul rayon du faisceau primaire dont le ψ est $\psi = \frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \frac{\Delta}{k_2}}$. Donc l'énergie totale de la raie est donnée par l'expression suivante:

$$I = \int_{-2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2}^{2k_1\psi_0 - k_2\psi_0^2} \frac{b}{2\sqrt{k_1^2 - \Delta k_2}} d\Delta = 2b\psi_0.$$

Si l'angle d'incidence justement égale à l'angle φ de Bragg de la raie correspondante, les formules ci dessus se simplifient. Pour $\alpha = \varphi$, est $k_1 = 0$ et $k_2 = 2 \operatorname{ctg} \varphi$. A chaque endroit $-\Delta$ de la raie arrivent deux rayons dont les ψ correspondants sont $\psi_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{2 \operatorname{ctg} \varphi}}$ (aux endroits $+\Delta$ de la raie ne se réfléchit rien). Ces rayons agissent à l'endroit $-\Delta$ chacun avec une densité d'énergie $\frac{b}{2\sqrt{k_2\Delta}}$. Donc l'énergie totale de la raie entière est de nouveau:

$$I = 2 \int_0^{k_2\psi_0^2} \frac{b}{2\sqrt{k_2\Delta}} d\Delta = 2b\psi_0.$$

De ce qui précède on peut attendre que si l'angle d'incidence α ne correspond pas à l'angle φ de Bragg de la raie en question, qu'il ne se produit non seulement un élargissement de la raie, mais aussi que le maximum d'intensité se déplace à partir de la trace du rayon central réfléchi dans le sens des λ croissantes. La variation de l'intensité doit être d'autant moins rapide que α se distingue plus de φ . Si la raie doit être la plus étroite et le maximum de l'intensité doit se trouver justement à l'endroit d'incidence du rayon central réfléchi (la formule déduite théoriquement donne pour $\Delta = 0$, $I = \infty$). La variation de l'intensité doit être dans ce cas très brusque, de sorte que la raie devrait se montrer en cet endroit très exactement limitée. De l'analogie entre les polycristallites et les

cristaux mosaïques, de laquelle il a été question dans l'introduction de ce travail, découlerait que le parcours de la courbe de noircissement de la raie dans ce cas devrait ressembler à celui de la courbe de noircissement de la raie réfléchie par un monocristal mosaïque. La seule différence essentielle entre les deux courbes devrait être celle, que, tandis que pour les monocristaux mosaïques, par suite de la distribution des microcristaux dans les différentes directions d'après la courbe de Gausse, la courbe d'intensité devrait tendre vers zéro du côté des courtes longueurs d'ondes, alors que chez les polycristallites par suite de la distribution régulière des microcristaux dans les différentes directions, l'intensité de la raie du côté des courtes longueurs d'ondes devrait tendre vers une valeur limite $\left(I = \frac{b}{k_2 \psi_0}\right)$ différente de zéro. Le calcul du parcours de la

courbe de noircissement de la raie réfléchie par un monocristal mosaïque a été fait par Jahoda,⁶⁾ dans le travail duquel est aussi donné le graphique correspondant. On n'a pas encore réussi à prouver expérimentalement ce parcours théorique de l'intensité pour les monocristaux, sans doute pour la raison, que leur structure mosaïque n'était pas assez prononcée, de sorte que d'autres effets provoquaient l'élargissement de la raie dans le sens contraire que ne le provoquait le mosaïque seul. De sorte que par exemple, si le mosaïque est peu prononcé, l'élargissement de la raie $K\alpha$ chez les éléments légers (comme Cu) dans le sens des longueurs d'ondes croissantes, ainsi que l'a observé Spencer,⁷⁾ se fait plus remarquer que l'influence du mosaïque.

Au contraire chez les polycristallites où le mosaïque, se faisant remarquer à la réflexion, est d'un ordre beaucoup plus grand, parce qu'il est limité seulement par la divergence du faisceau primaire,⁸⁾ on peut justement attendre que l'influence de la structure mosaïque se fera remarquer dans le parcours de la courbe d'intensité de la raie réfléchie et dépassera beaucoup toutes les autres influences.

Pour la vérification expérimentale des résultats mathématiques précédents on a étudié l'influence des différentes positions du polycristallite et l'influence de divers angles d'incidence sur la largeur et le parcours de la courbe de l'intensité de la raie réfléchie.

Comme polycristallite on a choisi une plaque de Cu recuite, chez laquelle prédominait seulement d'une façon insignifiante

⁶⁾ Sous presse.

⁷⁾ Spencer, Phys. Rev. 38, 630 (1931).

⁸⁾ Dans notre cas la divergence du faisceau primaire était de 32', par suite le mosaïque qui prenait part à la réflexion était d'un ordre beaucoup plus grand que par ex. chez ZnS, qui d'après les résultats indiqués dans le travail de Feifer-Jahoda l. c. doit être regardé comme ayant une structure mosaïque très développée, $\Delta\sigma = 105''$.

l'orientation des microcristaux du plan (111) parallèlement à la surface réfléchissante. Par la méthode „du rayon de retour“ (Rückstrahlmethode) on s'est assuré que la matière n'avait pas de tensions internes, donc que $\Delta d = 0$, pour être sûr que l'influence „des défauts dans le réseau“ (qui se manifeste toujours également quelque soit le montage et qui a pour conséquence un élargissement des raies des deux côtés) ne se superpose pas à l'influence du mosaïque.

Comme source des rayons X on a utilisé un tube industriel avec anode de Cu sous une tension de 40 KV et une intensité de 10 MA. Alors la radiation caractéristique utilisée était Cu $K\alpha$ et $K\beta$. Le rayon du spectrographe était $r = 50$ mm. Le temps de pose étaient de 10 minutes.

L'influence de l'angle d'incidence sur la largeur et le parcours de l'intensité de la raie réfléchie est visible des clichés dans les figures 2 et 4 et des courbes microphotométriques correspondantes dans les figures 3 et 5.

Sur la fig. 2a, b sont reproduits deux clichés de la raie de Debye (111) du Cu (la radiation caractéristique était $K\alpha$ du Cu, $K\beta$ était éliminé par un filtre de Ni). La matière était fixée par la surface réfléchissante exactement au centre du spectrographe. La divergence du faisceau n'a pas été mesurée dans ce cas. Dans le cas de la fig. 2a on a exposé avec un angle d'incidence α égal à l'angle φ de Bragg, pour le plan (111), dans le cas 2b l'angle d'incidence était de 10° plus petit que l'angle correspondant de Bragg pour la raie (111). Comme on voit sur les clichés, dans le cas de la fig. 2a, quand α égale φ , la raie de Debye (111) est sensiblement plus étroite et sa frontière du côté des grandes longueurs d'ondes est plus nette que dans le cas b, quand l'angle d'incidence α est de 10° plus petit que l'angle de Bragg correspondant. La même chose est visible encore mieux sur les courbes microphotométriques dans les fig. 3a, b. L'allure de la courbe microphotométrique de la fig. 3a est en très bon accord avec l'allure de la courbe calculée théoriquement pour les monocristaux mosaïques, et indiquée dans le travail cité de Jahoda. Elle présente une croissance brusque du côté des longueurs d'ondes croissantes et lente du côté des longueurs d'ondes décroissantes. De même on voit des courbes microphotométriques que le rayonnement diffus, causant le noircissement continu du fond du film, est plus grand dans le cas b que a.

Dans les fig. 4a, b, c sont encore reproduits les clichés des



Fig. 2ab.

réflexions de la raie (111) de la plaque de Cu. La plaque de Cu était placée dans le cas a au milieu du spectrographe, l'exposition étant faite avec un angle d'incidence $\alpha = \varphi$ aussi pour la raie de Debye (111). Dans le cas b et c la plaque a été déplacée du milieu du spectrographe de $\eta = 3$ mm, où dans le cas b l'angle d'incidence était

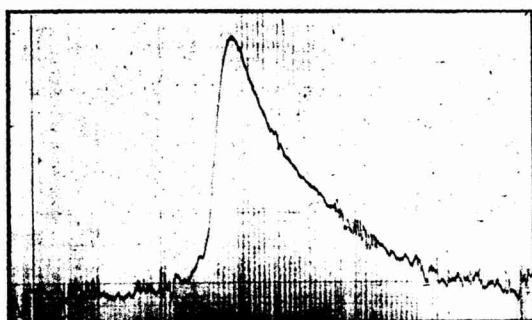


Fig. 3a.

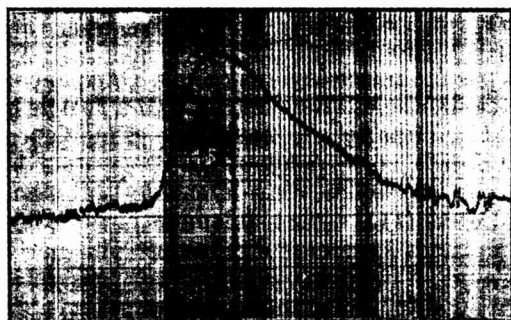


Fig. 3b.

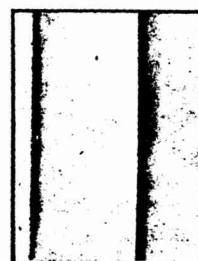


Fig. 4abc.

de nouveau égal à l'angle de Bragg pour le système des plans (111), tandis que dans le cas c l'angle d'incidence a été de 10° plus petit que l'angle de Bragg correspondant. La divergence ψ_0 du faisceau était égale en ce cas à $16' 19''$. Les courbes microphotométriques correspondantes de la raie de Debye (111) sont reproduites dans la fig. 5a, b, c. Comme on voit, il n'y a pas de différence sensible dans la finesse de la raie (111) entre les clichés 4a, b (mais

ceci n'est pas vrai en général, et était causé dans ce cas accidentellement parce que les valeurs de η et de r étaient dans un rapport convenable) mais dans le cas b le rayonnement diffus est considéré

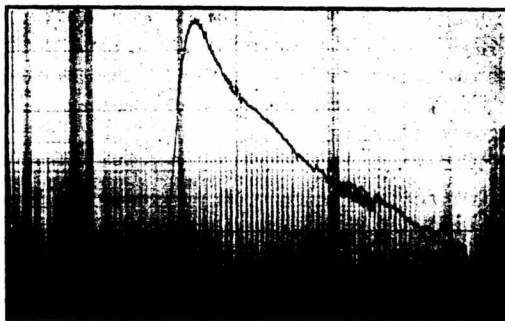


Fig. 5a.

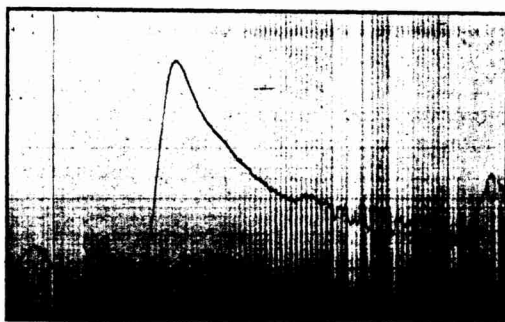


Fig. 5b.

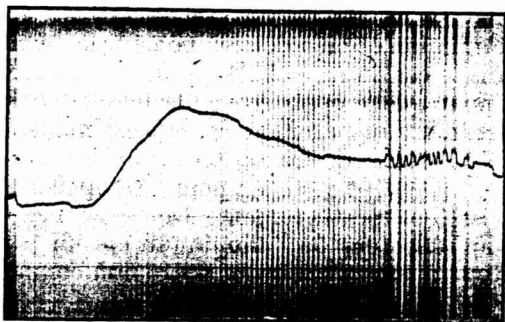


Fig. 5c.

ablement plus grand. Dans le cas 4c, où ni l'angle d'incidence ne correspond à l'angle φ de Bragg, ni la surface réfléchissante située dans l'axe du spectrographe (de sorte que la condition de la dispo-

sition symétrique n'est pas remplie), il se produit non seulement une forte diminution de la finesse de la raie mais encore un accroissement d'intensité des rayons diffus. Mais en même temps il est visible, que dans cette position complètement asymétrique la structure de la surface de la matière examinée commence à devenir visible dans le cliché. L'utilisation de la position asymétrique pour l'étude de la microstructure de la face de clivage des monocristaux mosaïques a été faite par Bačkovský.⁹⁾ Ses résultats obtenus par la même méthode pour la microstructure de la surface des polycristallites sont préparés pour la presse.

Sur les clichés reproduits dans la fig. 2a, b on a mesuré en projection la largeur de la raie (111). On a trouvé dans le cas a pour la largeur de la raie 0,12₂ mm, dans le cas b 0,68₇ mm. La largeur de la raie dans le cas a est causé par la divergence du faisceau primaire dans le sens vertical et, dans une mesure insensible, par ce que la fente n'est pas linéaire mais d'une largeur finie, conditions qui n'ont pas été respectées dans les formules (3), car il s'agissait seulement de la détermination du changement dans la largeur des raies causé par la divergence du faisceau primaire dans le sens horizontal. La différence dans la largeur des raies dans le cas a et b (en négligeant la variation insensible causée par l'influence de la largeur de la fente) correspond à l'influence du mosaïque délimité par l'angle de divergence du faisceau, et éventuellement par la pénétration des rayons dans le polycristallite.

Pour décider, quelle est la part de la pénétration et celle du mosaïque sur l'élargissement de la raie dans le cas a, b, on a déterminé de la façon suivante la profondeur de la pénétration des rayons X dans la plaque de Cu utilisée:

De la plaque de Cu on a obtenu par corrosion des feuilles d'épaisseur variant de 0,03 mm à 0,005 mm. On a déposé ces feuilles sur une couche d'aluminium et on a déterminé pour le même angle d'incidence α que dans le cas 2a ($\alpha = 21^\circ$) et pour les mêmes conditions expérimentales pour quelle épaisseur de la feuille de Cu les raies de Debye de l'aluminium disparaissaient. Il s'est montré, que pour une épaisseur de la feuille de Cu de 0,01 mm, les raies d'aluminium étaient encore faiblement visibles; pour une épaisseur de 0,015 mm elles disparaissaient pratiquement. Donc, en négligeant le fait, que le pouvoir réflecteur de l'aluminium est un peu différent de celui du Cu, on peut fixer l'épaisseur 0,015 mm comme la limite de la profondeur de laquelle, pour cet angle d'incidence, la réflexion des rayons X peut encore avoir l'influence sur la largeur des raies de Debye. Mais un calcul simple montre, que si nous prenons cette épaisseur maximum de pénétration, l'élargissement de

⁹⁾ Bačkovský, Journal de Physique, sous presse.

la raie dans le cas b par rapport au cas a, dû à la pénétration, est seulement de 0,011 mm. Mais l'élargissement total de la raie dans le cas b par rapport à a a été mesuré à quelques dixièmes de millimètres près. Donc on voit qu'on peut négliger l'influence de la pénétration sur l'élargissement et la variation de l'intensité des raies par rapport à l'influence du mosaïque. L'allure de la courbe microphotométrique dans la fig. 3a est donc une vérification du calcul dans le travail cité de Jahoda, car la pénétration ne peut pas se manifester dans la variation de l'intensité de la raie.

On peut donc dire que, d'accord avec ce qui a été déduit dans le commencement de ce travail pour la largeur de la raie et le parcours de son intensité, que la raie est réellement la plus étroite et la plus nettement définie du côté des grandes longueurs d'ondes, si l'angle d'incidence α est justement égal à l'angle φ de Bragg et si la matière est placée au milieu du spectrographe. Dans ce cas le noircissement du film dû au rayonnement diffus est aussi minimum. Le changement de l'angle de l'incidence et le déplacement de la surface réfléchissante de la matière examinée du milieu du spectrographe entraîne un élargissement et une perte de netteté de la raie et un accroissement du noircissement continu du fond du film.

La vérification des formules (3, 1) pour l'élargissement de la raie a été effectuée sur les clichés reproduits à la fig. 4a, b, c. Pour cela on a mesuré¹⁰⁾ la divergence du faisceau primaire et on a trouvé $\psi_0 = 16' 19''$. Les largeurs mesurées des raies dans ces trois cas, de même que les différences correspondantes des largeurs des raies dans les cas b et c par rapport à la largeur dans le cas a, mesurées et calculées d'après les formules (3, 1) sont données dans le tableau 1:

Tableau 1.

cliché	largeur de la raie mesurée en mm	différences des largeurs des raies en mm	
		mesurées	calculées
a	0,17 ₃		
b	0,17 ₅	0,00 ₂	0,001
c	0,90 ₀	0,72 ₇	0,813

Comme on voit, les valeurs calculées d'après les formules (3, 1) sont généralement en bon accord avec les valeurs mesurées, en tenant compte de ce que dans le cas c la raie est très diffuse, de sorte que la mesure de sa largeur est purement subjective et soumise à d'importantes fautes.

¹⁰⁾ La divergence du faisceau primaire fut déterminée photographiquement en fixant sur un film photographique l'image de la fente en deux distances connues.

Il est vraie, que ces dernières considérations valables pour les dispositions asymétriques ne sont pas d'une importance directe pour l'utilisation de la méthode décrite. En pratique il s'agit toujours des dispositions symétriques pour obtenir des raies aussi nettes que possible. Mais ces considérations nous donnent la possibilité de nous faire une image correcte de l'influence du mosaïque sur les mesures précises chez les monocristaux, pour lesquels, jusqu'alors, nous n'avons pas des preuves expérimentales directes, parce que d'autres effets de la même grandeur se superposent à l'influence du mosaïque.



Fig. 6.

L'avantage de cette méthode, travaillant avec un faisceau primaire des rayons X légèrement divergents, en comparaison avec les méthodes travaillantes avec des faisceaux primaires parallèles, est sa grande luminosité, d'où résulte une importante diminution du temps de pose. De ce qui précède il semblerait, au premier coup d'oeil, que cette méthode ne s'applique qu'aux cas où il s'agit des raies réfléchies dans un petit domaine angulaire, parce que seulement dans ces cas on pourrait à peu près satisfaire à la condition que l'angle d'incidence α soit égal à l'angle φ de Bragg. Mais la pratique montre qu'on peut utiliser cette méthode aussi pour la détermination ou pour la comparaison des réseaux cristallins où il s'agit des raies réfléchies dans un très large domaine angulaire. Dans la fig. 6 est reproduit un tel cliché de la radiation $\text{Cu K}\alpha, \beta$ réfléchi sur la plaque de Cu, l'angle d'incidence α égalant l'angle φ de Bragg de la raie de Debye (111). Comme on le voit, la finesse des raies de Debye qui correspondent à de φ plus grands, est tout à fait suffisante. Il est vraie, que, s'il s'agit de la mesure précise des distances, par ex. pour la détermination des constantes réticulaires des polycristallites, il est nécessaire d'effectuer les corrections appropriées pour le déplacement du centre des raies (voir formules 4).¹¹⁾

¹¹⁾ En ce cas il suffit de substituer dans les formules (4) pour φ les valeurs approximatives calculées directement du cliché.

Enfin je remercie M. le professeur Dr. V. Dolejšek, dans l'institut duquel ce travail a été fait, pour ses précieux conseils et son grand intérêt avec lequel il a suivi tout ce travail.

Prague, le 27. mars 1939.

Institut spectroscopie de l'Université Charles à Prague.

*

Použití svazku mírně rozbíhavých paprsků X ke studiu polykrystalitů.

(Obsah předchozího článku.)

Analogie mezi mosaikovými jednokrystaly a polykrystalitami vede na myšlenku použití ke studiu polykrystalitů podobné metody, jaké se používá u mosaikových jednokrystalů, a to bez újmy ostrosti čar. Použije-li se u mosaikových jednokrystalů primárního rozbíhavého svazku paprsků X, vyloučí se prakticky vliv mosaiky na šířku čáry — jak ukázal Bačkovský — v symetrickém uspořádání (reflektující plocha jednokrystalu ve středu spektrografu, vzdálenost krystal-štěrbina rovna vzdálenosti krystal-fotografický film).

Jsou odvozeny vzorce udávající šířku čar a průběh jejich intensity při použití této metody (t. j. rozbíhavého primárního svazku) u polykrystalitů. Z odvozených vzorců plyne, že čára je nejúžší a nejostřejší definována (spád intensity nejstrmější), je-li úhel dopadu právě roven příslušnému Braggovu úhlu dotyčné čáry a je-li reflektující plocha polykrystalitu umístěna ve středu spektrografu.

Pokud se týče průběhu intensity reflektovaných čar, plyne obecně z odvozených vzorců pro případ rozbíhavého primárního svazku prudký vzestup intensity na dlouhovlnné straně a pozvolný pokles na krátkovlnné straně čáry. Průběh intensity reflektovaných čar je analogický průběhu intensity čar reflektovaných mosaikovými jednokrystaly, jak byl spočítán Jahodou (tento průběh intensity u mosaikových jednokrystalů nebyl zatím experimentálně prokázán, protože jiné vlivy působící v opačném smyslu převažují vliv mosaiky, která je poměrně malá).

Je podána experimentální verifikace odvozených vzorců na šířce a průběhu intensity čáry (111) pro různé polohy rovinné reflexní plochy deštičky mědi a pro různé úhly dopadu.

Výhodou této metody, která používá mírně rozbíhavého svazku paprsků X je oproti metodám používajícím primární svazky rovnoběžných paprsků X její velká světelnost a zkrácení expoziční doby z toho plynoucí. Je ukázáno, že možnost použití této metody

ke studiu polykrystalitů v praxi není omezena pouze na případy, kde se jedná o Debyeovy čáry reflektované v malém úhlovém rozmezí (v kterémžto případě lze zhruba splnit podmínku rovnosti úhlu dopadu a příslušného úhlu Braggova), nýbrž že této metody lze také použít v případech, kdy se jedná o čáry reflektované ve velmi širokém úhlovém rozmezí, tedy v první řadě při kvalitativním srovnání mřížek polykrystalitů a dále také k přesnému určení mřížkové konstanty polykrystalitů (za předpokladu, že byly provedeny korekce Δ_0 pro posuv středu čar, který je udán v této práci).

František Link, Praha II, Sokolská 25: Sur une nouvelle construction de microphotomètre de l'Observatoire National de Prague — O nové konstrukci mikrofotometru Státní hvězdárny v Praze ...	198
Miroslav Rozsival, Praha II, U Karlova 5: Některé výsledky s novou fokusační metodou užívající Seemannova břitu — Quelques résultats obtenus avec une nouvelle méthode de focalisation utilisant le couteau de Seemann	206
A. Němejcová - Kochanovská, Praha II, U Karlova 5: Application d'un faisceau de rayons X légèrement divergents à l'étude des matières polycristallines — Použití svazku mírně rozbíhavých paprsků X ke studiu polykrystalitů	214

Názvy a značky elementární matematiky

8° 24 str.

1939

Brož. K 4,80

Normy přijaté Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze a schválené ministerstvem školství a národní osvěty pro školy obecné, měšťanské, střední a odborné a pro učitelské ústavy s českým jazykem vyučovacím.

FYSMA společnost s ručením omezeným
založená Jednotou českých
matematiků a fysiků v Praze

Praha II, Žitná 25.

Telefon 237-14, 293-08

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

přesně vyrobené, spolehlivé, odborně vyzkoušené.

NOVÉ PŘÍSTROJE:

Soubor přístrojů pro osvětlení podstaty letu — Soubor přístrojů k pokusům s fotobuňkou — Elektrodynamický oscilograf — Generátor krátkých elmg. vln — Variační solenoid — Hysteresigraf — Universální přístroj pro stavové zákony plynů — atd.

NAVŠTIVTE NÁS,

předvedeme Vám pokusy v naší předváděcí síni nezávazně.

NAPIŠTE NÁM,

posloužíme Vám radou nabídkou a prospekty.

OPRAVY POMŮCEK

a přístrojů kterékoliv výroby provádíme pečlivě a odborně.

Vydává a nakládá Jednota českých matematiků a fysiků v Praze.
Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8—12 a od 14—18 hodin kromě soboty odpoč., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihotiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohledací úřad Praha 25.

U. B.