ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Elektromagnetické vlny ve vodivých trubicích.

D. Maixnerová, Praha.

(Došlo 14. ledna 1939.)

Zákony šíření elektromagnetických vln ve vodivých trubicích kruhového průřezu vyšetřili po prvé Carson, Mead a Schelkunoff.[1]) Před nimi se touto otázkou zabýval Barrow,[2]) ale jen pro speciální případ symetrické elektrické vlny. Carson, Mead a Schelkunoff řešili tento problém obecně, a to v podstatě stejnou metodou, kterou stanovil Sommerfeld[3]) a po něm Hondros[4]) rychlost a útlum elektromagnetických vln na vodivém drátě.

Z teorie plyne, že se elektromagnetické vlny ve vodivých trubicích šíří podle docela jiných zákonů než na vodivých drátech. Fázová rychlost vln, které lze pozorovati na vodivém drátě, liší se u drátů obvyklé tloušťky nepatrně od rychlosti vln v okolním prostředí a je prakticky nezávislá na konstantách drátu (poloměr, vodivost), také útlum vln je malý. Teprve u velmi tenkých drátů (na př. pro vlny, jejichž délka ve vakuu činí několik dm, u drátů poloměru asi 10^{-3} mm) projevuje se vliv poloměru a vodivosti drátu; rychlost vln postupujících po takovém drátě je podstatně menší než rychlost vln v okolním prostředí a jejich útlum je značný. Pole je symetrické kolem osy drátu; elektrická síla leží v rovinách proložených osou drátu, síla magnetická v rovinách k ní kolmých a magnetické silokřivky jsou kruhy, jejichž středy leží v ose drátu. Podle Hondrose nazýváme tuto vlnu symetrickou vlnou elektrickou.

Teorie připouští ještě jiné typy elektromagnetických vln na vodivém drátě. Je to nejdříve vlna magnetická, v níž magnetická síla leží v rovinách proložených osou drátu, síla elektrická v rovinách k ní kolmých a elektrické silokřivky mají tvar kruhů se středy

---

1) J. R. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, The Bell System Technical Journal, **15** (1936), 310.

2) W. L. Barrow, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, **24** (1936), 1928.

3) A. Sommerfeld, Wiedemann's Annalen, **67** (1899), 233.

4) D. Hondros, Annalen der Physik, **30** (1909), 905.

na ose drátu; pole této vlny je také symetrické kolem osy drátu. Dále jsou vlny nesymetrické, v nichž elektrická i magnetická vlna jsou spolu spřaženy. Rychlost všech těchto vln závisí značně na konstantách drátu i na frekvenci. Praktického významu nemají, neboť jejich útlum je tak veliký, že se vůbec nedají pozorovati.

I vodivými trubicemi mohou se šířiti elektromagnetické vlny několika typů. Jsou to nejdříve symetrická vlna elektrická a symetrická vlna magnetická. Ale i nesymetrické vlny mohou tu býti dvojího druhu, elektrického a magnetického, nejsou tedy spolu spřaženy, jak je tomu v případě vodivého drátu. Kromě toho však se každá z těchto vln skládá z nekonečného počtu vln téhož typu, na př. z nekonečného počtu symetrických vln elektrických, které mají sice stejnou frekvenci, ale různé fázové rychlosti i útlum. O závislosti útlumu těchto vln na frekvenci lze zhruba říci toto. Je-li kmitová frekvence malá, je útlum všech vln, které by v trubici mohly vzniknouti, tak veliký, že se nedají pozorovati; trubice nepropouští elektromagnetické kmity nízkých frekvencí. Stoupá-li frekvence, počne při jisté její hodnotě útlum rychle klesati, až dosáhne hodnoty velmi malé; při které frekvenci to nastane, závisí jednak na poloměru trubice a na vodivosti jejích stěn, jednak i na tom, o jaký typ vlny jde; je tedy tato t. zv. první kritická frekvence jiná pro symetrickou vlnu elektrickou než pro symetrickou vlnu magnetickou. Od této frekvence počínajíc šíří se trubicí jedna vlna zvoleného typu. Zvyšujeme-li frekvenci dále, přijdeme ke druhé kritické frekvenci, při níž se objeví druhá vlna téhož typu; její útlum byl při nižších frekvencích tak veliký, že se nedala pozorovati, když se však frekvence kmitů přiblíží k druhé kritické hodnotě, počne útlum zase rychle klesati. Při frekvencích něco vyšších, než je druhá kritická hodnota, šíří se pak trubicí dvě vlny stejného typu lišící se od sebe fázovými rychlostmi. Dalším zvyšováním frekvence dospějeme k třetí kritické hodnotě; trubicí se pak šíří tři vlny stejného typu, stejných frekvencí a různých fázových rychlostí atd. To platí v podstatě stejně pro vlny všech typů bez rozdílu, takže při dosti vysokých frekvencích mohou vodivou trubicí procházeti i slabě tlumené symetrické vlny magnetické nebo vlny nesymetrické, a to elektrické i magnetické.

Také fázová rychlost vln v trubicích závisí podstatně na poloměru trubice a na její vodivosti, mimo to ovšem i na frekvenci. Je vždy větší než rychlost elektromagnetických v prostředí, kterým je trubice vyplněna.

V citované práci vypočetli Carson, Mead a Schelkunoff závislost útlumu na frekvenci pro jednotlivé typy vln, ale jen v případě, kdy je útlum malý, tedy pro dosti vysoké frekvence. Závislost fázové rychlosti na frekvenci stanovili jen pro trubice, jejichž stěny jsou z látky nekonečně dobře vodivé. V této práci jsou vypočteny obě tyto veličiny metodou jinou, která umožňuje stanoviti je pro každou frekvenci a za předpokladu, že vodivost stěn trubice je sice veliká, ale konečná.

1. Rovnice pro fázovou rychlost a útlum.

Nekonečně dlouhá trubice kruhového průřezu, jehož poloměr je ϱ, nechť je vyplněna homogenním isolujícím dielektrikem, dielektrické konstanty ε_2 a permeability μ_2. Stěny trubice nechť jsou z látky dobře vodivé (kov); její dielektrickou konstantu označíme ε_1, permeabilitu μ_1, konstantu vodivosti, měřenou v absolutní míře elektrostatické σ_1. V dalším budeme důsledně index 1 vztahovati na látku, z níž jsou stěny trubice, index 2 na dielektrikum v trubici.

Budeme předpokládati, že touto trubicí procházejí vlny časově netlumené, takže závislost intensity elektrického a magnetického pole $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na čase je dána funkcí $e^{i\omega t}$, kdež ω je reálné; je to kruhová frekvence. Do osy trubice položíme osu z; závislost intensit $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na ose z vyjadřuje pak funkce $e^{\pm i\lambda_n z}$. Veličina λ_n je obecně komplexní; píšeme-li ji v tvaru

$$\lambda = \frac{2\pi}{L} + i\varkappa, \tag{1}$$

značí L délku vlny procházející trubicí a $\varkappa$ její útlum, způsobený vývojem Jouleova tepla. Je

$$L = \frac{v}{f},$$

značí-li v fázovou rychlost vlny a f její frekvenci.

V rovině kolmé k ose trubice si zavedeme polární souřadnice r a φ. Závislost vektorů $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na φ se dá vyjádřiti Fourierovou řadou, takže obecný výraz pro jejich složky má tvar

$$e^{i\omega t} \, . \sum_{n=0}^{\infty} [P(r) \cos n\varphi + Q(r) \sin n\varphi] \, e^{i\lambda_n z}; \tag{2}$$

funkce $P(r)$ a $Q(r)$ se stanoví integrací Maxwellových rovnic.[5]) Pro $n = 0$ jsou složky elektrické a magnetické síly nezávislé na φ; pole je symetrické kolem osy trubice.

Z podmínek, které musí býti splněny v rozhraní, t. j. pro $r = \varrho$, plyne pak rovnice pro λ_n. Ta zní[6])

$$n^2\lambda_n^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2y^2}\right)^2 = \left(\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} - \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} - \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right). \tag{3}$$

---

[5]) Viz na př. D. Hondrons, loc. cit., rovn. (16) a (18).
[6]) Viz D. Hondros, loc. cit., rovn. (22).

Při tom n má týž význam jako v rovnici (2), dále je

$$x = \varrho\sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}, \quad y = \varrho\sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}, \tag{4}$$

kdež konstanta k je definována rovnicí

$$k = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 + 4\pi i\sigma\mu\omega}{c^2}; \tag{5}$$

ε je dielektrická konstanta prostředí, μ permeabilita, c rychlost světla ve vakuu.

Prostředí 1, stěny trubice, je vodivé. Budeme o něm předpokládati, že sahá až do nekonečna; jsou-li na př. stěny trubice kovové, je tento předpoklad dovolen, není-li tloušťka stěn nesmírně malá. Ve výraze pro k_1 je pak σ_1 velké číslo (na př. pro měď je $\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ absolutních jednotek elektrostatických), můžeme tedy v rovnici (5) první člen vynechati vedle členu druhého, nedosáhne-li ω hodnot tak značných, s jakými se shledáváme u kmitů optických. Pak je

$$k_1^2 = \frac{4\pi i}{c^2} \,.\, \sigma_1 \mu_1 \omega.$$

Sem dosadíme

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi \,.\, c}{l},$$

kdež l značí délku vlny odpovídající frekvenci f ve vakuu; budeme ji nazývati volnou vlnou. Je $l = c/f$. Tak dostaneme

$$k_1^2 = 8\pi^2 \frac{\sigma_1\mu_1}{cl} \,.\, i;$$

z toho plyne dále

$$k_1 = (1 + i)\, R, \tag{6}$$

kdež

$$R = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma_1\mu_1}{cl}} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\sigma_1\mu_1 f}. \tag{6'}$$

Pro kovy a vlny nepříliš dlouhé jsou k_1 i R veliká čísla. Tak na př. pro měď ($\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$, $\mu_1 = 1$) a pro $l = 10$ cm dostáváme $R = 25{,}78 \,.\, 10^3$ a $k_1 = (1 + i) \,.\, 25{,}78 \,.\, 10^3$.

Prostředí 2 isoluje, je tedy $\sigma_2 = 0$ a

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{c^2}\,\omega^2 = 4\pi^2 \frac{\varepsilon_2 \mu_2}{l^2},$$

takže

$$k_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\sigma_2 \mu_2} = \frac{2\pi f}{c} \,.\, \sqrt{\sigma_2\mu_2}. \tag{6''}$$

Dále značí v rovnici (3) $H_n(x)$ první Hankelovu funkci a $I_n(y)$ Besselovu funkci řádu n.[7]) Znamení odmocniny ve výraze, kterým je dáno x (rovn. 4), nutno vždy voliti tak, aby imaginární část x byla kladná.

Pro $n = 0$ je levá strana rovnice (3) rovna nule a rovnice se rozpadne v rovnice dvě:

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)} \tag{7}$$

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)} . \tag{8}$$

První z nich odpovídá symetrické vlně elektrické, druhá symetrické vlně magnetické.

Řešením rovnic (3), případně (7) nebo (8) dostaneme pro λ_n^2 komplexní výraz tvaru

$$\lambda_n^2 = p + iq, \tag{9}$$

a když vypočteme λ_n, plyne z rovnice (1) fázová rychlost i útlum vlny. Počet se dá zjednodušiti, poněvadž, jak uvidíme v dalším, je zpravidla p velké proti q. Musíme pak rozeznávati dva případy: $p > 0$, $p < 0$.

1. $p > 0$. Pak

$$\lambda_n = (p + iq)^{\frac{1}{2}}$$

a rozvojem v binomickou řadu dostaneme, když zanedbáme veličiny vyšších řádů,

$$\lambda_n = \sqrt{p}\left(1 + \frac{iq}{2p}\right).$$

Porovnáním s rovnicí (1) plyne

$$L = 2\pi \frac{1}{\sqrt{p}}$$

aneb

$$v = 2\pi \frac{f}{\sqrt{p}} \tag{10}$$

a pro konstantu útlumu dostáváme

$$\varkappa = \frac{q}{2\sqrt{p}}. \tag{11}$$

Poněvadž je q malé proti p, je útlum malý.

2. $p < 0$. Pak máme

[7]) Viz na př. D. Hondros, loc. cit. p. 948.

$$\lambda_n = (p + iq)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-p}\left(1 + \frac{iq}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a přibližně

$$\lambda_n = i\sqrt{-p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2\sqrt{-p}}.$$

Odtud plyne

$$L = 4\pi \frac{\sqrt{-p}}{q}$$

aneb

$$v = 4\pi \frac{f\sqrt{-p}}{q} \tag{12}$$

a

$$\varkappa = \sqrt{-p}. \tag{13}$$

V tomto případě dostáváme veliký útlum.

Jsou-li p a q téhož řádu, nutno λ_n vypočísti z výrazu (9) pro λ_n^2 obvyklou cestou. Položíme

$$\lambda_n^2 = re^{i\varphi}$$

je pak

$$\lambda_n = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Úhel φ musíme zvoliti tak, aby λ_n mělo reálnou i imaginární část kladnou.

Provedeme nyní počet pro jednotlivé typy vln.

2. Symetrická vlna elektrická.

Rovnice pro λ_n tu zní (rovn. 7)

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)}. \tag{14}$$

Hledáme vlny, jejichž útlum je malý. Pak je k_1 jistě veliké proti λ_n a v první rovnici (4) můžeme λ_n vynechati, takže dostaneme

$$x = \varrho k_1. \tag{15}$$

Je tedy x také veliké a má imaginární část kladnou. Platí pak přibližně

$$\frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = i$$

a rovnice (14) se dá psáti ve tvaru

$$y \cdot \frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{k_1} \cdot i \tag{16}$$

Pravá strana této rovnice je velmi malá; v prvním přiblížení vyhovíme jí tedy řešením

$$I_0(y) = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho kořenů vesměs reálných, stačí uvažovati jen kořeny kladné. Seřadíme-li je podle velikosti, dostaneme řadu

$$2{,}405, \quad 5{,}520, \quad 8{,}645, \quad 11{,}792, \quad \ldots$$

Označíme m-tý kořen y_{0m}; pro poněkud větší m je přibližně

$$y = (m - 1)\,\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Přesnější řešení rovnice (16) dostaneme, položíme-li

$$y = y_{0m} + \eta, \tag{17}$$

kdež η pokládáme za malé číslo. Pak levá strana oné rovnice zní

$$y \cdot \frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = \frac{(y_{0m} + \eta)\, I_0(y_{0m} + \eta)}{I'_0(y_{0m} + \eta)}.$$

Výrazy na pravé straně rozvineme v řadu, veličiny řádu η^2 a vyššího vynecháme, a poněvadž $I_0(y_{0m}) = 0$, dostaneme

$$y\,\frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = \eta \cdot y_{0m}.$$

Po dosazení rovnice (16) zní

$$\eta \cdot y_{0m} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{k_1} \cdot i,$$

takže

$$\eta = -i\,\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{y_{0m} \cdot k_1}.$$

Za k_1 dosadíme výraz (6), je pak

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{y_{0m}} \cdot \frac{i}{(1 + i)\,R}$$

aneb

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{2 y_{0m} R}\,(1 + i) \tag{18}$$

a podle rovnice (17)

$$y = y_{0m} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{2 y_{0m} R}\,(1 + i).$$

Z druhé rovnice (4) vypočteme nyní λ_n. Poněvadž je tu $n = 0$, a poněvadž pro y dostáváme nekonečně mnoho řešení, píšeme λ_{0m} místo λ_n. Je pak

$$y^2 = \varrho^2(k_2^2 - \lambda_{0m}^2)$$

aneb

$$\lambda_{0m}^2 = k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}.$$

Sem dosadíme $y = y_{0m} + \eta$ a vynecháme členy řádu η^2; tak vznikne

$$\lambda_{0m}^2 = k_2^2 - \frac{y_{0m}^2}{\varrho^2} - 2\,\frac{y_{0m}\eta}{\varrho^2}$$

a vzhledem k rovnici (18)

$$\lambda_{0m}^2 = k_2^2 - \frac{y_{0m}^2}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R}\cdot(1 + i),$$

takže podle rovnice (9) je

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2 - \frac{y_{0m}^2}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Je viděti, že q je velmi malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2^2 - y_{0m}^2/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej zatím, jsou útlum a fázová rychlost dány podle toho, jaké znamení má p, rovnicemi (10) a (11) nebo (12) a (13), při čemž možno za p psáti jednoduše

$$p = k_2^2 - \frac{y_{0m}^2}{\varrho^2}. \tag{19'}$$

Tento výraz je kladný, je-li

$$k_2 > \frac{y_{0m}}{\varrho};$$

záporný, je-li

$$k_2 < \frac{y_{0m}}{\varrho}.$$

Dosadíme-li sem za k_2 z rovnice (6″), nalezneme, že p mění své znamení v okolí frekvencí

$$f_{0m} = \frac{c\,.\,y_{0m}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}; \tag{20}$$

pro frekvence vyšší je p kladné, pro frekvence nižší záporné.

Pro kladná p je podle rovnice (10) fázová rychlost vlny odpovídající frekvenci f dána rovnicí

$$v_{0m} = 2\pi \frac{f}{\sqrt{k_2^2 - y_{0m}^2/\varrho^2}} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Dostáváme tedy pro fázovou rychlost nekonečně mnoho hodnot; trubicí se může šířiti nekonečně mnoho symetrických vln. Jejich fázové rychlosti nezávisí na vodivosti stěn, je-li ovšem tato veliká, a není-li frekvence kmitů blízká některé frekvenci f_{0m} dané rovnicí (20). Když do rovnice (21) dosadíme z rovnice (6″) za k_2 a z rovnice (20) za y_{0m}/ϱ, dostaneme po snadné úpravě pro v_{0m} výraz

$$v_{0m} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f_{0m}/f)^2}}, \tag{22}$$

který ovšem platí jen, je-li $f > f_{0m}$ a není-li rozdíl $f - f_{0m}$ příliš malý. Podíl $c/\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ je rychlost volné vlny v dielektriku vyplňujícím trubici, je tedy v_{0m} vždy větší než tato rychlost.

Pro útlum plyne z rovnice (11), (19) a (19′)

$$\varkappa_{0m} = \frac{\mu_1}{2\mu_2} \cdot \frac{k_2^2}{\varrho R} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - \frac{y_{0m}^2}{\varrho^2}}}$$

aneb vzhledem k rovnicím (6′), (6″) a (20) po úpravě

$$\varkappa_{0m} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (f_{0m}/f)^2}}, \tag{23}$$

kdež

$$\alpha = \frac{1}{2\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1 f}{\mu_2 \sigma_1}}. \tag{23'}$$

Tento výraz odvodili Carson, Mead a Schelkunoff v citované práci.[8]) Platí za stejných podmínek jako rovnice (21) pro fázovou rychlost.

Je-li $f < f_{0m}$ a rozdíl $f_{0m} - f$ nepříliš malý, vypočte se v a $\varkappa$ z rovnic (12) a (13), při čemž p a q jsou dány rovnicemi (19) a (19′). Po provedení počtu dostáváme tyto výrazy:

$$v_{0m} = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot f_{0m} \cdot \sqrt{1 - (f/f_{0m})^2} \tag{24}$$

a

$$\varkappa_{0m} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}\, f_{0m} \cdot \sqrt{1 - (f/f_{0m})^2}. \tag{25}$$

Tyto rovnice ovšem neplatí, stejně jako rovnice (22) a (23),

[8]) J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 327, rovn. (48).

je-li rozdíl $f - f_{0m}$ malý. Pak je totiž p téhož řádu jako q a λ_{0m} musíme vypočísti přímo z rovnice (9).

Jako příklad je v tab. 1 vypočtena fázová rychlost a útlum symetrické vlny elektrické v měděné trubici ($\sigma_1 = 5,75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ elektrostat. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočet je proveden pro první kořen $y_1 = 2,405$.

Tab. 1.

l cm	f_{01} sec^{-1} . 10^{-10}	$q \,.\, 10^6$	p	v_{01} cm/sec . 10^{-10}	$\varkappa_{01}$ cm^{-1}	Δz_{01} cm
8	0,375	13,30	+ 0,3855	3,79	1,1 . 10^{-5}	9,09 . 10^4
12	0,250	7,24	+ 0,0427	7,60	1,8 . 10^{-5}	5,56 . 10^4
12,5	0,240	6,81	+ 0,0212	10,36	2,3 . 10^{-5}	4,35 . 10^4
13	0,230	6,42	+ 0,0022	30,82	6,8 . 10^{-5}	1,47 . 10^4
13,02	0,230	6,41	+ 0,0015	37,26	8,3 . 10^{-5}	1,21 . 10^4
13,05	0,229	6,37	+ 0,0004	7,19 . 10^2	1,6 . 10^{-4}	6,28 . 10^3
13,07	0,229	6,37	—0,0003	81,52 . 10^2	0,017	58,82
13,5	0,222	6,07	—0,0148	5,4 . 10^4	0,12	8,33
14	0,214	5,75	—0,0300	8,1 . 10^4	0,18	5,56
20	0,150	3,37	—0,1327	20,4 . 10^4	0,36	2,78
30	0,100	1,87	—0,1875	29,7 . 10^4	0,43	2,33

Hodnoty Δz v posledním sloupci jsou dráhy měřené v cm, které vlna musí uraziti, aby její amplituda klesla na $1/e$-tou část původní hodnoty.

Z tabulky je zřejmé, že útlum $\varkappa_{01}$ je v intervalu $l = 8$ cm do $l = 13,05$ cm poměrně malý a jeho vzrůst zvláště s počátku nepatrný. Je vidět, že vlna musí v tomto intervalu proběhnouti velikou dráhu Δz, aby amplituda vlny klesla na $1/e$-tou část původní hodnoty. $l = 13,05$ cm tvoří jakousi hranici. Od této hodnoty útlum počne stoupati a je třeba stále menší dráhy Δz pro klesnutí amplitudy na $1/e$-tou část původní hodnoty. V tomto oboru se vlny procházející trubicí pozorovati nedají. Změna útlumu v okolí kritické frekvence je poměrně rychlá; pro $l = 13,05$ cm je $\varkappa_{01} = 1,6 \,.\, 10^{-4}$ cm^{-1}, pro $l = 13,07$ cm je $\varkappa_{01}$ již $1,7 \,.\, 10^{-2}$ cm^{-1}.

Fázová rychlost v_{01} s počátku stoupá zvolna, ale čím dále tím rychleji, až zase v okolí hodnoty $l = 13,05$ cm, kdy začíná útlum růsti, stoupá v_{01} velmi rychle.

3. Symetrická vlna magnetická.

Pro magnetickou symetrickou vlnu je λ_n dáno rovnicí (8), jež zní

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)}. \tag{26}$$

Hledáme zase vlny o malém útlumu, takže x je opět dáno rovnicí (15) a přibližně je

$$\frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = i.$$

Rovnici (26) můžeme pak psáti v tvaru

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1}. \tag{27}$$

Na pravé straně máme malé číslo; vyhovíme tedy poslední rovnici přibližně řešením

$$I'_0(y) = 0.$$

Tato rovnice má zase nekonečně mnoho reálných kořenů. Z nich musíme vyloučiti kořen $y = 0$, neboť v tom případě levá strana rovnice (27) není rovna nule, nýbrž $-1/2$. Seřadíme-li ostatní kladné kořeny podle velikosti, dostaneme řadu

$$3{,}83, \quad 7{,}02, \quad 10{,}17, \ldots;$$

pro poněkud větší m je přibližně

$$y'_{0m} = \left(m + \frac{1}{4}\right) \pi.$$

Přesněji píšeme kořeny rovnice (27) v tvaru

$$y = y'_{0m} + \eta;$$

kdež η je malé číslo. Po dosazení dostaneme až na veličiny řádu η^2

$$\frac{\eta I''_0(y'_{0m})}{y'_{0m}\, I_0(y'_{0m})} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1}. \tag{29}$$

Besselova funkce $I_0(y)$ splňuje diferenciální rovnici

$$I''_0(y) + \frac{1}{y} I'_0(y) + I_0(y) = 0.$$

Pro $y = y'_{0m}$ z ní plyne

$$\frac{I''_0(y'_{0m})}{I_0(y_{0m})} = -1,$$

když to dosadíme do rovnice (29), dostaneme

$$\eta = -i \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho k_1}.$$

Za k_1 dosadíme výraz (6); je pak

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho} \cdot \frac{1+i}{R} \tag{30}$$

a podle rovnice (28)

$$y = y'_{0m} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho R} (1+i).$$

Budeme psáti λ'_{0m} místo λ_n, pak stejně jako v předešlém případě dostaneme

$$\lambda'_{0m} = k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho^3 R} (1+i)$$

a porovnáním s rovnicí (9) plyne

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^3 R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^3 R}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Zase je q malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2^2 - y'^2_{0m}/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej, můžeme psáti

$$p = k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2}. \tag{31'}$$

Tento výraz je kladný, je-li

$$k_2 > \frac{y'_{0m}}{\varrho};$$

záporný, je-li

$$k_2 < \frac{y'_{0m}}{\varrho}.$$

p tedy mění své znamení v okolí frekvencí, daných rovnicí

$$f'_{0m} = \frac{c y'_{0m}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}.$$

Je-li p kladné, t. j. je-li $f > f'_{0m}$, a je-li mimo to rozdíl $f'_{0m} - f$ nepříliš malý, vypočteme v'_{0m} a $\varkappa'_{0m}$ z rovnic (10) a (11). Po provedení počtu dostaneme tyto výrazy

$$v'_{0m} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f'_{0m}/f)^2}} \tag{32}$$

a

$$\varkappa'_{0m} = \alpha \frac{(f'_{0m}/f)^2}{\sqrt{1 - (f'_{0m}/f)^2}} \tag{33}$$

α je dáno rovnicí (23'). Tento vzorec souhlasí s výrazem, který odvodili Carson, Mead a Schelkunoff.[9])

Pro záporná p, t. zn. pro $f < f'_{0m}$, a není-li rozdíl $f - f'_{0m}$ příliš malý, plynou z rovnic (12), (13), (31) a (31') tyto hodnoty pro fázovou rychlost a útlum

$$v'_{0m} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{f^2}{f'_{0m}} \cdot \sqrt{1 - (f/f'_{0m})^2} \tag{34}$$

a

$$\varkappa'_{0m} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \, . \, f'_{0m} \sqrt{1 - (f/f'_{0m})^2}. \tag{35}$$

Je-li rozdíl $f - f'_{0m}$ malý, pak je p téhož řádu jako q a λ_n musíme vypočísti přímo z rovnice (9).

Jako příklad je v tab. 2 vypočtena fázová rychlost a útlum symetrické vlny magnetické v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \, . \, 10^{-4} \, . \, c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočet je proveden pro první kořen $y = 3{,}83$.

Tab. 2.

l cm	f'_{01} sec^{-1} . . 10^{-10}	$q \, . \, 10^5$	p	v'_{01} cm/sec . . 10^{-10}	$\varkappa'_{01}$ cm^{-1}	$\Delta z'_{01}$ cm
8	0,375	1,27	+ 0,5582	3,17	$8{,}5 \, . \, 10^{-6}$	$1{,}18 \, . \, 10^5$
16	0,187	1,79	+ 0,0955	3,86	$2{,}9 \, . \, 10^{-5}$	$3{,}45 \, . \, 10^4$
24	0,125	2,19	+ 0,0098	8,26	$1{,}1 \, . \, 10^{-4}$	$9{,}09 \, . \, 10^3$
25,5	0,117	2,26	+ 0,0020	16,86	$2{,}53 \, . \, 10^{-4}$	$3{,}95 \, . \, 10^3$
25,8	0,116	2,27	+ 0,0006	30,78	$4{,}64 \, . \, 10^{-4}$	$2{,}16 \, . \, 10^3$
25,9	0,115	2,28	+ 0,0002	53,32	$8{,}05 \, . \, 10^{-4}$	$1{,}24 \, . \, 10^3$
26	0,115	2,28	—0,0003	$1{,}12 \, . \, 10^3$	$1{,}73 \, . \, 10^{-2}$	57,80
27	0,111	2,32	—0,0045	$4{,}02 \, . \, 10^3$	$6{,}71 \, . \, 10^{-2}$	14,90
30	0,100	2,45	—0,0148	$6{,}24 \, . \, 10^3$	0,12	8,33
40	0,075	2,83	—0,0340	$6{,}14 \, . \, 10^3$	0,18	5,56

Z tabulky vidíme, že průběh útlumu i fázové rychlosti je analogický jako v předešlém případě. Kritická hodnota volné délky vlny je nyní 25,9 cm.

4. Nesymetrické vlny.

Budeme nyní předpokládati, že je $n > 0$; λ_n pak je dáno rovnicí (3). Zase hledáme vlny malého útlumu, pro ně je $x = k_1 \varrho$

[9]) J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 327, rovn. (50).

a je veliké, takže přibližně

$$\frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = i.$$

y můžeme pokládati za malé proti x, takže na levé straně rovnice (3) zanedbáme y vedle x. V prvním faktoru na pravé straně je pak

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = \frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho}.$$

Vedle tohoto velkého členu zanedbáme druhý člen v závorkách, nesmí ovšem býti stejného řádu jako první člen; to bude splněno jistě, leží-li y dosti daleko od kteréhokoli z kořenů rovnice $I_n(y) = 0$. V druhém faktoru na pravé straně je

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = \frac{\mu_1}{k_1 \varrho} i$$

tento člen je malý a ponecháme celý faktor. Tak dostaneme

$$\frac{n^2 \lambda_n^2}{y^4} = \frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho} \cdot \left(\frac{\mu_1}{k_1 \varrho} i - \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right)$$

a po úpravě

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1}\left(1 + \frac{n^2 \lambda_n^2 \varrho^2}{y^4}\right).$$

Za k_1 dosadíme z rovnice (6) a za λ_n^2 dosadíme známý výraz odvozený z druhé rovnice (4), totiž

$$\lambda_n^2 = k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1+i}{2\varrho R} \cdot \left(1 + n^2 \frac{\varrho^2 k_2^2 - y^2}{y^4}\right); \tag{36}$$

pravá strana této rovnice je číslo velmi malé, v prvém přiblížení lze jí vyhověti řešením

$$I'_n(y) = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho reálných kořenů, jeden z nich je $y = 0$. Ten však musíme vyloučiti, neboť pro $y = 0$ a $n > 0$ je podíl $I'_n(y)/y \,.\, I_n(y)$ nekonečně veliký. Ostatní kladné kořeny seřazené podle velikosti označíme y'_{nm}. Jako přesnější řešení položíme zase

$$y = y'_{nm} + \eta, \tag{37}$$

kde η je malé číslo. Je pak

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\eta \cdot I''_n(y'_{nm})}{y'_{nm} I_n(y'_{nm})}.$$

Besselova funkce n-tého řádu splňuje rovnici

$$I''_n(y) + \frac{1}{y} \cdot I'_n(y) + \left(1 - \frac{n^2}{y^2}\right) I_n(y) = 0,$$

pro $y = y'_{nm}$ z ní plyne

$$I''_n(y'_{nm}) = -\left(1 - \frac{n^2}{y'^2_{nm}}\right) I_n(y'_{nm}).$$

Po dosazení do rovnice (36) a úpravě dostaneme

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1+i}{2\varrho R} \cdot y'_{nm}\left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{mn} - n^2)}\right). \tag{38}$$

Stejným postupem jako v předešlých případech dospějeme pak k těmto vztahům

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2 - \frac{y'^2_{nm}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\varrho^3 R}\left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{nm} - n^2)}\right) \cdot y'^2_{nm} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\varrho^3 R} \cdot \left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{nm} - n^2)}\right) \cdot y'^2_{nm}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Zase je q malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2^2 - y'^2_{nm}/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej, můžeme psáti

$$p = k_2^2 - \frac{y'^2_{nm}}{\varrho^2}, \tag{39'}$$

p mění tedy své znamení v okolí frekvencí, daných rovnicí

$$f'_{nm} = \frac{c \cdot y'_{nm}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \tag{40}$$

Pro kladná p použitím rovnic (10), (11), (39) a (39') dostáváme pro fázovou rychlost a konstantu útlumu tyto výrazy

$$v'_{nm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f'_{nm}/f)^2}} \tag{41}$$

$$\varkappa'_{nm} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (f'_{nm}/f)^2}} \cdot \left\{(f'_{nm}/f)^2 + \frac{n^2}{y'^2_{nm} - n^2}\right\}^{10)}. \tag{42}$$

Je-li p záporné, musíme výrazy pro v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ odvoditi z rovnic

[10]) Srv. J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 328, rovn. (52).

(12), (13), (39) a (39'). Pak je

$$v'_{nm} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{f^2}{f'_{nm}} \cdot \sqrt{1 - (f/f'_{nm})^2} \cdot \frac{1}{\left\{1 + (f/f'_{nm})^2 \frac{n^2}{y'^2_{nm} - n^2}\right\}} \tag{43}$$

a

$$\varkappa'_{nm} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cdot f'_{nm} \sqrt{1 - (f/f'_{nm})^2}. \tag{44}$$

Toto řešení odpovídá nesymetrické vlně magnetické; pro $n = 0$ přecházejí nalezené vzorce ve výrazy (32) až (35) odpovídající symetrické vlně magnetické.

Jako příklad vypočteme v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ pro vlny v měděné trubici ($\sigma_1 = 5,75 \cdot 10^{-4} \cdot c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm, a to pro $n = 1$ a pro první kořen $y_1 = 1,84$. Výsledky jsou obsaženy v tab. 3.

Tab. 3.

l cm	$f'_{11}\sec^{-1} \cdot 10^{-10}$	$q \cdot 10^6$	p	v'_{11} cm/sec $\cdot 10^{-10}$	$\varkappa'_{11}$ cm^{-1}	$\Delta z'_{11}$ cm
6	0,500	11,1	+0,9606	3,21	$5,68 \cdot 10^{-6}$	$1,76 \cdot 10^5$
10	0,300	7,26	+0,2594	3,69	$7,13 \cdot 10^{-6}$	$1,40 \cdot 10^5$
16	0,187	6,11	+0,0188	8,41	$2,23 \cdot 10^{-5}$	$4,49 \cdot 10^4$
17	0,176	6,06	+0,0012	32,58	$8,75 \cdot 10^{-5}$	$1,14 \cdot 10^4$
17,05	0,175	6,06	+0,0004	56,52	$1,51 \cdot 10^{-4}$	$6,60 \cdot 10^3$
17,1	0,175	6,06	—0,0004	$77,7 \cdot 10^2$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	50,00
18	0,166	6,04	—0,0136	$41,3 \cdot 10^3$	0,12	8,58
20	0,150	6,03	—0,0367	$59,9 \cdot 10^3$	0,19	5,22
30	0,100	6,03	—0,0915	$59,2 \cdot 10^3$	0,30	3,31

Průběhy v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ jsou obdobné jako v předešlých dvou případech. Kritická hodnota je v tomto případě $l = 17,05$ cm.

Předpokládali jsme, že y leží dosti daleko od kteréhokoli kořene rovnice $I_n(y) = 0$. To je splněno, neboť y je velmi přibližně dáno kořeny rovnice $I'_n(y) = 0$ a z teorie Besselových funkcí je známo, že všechny kořeny rovnic $I_n(y) = 0$ a $I'_n(y) = 0$ se od sebe dostatečně liší mimo kořen $y = 0$, který je oběma rovnicím společný pro $n > 1$, ale tento kořen jsme vyloučili.

Vyšetříme nyní, nevyhovíme-li rovnici (34) řešením, které je blízké kořenům rovnice $I_n(y) = 0$. Budeme zase hledat jen vlny s malým útlumem; pro ně podobným postupem jako svrchu se rovnice (3) zjednoduší a zní takto:

$$\frac{n^2\lambda^2}{y} = \left(\frac{k_1 i}{\varrho} \cdot \frac{1}{\mu_1} - \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right) \cdot \left(-\frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right).$$

Po úpravě

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{I'_n(y)}{I_n(y)}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{k_1 i}{k_2^2\varrho}+\frac{n^2\lambda_n^2}{y^3}\cdot\frac{I_n(y)}{I'_n(y)}. \tag{45}$$

Této rovnici vyhovíme skutečně hodnotou y, která je blízká některému kořenu rovnice $I_n(y) = 0$. Pak je totiž levá strana veliká, pravá strana také, neboť první její člen je veliký, druhý malý. Jeden z kořenů rovnice $I_n(y) = 0$ $(n > 0)$ je $y = 0$; ten vyšetříme zvlášť. Označíme y_{nm} libovolný nenulový kořen rovnice $I_n(y) = 0$, položíme

$$y = y_{nm} + \eta, \tag{46}$$

a dostaneme

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{\varrho i}{y_{nm}}$$

aneb vzhledem k rovnici (6)

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2\varrho}{2Ry_{nm}}\cdot(1+i). \tag{47}$$

Odtud vypočteme

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2-\frac{y_{nm}^2}{\varrho^2}+\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Není-li rozdíl $k_2^2 - y_{nm}^2/\varrho^2$ velmi malý, můžeme psáti

$$p = k_2^2-\frac{y_{nm}^2}{\varrho^2} \tag{48'}$$

p tedy mění své znamení v okolí frekvencí

$$f_{nm} = \frac{c y_{nm}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \tag{49}$$

Pro p kladné (vysoké frekvence) dostáváme z rovnic (10), (11), (48) a (48′) následující hodnoty pro fázovou rychlost a útlum[11])

$$v_{nm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(f_{nm}/f)^2}} \tag{50}$$

a

$$\varkappa_{nm} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-(f_{nm}/f)^2}}. \tag{51}$$

Pro záporná p (nízké frekvence) vyjdou z rovnic (12), (13),

---

[11]) Srv. J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 328, rovn. (51).

(48) a (48') tyto výrazy

$$v_{nm} = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot f_{nm} \sqrt{1 - (f/f_{nm})^2} \tag{52}$$

$$\varkappa_{nm} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} f_{nm} \sqrt{1 - (f/f_{nm})^2}. \tag{53}$$

Toto řešení odpovídá nesymetrické vlně elektrické; pro $n = 0$ přecházejí výrazy pro v_{nm} a $\varkappa_{nm}$ ve výrazy (22) až (25) odpovídající symetrické vlně elektrické.

Jako příklad je v tab. 4 vypočten útlum a fázová rychlost vln v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočty jsou provedeny pro $n = 1$ a pro první kořen $y_1 = 3{,}83$.

Tab. 4.

l cm	f_{11} sec^{-1} . . 10^{-10}	$q \,.\, 10^5$	p	v_{11} cm/sec . . 10^{-10}	$\varkappa_{11}$ cm^{-1}	Δz_{11} cm
4	0,750	3,77	+ 1,8803	3,43	1,38 . 10^{-5}	7,28 . 10^5
8	0,375	1,31	+ 0,0301	13,75	3,26 . 10^{-5}	2,66 . 10^5
8,2	0,365	1,29	+ 0,0004	1,16 . 10^2	3,22 . 10^{-4}	0,31 . 10^5
8,25	0,363	1,27	—0,0067	2,92 . 10^4	8,19 . 10^{-2}	12,2
8,26	0,363	1,27	—0,0081	3,20 . 10^4	8,94 . 10^{-2}	11,2
8,5	0,352	1,22	—0,0403	7,21 . 10^4	20,07 . 10^{-2}	4,98
10	0,300	0,95	—0,1920	17,4 . 10^4	43,82 . 10^{-2}	2,28
20	0,150	0,34	—0,4880	38,85 . 10^4	69,86 . 10^{-2}	1,43
30	0,100	0,28	—0,5428	33,4 . 10^4	73,67 . 10^{-2}	1,36

Průběhy útlumu a fázové rychlosti jsou obdobné předešlým případům. Mezní hodnota l je tu 8,2 cm.

Zbývá ještě vyšetřiti nulový kořen rovnice $I_n(y) = 0$ ($n > 0$). Pak je $y_{nm} = 0$ a

$$y = y_{nm} + \eta = \eta;$$

y je tedy malé. Pro malá y a $n > 0$ platí přibližně

$$\frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{n}{y}.$$

To dosadíme do rovnice (34), píšeme η místo y a dostaneme

$$\frac{n^2 \lambda_n^2}{\eta^4} = \left(\frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho} - \frac{k_2^2 n}{\eta^2}\right) \cdot \left(-\frac{n}{\eta^2}\right),$$