pro $1 \leqq r \leqq \tau$, musí platiti

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho.$$

při tom

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \dots & \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 & \dots & \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 & \dots & \beta_{2\nu-3} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \beta_\nu \end{vmatrix}.$$

Poznámka. Je-li $\varrho > 0$, pak má charakteristická rovnice již aspoň dva imaginární kořeny a jest tím již splněna podmínka 2., kterou není třeba vyjadřovat.

*

Sur les conditions de la stabilisation des oscillations par couplage.

(Extrait de l'article précédent.)

Le but de ce travail est de donner une forme convenable pour le calcul aux conditions pour qu'un système de n éléments couplés donne des oscillations stables.[1]) On obtient le résultat suivant:

Pour que le système des équations différentielles (II) donne des oscillations stables, il faut et il suffit que l'équation caractéristique (III) remplisse les conditions suivantes[2]):

1. Si une racine zéro existe, elle doit être simple. Dans ce cas introduisons la fonction $F(\lambda) = f(\lambda)/\lambda$, dans le cas contraire $F(\lambda) = f(\lambda)$; désignons par m' le degré de $F(\lambda)$.

2. La signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

où les s' sont les sommes des puissances des racines de l'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$, et dont le déterminant est

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots & s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots & s'_{m'} \\ \vdots & & & \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots & s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

doit remplir la condition $h - \varrho' \geqq 2$, c'est-à-dire

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ ou } \nu' \geqq 1,$$

où h est le rang de la forme quadratique, π' le nombre des perma-

[1]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 40.
[2]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

nences des signes et ν' le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D'_{m'},\ D'_{m'-1}\ldots D'_1,\ D'_0 = 1$$

du déterminant $D'_{m'}$ qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \ldots s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 \ldots s'_r \\ \vdots & \\ s'_{r-1} & s'_r \ldots s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \ldots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \ldots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \ldots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq m'$.

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ et tous les $\beta_{m'-2\nu-1}$ positifs ou tous égaux à zéro pour $0 \leqq \nu \leqq \left[\dfrac{m'-1}{2}\right]$.

4. Déterminons par la division progressive le plus grand commun diviseur

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \ldots + d_\tau$$

de deux polynômes $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, l'un formé des termes aux puissances λ paires, l'autre formé des termes aux puissances λ impaires de l'équation $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Désignons par $\varrho = \pi - \nu$ la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2}\, y_\xi y_\eta,$$

où les s sont les sommes des puissances des racines du plus grand commun diviseur $d(y) = 0$, π le nombre des permanences des signes et ν le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D_\tau,\ D_{\tau-1}, \ldots D_1,\ D_0 = 1$$

du déterminant

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_\tau \\ \vdots & \\ s_{\tau-1} & s_\tau \ldots s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \dots & (2r-3)\, d_{2r-3} & (2r-2)\, d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 \dots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 \dots & (2r-4)\, d_{2r-4} & (2r-3)\, d_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (\tau - r + 2)\, d_{r-2} & (\tau - r + 1)\, d_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq \tau$; on doit avoir

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho,$$

où

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 \dots \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 \dots \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 \dots \beta_{2\nu-3} \\ & & \vdots \\ & & \beta_\nu \end{vmatrix} .$$

Remarque. Si $\varrho > 0$, l'équation caractéristique a sûrement au moins deux racines imaginaires; donc, dans ce cas, la condition 2. est satisfaite d'elle - même et on peut la supprimer dans l'énoncé du théorème.