Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením.

Rostislav Košťál, Brno.

(Došlo 2. března 1938.)

V pojednání „Sur la stabilisation des oscillations par couplage"[1]) odvodil jsem podmínky, za kterých systém n spřažených elementů dává stabilní kmity, ať již elementy nespřažené dávají kmity stabilní neb nestabilní. Při použití těchto podmínek jest třeba určiti hodnosti a signatury kvadratických forem a potenční součty kořenů. V tomto pojednání uvádím, jak se určí signatura kvadratické formy a potenční součty kořenů a jak se užitím těchto výsledků upraví dřívější uvedené podmínky. K tomu použijeme věty:

Buď

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

kvadratická forma, jejíž determinant jest

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proměnné $x_1, x_2 \dots x_n$ uspořádáme tak, aby v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1} \dots R_1, R_0 = 1$$

uvedeného determinantu byl co možná nejmenší počet počátečních členů roven nule, a z následujících členů nikdy dva po sobě jdoucí nerovnali se nule. Označíme-li μ počet nulových počátečních členů, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů, jest hodnost kvadratické formy

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 40.

Determinanty vyskytující se v uvedeném pojednání jsou Hankelovy determinanty. Pro ně platí vztah

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_n \\ \vdots & \\ s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{\mu>\nu}^{1,n} (\lambda_\mu - \lambda_\nu)^2,$$

při čemž $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou kořeny rovnice, z nichž byl vytvořen determinant Δ_n.

Když všechny kořeny dané rovnice budou jednoduché, t. j. když $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ pro $1 \leq \nu, \mu \leq n, \mu \neq \nu$, bude Hankelův determinant $\Delta_n \neq 0$. Když aspoň jeden kořen bude násobný, pak $\Delta_n = 0$. Hlavní subdeterminant prvého řádu tohoto determinantu můžeme odvoditi takto. Platí tento vztah mezi maticemi

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \dots s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & s_3 \dots s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & s_4 \dots s_n \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-4} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \dots \lambda_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix}$$

Podle známého pravidla dá se vyjádřiti determinant matice na levé straně této rovnice součtem jistých součinů vždy jednoho ($(n-1)$-řadového) determinantu první matice s jedním determinantem druhé matice na pravé straně. Odtud dostáváme

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & \dots s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots s_{2n-4} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-2} & \lambda_{\nu_2}^{n-2} & \dots \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix}^2,$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Z tohoto výsledku vidíme: má-li daná rovnice všechny kořeny jednoduché, jsou všichni sčítanci kladní, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; když má daná rovnice jen jeden kořen dvojnásobný, pak jsou všichni sčítanci rovni nule až na jeden, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; v ostatních případech je $\Delta_{n-1} = 0$.

Abychom z původního Hankelova determinantu vytvořili jiný subdeterminant prvého řádu než hlavní, postupujeme podobně jako dříve: mezi maticemi platí vztah

$$
\begin{Vmatrix}
s_0 & s_1 & \dots & s_k & s_{k+2} & \dots & s_{n-1} \\
s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} & s_{k+3} & \dots & s_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_l & s_{l+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_{n-1} & s_n & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2n-2}
\end{Vmatrix} =
$$

$$
= \begin{Vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\
\lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_1^l & \lambda_2^l & \dots & \lambda_n^l \\
\lambda_1^{l+2} & \lambda_2^{l+2} & \dots & \lambda_n^{l+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}
\end{Vmatrix} \cdot
\begin{Vmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots & \lambda_1^k & \lambda_1^{k+2} \dots & \lambda_1^{n-1} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots & \lambda_2^k & \lambda_2^{k+2} \dots & \lambda_2^{n-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & & & & & \\
1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots & \lambda_n^k & \lambda_n^{k+2} \dots & \lambda_n^{n-1}
\end{Vmatrix};
$$

odtud obdržíme pro determinanty jako dříve vztah

$$
\begin{vmatrix}
s_0 & s_1 & \dots & s_k & s_{k+2} & \dots & s_{n-1} \\
s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} & s_{k+3} & \dots & s_n \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_l & s_{l+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_{n-1} & s_n & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2n-2}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \Sigma
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\
\lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_{\nu_1}^k & \lambda_{\nu_2}^k & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^k \\
\lambda_{\nu_1}^{k+2} & \lambda_{\nu_2}^{k+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{k+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1}
\end{vmatrix} \cdot
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\
\lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_{\nu_1}^l & \lambda_{\nu_2}^l & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^l \\
\lambda_{\nu_1}^{l+2} & \lambda_{\nu_2}^{l+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{l+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1}
\end{vmatrix},
$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Když hlavní subdeterminant prvého řádu je roven nule, t. j. rovnice má méně než $n - 1$ kořenů navzájem různých, jest také každý jiný subdeterminant prvého řádu roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají aspoň dva sloupce stejné.

Podobně je tomu i při každém jiném subdeterminantu vyššího řádu. Když hlavní subdeterminant řádu p Δ_{n-p} je roven nule, t. zn., že rovnice má méně než $n - p$ kořenů navzájem různých, musí také každý jiný subdeterminant řádu p býti roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají $n - p$ sloupců a proto aspoň dva sloupce stejné.

Když hlavní subdeterminant řádu r není roven nule, musí každý další hlavní subdeterminant vyššího řádu býti rovněž různý od nuly, poněvadž se již nemohou v determinantech, z nichž vzniká, vyskytnouti takové, které by měly dva sloupce stejné (ani dvě řádky).

Z těchto výsledků plyne, že u kvadratické formy, jejímž determinantem jest Hankelův determinant, není třeba k užití uvedené věty uspořádati proměnné tak, aby byly podmínky splněny,. poněvadž u Hankelova determinantu jsou splněny vždy. Proto uvedená věta zní pro Hankelův determinant takto:

Označíme-li v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1}, \ldots, R_1, R_0 = 1$$

determinantu

$$R_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{1}$$

počet nulových počátečních členů μ, počet shod znamének π a počet změn znamének ν, jest hodnost kvadratické formy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{i+k-2} \lambda_i \lambda_k$$

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

Členy determinantu (1) jsou potenční součty kořenů charakteristické rovnice. Řadu determinantů určíme buď tak, že potenční součty kořenů nahradíme koeficienty charakteristické rovnice podle Newtonových formulí, nebo výhodněji tak, že determinanty s potenčními součty kořenů nahradíme jinými s koeficienty dané rovnice podle vztahu prof. dr. K. Čupra.[2]) Podle Čuprova vztahu platí pro charakteristickou rovnici

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \beta_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \beta_n = 0$$

[2]) Dr. K. Čupr: Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **57** (1928), 217.

a pro determinanty

$$R_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (n-r+2)\,\beta_{r-2} & (n-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq n$.

Tímto způsobem dá se upraviti podmínka druhá a čtvrtá v dříve uvedených podmínkách, takže máme výsledek:

Aby systém diferenciálních rovnic (II) dával stabilní kmity, k tomu je nutné a stačí, aby rovnice (III) splňovala podmínky[3]):

1. nulový kořen může míti jen jednoduchý; když má nulový kořen, zavedeme funkci $F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$; jinak $F(\lambda) = f(\lambda)$; stupeň $F(\lambda)$ označme m'

$$F(\lambda) \equiv \lambda^{m'} + \beta_1\lambda^{m'-1} + \beta_2\lambda^{m'-2} + \dots + \beta_{m'} = 0;$$

2. signatura ϱ' kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2}\lambda_\xi\lambda_\eta,$$

jejíž determinant jest

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots s'_{m'} \\ & & \vdots \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

musí splňovati podmínku $h - \varrho' \geqq 2$, t. j.

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ čili } \nu' \geqq 1,$$

při čemž h jest hodnost kvadratické formy, π' počet shod znamének a ν' počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D'_{m'},\ D'_{m'-1} \dots D'_1,\ D'_0 = 1$$

determinantu $D'_{m'}$, vypočtených podle vztahu

[3]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \dots s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 \dots s'_r \\ \vdots & \\ s'_{r-1} & s'_r \dots s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq m'$;

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ a buď všechna $\beta_{m'-2\nu-1} > 0$, anebo všechna $\beta_{m'-2\nu-1} = 0$ pro $0 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m'-1}{2}\right]$;

4. postupným dělením určíme největší společnou míru

$$d(y) = d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \dots + d_\tau$$

dvou polynomů $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, utvořených jednak z členů o sudých mocninách λ, jednak z členů o lichých mocninách λ rovnice $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Označíme-li $\varrho = \pi - \nu$ signaturu kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta,$$

při čemž s jsou potenční součty kořenů největší společné míry $d(y) = 0$, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D_\tau, D_{\tau-1}, \dots D_1, D_0 = 1$$

determinantu

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_\tau \\ \vdots & \\ s_{\tau-1} & s_\tau \dots s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

vypočtených podle vztahu

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \dots & (2r-3)\,d_{2r-3} & (2r-2)\,d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 \dots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 \dots & (2r-4)\,d_{2r-4} & (2r-3)\,d_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (\tau-r+2)\,d_{r-2} & (\tau-r+1)\,d_{r-1} \end{vmatrix}$$