Varietà anolonome immerse in una varietà a connessione affine.

A. Maxia, Firenze.

(Giunto il 20 giugno 1938.)

I. Varietà complementari X_n^m, $X_n^{m'}$, in L_n.

Premessa. — L'argomento, che avrebbe dovuto essere pubblicato alcuni anni addietro e che perquanto completato e aggiornato ritrae le linee di una parte del mio lavoro di laurea, è diviso in due parti:

La prima parte — publicata qui[1]) — riguarda la determinazione delle condizioni di esistenza di due varietà anolonome X_n^m, $X_n^{m'}$ $(m' = n - m)$ fra loro complementari,[2]) per le quali siano assegnati i tensori di curvatura euleriana, in una varietà curva X_n dotata di connessione affine, nei due casi in cui le connessioni interna ed esterna delle due varietà vengano fissate a priori arbitrariamente o siano quelle subordinate dalla connessione dell'ambiente. Si perviene nei due casi a tre gruppi di equazioni le quali si possono considerare come una generalizzazione delle equazioni di Hlavatý e di quelle di Gauss, Codazzi, Ricci rispettivamente.

La sostanza del problema non è nuova. A parte alcuni particolari risultati già dati dallo Schouten (cfr. (1), (3), (5)) e dal Hlavatý (cfr. (4), (7)), il problema è stato trattato, per quanto in modo assai dissimile e da un punto di vista forse alquanto differente, dal Dienes (6). La esistenza di tale lavoro, del quale molto tardi ho avuto conoscenza, mi ha indotto ad alleggerire di molto la trattazione particolareggiata che in un primo tempo avevo esposto nella

[1]) La seconda parte del lavoro: „X_n^{n-1} *in* E_n *affine*“ è in corso di stampa nel „*Věstník Král. České spol. nauk*“ a Praha.

[2]) Uso una denominazione introdotta dal Vranceanu (cfr. (9) pag. 15) (i numeri dentro parentesi si riferiscono all'elenco bibliografico) e adottata da En. Bortolotti (10) la quale si riferisce al caso in cui la m-direzione della X_n^m e la m'-direzione della $X_n^{m'}$ uscenti dai punti di X_n non abbiano direzioni in comune.

presente nota. L'attuale esposizione presenta una forma semplice e organicamente sintetica mercè il continuo uso che si fa in X_n di una connessione Λ_{ji}^{h} la quale permette di sviluppare contemporaneamente lo studio delle due varietà X_n^m, $X_n^{m'}$ in X_n. Tale connessione mi è stata gentilmente suggerita dal Professor J. A. Schouten.

Al Prof. J. A. Schouten devo la mia gratitudine per i suggerimenti e le utili osservazioni di cui mi è stato largo nel rivedere tanto la prima che la seconda parte del presente lavoro.

Dappertutto nel presente lavoro ho cercato di tenermi al simbolismo introdotto dallo Schouten e da questi esposto in forma definitiva nell'opera (8) alla quale mi sono sovente riferito.

1. Generalità. Indichiamo con L_n una varietà n-dimensionale, riferita a coordinate $\xi^\varkappa$ $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varrho, \sigma, \tau = n+1, n+2, \ldots, 2n)$, dotata di una connessione affine di parametri $\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa}$[3]) e con ∇ il simbolo di derivazione covariante relativo alla connessione di L_n. Definiamo in L_n due varietà anolonome X_n^m, $X_n^{m'}$ $(m' = n - m)$ fra loro complementari associando a ogni punto ξ di L_n una m-direzione e una m'-direzione fra loro indipendenti determinate dai vettori $\underset{b}{B}{}^\varkappa$ $(a, b, c, d, e, f, g = 1, 2, \ldots, m)$, $\underset{q}{B}{}^\varkappa$ $(p, q, r, s, t, u, v, w = m+1, m+2, \ldots, n)$ rispettivamente.

Esprimiamo con $\underset{i}{B}{}^\varkappa$ $(h, i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n)$ uno qualunque dei vettori $\underset{b}{B}{}^\varkappa$, $\underset{q}{B}{}^\varkappa$ e indichiamo con e_i, $\overset{h}{e}$ i vettori fondamentali, covarianti e controvarianti rispettivamente, relativi al riferimento anolonomo che le $\underset{i}{B}{}^\varkappa$ definiscono in ogni punto di L_n.

Il sistema (h) che comprende, anzi si identifica coi due sistemi (a), (p) presi insieme, ci sarà utile per alleggerire e rendere più conciso l'aspetto formale delle espressioni di cui dovremo fare uso.

Poniamo

$$B_b^\varkappa = \overset{a}{e}_b \underset{a}{B}{}^\varkappa, \quad B_q^\varkappa = \overset{p}{e}_q \underset{p}{B}{}^\varkappa, \quad B_i^\varkappa = \overset{h}{e}_i \underset{h}{B}{}^\varkappa, \tag{1, 1}$$

dove $\overset{a}{e}_b$, $\overset{p}{e}_q$ sono i vettori fondamentali covarianti nelle due varietà anolonome, ed indichiamo con $B_\varkappa^i$ gli elementi reciproci dei sistemi misti $B_i^\varkappa$ nel determinante da essi formato

Sarà

$$B_h^\varkappa B_\lambda^h = A_\lambda^\varkappa = \begin{cases} 0 & \text{se } \varkappa \neq \lambda \\ 1 & \text{se } \varkappa = \lambda \end{cases} \tag{1, 2}$$

$$B_\varkappa^h B_i^\varkappa = A_i^h = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq i \\ 1 & \text{se } h = i \end{cases} \tag{1, 3}$$

[3]) Osserviamo che nei parametri delle connessioni che introdurremo metteremo a sinistra, anzichè a destra, l'indice di derivazione (cfr. (8) pag. 75, nota).

e quindi, posto

$$B^{\varkappa}_{\lambda} = B^{\varkappa}_{a} B^{a}_{\lambda}, \quad C^{\varkappa}_{\lambda} = B^{\varkappa}_{p} B^{p}_{\lambda}, \tag{1, 4}$$

$$B^{\varkappa}_{\lambda} + C^{\varkappa}_{\lambda} = A^{\varkappa}_{\lambda}. \tag*{1, 5)}$$

Indichiamo con u, v, w i vettori di $L_n, X^m_n, X^{m'}_n$, e limitiamoci ad osservare che le relazioni fra le componenti dei detti vettori nei sistemi $(\varkappa)$, (h), (a), (p) si possono esprimere tutte, nel modo ben noto e del resto immediato, per mezzo dei sistemi B, C introdotti. Così, se indichiamo, come sempre faremo, con $(\mathrm{d}\xi)^a$, $(\mathrm{d}\xi)^p$ le componenti di uno spostamento infinitesimo che giace in $X^m_n, X^{m'}_n$ rispettivamente, ricaveremo per essi le relazioni

$$\mathrm{d}\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{a}(\mathrm{d}\xi)^a, \quad \mathrm{d}\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{p}(\mathrm{d}\xi)^p, \tag{1, 6}$$

$$(\mathrm{d}\xi)^a = B^{a}_{\lambda}\, \mathrm{d}\xi^{\lambda}, \ (\mathrm{d}\xi)^p = B^{p}_{\lambda}\, \mathrm{d}\xi^{\lambda}; \tag{1, 7}$$

mentre per uno spostamento generico $\mathrm{d}\xi$ di L_n si avrà:

$$\mathrm{d}\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{a}(\mathrm{d}\xi)^a + B^{\varkappa}_{p}(\mathrm{d}\xi)^p = B^{\varkappa}_{h}(\mathrm{d}\xi)^h. \tag{1, 8}$$

Le (1, 7), che naturalmente son dei pfaffiani qualunque, si prestano molto bene, come se fossero dei veri e propri differenziali, per formare i differenziali assoluti ed esprimere le leggi di trasporto infinitesimo delle varie connessioni che ora introdurremo. Se poi, posto per brevità

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}, \tag{1, 9}$$

alle (1, 7) aggiungiamo gli operatori differenziali

$$\partial_i = B^{\mu}_{i}\, \partial_\mu \quad (\partial_b = B^{\mu}_{b}\, \partial_\mu, \ \partial_q = B^{\mu}_{q}\, \partial_\mu) \tag{1, 10}$$

e quindi

$$\partial_\mu = B^{i}_{\mu}\, \partial_i \tag{1, 11}$$

potremo far uso in X^m_n e in $X^{m'}_n$ dei simboli di derivazione e di differenziazione come se si fosse in varietà olonome a parametri pure olonomi.

Aggiungiamo infine che, ove occorra, faremo uso di un nuovo riferimento anolonomo (h') espresso dalle formule di trasformazione

$$B^{\varkappa}_{i'} = B^{i}_{i'} B^{\varkappa}_{i} \quad (|B^{i}_{i'}| \neq 0) \tag{1, 12}$$

e dalle inverse

$$B^{\varkappa}_{i} = B^{i'}_{i} B^{\varkappa}_{i'} \tag{1, 13}$$

con

$$B^{h}_{i'} B^{i'}_{i} = A^{h}_{i} = \begin{cases} 0 \text{ se } h \neq i \\ 1 \text{ se } h = i \end{cases} \tag{1, 14}$$

e con la condizione

$$B^{a}_{q'} = B^{p}_{b'} = 0 \text{ e quindi } B^{a'}_{q} = B^{p'}_{b} = 0, \tag{1, 15}$$

indispensabile perchè i nuovi riferimenti anolonomi subordinati (a'), (p') siano ancora relativi alla X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente.

In relazione al nuovo riferimento si avrà ad esempio

$$\partial_{i'} = B_{i'}^{i} \partial_i, \; \partial_i = B_i^{i'} \partial_{i'}. \tag{1, 16}$$

E in generale, preso un qualunque tensore di L_n, ad esempio quello di torsione $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$, si avrà:

$$S_{J'i'}^{\cdot\cdot h'} = B_{J'i'h}^{J\,i\,h'} S_{Ji}^{\cdot\cdot h} = B_{J'i'h}^{J\,i\,h'} B_{Ji\varkappa}^{\mu\lambda h} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{J'i'\varkappa}^{\mu\lambda h'} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}. \tag{1, 17}$$

2. Connessioni e tensori di curvatura euleriana relativi alle X_n^m, $X_n^{m'}$. Per le varietà X_n^m, $X_n^{m'}$, si presenta la possibilità di introdurre quattro connessioni distinte, due per ciascuna varietà,[4]) i cui parametri si potranno indicare rispettivamente con

$$\Lambda_{cb}^{a}, \; \Lambda_{rb}^{a}, \; \Lambda_{cq}^{p}, \; \Lambda_{rq}^{p}. \tag{2, 1}$$

La connessione Λ_{cb}^a (Λ_{cq}^p) sarà ad esempio una legge di rappresentazione affine fra gli E_m tangenti alla X_n^m (fra gli $E_{m'}$ tangenti alla $X_n^{m'}$) in punti di L_n infinitamente vicini lungo direzioni tangenti alla X_n^m. La detta connessione si può anche dire interna alla X_n^m (esterna alla $X_n^{m'}$). Analogamente si dovranno chiamare esterna alla X_n^m, interna alla $X_n^{m'}$, le connessioni Λ_{rb}^a, Λ_{rq}^p. Le connessioni (2, 1) però, oltre al significato geometrico accennato o all'altro equivalente che permette di riguardarle come rappresentazioni affini (omografie vettoriali) fra le totalità dei vettori della X_n^m o della $X_n^{m'}$ in punti infinitamente vicini lungo direzioni di X_n^m o di $X_n^{m'}$ — rappresentazioni espresse analiticamente dai seguenti gruppi di formule

$$\begin{aligned}
\overset{m}{\delta} v^a &= \mathrm{d}v^a + \Lambda_{cb}^a \, v^b \, (\mathrm{d}\xi)^c \\
\overset{m'}{\delta} v^a &= \mathrm{d}v^a + \Lambda_{rb}^a \, v^b \, (\mathrm{d}\xi)^r \\
\overset{m}{\delta} w^p &= \mathrm{d}w^p + \Lambda_{cq}^p \, w^q \, (\mathrm{d}\xi)^c \\
\overset{m'}{\delta} w^p &= \mathrm{d}w^p + \Lambda_{rq}^p \, w^q \, (\mathrm{d}\xi)^r
\end{aligned} \tag{2, 2}$$

— sono suscettibili di un'altra notevole interpretazione geometrica: le connessioni esterne Λ_{cq}^p, Λ_{rb}^a possono riguardarsi quali connessioni tangenziali per la X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente; mentre le connessioni interne per la X_n^m e $X_n^{m'}$ di parametri Λ_{cb}^a e Λ_{rq}^p sono le rispettive connessioni puntuali. In altri termini: la connessione

[4]) Cfr. (5) pag. 770.

Λ^p_{cq} ad esempio si può considerare come una legge di rappresentazione proiettiva tra le totalità di E_{n-1} dell' E_n tangente alla L_n uscenti dall' E_m tangente alla X^m_n nei punti infinitamente vicini $x^\varkappa$, $x^\varkappa + B^\varkappa_a(\mathrm{d}\xi)^a$; mentre la connessione puntuale, ad esempio Λ^a_{cb}, può considerarsi invece come una legge di rappresentazione fra un E_m e la sua proiezione, fatta parallelamente alla $X^{m'}_n$, negli altri, nei punti infinitamente vicini $x^\varkappa$, $x^\varkappa + B^\varkappa_a(\mathrm{d}\xi)^a$.

Possiamo notare che le quattro connessioni (2, 1) determinano nell'ambiente L_n una nuova connessione Λ^h_{Ji}[5]) avente i parametri Λ^a_{Jq}, Λ^p_{Jb} nulli e che le (2, 2) si possono considerare come ricavate dall'unica legge di trasporto

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^h_{Ji}\, u^i(\mathrm{d}\xi)^J \tag{2, 3}$$

fatta nell'ambiente quando la si applichi a vettori e lungo spostamenti giacenti in una almeno delle due varietà X^m_n, $X^{m'}_n$. Considerando separatamente i due casi in cui il trasporto (2. 3) si faccia lungo direzioni di X^m_n o di $X^{m'}_n$ si ha:

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^h_{cb}\, u^b\,(\mathrm{d}\xi)^c + \Lambda^h_{cq}\, u^q\,(\mathrm{d}\xi)^c \tag{2, 4}$$

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^h_{rb}\, u^b\,(\mathrm{d}\xi)^r + \Lambda^h_{rq}\, u^q\,(\mathrm{d}\xi)^r \tag{2, 5}$$

e da queste e dalle ipotesi

$$\Lambda^a_{Jq} = \Lambda^p_{Jb} = 0 \tag{2, 6}$$

segue:

1° Lungo una direzione di X^m_n la connessione Λ^h_{Ji} opera sulle componenti u^a di un vettore u^h di L_n nello stesso modo che opererebbe se il vettore u^h appartenesse alla X^m_n e sulle componenti u^p nello stesso modo che opererebbe se u^h appartenesse alla $X^{m'}_n$.

2° Lungo una direzione di $X^{m'}_n$ la connessione Λ^h_{Ji} opera sulle componenti u^a di un vettore u^h di L_n nello stesso modo che opererebbe se il vettore u^h appartenesse alla X^m_n e sulle componenti u^p nello stesso modo che opererebbe se u^h appartenesse alla $X^{m'}_n$.

Ciò può considerarsi come un'interpretazione geometrica delle (2, 6).

In relazione a un nuovo riferimento anolonomo definito dalle (1, 12) si avranno per le Λ^h_{Ji} le formule di trasformazione

$$\Lambda^{h'}_{J'i'} = B^{h'Ji}_{hJ'i'}\,\Lambda^h_{Ji} + B^{h'}_k\,\partial_{J'}\,B^k_{i'} \tag{2, 7}$$

---

[5]) Devo alla gentilezza del Professor J. A. Schouten un tale suggerimento ed altre importanti osservazioni riguardanti la connessione Λ^h_{Ji} la quale, come vedremo, permette di dare un aspetto formale semplice e conciso allo studio delle varietà anolonome.

e da queste in particolare, tenuto conto delle (1, 15),

$$\Lambda^{a'}_{J'q'} = B^{a'J\,q}_{a\;J'q'} \Lambda^{a}_{Jq} \tag{2, 8}$$

$$\Lambda^{p'}_{J'b'} = B^{p'Jb}_{p\;J'b'} \Lambda^{p}_{Jb}. \tag{2, 9}$$

Segue che i sistemi Λ^{a}_{Jq}, Λ^{p}_{Jb} si trasformano, rispetto a un cambiamento del riferimento anolonomo, come le componenti di un tensore e che il loro annullarsi ha conseguentemente significato invariante rispetto a siffatte trasformazioni.

Sempre dalle (2, 7) si ha:

$$\Lambda^{a'}_{J'b'} = B^{a'Jb}_{a\;J'b'} \Lambda^{a}_{Jb} + B^{a'}_{a}\, \delta_{J'} B^{a}_{b'} \tag{2, 10}$$

$$\Lambda^{p'}_{J'q'} = B^{p'Jq}_{pJ'q'} \Lambda^{p}_{Jq} + B^{p'}_{p}\, \delta_{J'} B^{p}_{q'} \tag{2, 11}$$

da cui segue che in relazione a un qualunque cambiamento del riferimento analonomo le connessioni interna ed esterna alle due varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ restano ancora tali.

Indichiamo con $'\nabla$ il simbolo di derivazione covariante relativo alla connessione Λ^{h}_{Ji} e accanto a questo ne introduciamo un altro, $^{*}D$, il quale opera con i parametri della connessione dell'ambiente in relazione agli indici della serie $\varkappa, \ldots, \tau$ e coi parametri Λ^{h}_{Ji} dove si trovi un indice della serie $a, \ldots, g$ o $p, \ldots, w$.

Si avrà ad esempio

$$^{*}D_J B^{\varkappa}_{i} = \partial_J B^{\varkappa}_{i} + B^{\mu\lambda}_{Ji} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{l} \Lambda^{l}_{J}\,. \tag{2, 12}$$

Le quantità ora scritte, che si comportano come le componenti di un tensore, dànno luogo nelle due varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ a quattro sistemi misti

$$^{*}D_c B^{\varkappa}_{b} = {}^{*}H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_c B^{\varkappa}_{b} + B^{\mu\lambda}_{cb} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{e} \Lambda^{e}_{cb} \tag{2, 13}$$

$$^{*}D_c B^{\varkappa}_{q} = -\,{}^{*}L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_c B^{\varkappa}_{q} + B^{\mu\lambda}_{cq} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{t} \Lambda^{t}_{cq} \tag{2, 14}$$

$$^{*}D_r B^{\varkappa}_{b} = -\,{}^{*}L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_r B^{\varkappa}_{b} + B^{\mu\lambda}_{rb} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{e} \Lambda^{e}_{rb} \tag{2, 15}$$

$$^{*}D_r B^{\varkappa}_{q} = {}^{*}H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_r B^{\varkappa}_{q} + B^{\mu\lambda}_{rq} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{t} \Lambda^{t}_{rq} \tag{2, 16}$$

che chiameremo tensori di curvatura euleriana: il primo e l'ultimo interni o puntuali gli altri due esterni o tangenziali. Segue facilmente dalle formule che definiscono questi tensori come da essi si possano ricavare le corrispondenti connessioni e anche, come risulta dalla (2, 12) e dalle successive, la connessione Λ^{h}_{J} avente i parametri soddisfacenti le condizioni (2, 6). È quindi indifferente assegnare per le varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ le connessioni (2, 1) o i relativi tensori di curvatura euleriana.

Nonostante l'arbitrarietà che finora abbiamo lasciato alle connessioni (2, 1), il fatto che le componenti

$$*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{p}, \quad *L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{a}, \quad *L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{p}, \quad *H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{a} \qquad (2,\ 17)$$

non dipendono da Λ_{ji}^{h} permette di esprimere in funzione di queste componenti i tensori

$$\overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda}^{\varrho\sigma} \nabla_{\varrho} B_{\sigma}^{\varkappa} \quad (2,\ 18) \qquad \overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} = C_{\mu\sigma}^{\varrho\varkappa} \nabla_{\varrho} C_{\lambda}^{\sigma} \quad (2,\ 20)$$

$$\overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} = B_{\mu\sigma}^{\varrho\varkappa} \nabla_{\varrho} B_{\lambda}^{\sigma} \quad (2,\ 19) \qquad \overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = C_{\mu\lambda}^{\varrho\sigma} \nabla_{\varrho} C_{\sigma}^{\varkappa} \quad (2,\ 21)$$

di cui fa uso Schouten. È facile infatti verificare che si ha:

$$\overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda}^{cb} C_{\nu}^{\varkappa} *H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} \quad (2,\ 22) \qquad \overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} = B_{\mu\lambda}^{rb} C_{\nu}^{\varkappa} *L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} \quad (2,\ 24)$$

$$\overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} = B_{\mu\lambda\nu}^{cq\varkappa} *L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} \quad (2,\ 23) \qquad \overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda\nu}^{rq\varkappa} *H_{rq}^{\cdot\cdot\nu}. \quad (2,\ 25)$$

Inversamente:

$$*H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} C_{\nu}^{\varkappa} = B_{cb}^{\mu\lambda} \overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \quad (2,\ 26) \qquad *L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} C_{\nu}^{\varkappa} = B_{rb}^{\mu\lambda} \overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} \quad (2,\ 28)$$

$$*L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} B_{\lambda}^{\varkappa} = B_{cq}^{\mu\lambda} \overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\ \varkappa} \quad (2,\ 27) \qquad *H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} B_{\nu}^{\varkappa} = B_{rq}^{\mu\lambda} \overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}. \quad (2,\ 29)$$

Cioè: mentre dai tensori di curvatura euleriana si possono ricavare quelli di Schouten, da questi ultimi non si possono, come è del resto naturale nelle nostre ipotesi, ottenere in generale quelli di curvatura euleriana, a meno che essi non siano tali da giacere con l'indice ν il primo e il terzo nella $X_n^{m'}$, il secondo e il quarto nella X_n^m. Questa particolare ipotesi però, quando valga, determina le connessioni, interna ed esterna, delle varietà ora dette le quali risultano allora stabilite in modo unico una volta fissati i parametri $\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ della connessione ambiente.

3. Tensori di torsione. A partire da un punto $P \equiv (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ della L_n consideriamo due vettori (spostamenti) infinitesimi $(\underset{1}{d\xi})^a$, $(\underset{2}{d\xi})^a$ giacenti in X_n^m. Siano Q, R gli estremi di tali vettori. Trasportiamo $\overrightarrow{PR}$ lungo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PQ}$ lungo $\overrightarrow{PR}$ per equipollenza relativa alla connessione interna alla X_n^m; siano $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{RT}$ i vettori che si hanno alla fine del trasporto. Gli estremi S, T di questi vettori, come pure avviene in generale per il caso olonomo, non coincidono, ma determinano un vettore $(T - S)$ che chiameremo vettore di torsione della X_n^m relativo ai due elementi PQ, PR. Tale vettore però, a differenza del caso olonomo, non giace in X_n^m. Esso si potrà quindi decomporre nelle sue componenti tangenziali alle X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente.

L'annullarsi della componente tangenziale alla $X_n^{m'}$ dà la nota condizione di olonomia della varietà di X_n^m.

Chiameremo il pentagono infinitesimo $PQSTRP$ ciclo elementare di prima specie.[6])

Si presenta immediata la costruzione di un altro ciclo elementare relativo alla $X_n^{m'}$, che chiameremo ciclo elementare di seconda specie, il cui vettore di chiusura $(T - S)$ darà la torsione della varietà $X_n^{m'}$ relativa ai due elementi del ciclo.

A questi due cicli se ne potrà aggiungere un terzo, ciclo elementare di terza specie, partendo da due spostamenti infinitesimi $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ situati ad esempio il primo sulla X_n^m, il secondo sulla $X_n^{m'}$ e trasportando poi $\overrightarrow{PR}$ in $\overrightarrow{QS}$ per equipollenza lungo $\overrightarrow{PQ}$ relativa alla connessione esterna alla $X_n^{m'}$ e $\overrightarrow{PQ}$ in $\overrightarrow{RT}$ per equipollenza lungo $\overrightarrow{PR}$ relativa alla connessione esterna alla X_n^m.

Si perviene così ad un nuovo vettore di chiusura che potrebbe chiamarsi vettore di torsione mista.

Il calcolo effettivo di tale vettore, nel caso dei tre cicli enumerati, si può fare direttamente senza difficoltà. Possiamo però giungere indirettamente al nostro risultato considerando i tre cicli suddetti come giacenti in L_n e facendo il trasporto dei vettori infinitesimi coi parametri della connessione Λ_{ji}^h.

Si ha allora, come è noto,[7]) per il vettore di chiusura $(T - S)$, nel sistema $(\varkappa)$,

$$2'S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}\,(\underset{1}{\mathrm{d}\xi})^{\mu}\,(\underset{2}{\mathrm{d}\xi})^{\lambda}, \tag{3, 1}$$

dove

$$'S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \overset{h}{=} \Lambda_{[\mu\lambda]}^{\varkappa}.^{8)} \tag{3, 2}$$

Passando al sistema anolonomo (h), ove si tengano presenti le formule di trasformazione (2, 7), si ha invece

$$2'S_{ji}^{\cdot\cdot h}\,(\underset{1}{\mathrm{d}\xi})^{j}\,(\underset{2}{\mathrm{d}\xi})^{i} \tag{3, 3}$$

dove

$$'S_{ji}^{\cdot\cdot h} = (-\,\partial_{[j}\,B_{i]}^{\varkappa} + B_{l}^{\varkappa}\,\Lambda_{[ji]}^{l})\,B_{\varkappa}^{h} \tag{3, 4}$$

o anche, per le (2, 12),

$$'S_{ji}^{\cdot\cdot h} = (B_{ji}^{\mu\lambda}\,\Gamma_{[\mu\lambda]}^{\varkappa} - {}^{*}D_{[j}\,B_{i]}^{\varkappa})\,B_{\varkappa}^{h} = S_{ji}^{\cdot\cdot h} - B_{\varkappa}^{h}\,{}^{*}D_{[j}\,B_{i]}^{\varkappa}. \tag{3, 5}$$

Le componenti del vettore $(T - S)$ nel caso dei tre cicli infinite-

[6]) Cfr. Vranceanu (2).

[7]) Cfr. ad esempio (8) pag. 80.

[8]) Col simbolo $\overset{h}{=}$ indichiamo che l'eguaglianza vale solo in riferimento a un sistema olonomo. Cfr. (8) pag. 68.

simi si hanno infine sostituendo nella (3, 3) al posto di $'S_{ji}^{\cdot\cdot h}$ i tensori

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot h} = S_{cb}^{\cdot\cdot h} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot h} \qquad (3, 6)$$

$$'S_{rq}^{\cdot\cdot h} = S_{rq}^{\cdot\cdot h} - {}^*H_{[rq]}^{\cdot\cdot h} \qquad (3, 7)$$

$$'S_{rb}^{\cdot\cdot h} = S_{rb}^{\cdot\cdot h} - \tfrac{1}{2}({}^*L_{br}^{\cdot\cdot h} - {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot h}) \qquad (3, 8)$$

che potremo chiamare tensori di torsione interna alla X_n^m, interna alla $X_n^{m'}$, mista rispettivamente.[9])

Fissando l'attenzione sul tensore di torsione interna alla X_n^m si hanno per esso i due sistemi di componenti

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot a} = S_{cb}^{\cdot\cdot a} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot a} \qquad (3, 9)$$

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot p} = S_{cb}^{\cdot\cdot p} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot p}. \qquad (3, 10)$$

Per la (3, 10) si ha anche, come risulta dalla (3, 4),

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot p} = - B_\varkappa^p \partial_{[c} B_{b]}^\varkappa \qquad (3, 11)$$

e il suo annullarsi esprime, come si era detto, la nota condizione di olonomia della varietà.[10])

In tale caso, sempre dalla (3, 4), segue che è

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot a} = \Lambda_{[cb]}^a \qquad (3, 12)$$

la condizione di olonomia del sistema (a) nella corrispondente varietà resa olonoma.

4. Tensori di curvatura riemanniana. Come per il caso olonomo si presenta naturale ricavare i tensori di curvatura relativi alle due varietà X_n^m, $X_n^{m'}$ col procedimento del trasporto ciclico fatto secondo la legge del parallelismo di ciascuna delle connessioni delle due varietà.

Poichè si presentano come possibili tre tipi di cicli elementari, i cicli di prima, seconda e terza specie, e lungo ciascuno di essi si possono trasportare vettori di due specie: vettori di X_n^m e di $X_n^{m'}$, avremo in complesso sei tensori di curvatura riemanniana.

Indicheremo con

$$'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{dcq}^{\cdot\cdot\cdot p},\ 'R_{srb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{srq}^{\cdot\cdot\cdot p},\ 'R_{scb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{scq}^{\cdot\cdot\cdot p} \qquad (4, 1)$$

i tensori di curvatura relativi al trasporto lungo cicli di prima, seconda, terza specie, rispettivamente.

Potremo considerare i primi due e i secondi due come tensori di curvatura riemanniana delle connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rb}^a, Λ_{rq}^p rispet-

[9]) Queste quantità comprendono i tensori di torsione dati dal Dienes: cfr. (6) pag. 269.

[10]) Cfr. ad es. (1) § 4, formula (30).

tivamente; ma a differenza di quanto accade per il caso olonomo non è possibile esprimere ciascuno di essi per i parametri delle corrispondenti connessioni e delle loro derivate. Questo è d'altra parte un inconveniente che è nella natura delle cose. Schouten e Hlavatý hanno in parte cercato di rimediarvi sostituendo al primo tensore di curvatura $'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ un'espressione che dipende solo dalla connessione Λ_{cb}^{a} e dal tensore $'S_{cb}^{\cdot\cdot p}$; ma il nuovo tensore non ha più la genesi geometrica caratteristica, in relazione al trasporto ciclico. Poichè i tensori a cui si perviene risultano equivalenti, quando vi si facciano opportune trasformazioni e sostituzioni, a quelli che dà il Dienes[11]) non crediamo che sia il caso di esporre qui gli sviluppi che, in base alla definizione datane, conducono alla loro determinazione diretta.

Osserviamo piuttosto che, come per il caso dei tensori di torsione, anche quelli di curvatura si possono ricavare da un solo sviluppo relativo al trasporto mediante le Λ_{ji}^{h} di un vettore u^h di L_n su di un ciclo pure di L_n specializzando poi opportunamente il ciclo e il vettore ivi trasportato. In questo modo i sei tensori di curvatura appaiono quali componenti dell'unico tensore

$$'R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h} = 2\partial_{[k}\Lambda_{j]i}^{h} + 2\Lambda_{[k|l|}^{h}\Lambda_{j]i}^{l} + 2\,('S_{kj}^{\cdot\cdot l} - \Lambda_{[kj]}^{l})\,.\,\Lambda_{li}^{h} \qquad (4,\,2)$$

la cui espressione si ricava con facilità quando si tenga conto della genesi geometrica che lo caratterizza.[12])

Non sarà superfluo notare che, sempre in conseguenza delle (2, 6), è

$$'R_{kjb}^{\cdot\cdot\cdot p} = 'R_{kjq}^{\cdot\cdot\cdot a} = 0. \qquad (4,\,3)$$

Per esaurire questo breve cenno sui tensori di curvatura bisognerebbe ora vedere come essi si presentano nelle formule di commutazione delle derivate secondo covarianti e dei differenziali assoluti relativi alle diversi connessioni. Noi non esporremo i calcoli a cio relativi ma daremo senz'altro i risultati del modo come operano i tre simboli differenziali

$$^{*}D_{[d}{}^{*}D_{c]},\quad {}^{*}D_{[s}{}^{*}D_{r]},\quad {}^{*}D_{[s}{}^{*}D_{c]} \qquad (4,\,4)$$

relativi ai tre cicli introdotti, quando vengano applicati a un tensore $T_{\cdot\cdot b}^{\varkappa p}$ avente componenti nei tre spazi L_n, X_n^m, $X_n^{m'}$ contemporaneamente. Avremo in generale

---

11) Cfr. (6) pag. 270.

12) Cfr. (8) pag. 110. Per il significato di $\Omega_{\nu\mu}^{\varrho}$ ved. loc. cit. pag. 68. Nel nostro caso è

$$\Omega_{kj}^{h} = 'S_{kj}^{\cdot\cdot h} - \Lambda_{[kj]}^{h}.$$

$$
\begin{aligned}
{}^*D_{[\varkappa}\, {}^*D_{j]}\, {}^*T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot i} = &- {}'S_{\varkappa j}^{\cdot\cdot\,\tau}\, {}^*D_\tau\, T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot i} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu}_{\varkappa j}\, R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\varkappa}\,\cdot \\
&\cdot\, T^{\lambda h}_{\cdot\cdot i} + \tfrac{1}{2}\, {}'R_{\varkappa j l}^{\cdot\cdot\cdot\, h}\, T^{\varkappa l}_{\cdot\cdot i} - \tfrac{1}{2}\, {}'R_{\varkappa j i}^{\cdot\cdot\cdot\, l}\, T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot l}
\end{aligned}
\tag{4, 5}
$$

dove

$$
R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\varkappa} \stackrel{h}{=} 2\,(\partial_{[\nu}\, \Gamma^{\varkappa}_{\mu]\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{[\nu|\varrho|}\, \Gamma^{\varrho}_{\mu]\lambda})
\tag{4, 6}
$$

è il tensore di curvatura riemanniana relativo alla connessione $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ e al sistema $(\varkappa)$.

Dalle (4, 5) si possono ricavare come caso particolare le formule relative agli operatori differenziali (4, 4).

5. Condizioni di integrabilità. Prima forma del teorema di e sistenza. Passiamo ora all'argomento più importante di questa prima parte che è quello riguardante la determinazione delle condizioni sotto le quali è possibile fissare in L_n le due varietà pseudonormali X^m_n e $X^{m'}_n$ quando siano dati a priori le connessioni delle due varietà e i relativi tensori di curvatura euleriana. Siccome l'esistenza delle due varietà è legata a quella dei sistemi $B^{\varkappa}_b$, $B^{\varkappa}_q$ i quali soddisfano le relazioni

$$
\begin{aligned}
{}^*D_c\, B^{\varkappa}_b &= {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\,\varkappa} \\
{}^*D_c\, B^{\varkappa}_q &= -\, {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\,\varkappa}
\end{aligned}
\quad (5,\ 1_1)
\qquad\qquad
\begin{aligned}
{}^*D_r\, B^{\varkappa}_b &= -\, {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\,\varkappa} \\
{}^*D_r\, B^{\varkappa}_q &= {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\,\varkappa}
\end{aligned}
\quad (5,\ 1_2)
$$

bisognerà anzitutto procurarci le condizioni di integrabilità delle (5, 1) riguardate come equazioni nelle funzioni incognite $B^{\varkappa}_b(\xi)$, $B^{\varkappa}_q(\xi)$.

Usando la derivazione covariante si ha, per teoremi noti, che dovranno essere soddisfatte o identicamente o in forza delle (5, 1) stesse, le condizioni seguenti

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^*D_{[d}\, {}^*H_{c]b}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= {}^*D_{[d}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_b \\
-\, {}^*D_{[d}\, {}^*L_{c]q}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= {}^*D_{[d}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_q
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 2}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
-\, {}^*D_{[s}\, {}^*L_{r]b}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= {}^*D_{[s}\, {}^*D_{r]}\, B^{\varkappa}_b \\
{}^*D_{[s}\, {}^*H_{r]q}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= {}^*D_{[s}\, {}^*D_{r]}\, B^{\varkappa}_q
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 3}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^*D_s\, {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\,\varkappa} + {}^*D\, {}^*L_{sb}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= 2{}^*D_{[s}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_b \\
-\, {}^*D_s\, {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\,\varkappa} - {}^*D_c\, {}^*H_{sq}^{\cdot\cdot\,\varkappa} &= 2{}^*D_{[s}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_q .
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 4}
$$

Tali condizioni pero, tenuto il debito conto delle (4, 5) e della identità di facile verifica

$$
{}^*D_\tau\, B^{\varkappa}_b = {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\,\varkappa}\, B^{c}_\tau + {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\,\varkappa}\, B^{r}_\tau
\tag{5, 5}
$$

$$
{}^*D_\tau\, B^{\varkappa}_q - {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\,\varkappa}\, B^{c}_\tau + {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\,\varkappa}\, B^{r}_\tau
\tag{5, 6}
$$

equivalgono alle altre

$$\left.\begin{aligned} {}^*D_{[d}\,{}^*H_{c]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= -\,'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{dcb}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\ &\quad - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{dcb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\ -\,{}^*D_{[d}\,{}^*L_{c]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= +\,'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{dcq}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\ &\quad - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{p}\,.\,'R_{dcq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (5,\ 7)$$

$$\left.\begin{aligned} -\,{}^*D_{[s}\,{}^*L_{r]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= -\,'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{srb}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\ &\quad - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{srb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\ {}^*D_{[s}\,{}^*H_{r]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= +\,'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{srq}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\ &\quad - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{p}\,'R_{srq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (5.\ 8)$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left({}^*D_{s}\,{}^*H_{cb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_{c}\,{}^*L_{sb}{}^{\cdot\cdot\varkappa}\right) &= -\,'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{scb}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{scb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\ -\tfrac{1}{2}\left({}^*D_{s}\,{}^*L_{cq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_{c}\,{}^*H_{sq}{}^{\cdot\cdot\varkappa}\right) &= 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu\lambda}_{scq}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{p}\,'R_{scq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (5.\ 9)$$

che sono le condizioni d'integrabilità del sistema (5. 1). Le (5, 7) si possono raccogliere in un unico gruppo

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu}_{dc}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{{}^*D_{[d}\,{}^*H_{c]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\ &\quad + \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{dcb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\, B^{b}_{\lambda} + \{-\,{}^*D_{[d}\,{}^*L_{c]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \qquad (5.\ 10) \\ &\quad + 'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{p}\,'R_{dcq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\, B^{q}_{\lambda} \end{aligned}$$

ad esse equivalente e che tiene in certo modo il posto di quelle che si sogliono chiamare le equazioni di Hlavatý, relative a una varietà X_m e alla sua varietà anolonoma complementare immerse in un L_n.

In modo analogo si ricavano dalle (5. 8). (5. 9) gli altri due gruppi

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu}_{sr}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{-\,{}^*D_{[s}\,{}^*L_{r]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} \\ + \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{srb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\, B^{b}_{\lambda} &+ \{{}^*D_{[s}\,{}^*H_{r]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \qquad (5.\ 11) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} B^{k}_{p}\,'R_{srq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\, B^{q}_{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu}_{sc}\, R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{\tfrac{1}{2}\left({}^*D_{s}\,{}^*H_{cb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_{c}\,{}^*L_{sb}{}^{\cdot\cdot\varkappa}\right) + 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - \\ &\quad - 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{a}\,'R_{scb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\, B^{b}_{\lambda} + \{-\tfrac{1}{2}({}^*D_{s}\,{}^*L_{cq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \qquad (5,\ 12) \\ &\quad + {}^*D_{c}\,{}^*H_{sq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + 'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B^{\varkappa}_{p}\,'R_{scq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\, B^{q}_{\lambda} \end{aligned}$$

ad esse equivalenti, i quali, assieme alle (5, 10), si possono considerare come una generalizzazione della equazioni di Hlavatý estesa alle varietà non olonome.

Evidentemente le (5, 10), (5, 11), (5, 12) possono anche riunirsi in un solo gruppo del quale il primo membro è semplicemente costituito dalle $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$. Le (5, 7), (5, 8), (5, 9) si possono anche risolvere rispetto a $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$. Si ottengono allora dodici gruppi di equazione che, quando vi si facciano opportuni sviluppi e sostituzioni, si possono considerare come equivalenti a quelle date dal Dienes nel lavoro già citato (cfr. (6) pag. 278).

Le condizioni di integrabilità (5, 10), (5, 11), (5, 12), contengono ancora in termini finiti le funzioni incognite $B_b^\varkappa$, $B_q^\varkappa$. Se quindi indichiamo con F_1 complessivamente tali equazioni, con F_2 quelle che da esse si ottengono con derivazione (covariante) seguita da sostituzione delle $*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $-*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $-*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa}$ alle derivate $*D_c B_b^\varkappa$, $*D_c B_q^\varkappa$, $*D_r B_b^\varkappa$, $*D_r B_q^\varkappa$ che vi compaiono, con F_3 quelle che si ottengono dalle F_2 con analoga derivazione e sostituzione ecc . . . possiamo enunciare il seguente

teorema di esistenza (prima forma): date le connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p e i tensori $*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa}$ condizione necessaria e sufficiente perchè esistano in L_n (in cui $\Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa$ sono i parametri della connessione) una X_n^m e una $X_n^{m'}$ (da considerarsi come varietà complementari l'una dell'altra) tali che assegnata alla X_n^m e alla $X_n^{m'}$ le connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p siano $*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa}$ i rispettivi tensori di curvatura euleriana è che esista un intero N tale che le equazioni $F_1, F_2, \ldots, F_N$ nelle $B_b^\varkappa$, $B_q^\varkappa$ siano algebricamente compatibili e le loro soluzioni soddisfino alle F_{N+1}.

Siccome le funzioni incognite sono complessivamente n^2, se q delle equazioni $F_1, F_2, \ldots, F_N$ sono indipendenti, la soluzione del sistema dipende da $n^2 - q$ parametri arbitrari.

6. Connessioni subordinate all'ambiente. Seconda forma del teorema di esistenza. Finora fra la connessione $\Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa$ dell'ambiente e le quattro connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p non si è supposta alcuna relazione. Estenderemo ora al nostro caso le condizioni di subordinazione che si sogliono dare nel caso olonomo. Precisamente: fisseremo la legge di trasporto per equipollenza dei vettori controvarianti di X_n^m e di $X_n^{m'}$, il chè basta per fissare le connessioni nelle due varietà, mediante le seguenti condizioni analitiche:

$$*D_c v^a = B_{c\varkappa}^{\mu a} \nabla_\mu v^\varkappa \tag{6, 1}$$

$$*D_r v^a = B_{r\varkappa}^{\mu a} \nabla_\mu v^\varkappa \tag{6, 2}$$

$$*D_c w^p = B_{c\varkappa}^{\mu p} \nabla_\mu w^\varkappa \tag{6, 3}$$

$$*D_r w^p = B_{r\varkappa}^{\mu p} \nabla_\mu w^\varkappa. \tag{6, 4}$$

Tali condizioni di subordinazione, delle quali sono ben noti i varî significati geometrici, dànno luogo alle conseguenze analitiche:

$$*H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa = *L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa = *L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa = *H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa = 0 \qquad (6,\ 5)$$

che sono equivalenti alle altre:

$$\left.\begin{aligned} *H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= *H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa \\ *L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= *L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa \end{aligned}\right\} \ (6,\ 6_1) \qquad \left.\begin{aligned} *L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= *L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa \\ *H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= *H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu \end{aligned}\right\} \ (6,\ 6_2)$$

Le condizioni ora scritte mostrano subito come si simplifichino le formule (2, 22)...(2, 29) relative ai tensori di Schouten e come tali condizioni concordino con quanto è stato osservato alla fine del n. 2.

Essendo in forza delle (6, 6)

$$\left.\begin{aligned} H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= H_{cb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= L_{rb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \end{aligned}\right\} \ (6,\ 7_1) \qquad \left.\begin{aligned} L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= L_{cq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \\ H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= H_{rq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} \ (6,\ 7_2)$$

potremo scrivere il sistema di equazioni (5, 1) nel modo seguente[13])

$$\left.\begin{aligned} D_c B_b^\varkappa &= H_{cb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ D_c B_q^\varkappa &= - L_{cq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} \ (6,\ 8_1) \qquad \left.\begin{aligned} D_r B_b^\varkappa &= - L_{rb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ D_r B_q^\varkappa &= H_{rq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} \ (6,\ 8_2)$$

con che le relative condizioni di integrabilità (5, 7), (5, 8), (5, 9) divengono

$$\left.\begin{aligned} & - {}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{dcb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa\, {}'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ & \qquad = B_p^\varkappa D_{[d} H_{c]b}^{\cdot\cdot p} - H_{[c|b|}^{\cdot\cdot t} L_{d]t}^{\cdot\cdot\varkappa} \\ & {}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{dcq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa\, {}'R_{dcq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ & \qquad = - B_a^\varkappa D_{[d} L_{c]q}^{\cdot\cdot a} - L_{[c|q|}^{\cdot\cdot e} H_{d]e}^{\cdot\cdot\varkappa} \end{aligned}\right\} \ (6,\ 9)$$

$$\left.\begin{aligned} & - {}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{srb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa\, {}'R_{srb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ & \qquad = - B_p^\varkappa D_{[s} L_{r]b}^{\cdot\cdot p} - L_{[r|b|}^{\cdot\cdot t} H_{s]t}^{\cdot\cdot\varkappa} \\ & {}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{srq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa\, {}'R_{srq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ & \qquad = B_a^\varkappa D_{[s} H_{r]q}^{\cdot\cdot a} - H_{[r|q|}^{\cdot\cdot e} L_{s]e}^{\cdot\cdot\varkappa} \end{aligned}\right\} \ (6,\ 10)$$

$$\left.\begin{aligned} & - {}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{scb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa\, {}'R_{scb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ & = \tfrac{1}{2} (B_p^\varkappa D_s H_{cb}^{\cdot\cdot p} + H_{cb}^{\cdot\cdot t} H_{st}^{\cdot\cdot\varkappa} + B_p^\varkappa D_c L_{sb}^{\cdot\cdot p} - L_{sb}^{\cdot\cdot t} L_{ct}^{\cdot\cdot\varkappa}) \\ & {}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{scq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa\, {}'R_{scq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ & = - \tfrac{1}{2} (B_a^\varkappa D_s L_{cq}^{\cdot\cdot a} - L_{cq}^{\cdot\cdot e} L_{se}^{\cdot\cdot\varkappa} + B_a^\varkappa D_c H_{sq}^{\cdot\cdot a} + H_{sq}^{\cdot\cdot e} H_{ce}^{\cdot\cdot\varkappa}) \end{aligned}\right\} \ (6,\ 11)$$

---

[13]) Quando valgono la condizioni di subordinazione (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4) indicheremo senza l'asterisco (*) tanto il simbolo di derivazione covariante come i tensori di curvatura euleriana.

dove ora

$$\left.\begin{aligned} {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e} &= S_{dc}{}^{\cdot\cdot e} \\ {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e} &= S_{sc}{}^{\cdot\cdot e} - \tfrac{1}{2} L_{cs}{}^{\cdot\cdot e} \\ {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e} &= S_{sr}{}^{\cdot\cdot e} - H_{[sr]}{}^{\cdot\cdot e} \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 12)$$

$$\left.\begin{aligned} {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t} &= S_{dc}{}^{\cdot\cdot t} - H_{[dc]}{}^{\cdot\cdot t} \\ {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t} &= S_{sc}{}^{\cdot\cdot\,\prime} + \tfrac{1}{2} L_{sc}{}^{\cdot\cdot t} \\ {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t} &= S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}. \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 13)$$

Dalle (6, 9) si ricavano le altre equivalenti

$$\left.\begin{aligned} {}'R_{dcb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{dcb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, H_{[c|b|}{}^{\cdot\cdot t} L_{d]t}{}^{\cdot\cdot a} \\ 2D_{[d} H_{c]b}{}^{\cdot\cdot p} &= B_{dcb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e} H_{eb}{}^{\cdot\cdot p} + 2\,{}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t} L_{tb}{}^{\cdot\cdot p} \\ 2D_{[d} L_{c]q}{}^{\cdot\cdot a} &= - B_{dcq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2'\,S_{dc}{}^{\cdot\cdot e} L_{eq}{}^{\cdot\cdot a} + 2'\,S_{dc}{}^{\cdot\cdot t} H_{tq}{}^{\cdot\cdot a} \\ {}'R_{dcq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{dcq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, L_{\ c|q|}{}^{\cdot\cdot e} H_{d]e}{}^{\cdot\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 14)$$

che costituiscono il primo gruppo di equazioni di Gauss, Codazzi, Ricci, generalizzate.

Gli altri due gruppi

$$\left.\begin{aligned} {}'R_{srb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{srb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, L_{[r|b|}{}^{\cdot\cdot t} H_{s]t}{}^{\cdot\cdot a} \\ 2D_{[s} L_{r]b}{}^{\cdot\cdot p} &= - B_{srb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e} H_{eb}{}^{\cdot\cdot p} - 2\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t} L_{tb}{}^{\cdot\cdot p} \\ 2D_{[s} H_{r]q}{}^{\cdot\cdot a} &= B_{srq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e} L_{eq}{}^{\cdot\cdot a} - 2\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t} H_{tq}{}^{\cdot\cdot a} \\ {}'R_{srq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{srq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, H_{[r|q|}{}^{\cdot\cdot e} L_{s]e}{}^{\cdot\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 15)$$

$$\begin{aligned} {}'R_{scb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{scb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - H_{cb}{}^{\cdot\cdot t} H_{st}{}^{\cdot\cdot a} + L_{sb}{}^{\cdot\cdot t} L_{ct}{}^{\cdot\cdot a} \\ D_s H_{cb}{}^{\cdot\cdot p} + D_c L_{sb}{}^{\cdot\cdot p} &= B_{scb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e} H_{eb}{}^{\cdot\cdot p} + 2\,{}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t} L_{tb}{}^{\cdot\cdot p} \\ D_s L_{cq}{}^{\cdot\cdot a} + D_c H_{sq}{}^{\cdot\cdot a} &= - B_{scq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e} L_{eq}{}^{\cdot\cdot a} + 2'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t} H_{tq}{}^{\cdot\cdot a} \\ {}'R_{scq}{}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{scq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - L_{cq}{}^{\cdot\cdot e} L_{se}{}^{\cdot\cdot p} + H_{sq}{}^{\cdot\cdot e} H_{ce}{}^{\cdot\cdot p} \end{aligned} \qquad (6,\ 16)$$

si ottengono in corrispondenza alle (6, 10), (6, 11).

La prima delle equazioni (6, 14) è la generalizzazione dell'equazione di Gauss già data da Schouten e da Hlavatý.[14]) Così pure da Schouten (cfr. bibl. (3)) sono state date le generalizzazioni dell'equazione di Ricci e di quelle di Codazzi, corrispondenti alla quarta e alla seconda e terza delle (6, 14). Essendo le (6, 14), (6, 15), (6, 16) comprese nelle più generali (5, 7), (5, 8), (5, 9) esse saranno contenute anche come è naturale, nelle formule già citate del Dienes (bibl. (5)). Non faremo precisazioni più particolari sui citati confronti e concluderemo col seguente

[14]) Cfr. bibl. (1) form. 39, (3) form. 68 e (4) form. 8.