Sur un théorème de M. Mahler.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Reçu le 25 novembre 1938.)

Théorème. Soit M un corps convexe (fermé et borné) dans l'espace euclidien à n dimensions, symétrique par rapport au point $o = (0, \ldots, 0)$; soit $2^n A$ le volume de M. Soit $m > 0$ un nombre entier; pour chaque i $(1 \leqq i \leqq m)$ soit p_i un nombre premier, $f_i \geqq 0$ un nombre entier et $L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction qui fait correspondre à chaque système $(x_1, \ldots, x_n)$ des nombres p_i-adiques entiers un nombre p_i-adique entier et qui, de plus, jouit de la propriété suivante: si

$$L_i(x) - L_i(y) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}},$$

on a

$$L_i(x - y) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}}.[1]$$

Supposons enfin que

$$A \geqq p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}.$$

Alors il existe n nombres rationnels entiers $x_1, \ldots, x_n$ tels que le point $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq o$ soit situé dans M et que

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}} \text{ pour } 1 \leqq i \leqq m.$$

Démonstration. Premier cas:

$$A > p_i^{f_i} \ldots p_m^{f_m}. \tag{1}$$

En suivant une méthode de M. Mordell, choisissons un nombre entier rationnel $t > 0$ tel que $(t, p_1 \ldots p_m) = 1$ et soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points $(2y_1/t, \ldots, 2y_n/t)$ (y_i = nombres entiers rationnels) situés dans M. Soit B le nombre des points de l'ensemble $\mathfrak{B}$, donc, d'après (1),

$$B > t^n p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m},$$

[1]) Cette propriété subsiste, en particulier, pour chaque $f_i \geqq 0$, si $| L_i(x - y) |_{p_i} \leqq | L_i(x) - L_i(y) |_{p_i}$.