ROČNÍK 68. SEŠIT 2.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty

PRAHA 1939

Ročně 4 sešity Předplatné (pro nečleny) 120 K

JOURNAL TCHÈQUE DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE.
Éditeur: Jednota českých matematiků a fysiků, Praha II-609.
Abonnement pour un an 120 K. Chèques postaux: Praha 13103.

Année 68 Fascicule 2 1938/39

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická — Travaux mathématiques

Část fysikální — Travaux de physique

Tento sešit vyšel 25. března 1939.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Varietà anolonome immerse in una varietà a connessione affine.

A. Maxia, Firenze.

(Giunto il 20 giugno 1938.)

I. Varietà complementari X_n^m, $X_n^{m'}$, in L_n.

Premessa. — L'argomento, che avrebbe dovuto essere pubblicato alcuni anni addietro e che perquanto completato e aggiornato ritrae le linee di una parte del mio lavoro di laurea, è diviso in due parti:

La prima parte — publicata qui[1]) — riguarda la determinazione delle condizioni di esistenza di due varietà anolonome X_n^m, $X_n^{m'}$ $(m' = n - m)$ fra loro complementari,[2]) per le quali siano assegnati i tensori di curvatura euleriana, in una varietà curva X_n dotata di connessione affine, nei due casi in cui le connessioni interna ed esterna delle due varietà vengano fissate a priori arbitrariamente o siano quelle subordinate dalla connessione dell'ambiente. Si perviene nei due casi a tre gruppi di equazioni le quali si possono considerare come una generalizzazione delle equazioni di Hlavatý e di quelle di Gauss, Codazzi, Ricci rispettivamente.

La sostanza del problema non è nuova. A parte alcuni particolari risultati già dati dallo Schouten (cfr. (1), (3), (5)) e dal Hlavatý (cfr. (4), (7)), il problema è stato trattato, per quanto in modo assai dissimile e da un punto di vista forse alquanto differente, dal Dienes (6). La esistenza di tale lavoro, del quale molto tardi ho avuto conoscenza, mi ha indotto ad alleggerire di molto la trattazione particolareggiata che in un primo tempo avevo esposto nella

[1]) La seconda parte del lavoro: „X_n^{n-1} *in* E_n *affine*" è in corso di stampa nel „*Věstník Král. České spol. nauk*" a Praha.

[2]) Uso una denominazione introdotta dal Vranceanu (cfr. (9) pag. 15) (i numeri dentro parentesi si riferiscono all'elenco bibliografico) e adottata da En. Bortolotti (10) la quale si riferisce al caso in cui la m-direzione della X_n^m e la m'-direzione della $X_n^{m'}$ uscenti dai punti di X_n non abbiano direzioni in comune.

presente nota. L'attuale esposizione presenta una forma semplice e organicamente sintetica mercè il continuo uso che si fa in X_n di una connessione Λ_{ji}^{h} la quale permette di sviluppare contemporaneamente lo studio delle due varietà X_n^m, $X_n^{m'}$ in X_n. Tale connessione mi è stata gentilmente suggerita dal Professor J. A. Schouten.

Al Prof. J. A. Schouten devo la mia gratitudine per i suggerimenti e le utili osservazioni di cui mi è stato largo nel rivedere tanto la prima che la seconda parte del presente lavoro.

Dappertutto nel presente lavoro ho cercato di tenermi al simbolismo introdotto dallo Schouten e da questi esposto in forma definitiva nell'opera (8) alla quale mi sono sovente riferito.

1. Generalità. Indichiamo con L_n una varietà n-dimensionale, riferita a coordinate $\xi^\varkappa$ $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varrho, \sigma, \tau = n+1, n+2, \ldots, 2n)$, dotata di una connessione affine di parametri $\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa}$[3]) e con ∇ il simbolo di derivazione covariante relativo alla connessione di L_n. Definiamo in L_n due varietà anolonome X_n^m, $X_n^{m'}$ $(m' = n - m)$ fra loro complementari associando a ogni punto ξ di L_n una m-direzione e una m'-direzione fra loro indipendenti determinate dai vettori $\underset{b}{B}{}^\varkappa$ $(a, b, c, d, e, f, g = 1, 2, \ldots, m)$, $\underset{q}{B}{}^\varkappa$ $(p, q, r, s, t, u, v, w = m+1, m+2, \ldots, n)$ rispettivamente.

Esprimiamo con $\underset{i}{B}{}^\varkappa$ $(h, i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n)$ uno qualunque dei vettori $\underset{b}{B}{}^\varkappa$, $\underset{q}{B}{}^\varkappa$ e indichiamo con e_i, $\overset{h}{e}$ i vettori fondamentali, covarianti e controvarianti rispettivamente, relativi al riferimento anolonomo che le $\underset{i}{B}{}^\varkappa$ definiscono in ogni punto di L_n.

Il sistema (h) che comprende, anzi si identifica coi due sistemi (a), (p) presi insieme, ci sarà utile per alleggerire e rendere più conciso l'aspetto formale delle espressioni di cui dovremo fare uso.

Poniamo

$$B_b^\varkappa = \overset{a}{e}_b \underset{a}{B}{}^\varkappa, \quad B_q^\varkappa = \overset{p}{e}_q \underset{p}{B}{}^\varkappa, \quad B_i^\varkappa = \overset{h}{e}_i \underset{h}{B}{}^\varkappa, \tag{1, 1}$$

dove $\overset{a}{e}_b$, $\overset{p}{e}_q$ sono i vettori fondamentali covarianti nelle due varietà anolonome, ed indichiamo con $B_\varkappa^i$ gli elementi reciproci dei sistemi misti $B_i^\varkappa$ nel determinante da essi formato

Sarà

$$B_h^\varkappa B_\lambda^h = A_\lambda^\varkappa = \begin{cases} 0 & \text{se } \varkappa \neq \lambda \\ 1 & \text{se } \varkappa = \lambda \end{cases} \tag{1, 2}$$

$$B_\varkappa^h B_i^\varkappa = A_i^h = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq i \\ 1 & \text{se } h = i \end{cases} \tag{1, 3}$$

[3]) Osserviamo che nei parametri delle connessioni che introdurremo metteremo a sinistra, anzichè a destra, l'indice di derivazione (cfr. (8) pag. 75, nota).

e quindi, posto

$$B^{\varkappa}_{\lambda} = B^{\varkappa}_{a} B^{a}_{\lambda}, \quad C^{\varkappa}_{\lambda} = B^{\varkappa}_{p} B^{p}_{\lambda}, \tag{1, 4}$$

$$B^{\varkappa}_{\lambda} + C^{\varkappa}_{\lambda} = A^{\varkappa}_{\lambda}. \tag{1, 5}$$

Indichiamo con u, v, w i vettori di L_n, X^m_n, $X^{m'}_n$, e limitiamoci ad osservare che le relazioni fra le componenti dei detti vettori nei sistemi $(\varkappa)$, (h), (a), (p) si possono esprimere tutte, nel modo ben noto e del resto immediato, per mezzo dei sistemi B, C introdotti. Così, se indichiamo, come sempre faremo, con $(d\xi)^a$, $(d\xi)^p$ le componenti di uno spostamento infinitesimo che giace in X^m_n, $X^{m'}_n$ rispettivamente, ricaveremo per essi le relazioni

$$d\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{a}(d\xi)^a, \quad d\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{p}(d\xi)^p, \tag{1, 6}$$

$$(d\xi)^a = B^{a}_{\lambda}\, d\xi^{\lambda}, \quad (d\xi)^p = B^{p}_{\lambda}\, d\xi^{\lambda}; \tag{1, 7}$$

mentre per uno spostamento generico $d\xi$ di L_n si avrà:

$$d\xi^{\varkappa} = B^{\varkappa}_{a}(d\xi)^a + B^{\varkappa}_{p}(d\xi)^p = B^{\varkappa}_{h}(d\xi)^h. \tag{1, 8}$$

Le (1, 7), che naturalmente son dei pfaffiani qualunque, si prestano molto bene, come se fossero dei veri e propri differenziali, per formare i differenziali assoluti ed esprimere le leggi di trasporto infinitesimo delle varie connessioni che ora introdurremo. Se poi, posto per brevità

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}, \tag{1, 9}$$

alle (1, 7) aggiungiamo gli operatori differenziali

$$\partial_i = B^{\mu}_{i}\, \partial_\mu \quad (\partial_b = B^{\mu}_{b}\, \partial_\mu, \ \partial_q = B^{\mu}_{q}\, \partial_\mu) \tag{1, 10}$$

e quindi

$$\partial_\mu = B^{i}_{\mu}\, \partial_i \tag{1, 11}$$

potremo far uso in X^m_n e in $X^{m'}_n$ dei simboli di derivazione e di differenziazione come se si fosse in varietà olonome a parametri pure olonomi.

Aggiungiamo infine che, ove occorra, faremo uso di un nuovo riferimento anolonomo (h') espresso dalle formule di trasformazione

$$B^{\varkappa}_{i'} = B^{i}_{i'} B^{\varkappa}_{i} \quad (|\, B^{i}_{i'}\, | \neq 0) \tag{1, 12}$$

e dalle inverse

$$B^{\varkappa}_{i} = B^{i'}_{i} B^{\varkappa}_{i'} \tag{1, 13}$$

con

$$B^{h}_{i'} B^{i'}_{i} = A^{h}_{i} = \begin{cases} 0 \text{ se } h \neq i \\ 1 \text{ se } h = i \end{cases} \tag{1, 14}$$

e con la condizione

$$B^{a}_{q'} = B^{p}_{b'} = 0 \text{ e quindi } B^{a'}_{q} = B^{p'}_{b} = 0, \tag{1, 15}$$

indispensabile perchè i nuovi riferimenti anolonomi subordinati (a'), (p') siano ancora relativi alla X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente.

In relazione al nuovo riferimento si avrà ad esempio

$$\partial_{i'} = B_{i'}^{i}\, \partial_i, \quad \partial_i = B_i^{i'}\, \partial_{i'}. \tag{1, 16}$$

E in generale, preso un qualunque tensore di L_n, ad esempio quello di torsione $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$, si avrà:

$$S_{J'i'}^{\cdot\cdot h'} = B_{J'i'h}^{J\,i\,h'}\, S_{Ji}^{\cdot\cdot h} = B_{J'i'h}^{J\,i\,h'}\, B_{Ji\varkappa}^{\mu\lambda h}\, S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{J'i'\varkappa}^{\mu\lambda h'}\, S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}. \tag{1, 17}$$

2. Connessioni e tensori di curvatura euleriana relativi alle X_n^m, $X_n^{m'}$. Per le varietà X_n^m, $X_n^{m'}$, si presenta la possibilità di introdurre quattro connessioni distinte, due per ciascuna varietà,[4] i cui parametri si potranno indicare rispettivamente con

$$\Lambda_{cb}^{a}, \quad \Lambda_{rb}^{a}, \quad \Lambda_{cq}^{p}, \quad \Lambda_{rq}^{p}. \tag{2, 1}$$

La connessione Λ_{cb}^{a} (Λ_{cq}^{p}) sarà ad esempio una legge di rappresentazione affine fra gli E_m tangenti alla X_n^m (fra gli $E_{m'}$ tangenti alla $X_n^{m'}$) in punti di L_n infinitamente vicini lungo direzioni tangenti alla X_n^m. La detta connessione si può anche dire interna alla X_n^m (esterna alla $X_n^{m'}$). Analogamente si dovranno chiamare esterna alla X_n^m, interna alla $X_n^{m'}$, le connessioni $\Lambda_{rb}^{a}, \Lambda_{rq}^{p}$. Le connessioni (2, 1) però, oltre al significato geometrico accennato o all'altro equivalente che permette di riguardarle come rappresentazioni affini (omografie vettoriali) fra le totalità dei vettori della X_n^m o della $X_n^{m'}$ in punti infinitamente vicini lungo direzioni di X_n^m o di $X_n^{m'}$ — rappresentazioni espresse analiticamente dai seguenti gruppi di formule

$$\begin{aligned} \overset{m}{\delta} v^a &= dv^a + \Lambda_{cb}^{a}\, v^b\, (d\xi)^c \\ \overset{m'}{\delta} v^a &= dv^a + \Lambda_{rb}^{a}\, v^b\, (d\xi)^r \\ \overset{m}{\delta} w^p &= dw^p + \Lambda_{cq}^{p}\, w^q\, (d\xi)^c \\ \overset{m'}{\delta} w^p &= dw^p + \Lambda_{rq}^{p}\, w^q\, (d\xi)^r \end{aligned} \tag{2, 2}$$

— sono suscettibili di un'altra notevole interpretazione geometrica: le connessioni esterne Λ_{cq}^{p}, Λ_{rb}^{a} possono riguardarsi quali connessioni tangenziali per la X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente; mentre le connessioni interne per la X_n^m e $X_n^{m'}$ di parametri Λ_{cb}^{a} e Λ_{rq}^{p} sono le rispettive connessioni puntuali. In altri termini: la connessione

[4]) Cfr. (5) pag. 770.

Λ^{p}_{cq} ad esempio si può considerare come una legge di rappresentazione proiettiva tra le totalità di E_{n-1} dell' E_n tangente alla L_n uscenti dall' E_m tangente alla X^m_n nei punti infinitamente vicini $x^\varkappa$, $x^\varkappa + B^\varkappa_a(\mathrm{d}\xi)^a$; mentre la connessione puntuale, ad esempio Λ^{a}_{cb}, può considerarsi invece come una legge di rappresentazione fra un E_m e la sua proiezione, fatta parallelamente alla $X^{m'}_n$, negli altri, nei punti infinitamente vicini $x^\varkappa$, $x^\varkappa + B^\varkappa_a(\mathrm{d}\xi)^a$.

Possiamo notare che le quattro connessioni (2, 1) determinano nell'ambiente L_n una nuova connessione Λ^{h}_{Ji}[5]) avente i parametri Λ^{a}_{Jq}, Λ^{p}_{Jb} nulli e che le (2, 2) si possono considerare come ricavate dall'unica legge di trasporto

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^{h}_{Ji}\, u^i (\mathrm{d}\xi)^J \tag{2, 3}$$

fatta nell'ambiente quando la si applichi a vettori e lungo spostamenti giacenti in una almeno delle due varietà X^m_n, $X^{m'}_n$. Considerando separatamente i due casi in cui il trasporto (2. 3) si faccia lungo direzioni di X^m_n o di $X^{m'}_n$ si ha:

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^{h}_{cb}\, u^b\, (\mathrm{d}\xi)^c + \Lambda^{h}_{cq}\, u^q\, (\mathrm{d}\xi)^c \tag{2, 4}$$

$$'\delta u^h = \mathrm{d}u^h + \Lambda^{h}_{rb}\, u^b\, (\mathrm{d}\xi)^r + \Lambda^{h}_{rq}\, u^q\, (\mathrm{d}\xi)^r \tag{2, 5}$$

e da queste e dalle ipotesi

$$\Lambda^{a}_{Jq} = \Lambda^{p}_{Jb} = 0 \tag{2, 6}$$

segue:

1° Lungo una direzione di X^m_n la connessione Λ^{h}_{Ji} opera sulle componenti u^a di un vettore u^h di L_n nello stesso modo che opererebbe se il vettore u^h appartenesse alla X^m_n e sulle componenti u^p nello stesso modo che opererebbe se u^h appartenesse alla $X^{m'}_n$.

2° Lungo una direzione di $X^{m'}_n$ la connessione Λ^{h}_{Ji} opera sulle componenti u^a di un vettore u^h di L_n nello stesso modo che opererebbe se il vettore u^h appartenesse alla X^m_n e sulle componenti u^p nello stesso modo che opererebbe se u^h appartenesse alla $X^{m'}_n$.

Ciò può considerarsi come un'interpretazione geometrica delle (2, 6).

In relazione a un nuovo riferimento anolonomo definito dalle (1, 12) si avranno per le Λ^{h}_{Ji} le formule di trasformazione

$$\Lambda^{h'}_{J'i'} = B^{h'Ji}_{hJ'i'}\, \Lambda^{h}_{Ji} + B^{h'}_{k}\, \partial_{J'}\, B^{k}_{i'} \tag{2, 7}$$

[5]) Devo alla gentilezza del Professor J. A. Schouten un tale suggerimento ed altre importanti osservazioni riguardanti la connessione Λ^{h}_{Ji} la quale, come vedremo, permette di dare un aspetto formale semplice e conciso allo studio delle varietà anolonome.

e da queste in particolare, tenuto conto delle (1, 15),

$$\Lambda^{a'}_{J'q'} = B^{a'J\,q}_{a\;J'q'}\,\Lambda^{a}_{Jq} \qquad (2,\ 8)$$

$$\Lambda^{p'}_{J'b'} = B^{p'Jb}_{p\;J'b'}\,\Lambda^{p}_{Jb}. \qquad (2,\ 9)$$

Segue che i sistemi Λ^{a}_{Jq}, Λ^{p}_{Jb} si trasformano, rispetto a un cambiamento del riferimento anolonomo, come le componenti di un tensore e che il loro annullarsi ha conseguentemente significato invariante rispetto a siffatte trasformazioni.

Sempre dalle (2, 7) si ha:

$$\Lambda^{a'}_{J'b'} = B^{a'Jb}_{a\;J'b'}\,\Lambda^{a}_{Jb} + B^{a'}_{a}\,\partial_{J'}B^{a}_{b'} \qquad (2,\ 10)$$

$$\Lambda^{p'}_{J'q'} = B^{p'Jq}_{pJ'q'}\,\Lambda^{p}_{Jq} + B^{p'}_{p}\,\partial_{J'}B^{p}_{q'} \qquad (2,\ 11)$$

da cui segue che in relazione a un qualunque cambiamento del riferimento analonomo le connessioni interna ed esterna alle due varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ restano ancora tali.

Indichiamo con $'\nabla$ il simbolo di derivazione covariante relativo alla connessione Λ^{h}_{Ji} e accanto a questo ne introduciamo un altro, $^{*}D$, il quale opera con i parametri della connessione dell'ambiente in relazione agli indici della serie $\varkappa, \ldots, \tau$ e coi parametri Λ^{h}_{Ji} dove si trovi un indice della serie $a, \ldots, g$ o $p, \ldots, w$.

Si avrà ad esempio

$$^{*}D_J\,B^{\varkappa}_{i} = \partial_J\,B^{\varkappa}_{i} + B^{\mu\lambda}_{Ji}\,\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{l}\,\Lambda^{l}_{J}\,. \qquad (2,\ 12)$$

Le quantità ora scritte, che si comportano come le componenti di un tensore, dànno luogo nelle due varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ a quattro sistemi misti

$$^{*}D_c\,B^{\varkappa}_{b} = {}^{*}H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_c\,B^{\varkappa}_{b} + B^{\mu\lambda}_{cb}\,\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{e}\,\Lambda^{e}_{cb} \qquad (2,\ 13)$$

$$^{*}D_c\,B^{\varkappa}_{q} = -\,{}^{*}L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_c\,B^{\varkappa}_{q} + B^{\mu\lambda}_{cq}\,\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{t}\,\Lambda^{t}_{cq} \qquad (2,\ 14)$$

$$^{*}D_r\,B^{\varkappa}_{b} = -\,{}^{*}L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_r\,B^{\varkappa}_{b} + B^{\mu\lambda}_{rb}\,\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{e}\,\Lambda^{e}_{rb} \qquad (2,\ 15)$$

$$^{*}D_r\,B^{\varkappa}_{q} = {}^{*}H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_r\,B^{\varkappa}_{q} + B^{\mu\lambda}_{rq}\,\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} - B^{\varkappa}_{t}\,\Lambda^{t}_{rq} \qquad (2,\ 16)$$

che chiameremo tensori di curvatura euleriana: il primo e l'ultimo interni o puntuali gli altri due esterni o tangenziali. Segue facilmente dalle formule che definiscono questi tensori come da essi si possano ricavare le corrispondenti connessioni e anche, come risulta dalla (2, 12) e dalle successive, la connessione Λ^{h}_{J} avente i parametri soddisfacenti le condizioni (2, 6). È quindi indifferente assegnare per le varietà X^{m}_{n}, $X^{m'}_{n}$ le connessioni (2, 1) o i relativi tensori di curvatura euleriana.

Nonostante l'arbitrarietà che finora abbiamo lasciato alle connessioni (2, 1), il fatto che le componenti

$$*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{p}, \quad *L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{a}, \quad *L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{p}, \quad *H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} B_{\varkappa}^{a} \tag{2, 17}$$

non dipendono da Λ_{ji}^{h} permette di esprimere in funzione di queste componenti i tensori

$$\overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda}^{\varrho\sigma} \nabla_{\varrho} B_{\sigma}^{\varkappa} \tag{2, 18}$$

$$\overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} = B_{\mu\sigma}^{\varrho\varkappa} \nabla_{\varrho} B_{\lambda}^{\sigma} \tag{2, 19}$$

$$\overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} = C_{\mu\sigma}^{\varrho\varkappa} \nabla_{\varrho} C_{\lambda}^{\sigma} \tag{2, 20}$$

$$\overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = C_{\mu\lambda}^{\varrho\sigma} \nabla_{\varrho} C_{\sigma}^{\varkappa} \tag{2, 21}$$

di cui fa uso Schouten. È facile infatti verificare che si ha:

$$\overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda}^{cb} C_{\nu}^{\varkappa} *H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} \tag{2, 22}$$

$$\overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda\nu}^{cq\varkappa} *L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} \tag{2, 23}$$

$$\overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda}^{rb} C_{\nu}^{\varkappa} *L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} \tag{2, 24}$$

$$\overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = B_{\mu\lambda\nu}^{rq\varkappa} *H_{rq}^{\cdot\cdot\nu}. \tag{2, 25}$$

Inversamente:

$$*H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} C_{\nu}^{\varkappa} = B_{cb}^{\mu\lambda} \overset{m}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \tag{2, 26}$$

$$*L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} B_{\lambda}^{\varkappa} = B_{cq}^{\mu\lambda} \overset{m}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} \tag{2, 27}$$

$$*L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} C_{\nu}^{\varkappa} = B_{rb}^{\mu\lambda} \overset{m'}{L}{}_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\varkappa} \tag{2, 28}$$

$$*H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} B_{\nu}^{\varkappa} = B_{rq}^{\mu\lambda} \overset{m'}{H}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}. \tag{2, 29}$$

Cioè: mentre dai tensori di curvatura euleriana si possono ricavare quelli di Schouten, da questi ultimi non si possono, come è del resto naturale nelle nostre ipotesi, ottenere in generale quelli di curvatura euleriana, a meno che essi non siano tali da giacere con l'indice ν il primo e il terzo nella $X_n^{m'}$, il secondo e il quarto nella X_n^m. Questa particolare ipotesi però, quando valga, determina le connessioni, interna ed esterna, delle varietà ora dette le quali risultano allora stabilite in modo unico una volta fissati i parametri $\Gamma_{\mu\lambda}^{\varkappa}$ della connessione ambiente.

3. Tensori di torsione. A partire da un punto $P \equiv (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ della L_n consideriamo due vettori (spostamenti) infinitesimi $(\underset{1}{d}\xi)^a$, $(\underset{2}{d}\xi)^a$ giacenti in X_n^m. Siano Q, R gli estremi di tali vettori. Trasportiamo $\overrightarrow{PR}$ lungo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PQ}$ lungo $\overrightarrow{PR}$ per equipollenza relativa alla connessione interna alla X_n^m; siano $\overrightarrow{QS}$, $\overrightarrow{RT}$ i vettori che si hanno alla fine del trasporto. Gli estremi S, T di questi vettori, come pure avviene in generale per il caso olonomo, non coincidono, ma determinano un vettore $(T - S)$ che chiameremo vettore di torsione della X_n^m relativo ai due elementi PQ, PR. Tale vettore però, a differenza del caso olonomo, non giace in X_n^m. Esso si potrà quindi decomporre nelle sue componenti tangenziali alle X_n^m, $X_n^{m'}$ rispettivamente.

L'annullarsi della componente tangenziale alla $X_n^{m'}$ dà la nota condizione di olonomia della varietà di X_n^m.

Chiameremo il pentagono infinitesimo $PQSTRP$ ciclo elementare di prima specie.[6])

Si presenta immediata la costruzione di un altro ciclo elementare relativo alla $X_n^{m'}$, che chiameremo ciclo elementare di seconda specie, il cui vettore di chiusura $(T - S)$ darà la torsione della varietà $X_n^{m'}$ relativa ai due elementi del ciclo.

A questi due cicli se ne potrà aggiungere un terzo, ciclo elementare di terza specie, partendo da due spostamenti infinitesimi $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ situati ad esempio il primo sulla X_n^m, il secondo sulla $X_n^{m'}$ e trasportando poi $\overrightarrow{PR}$ in $\overrightarrow{QS}$ per equipollenza lungo $\overrightarrow{PQ}$ relativa alla connessione esterna alla $X_n^{m'}$ e $\overrightarrow{PQ}$ in $\overrightarrow{RT}$ per equipollenza lungo $\overrightarrow{PR}$ relativa alla connessione esterna alla X_n^m.

Si perviene così ad un nuovo vettore di chiusura che potrebbe chiamarsi vettore di torsione mista.

Il calcolo effettivo di tale vettore, nel caso dei tre cicli enumerati, si può fare direttamente senza difficoltà. Possiamo però giungere indirettamente al nostro risultato considerando i tre cicli suddetti come giacenti in L_n e facendo il trasporto dei vettori infinitesimi coi parametri della connessione Λ_{ji}^h.

Si ha allora, come è noto,[7]) per il vettore di chiusura $(T - S)$, nel sistema $(\varkappa)$,

$$2'S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \underset{1}{(\mathrm{d}\xi)}^\mu \underset{2}{(\mathrm{d}\xi)}^\lambda, \tag{3, 1}$$

dove

$$'S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} \overset{h}{=} \Lambda_{[\mu\lambda]}^{\varkappa}.^{8)} \tag{3, 2}$$

Passando al sistema anolonomo (h), ove si tengano presenti le formule di trasformazione (2, 7), si ha invece

$$2'S_{ji}^{\cdot\cdot h} \underset{1}{(\mathrm{d}\xi)}^j \underset{2}{(\mathrm{d}\xi)}^i \tag{3, 3}$$

dove

$$'S_{ji}^{\cdot\cdot h} = (- \partial_{[j} B_{i]}^{\varkappa} + B_l^{\varkappa} \Lambda_{[ji]}^l)\, B_{\varkappa}^h \tag{3, 4}$$

o anche, per le (2, 12).

$$'S_{ji}^{\cdot\cdot h} = (B_{ji}^{\mu\lambda} \Gamma_{[\mu\lambda]}^{\varkappa} - {}^*D_{[j} B_{i]}^{\varkappa})\, B_{\varkappa}^h = S_{ji}^{\cdot\cdot h} - B_{\varkappa}^h\, {}^*D_{[j} B_{i]}^{\varkappa}. \tag{3, 5}$$

Le componenti del vettore $(T - S)$ nel caso dei tre cicli infinite-

[6]) Cfr. Vranceanu (2).

[7]) Cfr. ad esempio (8) pag. 80.

[8]) Col simbolo $\overset{h}{=}$ indichiamo che l'eguaglianza vale solo in riferimento a un sistema olonomo. Cfr. (8) pag. 68.

simi si hanno infine sostituendo nella (3, 3) al posto di $'S_{ji}^{\cdot\cdot h}$ i tensori

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot h} = S_{cb}^{\cdot\cdot h} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot h} \qquad (3,\ 6)$$

$$'S_{rq}^{\cdot\cdot h} = S_{rq}^{\cdot\cdot h} - {}^*H_{[rq]}^{\cdot\cdot h} \qquad (3,\ 7)$$

$$'S_{rb}^{\cdot\cdot h} = S_{rb}^{\cdot\cdot h} - \tfrac{1}{2}({}^*L_{br}^{\cdot\cdot h} - {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot h}) \qquad (3,\ 8)$$

che potremo chiamare tensori di torsione interna alla X_n^m, interna alla $X_n^{m'}$, mista rispettivamente.[9])

Fissando l'attenzione sul tensore di torsione interna alla X_n^m si hanno per esso i due sistemi di componenti

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot a} = S_{cb}^{\cdot\cdot a} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot a} \qquad (3,\ 9)$$

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot p} = S_{cb}^{\cdot\cdot p} - {}^*H_{[cb]}^{\cdot\cdot p}. \qquad (3,\ 10)$$

Per la (3, 10) si ha anche, come risulta dalla (3, 4),

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot p} = - B_\varkappa^p \partial_{[c} B_{b]}^\varkappa \qquad (3,\ 11)$$

e il suo annullarsi esprime, come si era detto, la nota condizione di olonomia della varietà.[10])

In tale caso, sempre dalla (3, 4), segue che è

$$'S_{cb}^{\cdot\cdot a} = \Lambda_{[cb]}^a \qquad (3,\ 12)$$

la condizione di olonomia del sistema (a) nella corrispondente varietà resa olonoma.

4. Tensori di curvatura riemanniana. Come per il caso olonomo si presenta naturale ricavare i tensori di curvatura relativi alle due varietà X_n^m, $X_n^{m'}$ col procedimento del trasporto ciclico fatto secondo la legge del parallelismo di ciascuna delle connessioni delle due varietà.

Poichè si presentano come possibili tre tipi di cicli elementari, i cicli di prima, seconda e terza specie, e lungo ciascuno di essi si possono trasportare vettori di due specie: vettori di X_n^m e di $X_n^{m'}$, avremo in complesso sei tensori di curvatura riemanniana.

Indicheremo con

$$'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{dcq}^{\cdot\cdot\cdot p},\ 'R_{srb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{srq}^{\cdot\cdot\cdot p},\ 'R_{scb}^{\cdot\cdot\cdot a},\ 'R_{scq}^{\cdot\cdot\cdot p} \qquad (4,\ 1)$$

i tensori di curvatura relativi al trasporto lungo cicli di prima, seconda, terza specie, rispettivamente.

Potremo considerare i primi due e i secondi due come tensori di curvatura riemanniana delle connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rb}^a, Λ_{rq}^p rispet-

[9]) Queste quantità comprendono i tensori di torsione dati dal Dienes: cfr. (6) pag. 269.

[10]) Cfr. ad es. (1) § 4, formula (30).

tivamente; ma a differenza di quanto accade per il caso olonomo non è possibile esprimere ciascuno di essi per i parametri delle corrispondenti connessioni e delle loro derivate. Questo è d'altra parte un inconveniente che è nella natura delle cose. Schouten e Hlavatý hanno in parte cercato di rimediarvi sostituendo al primo tensore di curvatura $'R_{\dot{d}cb}^{\cdot\cdot\cdot a}$ un'espressione che dipende solo dalla connessione Λ_{cb}^{a} e dal tensore $'S_{cb}^{\cdot\cdot p}$; ma il nuovo tensore non ha più la genesi geometrica caratteristica, in relazione al trasporto ciclico. Poichè i tensori a cui si perviene risultano equivalenti, quando vi si facciano opportune trasformazioni e sostituzioni, a quelli che dà il Dienes[11]) non crediamo che sia il caso di esporre qui gli sviluppi che, in base alla definizione datane, conducono alla loro determinazione diretta.

Osserviamo piuttosto che, come per il caso dei tensori di torsione, anche quelli di curvatura si possono ricavare da un solo sviluppo relativo al trasporto mediante le Λ_{ji}^{h} di un vettore u^h di L_n su di un ciclo pure di L_n specializzando poi opportunamente il ciclo e il vettore ivi trasportato. In questo modo i sei tensori di curvatura appaiono quali componenti dell'unico tensore

$$'R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h} = 2\partial_{[k}\Lambda_{j]i}^{h} + 2\Lambda_{[k|l|}^{h}\Lambda_{j]i}^{l} + 2\,('S_{kj}^{\cdot\cdot l} - \Lambda_{[kj]}^{l})\,.\,\Lambda_{li}^{h} \qquad (4,\ 2)$$

la cui espressione si ricava con facilità quando si tenga conto della genesi geometrica che lo caratterizza.[12])

Non sarà superfluo notare che, sempre in conseguenza delle (2, 6), è

$$'R_{kjb}^{\cdot\cdot\cdot p} = 'R_{kjq}^{\cdot\cdot\cdot a} = 0. \qquad (4,\ 3)$$

Per esaurire questo breve cenno sui tensori di curvatura bisognerebbe ora vedere come essi si presentano nelle formule di commutazione delle derivate secondo covarianti e dei differenziali assoluti relativi alle diversi connessioni. Noi non esporremo i calcoli a cio relativi ma daremo senz'altro i risultati del modo come operano i tre simboli differenziali

$$*D_{[d}*D_{c]},\quad *D_{[s}*D_{r]},\quad *D_{[s}*D_{c]} \qquad (4,\ 4)$$

relativi ai tre cicli introdotti, quando vengano applicati a un tensore $T^{\kappa p}_{\cdot\cdot b}$ avente componenti nei tre spazi L_n, X_n^m, $X_n^{m'}$ contemporaneamente. Avremo in generale

---

11) Cfr. (6) pag. 270.

12) Cfr. (8) pag. 110. Per il significato di $\Omega_{\nu\mu}^{\varrho}$ ved. loc. cit. pag. 68. Nel nostro caso è

$$\Omega_{kj}^{h} = 'S_{kj}^{\cdot\cdot h} - \Lambda_{[kj]}^{h}.$$

$$
\begin{aligned}
{}^*D_{[\varkappa}\, {}^*D_{j]}\, {}^*T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot i} = -\, {}'S_{\varkappa j}^{\cdot\cdot\tau}\, {}^*D_\tau\, T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot i} + \tfrac{1}{2} B^{\nu\mu}_{\varkappa j}\, R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}\,. \\
.\, T^{\lambda h}_{\cdot\cdot i} + \tfrac{1}{2}\, {}'R_{\varkappa j l}^{\cdot\cdot\cdot h}\, T^{\varkappa l}_{\cdot\cdot i} - \tfrac{1}{2}\, {}'R_{\varkappa j i}^{\cdot\cdot\cdot l}\, T^{\varkappa h}_{\cdot\cdot l}
\end{aligned}
\tag{4, 5}
$$

dove

$$
R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} \overset{h}{=} 2\, (\partial_{[\nu}\, \Gamma^{\varkappa}_{\mu]\lambda} + \Gamma^{\varkappa}_{[\nu|\varrho|}\, \Gamma^{\varrho}_{\mu]\lambda})
\tag{4, 6}
$$

è il tensore di curvatura riemanniana relativo alla connessione $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ e al sistema $(\varkappa)$.

Dalle (4, 5) si possono ricavare come caso particolare le formule relative agli operatori differenziali (4, 4).

5. Condizioni di integrabilità. Prima forma del teorema di e sistenza. Passiamo ora all'argomento più importante di questa prima parte che è quello riguardante la determinazione delle condizioni sotto le quali è possibile fissare in L_n le due varietà pseudonormali X^m_n e $X^{m'}_n$ quando siano dati a priori le connessioni delle due varietà e i relativi tensori di curvatura euleriana. Siccome l'esistenza delle due varietà è legata a quella dei sistemi $B^{\varkappa}_b$, $B^{\varkappa}_q$ i quali soddisfano le relazioni

$$
\begin{aligned}
{}^*D_c\, B^{\varkappa}_b &= {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} \\
{}^*D_c\, B^{\varkappa}_q &= -\, {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa}
\end{aligned}
\quad (5,\ 1_1)
\qquad\qquad
\begin{aligned}
{}^*D_r\, B^{\varkappa}_b &= -\, {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} \\
{}^*D_r\, B^{\varkappa}_q &= {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa}
\end{aligned}
\quad (5,\ 1_2)
$$

bisognerà anzitutto procurarci le condizioni di integrabilità delle (5, 1) riguardate come equazioni nelle funzioni incognite $B^{\varkappa}_b(\xi)$, $B^{\varkappa}_q(\xi)$.

Usando la derivazione covariante si ha, per teoremi noti, che dovranno essere soddisfatte o identicamente o in forza delle (5, 1) stesse, le condizioni seguenti

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^*D_{[d}\, {}^*H_{c]b}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*D_{[d}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_b \\
-\, {}^*D_{[d}\, {}^*L_{c]q}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*D_{[d}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_q
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 2}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
-\, {}^*D_{[s}\, {}^*L_{r]b}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*D_{[s}\, {}^*D_{r]}\, B^{\varkappa}_b \\
{}^*D_{[s}\, {}^*H_{r]q}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*D_{[s}\, {}^*D_{r]}\, B^{\varkappa}_q
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 3}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
{}^*D_s\, {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D\, {}^*L_{sb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= 2\, {}^*D_{[s}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_b \\
-\, {}^*D_s\, {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}^*D_c\, {}^*H_{sq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= 2\, {}^*D_{[s}\, {}^*D_{c]}\, B^{\varkappa}_q.
\end{aligned}
\right\}
\tag{5, 4}
$$

Tali condizioni pero, tenuto il debito conto delle (4, 5) e della identità di facile verifica

$$
{}^*D_\tau\, B^{\varkappa}_b = {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa}\, B^{c}_\tau + {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa}\, B^{r}_\tau
\tag{5, 5}
$$

$$
{}^*D_\tau\, B^{\varkappa}_q - {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa}\, B^{c}_\tau + {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa}\, B^{r}_\tau
\tag{5, 6}
$$

equivalgono alle altre

$$\left.\begin{aligned}
{}^*D_{[d}\,{}^*H_{c]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= -\,{}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_{dcb}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{dcb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\
-\,{}^*D_{[d}\,{}^*L_{c]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= +\,{}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_{dcq}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\,B_p^{\varkappa}\,.\,{}'R_{dcq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}
\end{aligned}\right\} \tag{5, 7}$$

$$\left.\begin{aligned}
-\,{}^*D_{[s}\,{}^*L_{r]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= -\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_{srb}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{srb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\
{}^*D_{[s}\,{}^*H_{r]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} &= +\,{}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_{srq}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\,B_p^{\varkappa}\,{}'R_{srq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}
\end{aligned}\right\} \tag{5. 8}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,({}^*D_s\,{}^*H_{cb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_c\,{}^*L_{sb}{}^{\cdot\cdot\varkappa}) &= -\,{}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,B_{scb}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{scb}{}^{\cdot\cdot\cdot a} \\
-\tfrac{1}{2}\,({}^*D_s\,{}^*L_{cq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_c\,{}^*H_{sq}{}^{\cdot\cdot\varkappa}) &= {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,B_{scq}^{\nu\mu\lambda}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2}\,B_p^{\varkappa}\,{}'R_{scq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}
\end{aligned}\right\} \tag{5. 9}$$

che sono le condizioni d'integrabilità del sistema (5. 1). Le (5, 7) si possono raccogliere in un unico gruppo

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,B_{dc}^{\nu\mu}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{{}^*D_{[d}\,{}^*H_{c]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{dcb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\,B_\lambda^b + \{-\,{}^*D_{[d}\,{}^*L_{c]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\quad + {}'S_{dc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_p^{\varkappa}\,{}'R_{dcq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\,B_\lambda^q
\end{aligned} \tag{5. 10}$$

ad esse equivalente e che tiene in certo modo il posto di quelle che si sogliono chiamare le equazioni di Hlavatý, relative a una varietà X_m e alla sua varietà anolonoma complementare immerse in un L_n.

In modo analogo si ricavano dalle (5. 8). (5. 9) gli altri due gruppi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,B_{sr}^{\nu\mu}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{-\,{}^*D_{[s}\,{}^*L_{r]b}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{srb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\,B_\lambda^b + \{{}^*D_{[s}\,{}^*H_{r]q}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sr}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,B_p^{k}\,{}'R_{srq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\,B_\lambda^q
\end{aligned} \tag{5. 11}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,B_{sc}^{\nu\mu}\,R_{\nu\mu\lambda}{}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} &= \{\tfrac{1}{2}\,({}^*D_s\,{}^*H_{cb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}^*D_c\,{}^*L_{sb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*H_{eb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - \\
&\quad - {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*L_{tb}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_a^{\varkappa}\,{}'R_{scb}{}^{\cdot\cdot\cdot a}\}\,B_\lambda^b + \{-\tfrac{1}{2}\,({}^*D_s\,{}^*L_{cq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \\
&\quad + {}^*D_c\,{}^*H_{sq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot e}\,{}^*L_{eq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sc}{}^{\cdot\cdot t}\,{}^*H_{tq}{}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2}\,B_p^{\varkappa}\,{}'R_{scq}{}^{\cdot\cdot\cdot p}\}\,B_\lambda^q
\end{aligned} \tag{5, 12}$$

ad esse equivalenti, i quali, assieme alle (5, 10), si possono considerare come una generalizzazione della equazioni di Hlavatý estesa alle varietà non olonome.

Evidentemente le (5, 10), (5, 11), (5, 12) possono anche riunirsi in un solo gruppo del quale il primo membro è semplicemente costituito dalle $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$. Le (5, 7), (5, 8), (5, 9) si possono anche risolvere rispetto a $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$. Si ottengono allora dodici gruppi di equazione che, quando vi si facciano opportuni sviluppi e sostituzioni, si possono considerare come equivalenti a quelle date dal Dienes nel lavoro già citato (cfr. (6) pag. 278).

Le condizioni di integrabilità (5, 10), (5, 11), (5, 12), contengono ancora in termini finiti le funzioni incognite $B_b^\varkappa$, $B_q^\varkappa$. Se quindi indichiamo con F_1 complessivamente tali equazioni, con F_2 quelle che da esse si ottengono con derivazione (covariante) seguita da sostituzione delle ${}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, $-{}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, $-{}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ alle derivate ${}^*D_c B_b^\varkappa$, ${}^*D_c B_q^\varkappa$, ${}^*D_r B_b^\varkappa$, ${}^*D_r B_q^\varkappa$ che vi compaiono, con F_3 quelle che si ottengono dalle F_2 con analoga derivazione e sostituzione ecc . . . possiamo enunciare il seguente

teorema di esistenza (prima forma): date le connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p e i tensori ${}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ condizione necessaria e sufficiente perchè esistano in L_n (in cui $\Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa$ sono i parametri della connessione) una X_n^m e una $X_n^{m'}$ (da considerarsi come varietà complementari l'una dell'altra) tali che assegnata alla X_n^m e alla $X_n^{m'}$ le connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p siano ${}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$, ${}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ i rispettivi tensori di curvatura euleriana è che esista un intero N tale che le equazioni $F_1, F_2, \ldots, F_N$ nelle $B_b^\varkappa$, $B_q^\varkappa$ siano algebricamente compatibili e le loro soluzioni soddisfino alle F_{N+1}.

Siccome le funzioni incognite sono complessivamente n^2, se q delle equazioni $F_1, F_2, \ldots, F_N$ sono indipendenti, la soluzione del sistema dipende da $n^2 - q$ parametri arbitrari.

6. Connessioni subordinate all'ambiente. Seconda forma del teorema di esistenza. Finora fra la connessione $\Gamma_{\mu\lambda}^\varkappa$ dell'ambiente e le quattro connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p non si è supposta alcuna relazione. Estenderemo ora al nostro caso le condizioni di subordinazione che si sogliono dare nel caso olonomo. Precisamente: fisseremo la legge di trasporto per equipollenza dei vettori controvarianti di X_n^m e di $X_n^{m'}$, il chè basta per fissare le connessioni nelle due varietà, mediante le seguenti condizioni analitiche:

$$ {}^*D_c v^a = B_{c\varkappa}^{\mu a} \nabla_\mu v^\varkappa \tag{6, 1} $$

$$ {}^*D_r v^a = B_{r\varkappa}^{\mu a} \nabla_\mu v^\varkappa \tag{6, 2} $$

$$ {}^*D_c w^p = B_{c\varkappa}^{\mu p} \nabla_\mu w^\varkappa \tag{6, 3} $$

$$ {}^*D_r w^p = B_{r\varkappa}^{\mu p} \nabla_\mu w^\varkappa . \tag{6, 4} $$

Tali condizioni di subordinazione, delle quali sono ben noti i varî significati geometrici, dànno luogo alle conseguenze analitiche:

$$ {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa = {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa = {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa = {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa = 0 \qquad (6,\ 5) $$

che sono equivalenti alle altre:

$$ \left.\begin{aligned} {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*H_{cb}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa \\ {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*L_{rb}^{\cdot\cdot\nu} C_\nu^\varkappa \end{aligned}\right\} (6,\ 6_1) \qquad \left.\begin{aligned} {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*L_{cq}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu^\varkappa \\ {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= {}^*H_{rq}^{\cdot\cdot\nu} B_\nu \end{aligned}\right\} (6,\ 6_2) $$

Le condizioni ora scritte mostrano subito come si simplifichino le formule (2, 22)...(2, 29) relative ai tensori di Schouten e come tali condizioni concordino con quanto è stato osservato alla fine del n. 2.

Essendo in forza delle (6, 6)

$$ \left.\begin{aligned} H_{cb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= H_{cb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ L_{rb}^{\cdot\cdot\varkappa} &= L_{rb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \end{aligned}\right\} (6,\ 7_1) \qquad \left.\begin{aligned} L_{cq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= L_{cq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \\ H_{rq}^{\cdot\cdot\varkappa} &= H_{rq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} (6,\ 7_2) $$

potremo scrivere il sistema di equazioni (5, 1) nel modo seguente[13])

$$ \left.\begin{aligned} D_c B_b^\varkappa &= H_{cb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ D_c B_q^\varkappa &= - L_{cq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} (6,\ 8_1) \qquad \left.\begin{aligned} D_r B_b^\varkappa &= - L_{rb}^{\cdot\cdot t} B_t^\varkappa \\ D_r B_q^\varkappa &= H_{rq}^{\cdot\cdot e} B_e^\varkappa \end{aligned}\right\} (6,\ 8_2) $$

con che le relative condizioni di integrabilità (5, 7), (5, 8), (5, 9) divengono

$$ \left.\begin{aligned} &- {}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{dcb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa \, {}'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ &\qquad = B_p^\varkappa D_{[d} H_{c]b}^{\cdot\cdot p} - H_{[c|b|}^{\cdot\cdot\cdot t} L_{d]t}^{\cdot\cdot\varkappa} \\ &{}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{dcq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa \, {}'R_{dcq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ &\qquad = - B_a^\varkappa D_{[d} L_{c]q}^{\cdot\cdot a} - L_{[c|q|}^{\cdot\cdot\cdot e} H_{d]e}^{\cdot\cdot\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (6,\ 9) $$

$$ \left.\begin{aligned} &- {}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{srb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa \, {}'R_{srb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ &\qquad = - B_p^\varkappa D_{[s} L_{r]b}^{\cdot\cdot p} - L_{[r|b|}^{\cdot\cdot\cdot t} H_{s]t}^{\cdot\cdot\varkappa} \\ &{}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{srq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa \, {}'R_{srq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ &\qquad = B_a^\varkappa D_{[s} H_{r]q}^{\cdot\cdot a} - H_{[r|q|}^{\cdot\cdot\cdot e} L_{s]e}^{\cdot\cdot\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad (6,\ 10) $$

$$ \left.\begin{aligned} &- {}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot\varkappa} + {}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{scb}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_a^\varkappa \, {}'R_{scb}^{\cdot\cdot\cdot a} = \\ &= \tfrac{1}{2} (B_p^\varkappa D_s H_{cb}^{\cdot\cdot p} + H_{cb}^{\cdot\cdot t} H_{st}^{\cdot\cdot\varkappa} + B_p^\varkappa D_c L_{sb}^{\cdot\cdot p} - L_{sb}^{\cdot\cdot t} L_{ct}^{\cdot\cdot\varkappa}) \\ &{}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot\varkappa} - {}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot\varkappa} + \tfrac{1}{2} B_{scq}^{\nu\mu\lambda} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \tfrac{1}{2} B_p^\varkappa \, {}'R_{scq}^{\cdot\cdot\cdot p} = \\ &= - \tfrac{1}{2} (B_a^\varkappa D_s L_{cq}^{\cdot\cdot a} - L_{cq}^{\cdot\cdot e} L_{se}^{\cdot\cdot\varkappa} + B_a^\varkappa D_c H_{sq}^{\cdot\cdot a} + H_{sq}^{\cdot\cdot e} H_{ce}^{\cdot\cdot\varkappa}) \end{aligned}\right\} \quad (6,\ 11) $$

---

[13]) Quando valgono la condizioni di subordinazione (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4) indicheremo senza l'asterisco (*) tanto il simbolo di derivazione covariante come i tensori di curvatura euleriana.

dove ora

$$\left.\begin{aligned}{}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} &= S_{dc}^{\cdot\cdot e}\\ {}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} &= S_{sc}^{\cdot\cdot e} - \tfrac{1}{2} L_{cs}^{\cdot\cdot e}\\ {}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} &= S_{sr}^{\cdot\cdot e} - H_{[sr]}^{\cdot\cdot e}\end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 12)$$

$$\left.\begin{aligned}{}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} &= S_{dc}^{\cdot\cdot t} - H_{[dc]}^{\cdot\cdot t}\\ {}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} &= S_{sc}^{\cdot\cdot}{}' + \tfrac{1}{2} L_{sc}^{\cdot\cdot t}\\ {}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} &= S_{sr}^{\cdot\cdot t}.\end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 13)$$

Dalle (6, 9) si ricavano le altre equivalenti

$$\left.\begin{aligned}{}'R_{dcb}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{dcb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, H_{[c|b|}^{\cdot\cdot t} L_{d]t}^{\cdot\cdot a}\\ 2D_{[d} H_{c]b}^{\cdot\cdot p} &= B_{dcb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{dc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot p} + 2\,{}'S_{dc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot p}\\ 2D_{[d} L_{c]q}^{\cdot\cdot a} &= - B_{dcq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2'\, S_{dc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot a} + 2'\, S_{dc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot a}\\ {}'R_{dcq}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{dcq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, L_{\cdot c|q|}^{\cdot\ \ e} H_{d]e}^{\cdot\cdot p}\end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 14)$$

che costituiscono il primo gruppo di equazioni di Gauss, Codazzi, Ricci, generalizzate.

Gli altri due gruppi

$$\left.\begin{aligned}{}'R_{srb}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{srb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, L_{[r|b|}^{\cdot\cdot t} H_{s]t}^{\cdot\cdot a}\\ 2D_{[s} L_{r]b}^{\cdot\cdot p} &= - B_{srb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\,{}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot p} - 2\,{}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot p}\\ 2D_{[s} H_{r]q}^{\cdot\cdot a} &= B_{srq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\,{}'S_{sr}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot a} - 2\,{}'S_{sr}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot a}\\ {}'R_{srq}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{srq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} + 2\, H_{[r|q|}^{\cdot\cdot e} L_{s]e}^{\cdot\cdot p}\end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 15)$$

$$\begin{aligned}{}'R_{scb}^{\cdot\cdot\cdot a} &= B_{scb\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - H_{cb}^{\cdot\cdot t} H_{st}^{\cdot\cdot a} + L_{sb}^{\cdot\cdot t} L_{ct}^{\cdot\cdot a}\\ D_s H_{cb}^{\cdot\cdot p} + D_c L_{sb}^{\cdot\cdot p} &= B_{scb\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} H_{eb}^{\cdot\cdot p} + 2\,{}'S_{sc}^{\cdot\cdot t} L_{tb}^{\cdot\cdot p}\\ D_s L_{cq}^{\cdot\cdot a} + D_c H_{sq}^{\cdot\cdot a} &= - B_{scq\varkappa}^{\nu\mu\lambda a} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - 2\,{}'S_{sc}^{\cdot\cdot e} L_{eq}^{\cdot\cdot a} + 2'\,S_{sc}^{\cdot\cdot t} H_{tq}^{\cdot\cdot a}\\ {}'R_{scq}^{\cdot\cdot\cdot p} &= B_{scq\varkappa}^{\nu\mu\lambda p} R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - L_{cq}^{\cdot\cdot e} L_{se}^{\cdot\cdot p} + H_{sq}^{\cdot\cdot e} H_{ce}^{\cdot\cdot p}\end{aligned} \qquad (6,\ 16)$$

si ottengono in corrispondenza alle (6, 10), (6, 11).

La prima delle equazioni (6, 14) è la generalizzazione dell'-equazione di Gauss già data da Schouten e da Hlavatý.[14]) Così pure da Schouten (cfr. bibl. (3)) sono state date le generalizzazioni dell'equazione di Ricci e di quelle di Codazzi, corrispondenti alla quarta e alla seconda e terza delle (6, 14). Essendo le (6, 14), (6, 15), (6, 16) comprese nelle più generali (5, 7), (5, 8), (5, 9) esse saranno contenute anche come è naturale, nelle formule già citate del Dienes (bibl. (5)). Non faremo precisazioni più particolari sui citati confronti e concluderemo col seguente

[14]) Cfr. bibl. (1) form. 39, (3) form. 68 e (4) form. 8.

teorema di esistenza (seconda forma): dette F_1, complessivamente le equazioni (6, 14), (6, 15), (6, 16); F_2, le equazioni che se ottengono con derivazioni seguita da eliminazione delle derivate $D_c B_b^\varkappa$, $D_c B_q^\varkappa$, $D_r B_b^\varkappa$, $D_r B_q^\varkappa$ mediante le (6, 8); F_3 le equazioni che si ottengono dalle F_2 con ulteriore derivazione e sostituzione ecc . . . abbiamo che: date le connessioni Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p e i tensori $H_{cb}^{\cdot\cdot p}$, $L_{rb}^{\cdot\cdot p}$, $L_{cq}^{\cdot\cdot a}$, $H_{rq}^{\cdot\cdot a}$ condizione necessaria e sufficiente perchè esistano in L_n (in cui $\Gamma_{\nu\lambda}^\varkappa$ sono i parametri della connessione) una X_n^m e una $X_n^{m'}$ (da considerarsi una come varietà complementare dell'altra) tali che in relazione ad esse siano Λ_{cb}^a, Λ_{rb}^a, Λ_{cq}^p, Λ_{rq}^p le connessioni di X_n^m, $X_n^{m'}$ subordinate dalla connessione dell'ambiente, e siano $H_{cb}^{\cdot\cdot p}$, $L_{rb}^{\cdot\cdot p}$, $L_{cq}^{\cdot\cdot a}$, $H_{rq}^{\cdot\cdot a}$ i corrispondenti tensori di curvatura euleriana, è che esista un intero N tale che le equazioni F_1, F_2, . . ., F_N siano algebricamente compatibili nelle $B_b^\varkappa$, $B_q^\varkappa$, e le loro soluzioni soddisfino alle F_{N+1}.

Se q delle $F_1, F_2, \ldots, F_N$ sono algebricamente indipendenti la soluzione dipende da $n^2 - q$ parametri arbitrari.

*

Anholonomní variety vnořené do afinního prostoru.

I. Variety komplementární X_n^m, $X_n^{m'}$ v L_n.

(Obsah předešlého článku.)

V práci jsou určeny nutné a postačující podmínky pro existenci dvou anholonomních komplementárních variet X_n^m, $X_n^{m'}$ ($m' = n - m$), určených tensory Eulerovy křivosti a vnořených do prostoru X_n, v němž je dána afinní konexe.

Poněvadž vnitřní a vnější konexe komplementárních variet X_n^m, $X_n^{m'}$ mohou býti dány libovolně, nebo mohou býti projekcemi konexe v X_n (případ v geom. aplikacích důležitý), jsou studovány podmínky existence v těchto dvou případech. V každém jsou určeny tři skupiny rovnic (viz (5, 10)—(5, 12) a (6, 14)—(6, 16)), které jsou zobecněním nutných a postačujících podmínek pro existenci X_n^m, $X_n^{m'}$ uveřejněných již dříve Hlavatým resp. Gaussem, Codazzim a Riccim.

Bibliografia.

(1) **J. A. Schouten:** On non holomic connexion. „Proceedings Kon. Akad. V. Wethenschappen, Amsterdam", Vol. **31**, 1928, pp. 291—299.

(2) **G. Vranceanu:** Parallelisme et courbure dans une variété non holonome. „Atti del Congr. Matem. Internaz., Bologna 1928". T. V., pp. 61—67.

(3) **J. A. Schouten:** Über nicht holonome Übertragungen in einer L_n. „Mathem. Zeitschrift" B. **30**, 1929, pp. 149—172.
(4) **V. Hlavatý:** Sur la courbure des variétés non holonomes. „Rendiconti R. Accad. Lincei" (6) vol. **12**, 1930, pp. 556—574.
(5) **J. A. Schouten, E. R. van Kampem:** Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie, nichtholonomer Gebilde. „Mathem. Annalen" B. **103**, 1930, pp. 752—783.
(6) **P. Dienes:** On the fundamental formulae of the geometry of tensor submanifolds. „Journal de Mathém." (9), t. **11**, 1932, pp. 255—282.
(7) **V. Hlavatý:** Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen. „Mathem. Zeitschrift" B. **38**, 1934, pp. 283—300.
(8) **J. A. Schouten, D. J. Struik:** Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. (Zweite Aufl.) P. Noordhoff, Groningen 1935 (I. Band: Algebra und Übertragungslehre).
(9) **G. Vranceanu:** Les espaces non holonomes. „Mémorial des Sc. Mathem." **76**, Gauthier-Villars, Paris 1936.
(10) **E. Bortolotti:** Superficie anolonome complementari. Estratto da „Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari" 1936, pp. 553—570.

Podmínky pro stabilisaci kmitů spřažením.

Rostislav Košťál, Brno.

(Došlo 2. března 1938.)

V pojednání „Sur la stabilisation des oscillations par couplage"[1]) odvodil jsem podmínky, za kterých systém n spřažených elementů dává stabilní kmity, ať již elementy nespřažené dávají kmity stabilní neb nestabilní. Při použití těchto podmínek jest třeba určiti hodnosti a signatury kvadratických forem a potenční součty kořenů. V tomto pojednání uvádím, jak se určí signatura kvadratické formy a potenční součty kořenů a jak se užitím těchto výsledků upraví dřívější uvedené podmínky. K tomu použijeme věty:

Buď

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

kvadratická forma, jejíž determinant jest

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proměnné $x_1, x_2 \dots x_n$ uspořádáme tak, aby v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1} \dots R_1, R_0 = 1$$

uvedeného determinantu byl co možná nejmenší počet počátečních členů roven nule, a z následujících členů nikdy dva po sobě jdoucí nerovnali se nule. Označíme-li μ počet nulových počátečních členů, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů, jest hodnost kvadratické formy

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 40.

Determinanty vyskytující se v uvedeném pojednání jsou Hankelovy determinanty. Pro ně platí vztah

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{\mu > \nu}^{1,n} (\lambda_\mu - \lambda_\nu)^2,$$

při čemž $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou kořeny rovnice, z nichž byl vytvořen determinant Δ_n.

Když všechny kořeny dané rovnice budou jednoduché, t. j. když $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ pro $1 \leqq \nu, \mu \leqq n, \mu \neq \nu$, bude Hankelův determinant $\Delta_n \neq 0$. Když aspoň jeden kořen bude násobný, pak $\Delta_n = 0$. Hlavní subdeterminant prvého řádu tohoto determinantu můžeme odvoditi takto. Platí tento vztah mezi maticemi

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \dots s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & s_3 \dots s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & s_4 \dots s_n \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \dots s_{2n-4} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \dots \lambda_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \dots \lambda_n^{n-2} \end{Vmatrix}$$

Podle známého pravidla dá se vyjádřiti determinant matice na levé straně této rovnice součtem jistých součinů vždy jednoho ((n — 1)-řadového) determinantu první matice s jedním determinantem druhé matice na pravé straně. Odtud dostáváme

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-4} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-2} & \lambda_{\nu_2}^{n-2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix}^2,$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Z tohoto výsledku vidíme: má-li daná rovnice všechny kořeny jednoduché, jsou všichni sčítanci kladní, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; když má daná rovnice jen jeden kořen dvojnásobný, pak jsou všichni sčítanci rovni nule až na jeden, proto $\Delta_{n-1} \neq 0$; v ostatních případech je $\Delta_{n-1} = 0$.

Abychom z původního Hankelova determinantu vytvořili jiný subdeterminant prvého řádu než hlavní, postupujeme podobně jako dříve: mezi maticemi platí vztah

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k & s_{k+2} & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} & s_{k+3} & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_l & s_{l+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2n-2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^l & \lambda_2^l & \dots & \lambda_n^l \\ \lambda_1^{l+2} & \lambda_2^{l+2} & \dots & \lambda_n^{l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^k & \lambda_1^{k+2} & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^k & \lambda_2^{k+2} & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^k & \lambda_n^{k+2} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix};$$

odtud obdržíme pro determinanty jako dříve vztah

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k & s_{k+2} & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k+1} & s_{k+3} & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_l & s_{l+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{l+2} & s_{l+3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & \dots & \dots & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^k & \lambda_{\nu_2}^k & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^k \\ \lambda_{\nu_1}^{k+2} & \lambda_{\nu_2}^{k+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{\nu_1} & \lambda_{\nu_2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}} \\ \lambda_{\nu_1}^2 & \lambda_{\nu_2}^2 & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^l & \lambda_{\nu_2}^l & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^l \\ \lambda_{\nu_1}^{l+2} & \lambda_{\nu_2}^{l+2} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu_1}^{n-1} & \lambda_{\nu_2}^{n-1} & \dots & \lambda_{\nu_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix},$$

kde Σ se vztahuje na $\binom{n}{n-1}$ kombinací kořenů $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Když hlavní subdeterminant prvého řádu je roven nule, t. j. rovnice má méně než $n - 1$ kořenů navzájem různých, jest také každý jiný subdeterminant prvého řádu roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají aspoň dva sloupce stejné.

Podobně je tomu i při každém jiném subdeterminantu vyššího řádu. Když hlavní subdeterminant řádu p Δ_{n-p} je roven nule, t. zn., že rovnice má méně než $n - p$ kořenů navzájem různých, musí také každý jiný subdeterminant řádu p býti roven nule, poněvadž všechny determinanty, z nichž tento determinant vznikne násobením, mají $n - p$ sloupců a proto aspoň dva sloupce stejné.

Když hlavní subdeterminant řádu r není roven nule, musí každý další hlavní subdeterminant vyššího řádu býti rovněž různý od nuly, poněvadž se již nemohou v determinantech, z nichž vzniká, vyskytnouti takové, které by měly dva sloupce stejné (ani dvě řádky).

Z těchto výsledků plyne, že u kvadratické formy, jejímž determinantem jest Hankelův determinant, není třeba k užití uvedené věty uspořádati proměnné tak, aby byly podmínky splněny, poněvadž u Hankelova determinantu jsou splněny vždy. Proto uvedená věta zní pro Hankelův determinant takto:

Označíme-li v řadě hlavních subdeterminantů

$$R_n, R_{n-1}, \ldots, R_1, R_0 = 1$$

determinantu

$$R_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{1}$$

počet nulových počátečních členů μ, počet shod znamének π a počet změn znamének ν, jest hodnost kvadratické formy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{i+k-2} \lambda_i \lambda_k$$

$$h = n - \mu = \pi + \nu$$

a signatura

$$\varrho = \pi - \nu.$$

Členy determinantu (1) jsou potenční součty kořenů charakteristické rovnice. Řadu determinantů určíme buď tak, že potenční součty kořenů nahradíme koeficienty charakteristické rovnice podle Newtonových formulí, nebo výhodněji tak, že determinanty s potenčními součty kořenů nahradíme jinými s koeficienty dané rovnice podle vztahu prof. dr. K. Čupra.[2]) Podle Čuprova vztahu platí pro charakteristickou rovnici

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \beta_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \beta_n = 0$$

[2]) Dr. K. Čupr: Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **57** (1928), 217.

a pro determinanty

$$R_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (n-r+2)\,\beta_{r-2} & (n-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq n$.

Tímto způsobem dá se upraviti podmínka druhá a čtvrtá v dříve uvedených podmínkách, takže máme výsledek:

Aby systém diferenciálních rovnic (II) dával stabilní kmity, k tomu je nutné a stačí, aby rovnice (III) splňovala podmínky[3]):

1. nulový kořen může míti jen jednoduchý; když má nulový kořen, zavedeme funkci $F(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}$; jinak $F(\lambda) = f(\lambda)$; stupeň $F(\lambda)$ označme m'

$$F(\lambda) \equiv \lambda^{m'} + \beta_1 \lambda^{m'-1} + \beta_2 \lambda^{m'-2} + \dots + \beta_{m'} = 0;$$

2. signatura ϱ' kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

jejíž determinant jest

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots s'_{m'} \\ & & \vdots \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

musí splňovati podmínku $h - \varrho' \geqq 2$, t. j.

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ čili } \nu' \geqq 1,$$

při čemž h jest hodnost kvadratické formy, π' počet shod znamének a ν' počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D'_{m'}, D'_{m'-1} \dots D'_1, D'_0 = 1$$

determinantu $D'_{m'}$, vypočtených podle vztahu

---

[3]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \dots s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 \dots s'_r \\ \vdots & \\ s'_{r-1} & s'_r \dots s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix},$$

kde $1 \leqq r \leqq m'$;

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ a buď všechna $\beta_{m'-2\nu-1} > 0$, anebo všechna $\beta_{m'-2\nu-1} = 0$ pro $0 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m'-1}{2}\right]$;

4. postupným dělením určíme největší společnou míru

$$d(y) = d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \dots + d_\tau$$

dvou polynomů $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, utvořených jednak z členů o sudých mocninách λ, jednak z členů o lichých mocninách λ rovnice $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Označíme-li $\varrho = \pi - \nu$ signaturu kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta,$$

při čemž s jsou potenční součty kořenů největší společné míry $d(y) = 0$, π počet shod znamének a ν počet změn znamének v řadě hlavních subdeterminantů

$$D_\tau, D_{\tau-1}, \dots D_1, D_0 = 1$$

determinantu

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_\tau \\ \vdots & \\ s_{\tau-1} & s_\tau \dots s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

vypočtených podle vztahu

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \dots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \dots & (2r-3)\,d_{2r-3} & (2r-2)\,d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 \dots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 \dots & (2r-4)\,d_{2r-4} & (2r-3)\,d_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (\tau-r+2)\,d_{r-2} & (\tau-r+1)\,d_{r-1} \end{vmatrix}$$

pro $1 \leqq r \leqq \tau$, musí platiti

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pro } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho.$$

při tom

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 & \dots & \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 & \dots & \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 & \dots & \beta_{2\nu-3} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \beta_\nu \end{vmatrix}.$$

Poznámka. Je-li $\varrho > 0$, pak má charakteristická rovnice již aspoň dva imaginární kořeny a jest tím již splněna podmínka 2., kterou není třeba vyjadřovat.

*

Sur les conditions de la stabilisation des oscillations par couplage.

(Extrait de l'article précédent.)

Le but de ce travail est de donner une forme convenable pour le calcul aux conditions pour qu'un système de n éléments couplés donne des oscillations stables.[1]) On obtient le résultat suivant:

Pour que le système des équations différentielles (II) donne des oscillations stables, il faut et il suffit que l'équation caractéristique (III) remplisse les conditions suivantes[2]):

1. Si une racine zéro existe, elle doit être simple. Dans ce cas introduisons la fonction $F(\lambda) = f(\lambda)/\lambda$, dans le cas contraire $F(\lambda) = f(\lambda)$; désignons par m' le degré de $F(\lambda)$.

2. La signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

où les s' sont les sommes des puissances des racines de l'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$, et dont le déterminant est

$$D'_{m'} = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & \dots & s'_{m'-1} \\ s'_1 & s'_2 & \dots & s'_{m'} \\ \vdots & & & \\ s'_{m'-1} & s'_{m'} & \dots & s'_{2m'-2} \end{vmatrix},$$

doit remplir la condition $h - \varrho' \geqq 2$, c'est-à-dire

$$\pi' + \nu' - \pi' + \nu' \geqq 2, \text{ ou } \nu' \geqq 1,$$

où h est le rang de la forme quadratique, π' le nombre des perma-

[1]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 40.
[2]) Časopis pro pěst. matematiky a fysiky **65** (1935), 47.

nences des signes et ν' le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D'_{m'},\ D'_{m'-1} \dots D'_1,\ D'_0 = 1$$

du déterminant $D'_{m'}$ qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D'_r = \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \dots s'_{r-1} \\ s'_1 & s'_2 \dots s'_r \\ \vdots & \\ s'_{r-1} & s'_r \dots s'_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 & 3\beta_3 \dots & (2r-3)\,\beta_{2r-3} & (2r-2)\,\beta_{2r-2} \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \dots & \beta_{2r-4} & \beta_{2r-3} \\ 0 & \beta_1 & 2\beta_2 \dots & (2r-4)\,\beta_{2r-4} & (2r-3)\,\beta_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots & (m'-r+2)\,\beta_{r-2} & (m'-r+1)\,\beta_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq m'$.

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ et tous les $\beta_{m'-2\nu-1}$ positifs ou tous égaux à zéro pour $0 \leqq \nu \leqq \left[\dfrac{m'-1}{2}\right]$.

4. Déterminons par la division progressive le plus grand commun diviseur

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \dots + d_\tau$$

de deux polynômes $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, l'un formé des termes aux puissances λ paires, l'autre formé des termes aux puissances λ impaires de l'équation $F(\lambda) = 0$, $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Désignons par $\varrho = \pi - \nu$ la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta,$$

où les s sont les sommes des puissances des racines du plus grand commun diviseur $d(y) = 0$, π le nombre des permanences des signes et ν le nombre des variations des signes dans la suite des subdéterminants principaux

$$D_\tau,\ D_{\tau-1}, \dots D_1,\ D_0 = 1$$

du déterminant

$$D_\tau = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{\tau-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_\tau \\ \vdots & \\ s_{\tau-1} & s_\tau \dots s_{2\tau-2} \end{vmatrix}$$

qui sont calculés au moyen de l'équation

$$D_r = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{r-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_r \\ \vdots & \\ s_{r-1} & s_r \ldots s_{2r-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_0^{2r-2}} \begin{vmatrix} d_1 & 2d_2 & 3d_3 \ldots & (2r-3)\, d_{2r-3} & (2r-2)\, d_{2r-2} \\ d_0 & d_1 & d_2 \ldots & d_{2r-4} & d_{2r-3} \\ 0 & d_1 & 2d_2 \ldots & (2r-4)\, d_{2r-4} & (2r-3)\, d_{2r-3} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & (\tau - r + 2)\, d_{r-2} & (\tau - r + 1)\, d_{r-1} \end{vmatrix}$$

pour $1 \leqq r \leqq \tau$; on doit avoir

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho,$$

où

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_5 \ldots \beta_{2\nu-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_4 \ldots \beta_{2\nu-2} \\ 0 & \beta_1 & \beta_3 \ldots \beta_{2\nu-3} \\ & & \vdots \\ & & \beta_\nu \end{vmatrix}.$$

Remarque. Si $\varrho > 0$, l'équation caractéristique a sûrement au moins deux racines imaginaires; donc, dans ce cas, la condition 2. est satisfaite d'elle - même et on peut la supprimer dans l'énoncé du théorème.

Sur un théorème de M. Mahler.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Reçu le 25 novembre 1938.)

Théorème. Soit M un corps convexe (fermé et borné) dans l'espace euclidien à n dimensions, symétrique par rapport au point $o = (0, \ldots, 0)$; soit $2^n A$ le volume de M. Soit $m > 0$ un nombre entier; pour chaque i $(1 \leqq i \leqq m)$ soit p_i un nombre premier, $f_i \geqq 0$ un nombre entier et $L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction qui fait correspondre à chaque système $(x_1, \ldots, x_n)$ des nombres p_i-adiques entiers un nombre p_i-adique entier et qui, de plus, jouit de la propriété suivante: si

$$L_i(x) - L_i(y) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_i^{f_i}),$$

on a

$$L_i(x - y) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_i^{f_i}).^{1})$$

Supposons enfin que

$$A \geqq p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}.$$

Alors il existe n nombres rationnels entiers $x_1, \ldots, x_n$ tels que le point $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq o$ soit situé dans M et que

$$L_i(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p_i^{f_i}) \ \text{pour} \ 1 \leqq i \leqq m.$$

Démonstration. Premier cas:

$$A > p_i^{f_i} \ldots p_m^{f_m}. \tag{1}$$

En suivant une méthode de M. Mordell, choisissons un nombre entier rationnel $t > 0$ tel que $(t, p_1 \ldots p_m) = 1$ et soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points $(2y_1/t, \ldots, 2y_n/t)$ (y_i = nombres entiers rationnels) situés dans M. Soit B le nombre des points de l'ensemble $\mathfrak{B}$, donc, d'après (1),

$$B > t^n p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m},$$

---

[1]) Cette propriété subsiste, en particulier, pour chaque $f_i \geqq 0$, si $| L_i(x - y) |_{p_i} \leqq | L_i(x) - L_i(y) |_{p_i}$.

si t est assez grand. Deux points

$$\left(\frac{2y_1}{t}, \ldots, \frac{2y_n}{t}\right), \quad \left(\frac{2z_1}{t}, \ldots, \frac{2z_n}{t}\right) \tag{2}$$

de $\mathfrak{B}$ sont comptés dans la même „classe“, si l'on a pour $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i \leqq m$

$$z_k \equiv y_k \pmod{t}, \ L_i\left(\frac{z_1}{t}, \ldots, \frac{z_n}{t}\right) \equiv L_i\left(\frac{y_1}{t}, \ldots, \frac{y_n}{t}\right) \pmod{p_i^{f_i}}$$

(remarquons que y_k/t, z_k/t sont des nombres p_i-adiques *entiers*). Le nombre de toutes les classes étant $t^n p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m} < B$, il existe deux points (2) de la même classe. En posant $t^{-1}(y_k - z_k) = x_k$, on voit que le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ satisfait aux conditions du théorème.

Deuxième cas:

$$A = p_1^{f_1} \ldots p_m^{f_m}.$$

$r > 0$ étant un nombre rationnel entier quelconque, soit M_r le corps au volume $(1 + r^{-1})\, 2^n A$, provenant du corps M par une dilatation (au centre o). Il existe donc, d'après le premier cas, un point $x^{(r)}$ à coordonnées entières, situé dans M_r et tel que $L_i(x^{(r)}) \equiv \equiv 0 \pmod{p_i^{f_i}}$. Le corps M étant fermé et borné, il existe un point x qui apparaît une infinité de fois dans la suite $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ et qui, par suite, est situé dans M. Ce point x satisfait donc évidemment aux conditions du théorème.

Le théorème démontré ici constitue une généralisation d'un théorème de M. Mahler;[2]) si M est un parallélépipède et si les $L_i(x)$ sont des formes linéaires en $x_1, \ldots, x_n$ aux coëfficients p_i-adiques entiers, on obtient précisément le théorème de Mahler.

*

O jedné větě Mahlerově.

(Obsah předešlého článku.)

Obsahem článku je zobecnění jedné Mahlerovy věty o systému lineárních forem s koeficienty částečně reálnými, částečně p-adickými.

---

[2]) K. Mahler, Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen, Jahresber. d. deutschen Mathematikervereinigung **44** (1934), p. 250—255.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Elektromagnetické vlny ve vodivých trubicích.

D. Maixnerová, Praha.

(Došlo 14. ledna 1939.)

Zákony šíření elektromagnetických vln ve vodivých trubicích kruhového průřezu vyšetřili po prvé Carson, Mead a Schelkunoff.[1]) Před nimi se touto otázkou zabýval Barrow,[2]) ale jen pro speciální případ symetrické elektrické vlny. Carson, Mead a Schelkunoff řešili tento problém obecně, a to v podstatě stejnou metodou, kterou stanovil Sommerfeld[3]) a po něm Hondros[4]) rychlost a útlum elektromagnetických vln na vodivém drátě.

Z teorie plyne, že se elektromagnetické vlny ve vodivých trubicích šíří podle docela jiných zákonů než na vodivých drátech. Fázová rychlost vln, které lze pozorovati na vodivém drátě, liší se u drátů obvyklé tloušťky nepatrně od rychlosti vln v okolním prostředí a je prakticky nezávislá na konstantách drátu (poloměr, vodivost), také útlum vln je malý. Teprve u velmi tenkých drátů (na př. pro vlny, jejichž délka ve vakuu činí několik dm, u drátů poloměru asi 10^{-3} mm) projevuje se vliv poloměru a vodivosti drátu; rychlost vln postupujících po takovém drátě je podstatně menší než rychlost vln v okolním prostředí a jejich útlum je značný. Pole je symetrické kolem osy drátu; elektrická síla leží v rovinách proložených osou drátu, síla magnetická v rovinách k ní kolmých a magnetické silokřivky jsou kruhy, jejichž středy leží v ose drátu. Podle Hondrose nazýváme tuto vlnu symetrickou vlnou elektrickou.

Teorie připouští ještě jiné typy elektromagnetických vln na vodivém drátě. Je to nejdříve vlna magnetická, v níž magnetická síla leží v rovinách proložených osou drátu, síla elektrická v rovinách k ní kolmých a elektrické silokřivky mají tvar kruhů se středy

[1]) J. R. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, The Bell System Technical Journal, **15** (1936), 310.

[2]) W. L. Barrow, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, **24** (1936), 1928.

[3]) A. Sommerfeld, Wiedemann's Annalen, **67** (1899), 233.

[4]) D. Hondros, Annalen der Physik, **30** (1909), 905.

na ose drátu; pole této vlny je také symetrické kolem osy drátu. Dále jsou vlny nesymetrické, v nichž elektrická i magnetická vlna jsou spolu spřaženy. Rychlost všech těchto vln závisí značně na konstantách drátu i na frekvenci. Praktického významu nemají, neboť jejich útlum je tak veliký, že se vůbec nedají pozorovati.

I vodivými trubicemi mohou se šířiti elektromagnetické vlny několika typů. Jsou to nejdříve symetrická vlna elektrická a symetrická vlna magnetická. Ale i nesymetrické vlny mohou tu býti dvojího druhu, elektrického a magnetického, nejsou tedy spolu spřaženy, jak je tomu v případě vodivého drátu. Kromě toho však se každá z těchto vln skládá z nekonečného počtu vln téhož typu, na př. z nekonečného počtu symetrických vln elektrických, které mají sice stejnou frekvenci, ale různé fázové rychlosti i útlum. O závislosti útlumu těchto vln na frekvenci lze zhruba říci toto. Je-li kmitová frekvence malá, je útlum všech vln, které by v trubici mohly vzniknouti, tak veliký, že se nedají pozorovati; trubice nepropouští elektromagnetické kmity nízkých frekvencí. Stoupá-li frekvence, počne při jisté její hodnotě útlum rychle klesati, až dosáhne hodnoty velmi malé; při které frekvenci to nastane, závisí jednak na poloměru trubice a na vodivosti jejích stěn, jednak i na tom, o jaký typ vlny jde; je tedy tato t. zv. první kritická frekvence jiná pro symetrickou vlnu elektrickou než pro symetrickou vlnu magnetickou. Od této frekvence počínajíc šíří se trubicí jedna vlna zvoleného typu. Zvyšujeme-li frekvenci dále, přijdeme ke druhé kritické frekvenci, při níž se objeví druhá vlna téhož typu; její útlum byl při nižších frekvencích tak veliký, že se nedala pozorovati, když se však frekvence kmitů přiblíží k druhé kritické hodnotě, počne útlum zase rychle klesati. Při frekvencích něco vyšších, než je druhá kritická hodnota, šíří se pak trubicí dvě vlny stejného typu lišící se od sebe fázovými rychlostmi. Dalším zvyšováním frekvence dospějeme k třetí kritické hodnotě; trubicí se pak šíří tři vlny stejného typu, stejných frekvencí a různých fázových rychlostí atd. To platí v podstatě stejně pro vlny všech typů bez rozdílu, takže při dosti vysokých frekvencích mohou vodivou trubicí procházeti i slabě tlumené symetrické vlny magnetické nebo vlny nesymetrické, a to elektrické i magnetické.

Také fázová rychlost vln v trubicích závisí podstatně na poloměru trubice a na její vodivosti, mimo to ovšem i na frekvenci. Je vždy větší než rychlost elektromagnetických v prostředí, kterým je trubice vyplněna.

V citované práci vypočetli Carson, Mead a Schelkunoff závislost útlumu na frekvenci pro jednotlivé typy vln, ale jen v případě, kdy je útlum malý, tedy pro dosti vysoké frekvence. Závislost fázové rychlosti na frekvenci stanovili jen pro trubice, jejichž stěny jsou z látky nekonečně dobře vodivé. V této práci jsou vypočteny obě tyto veličiny metodou jinou, která umožňuje stanoviti je pro každou frekvenci a za předpokladu, že vodivost stěn trubice je sice veliká, ale konečná.

1. Rovnice pro fázovou rychlost a útlum.

Nekonečně dlouhá trubice kruhového průřezu, jehož poloměr je ϱ, nechť je vyplněna homogenním isolujícím dielektrikem, dielektrické konstanty ε_2 a permeability μ_2. Stěny trubice nechť jsou z látky dobře vodivé (kov); její dielektrickou konstantu označíme ε_1, permeabilitu μ_1, konstantu vodivosti, měřenou v absolutní míře elektrostatické σ_1. V dalším budeme důsledně index 1 vztahovati na látku, z níž jsou stěny trubice, index 2 na dielektrikum v trubici.

Budeme předpokládati, že touto trubicí procházejí vlny časově netlumené, takže závislost intensity elektrického a magnetického pole $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na čase je dána funkcí $e^{i\omega t}$, kdež ω je reálné; je to kruhová frekvence. Do osy trubice položíme osu z; závislost intensit $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na ose z vyjadřuje pak funkce $e^{\pm i\lambda_n z}$. Veličina λ_n je obecně komplexní; píšeme-li ji v tvaru

$$\lambda = \frac{2\pi}{L} + i\varkappa, \tag{1}$$

značí L délku vlny procházející trubicí a $\varkappa$ její útlum, způsobený vývojem Jouleova tepla. Je

$$L = \frac{v}{f},$$

značí-li v fázovou rychlost vlny a f její frekvenci.

V rovině kolmé k ose trubice si zavedeme polární souřadnice r a φ. Závislost vektorů $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ na φ se dá vyjádřiti Fourierovou řadou, takže obecný výraz pro jejich složky má tvar

$$e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [P(r) \cos n\varphi + Q(r) \sin n\varphi]\, e^{i\lambda_n z}; \tag{2}$$

funkce $P(r)$ a $Q(r)$ se stanoví integrací Maxwellových rovnic.[5]) Pro $n = 0$ jsou složky elektrické a magnetické síly nezávislé na φ; pole je symetrické kolem osy trubice.

Z podmínek, které musí býti splněny v rozhraní, t. j. pro $r = \varrho$, plyne pak rovnice pro λ_n. Ta zní[6])

$$n^2\lambda_n^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2y^2}\right)^2 = \left(\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} - \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} - \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right). \tag{3}$$

---

[5]) Viz na př. D. Hondrons, loc. cit., rovn. (16) a (18).
[6]) Viz D. Hondros, loc. cit., rovn. (22).

Při tom n má týž význam jako v rovnici (2), dále je

$$x = \varrho\sqrt{k_1^2 - \lambda_n^2}, \quad y = \varrho\sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2}, \tag{4}$$

kdež konstanta k je definována rovnicí

$$k = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 + 4\pi i\sigma\mu\omega}{c^2}; \tag{5}$$

ε je dielektrická konstanta prostředí, μ permeabilita, c rychlost světla ve vakuu.

Prostředí 1, stěny trubice, je vodivé. Budeme o něm předpokládati, že sahá až do nekonečna; jsou-li na př. stěny trubice kovové, je tento předpoklad dovolen, není-li tloušťka stěn nesmírně malá. Ve výraze pro k_1 je pak σ_1 velké číslo (na př. pro měď je $\sigma_1 = 5{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot c^2$ absolutních jednotek elektrostatických), můžeme tedy v rovnici (5) první člen vynechati vedle členu druhého, nedosáhne-li ω hodnot tak značných, s jakými se shledáváme u kmitů optických. Pak je

$$k_1^2 = \frac{4\pi i}{c^2} \cdot \sigma_1 \mu_1 \omega.$$

Sem dosadíme

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi \cdot c}{l},$$

kdež l značí délku vlny odpovídající frekvenci f ve vakuu; budeme ji nazývati volnou vlnou. Je $l = c/f$. Tak dostaneme

$$k_1^2 = 8\pi^2 \frac{\sigma_1\mu_1}{cl} \cdot i;$$

z toho plyne dále

$$k_1 = (1 + i) R, \tag{6}$$

kdež

$$R = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma_1\mu_1}{cl}} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\sigma_1\mu_1 f}. \tag{6'}$$

Pro kovy a vlny nepříliš dlouhé jsou k_1 i R veliká čísla. Tak na př. pro měď ($\sigma_1 = 5{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot c^2$, $\mu_1 = 1$) a pro $l = 10$ cm dostáváme $R = 25{,}78 \cdot 10^3$ a $k_1 = (1 + i) \cdot 25{,}78 \cdot 10^3$.

Prostředí 2 isoluje, je tedy $\sigma_2 = 0$ a

$$k_2 = \frac{\varepsilon_2\mu_2}{c^2}\omega^2 = 4\pi^2\frac{\varepsilon_2\mu_2}{l^2},$$

takže

$$k_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\sigma_2\mu_2} = \frac{2\pi f}{c} \cdot \sqrt{\sigma_2\mu_2}. \tag{6''}$$

Dále značí v rovnici (3) $H_n(x)$ první Hankelovu funkci a $I_n(y)$ Besselovu funkci řádu n.[7]) Znamení odmocniny ve výraze, kterým je dáno x (rovn. 4), nutno vždy voliti tak, aby imaginární část x byla kladná.

Pro $n = 0$ je levá strana rovnice (3) rovna nule a rovnice se rozpadne v rovnice dvě:

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)} \tag{7}$$

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)}. \tag{8}$$

První z nich odpovídá symetrické vlně elektrické, druhá symetrické vlně magnetické.

Řešením rovnic (3), případně (7) nebo (8) dostaneme pro λ_n^2 komplexní výraz tvaru

$$\lambda_n^2 = p + iq, \tag{9}$$

a když vypočteme λ_n, plyne z rovnice (1) fázová rychlost i útlum vlny. Počet se dá zjednodušiti, poněvadž, jak uvidíme v dalším, je zpravidla p velké proti q. Musíme pak rozeznávati dva případy: $p > 0$, $p < 0$.

1. $p > 0$. Pak

$$\lambda_n = (p + iq)^{\frac{1}{2}}$$

a rozvojem v binomickou řadu dostaneme, když zanedbáme veličiny vyšších řádů,

$$\lambda_n = \sqrt{p}\left(1 + \frac{iq}{2p}\right).$$

Porovnáním s rovnicí (1) plyne

$$L = 2\pi \frac{1}{\sqrt{p}}$$

aneb

$$v = 2\pi \frac{f}{\sqrt{p}} \tag{10}$$

a pro konstantu útlumu dostáváme

$$\varkappa = \frac{q}{2\sqrt{p}}. \tag{11}$$

Poněvadž je q malé proti p, je útlum malý.

2. $p < 0$. Pak máme

[7]) Viz na př. D. Hondros, loc. cit. p. 948.

$$\lambda_n = (p + iq)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-p}\left(1 + \frac{iq}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a přibližně

$$\lambda_n = i\sqrt{-p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2\sqrt{-p}}.$$

Odtud plyne

$$L = 4\pi \frac{\sqrt{-p}}{q}$$

aneb

$$v = 4\pi \frac{f\sqrt{-p}}{q} \tag{12}$$

a

$$\varkappa = \sqrt{-p}. \tag{13}$$

V tomto případě dostáváme veliký útlum.

Jsou-li p a q téhož řádu, nutno λ_n vypočísti z výrazu (9) pro λ_n^2 obvyklou cestou. Položíme

$$\lambda_n^2 = re^{i\varphi}$$

je pak

$$\lambda_n = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Úhel φ musíme zvoliti tak, aby λ_n mělo reálnou i imaginární část kladnou.

Provedeme nyní počet pro jednotlivé typy vln.

2. Symetrická vlna elektrická.

Rovnice pro λ_n tu zní (rovn. 7)

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)}. \tag{14}$$

Hledáme vlny, jejichž útlum je malý. Pak je k_1 jistě veliké proti λ_n a v první rovnici (4) můžeme λ_n vynechati, takže dostaneme

$$x = \varrho k_1. \tag{15}$$

Je tedy x také veliké a má imaginární část kladnou. Platí pak přibližně

$$\frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = i$$

a rovnice (14) se dá psáti ve tvaru

$$y \cdot \frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{k_1} \cdot i \tag{16}$$

Pravá strana této rovnice je velmi malá; v prvním přiblížení vyhovíme jí tedy řešením

$$I_0(y) = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho kořenů vesměs reálných, stačí uvažovati jen kořeny kladné. Seřadíme-li je podle velikosti, dostaneme řadu

$$2{,}405, \quad 5{,}520, \quad 8{,}645, \quad 11{,}792, \quad \ldots$$

Označíme m-tý kořen y_{0m}; pro poněkud větší m je přibližně

$$y = (m - 1)\,\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Přesnější řešení rovnice (16) dostaneme, položíme-li

$$y = y_{0m} + \eta, \tag{17}$$

kdež η pokládáme za malé číslo. Pak levá strana oné rovnice zní

$$y \cdot \frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = \frac{(y_{0m} + \eta)\, I_0(y_{0m} + \eta)}{I'_0(y_{0m} + \eta)}.$$

Výrazy na pravé straně rozvineme v řadu, veličiny řádu η^2 a vyššího vynecháme, a poněvadž $I_0(y_{0m}) = 0$, dostaneme

$$y\,\frac{I_0(y)}{I'_0(y)} = \eta \cdot y_{0m}.$$

Po dosazení rovnice (16) zní

$$\eta \cdot y_{0m} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{k_1} \cdot i,$$

takže

$$\eta = -\,i\,\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{y_{0m} \cdot k_1}.$$

Za k_1 dosadíme výraz (6), je pak

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{y_{0m}} \cdot \frac{i}{(1 + i)\, R}$$

aneb

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{2 y_{0m} R}\,(1 + i) \tag{18}$$

a podle rovnice (17)

$$y = y_{0m} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\varrho k_2^2}{2 y_{0m} R}\,(1 + i).$$

Z druhé rovnice (4) vypočteme nyní λ_n. Poněvadž je tu $n = 0$, a poněvadž pro y dostáváme nekonečně mnoho řešení, píšeme λ_{0m} místo λ_n. Je pak

$$y^2 = \varrho^2(k_2{}^2 - \lambda_{0m}{}^2)$$

aneb

$$\lambda_{0m}{}^2 = k_2{}^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}.$$

Sem dosadíme $y = y_{0m} + \eta$ a vynecháme členy řádu η^2; tak vznikne

$$\lambda_{0m}{}^2 = k_2{}^2 - \frac{y_{0m}{}^2}{\varrho^2} - 2\,\frac{y_{0m}\eta}{\varrho^2}$$

a vzhledem k rovnici (18)

$$\lambda_{0m}{}^2 = k_2{}^2 - \frac{y_{0m}{}^2}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2{}^2}{\varrho R}\cdot(1 + i),$$

takže podle rovnice (9) je

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2{}^2 - \frac{y_{0m}{}^2}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2{}^2}{\varrho R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2{}^2}{\varrho R}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Je viděti, že q je velmi malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2{}^2 - y_{0m}{}^2/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej zatím, jsou útlum a fázová rychlost dány podle toho, jaké znamení má p, rovnicemi (10) a (11) nebo (12) a (13), při čemž možno za p psáti jednoduše

$$p = k_2{}^2 - \frac{y_{0m}{}^2}{\varrho^2}. \qquad (19')$$

Tento výraz je kladný, je-li

$$k_2 > \frac{y_{0m}}{\varrho};$$

záporný, je-li

$$k_2 < \frac{y_{0m}}{\varrho}.$$

Dosadíme-li sem za k_2 z rovnice (6″), nalezneme, že p mění své znamení v okolí frekvencí

$$f_{0m} = \frac{c\,.\,y_{0m}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}; \qquad (20)$$

pro frekvence vyšší je p kladné, pro frekvence nižší záporné.

Pro kladná p je podle rovnice (10) fázová rychlost vlny odpovídající frekvenci f dána rovnicí

$$v_{0m} = 2\pi \frac{f}{\sqrt{k_2^2 - y_{0m}^2/\varrho^2}} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Dostáváme tedy pro fázovou rychlost nekonečně mnoho hodnot; trubicí se může šířiti nekonečně mnoho symetrických vln. Jejich fázové rychlosti nezávisí na vodivosti stěn, je-li ovšem tato veliká, a není-li frekvence kmitů blízká některé frekvenci f_{0m} dané rovnicí (20). Když do rovnice (21) dosadíme z rovnice (6″) za k_2 a z rovnice (20) za y_{0m}/ϱ, dostaneme po snadné úpravě pro v_{0m} výraz

$$v_{0m} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f_{0m}/f)^2}}, \tag{22}$$

který ovšem platí jen, je-li $f > f_{0m}$ a není-li rozdíl $f - f_{0m}$ příliš malý. Podíl $c/\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ je rychlost volné vlny v dielektriku vyplňujícím trubici, je tedy v_{0m} vždy větší než tato rychlost.

Pro útlum plyne z rovnice (11), (19) a (19′)

$$\varkappa_{0m} = \frac{\mu_1}{2\mu_2} \cdot \frac{k_2^2}{\varrho R} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - \dfrac{y_{0m}^2}{\varrho^2}}}$$

aneb vzhledem k rovnicím (6′), (6″) a (20) po úpravě

$$\varkappa_{0m} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (f_{0m}/f)^2}}, \tag{23}$$

kdež

$$\alpha = \frac{1}{2\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1 f}{\mu_2\sigma_1}}. \tag{23'}$$

Tento výraz odvodili Carson, Mead a Schelkunoff v citované práci.[8]) Platí za stejných podmínek jako rovnice (21) pro fázovou rychlost.

Je-li $f < f_{0m}$ a rozdíl $f_{0m} - f$ nepříliš malý, vypočte se v a $\varkappa$ z rovnic (12) a (13), při čemž p a q jsou dány rovnicemi (19) a (19′). Po provedení počtu dostáváme tyto výrazy:

$$v_{0m} = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot f_{0m} \cdot \sqrt{1 - (f/f_{0m})^2} \tag{24}$$

a

$$\varkappa_{0m} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\, f_{0m} \cdot \sqrt{1 - (f/f_{0m})^2}. \tag{25}$$

Tyto rovnice ovšem neplatí, stejně jako rovnice (22) a (23),

[8]) J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 327, rovn. (48).

je-li rozdíl $f - f_{0m}$ malý. Pak je totiž p téhož řádu jako q a λ_{0m} musíme vypočísti přímo z rovnice (9).

Jako příklad je v tab. 1 vypočtena fázová rychlost a útlum symetrické vlny elektrické v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot c^2$ elektrostat. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočet je proveden pro první kořen $y_1 = 2{,}405$.

Tab. 1.

l cm	f_{01} sec^{-1} . . 10^{-10}	$q \cdot 10^6$	p	v_{01} cm/sec . . 10^{-10}	$\varkappa_{01}$ cm^{-1}	Δz_{01} cm
8	0,375	13,30	+ 0,3855	3,79	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$	$9{,}09 \cdot 10^4$
12	0,250	7,24	+ 0,0427	7,60	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$5{,}56 \cdot 10^4$
12,5	0,240	6,81	+ 0,0212	10,36	$2{,}3 \cdot 10^{-5}$	$4{,}35 \cdot 10^4$
13	0,230	6,42	+ 0,0022	30,82	$6{,}8 \cdot 10^{-5}$	$1{,}47 \cdot 10^4$
13,02	0,230	6,41	+ 0,0015	37,26	$8{,}3 \cdot 10^{-5}$	$1{,}21 \cdot 10^4$
13,05	0,229	6,37	+ 0,0004	$7{,}19 \cdot 10^2$	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	$6{,}28 \cdot 10^3$
13,07	0,229	6,37	—0,0003	$81{,}52 \cdot 10^2$	0,017	58,82
13,5	0,222	6,07	—0,0148	$5{,}4 \cdot 10^4$	0,12	8,33
14	0,214	5,75	—0,0300	$8{,}1 \cdot 10^4$	0,18	5,56
20	0,150	3,37	—0,1327	$20{,}4 \cdot 10^4$	0,36	2,78
30	0,100	1,87	—0,1875	$29{,}7 \cdot 10^4$	0,43	2,33

Hodnoty Δz v posledním sloupci jsou dráhy měřené v cm, které vlna musí uraziti, aby její amplituda klesla na $1/e$-tou část původní hodnoty.

Z tabulky je zřejmé, že útlum $\varkappa_{01}$ je v intervalu $l = 8$ cm do $l = 13{,}05$ cm poměrně malý a jeho vzrůst zvláště s počátku nepatrný. Je vidět, že vlna musí v tomto intervalu proběhnouti velikou dráhu Δz, aby amplituda vlny klesla na $1/e$-tou část původní hodnoty. $l = 13{,}05$ cm tvoří jakousi hranici. Od této hodnoty útlum počne stoupati a je třeba stále menší dráhy Δz pro klesnutí amplitudy na $1/e$-tou část původní hodnoty. V tomto oboru se vlny procházející trubicí pozorovati nedají. Změna útlumu v okolí kritické frekvence je poměrně rychlá; pro $l = 13{,}05$ cm je $\varkappa_{01} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm^{-1}, pro $l = 13{,}07$ cm je $\varkappa_{01}$ již $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ cm^{-1}.

Fázová rychlost v_{01} s počátku stoupá zvolna, ale čím dále tím rychleji, až zase v okolí hodnoty $l = 13{,}05$ cm, kdy začíná útlum růsti, stoupá v_{01} velmi rychle.

3. Symetrická vlna magnetická.

Pro magnetickou symetrickou vlnu je λ_n dáno rovnicí (8), jež zní

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)}. \tag{26}$$

Hledáme zase vlny o malém útlumu, takže x je opět dáno rovnicí (15) a přibližně je

$$\frac{H'_0(x)}{H_0(x)} = i.$$

Rovnici (26) můžeme pak psáti v tvaru

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_0(y)}{I_0(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1}. \tag{27}$$

Na pravé straně máme malé číslo; vyhovíme tedy poslední rovnici přibližně řešením

$$I'_0(y) = 0.$$

Tato rovnice má zase nekonečně mnoho reálných kořenů. Z nich musíme vyloučiti kořen $y = 0$, neboť v tom případě levá strana rovnice (27) není rovna nule, nýbrž $-1/2$. Seřadíme-li ostatní kladné kořeny podle velikosti, dostaneme řadu

$$3{,}83, \quad 7{,}02, \quad 10{,}17, \ldots;$$

pro poněkud větší m je přibližně

$$y'_{0m} = \left(m + \frac{1}{4}\right) \pi.$$

Přesněji píšeme kořeny rovnice (27) v tvaru

$$y = y'_{0m} + \eta;$$

kdež η je malé číslo. Po dosazení dostaneme až na veličiny řádu η^2

$$\frac{\eta I''_0(y'_{0m})}{y'_{0m} \, I_0(y'_{0m})} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1}. \tag{29}$$

Besselova funkce $I_0(y)$ splňuje diferenciální rovnici

$$I''_0(y) + \frac{1}{y} I'_0(y) + I_0(y) = 0.$$

Pro $y = y'_{0m}$ z ní plyne

$$\frac{I''_0(y'_{0m})}{I_0(y_{0m})} = -1,$$

když to dosadíme do rovnice (29), dostaneme

$$\eta = -i \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho k_1}.$$

Za k_1 dosadíme výraz (6); je pak

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho} \cdot \frac{1+i}{R} \tag{30}$$

a podle rovnice (28)

$$y = y'_{0m} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho R}(1+i).$$

Budeme psáti λ'_{0m} místo λ_n, pak stejně jako v předešlém případě dostaneme

$$\lambda'_{0m} = k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'_{0m}}{\varrho^3 R}(1+i)$$

a porovnáním s rovnicí (9) plyne

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^3 R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^3 R}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Zase je q malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2^2 - y'^2_{0m}/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej, můžeme psáti

$$p = k_2^2 - \frac{y'^2_{0m}}{\varrho^2}. \tag{31'}$$

Tento výraz je kladný, je-li

$$k_2 > \frac{y'_{0m}}{\varrho};$$

záporný, je-li

$$k_2 < \frac{y'_{0m}}{\varrho}.$$

p tedy mění své znamení v okolí frekvencí, daných rovnicí

$$f'_{0m} = \frac{c y'_{0m}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}.$$

Je-li p kladné, t. j. je-li $f > f'_{0m}$, a je-li mimo to rozdíl $f'_{0m} - f$ nepříliš malý, vypočteme v'_{0m} a $\varkappa'_{0m}$ z rovnic (10) a (11). Po provedení počtu dostaneme tyto výrazy

$$v'_{0m} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(f'_{0m}/f)^2}} \tag{32}$$

a

$$\varkappa'_{0m} = \alpha \frac{(f'_{0m}/f)^2}{\sqrt{1-(f'_{0m}/f)^2}} \tag{33}$$

α je dáno rovnicí (23′). Tento vzorec souhlasí s výrazem, který odvodili Carson, Mead a Schelkunoff.[9])

Pro záporná p, t. zn. pro $f < f'_{0m}$, a není-li rozdíl $f - f'_{0m}$ příliš malý, plynou z rovnic (12), (13), (31) a (31′) tyto hodnoty pro fázovou rychlost a útlum

$$v'_{0m} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{f^2}{f'_{0m}} \cdot \sqrt{1 - (f/f'_{0m})^2} \qquad (34)$$

a

$$\varkappa'_{0m} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \,.\, f'_{0m} \sqrt{1 - (f/f'_{0m})^2}. \qquad (35)$$

Je-li rozdíl $f - f'_{0m}$ malý, pak je p téhož řádu jako q a λ_n musíme vypočísti přímo z rovnice (9).

Jako příklad je v tab. 2 vypočtena fázová rychlost a útlum symetrické vlny magnetické v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočet je proveden pro první kořen $y = 3{,}83$.

Tab. 2.

l cm	f'_{01} sec^{-1} . . 10^{-10}	$q \,.\, 10^5$	p	v'_{01} cm/sec . . 10^{-10}	$\varkappa'_{01}$ cm^{-1}	$\Delta z'_{01}$ cm
8	0,375	1,27	+ 0,5582	3,17	8,5 . 10^{-6}	1,18 . 10^5
16	0,187	1,79	+ 0,0955	3,86	2,9 . 10^{-5}	3,45 . 10^4
24	0,125	2,19	+ 0,0098	8,26	1,1 . 10^{-4}	9,09 . 10^3
25,5	0,117	2,26	+ 0,0020	16,86	2,53 . 10^{-4}	3,95 . 10^3
25,8	0,116	2,27	+ 0,0006	30,78	4,64 . 10^{-4}	2,16 . 10^3
25,9	0,115	2,28	+ 0,0002	53,32	8,05 . 10^{-4}	1,24 . 10^3
26	0,115	2,28	—0,0003	1,12 . 10^3	1,73 . 10^{-2}	57,80
27	0,111	2,32	—0,0045	4,02 . 10^3	6,71 . 10^{-2}	14,90
30	0,100	2,45	—0,0148	6,24 . 10^3	0,12	8,33
40	0,075	2,83	—0,0340	6,14 . 10^3	0,18	5,56

Z tabulky vidíme, že průběh útlumu i fázové rychlosti je analogický jako v předešlém případě. Kritická hodnota volné délky vlny je nyní 25,9 cm.

4. Nesymetrické vlny.

Budeme nyní předpokládati, že je $n > 0$; λ_n pak je dáno rovnicí (3). Zase hledáme vlny malého útlumu, pro ně je $x = k_1 \varrho$

[9]) J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 327, rovn. (50).

a je veliké, takže přibližně

$$\frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = i.$$

y můžeme pokládati za malé proti x, takže na levé straně rovnice (3) zanedbáme y vedle x. V prvním faktoru na pravé straně je pak

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = \frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho}.$$

Vedle tohoto velkého členu zanedbáme druhý člen v závorkách, nesmí ovšem býti stejného řádu jako první člen; to bude splněno jistě, leží-li y dosti daleko od kteréhokoli z kořenů rovnice $I_n(y) = 0$. V druhém faktoru na pravé straně je

$$\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{H'_n(x)}{H_n(x)} = \frac{\mu_1}{k_1 \varrho} i$$

tento člen je malý a ponecháme celý faktor. Tak dostaneme

$$\frac{n^2 \lambda_n^2}{y^4} = \frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho} \cdot \left(\frac{\mu_1}{k_1 \varrho} i - \frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} \right)$$

a po úpravě

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{i}{\varrho k_1} \left(1 + \frac{n^2 \lambda_n^2 \varrho^2}{y^4} \right).$$

Za k_1 dosadíme z rovnice (6) a za λ_n^2 dosadíme známý výraz odvozený z druhé rovnice (4), totiž

$$\lambda_n^2 = k_2^2 - \frac{y^2}{\varrho^2}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1+i}{2\varrho R} \cdot \left(1 + n^2 \frac{\varrho^2 k_2^2 - y^2}{y^4} \right); \tag{36}$$

pravá strana této rovnice je číslo velmi malé, v prvém přiblížení lze jí vyhověti řešením

$$I'_n(y) = 0.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho reálných kořenů, jeden z nich je $y = 0$. Ten však musíme vyloučiti, neboť pro $y = 0$ a $n > 0$ je podíl $I'_n(y)/y \, . \, I_n(y)$ nekonečně veliký. Ostatní kladné kořeny seřazené podle velikosti označíme y'_{nm}. Jako přesnější řešení položíme zase

$$y = y'_{nm} + \eta, \tag{37}$$

kde η je malé číslo. Je pak

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{\eta \,.\, I''_n(y'_{nm})}{y'_{nm} I_n(y'_{nm})}.$$

Besselova funkce n-tého řádu splňuje rovnici

$$I''_n(y) + \frac{1}{y} \,.\, I'_n(y) + \left(1 - \frac{n^2}{y^2}\right) I_n(y) = 0,$$

pro $y = y'_{nm}$ z ní plyne

$$I''_n(y'_{nm}) = -\left(1 - \frac{n^2}{y'^2_{nm}}\right) I_n(y'_{nm}).$$

Po dosazení do rovnice (36) a úpravě dostaneme

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1+i}{2\varrho R} \cdot y'_{nm}\left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{mn} - n^2)}\right). \tag{38}$$

Stejným postupem jako v předešlých případech dospějeme pak k těmto vztahům

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2 - \frac{y'^2_{nm}}{\varrho^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\varrho^3 R}\left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{nm} - n^2)}\right) \cdot y'^2_{nm} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1}{\varrho^3 R} \cdot \left(1 + \frac{n^2\varrho^2 k_2^2}{y'^2_{nm}(y'^2_{nm} - n^2)}\right) \cdot y'^2_{nm}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Zase je q malé proti p vyjma případ, kdy rozdíl $k_2^2 - y'^2_{nm}/\varrho^2$ je malý. Vyloučíme-li jej, můžeme psáti

$$p = k_2^2 - \frac{y'^2_{nm}}{\varrho^2}; \tag{39'}$$

p mění tedy své znamení v okolí frekvencí, daných rovnicí

$$f'_{nm} = \frac{c \,.\, y'_{nm}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \tag{40}$$

Pro kladná p použitím rovnic (10), (11), (39) a (39') dostáváme pro fázovou rychlost a konstantu útlumu tyto výrazy

$$v'_{nm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (f'_{nm}/f)^2}} \tag{41}$$

$$\varkappa'_{nm} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (f'_{nm}/f)^2}} \cdot \left\{(f'_{nm}/f)^2 + \frac{n^2}{y'^2_{nm} - n^2}\right\}^{10)}. \tag{42}$$

Je-li p záporné, musíme výrazy pro v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ odvoditi z rovnic

[10]) Srv. J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 328, rovn. (52).

(12), (13), (39) a (39'). Pak je

$$v'_{nm} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{f^2}{f'_{nm}} \cdot \sqrt{1 - (f/f'_{nm})^2} \cdot \frac{1}{\left\{1 + (f/f'_{nm})^2 \frac{n^2}{y'^2_{nm} - n^2}\right\}} \quad (43)$$

a

$$\varkappa'_{nm} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \cdot f'_{nm} \sqrt{1 - (f/f'_{nm})^2}. \quad (44)$$

Toto řešení odpovídá nesymetrické vlně magnetické; pro $n = 0$ přecházejí nalezené vzorce ve výrazy (32) až (35) odpovídající symetrické vlně magnetické.

Jako příklad vypočteme v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ pro vlny v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm, a to pro $n = 1$ a pro první kořen $y_1 = 1{,}84$. Výsledky jsou obsaženy v tab. 3.

Tab. 3.

l cm	$f'_{11}\mathrm{sec}^{-1} \,.\, 10^{-10}$	$q \,.\, 10^6$	p	v'_{11} cm/sec . 10^{-10}	$\varkappa'_{11}$ cm^{-1}	$\Delta z'_{11}$ cm
6	0,500	11,1	+ 0,9606	3,21	5,68 . 10^{-6}	1,76 . 10^5
10	0,300	7,26	+ 0,2594	3,69	7,13 . 10^{-6}	1,40 . 10^5
16	0,187	6,11	+ 0,0188	8,41	2,23 . 10^{-5}	4,49 . 10^4
17	0,176	6,06	+ 0,0012	32,58	8,75 . 10^{-5}	1,14 . 10^4
17,05	0,175	6,06	+ 0,0004	56,52	1,51 . 10^{-4}	6,60 . 10^3
17,1	0,175	6,06	—0,0004	77,7 . 10^2	2,0 . 10^{-2}	50,00
18	0,166	6,04	—0,0136	41,3 . 10^3	0,12	8,58
20	0,150	6,03	—0,0367	59,9 . 10^3	0,19	5,22
30	0,100	6,03	—0,0915	59,2 . 10^3	0,30	3,31

Průběhy v'_{nm} a $\varkappa'_{nm}$ jsou obdobné jako v předešlých dvou případech. Kritická hodnota je v tomto případě $l = 17{,}05$ cm.

Předpokládali jsme, že y leží dosti daleko od kteréhokoli kořene rovnice $I_n(y) = 0$. To je splněno, neboť y je velmi přibližně dáno kořeny rovnice $I'_n(y) = 0$ a z teorie Besselových funkcí je známo, že všechny kořeny rovnic $I_n(y) = 0$ a $I'_n(y) = 0$ se od sebe dostatečně liší mimo kořen $y = 0$, který je oběma rovnicím společný pro $n > 1$, ale tento kořen jsme vyloučili.

Vyšetříme nyní, nevyhovíme-li rovnici (34) řešením, které je blízké kořenům rovnice $I_n(y) = 0$. Budeme zase hledat jen vlny s malým útlumem; pro ně podobným postupem jako svrchu se rovnice (3) zjednoduší a zní takto:

$$\frac{n^2\lambda^2}{y} = \left(\frac{k_1 i}{\varrho} \cdot \frac{1}{\mu_1} - \frac{k_2^2}{\mu_2} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right) \cdot \left(-\frac{\mu_2}{y} \cdot \frac{I'_n(y)}{I_n(y)}\right).$$

Po úpravě

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{I'_n(y)}{I_n(y)}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{k_1 i}{k_2^2\varrho}+\frac{n^2\lambda_n^2}{y^3}\cdot\frac{I_n(y)}{I'_n(y)}. \tag{45}$$

Této rovnici vyhovíme skutečně hodnotou y, která je blízká některému kořenu rovnice $I_n(y) = 0$. Pak je totiž levá strana veliká, pravá strana také, neboť první její člen je veliký, druhý malý. Jeden z kořenů rovnice $I_n(y) = 0$ $(n > 0)$ je $y = 0$; ten vyšetříme zvlášť. Označíme y_{nm} libovolný nenulový kořen rovnice $I_n(y) = 0$, položíme

$$y = y_{nm} + \eta, \tag{46}$$

a dostaneme

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{\varrho i}{y_{nm}}$$

aneb vzhledem k rovnici (6)

$$\eta = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2\varrho}{2Ry_{nm}}\cdot(1+i). \tag{47}$$

Odtud vypočteme

$$\left.\begin{aligned} p &= k_2^2-\frac{y_{nm}^2}{\varrho^2}+\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R} \\ q &= \frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{k_2^2}{\varrho R}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Není-li rozdíl $k_2^2 - y_{nm}^2/\varrho^2$ velmi malý, můžeme psáti

$$p = k_2^2 - \frac{y_{nm}^2}{\varrho^2} \tag{48'}$$

p tedy mění své znamení v okolí frekvencí

$$f_{nm} = \frac{c y_{nm}}{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \tag{49}$$

Pro p kladné (vysoké frekvence) dostáváme z rovnic (10), (11), (48) a (48′) následující hodnoty pro fázovou rychlost a útlum[11])

$$v_{nm} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(f_{nm}/f)^2}} \tag{50}$$

a

$$\varkappa_{nm} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-(f_{nm}/f)^2}}. \tag{51}$$

Pro záporná p (nízké frekvence) vyjdou z rovnic (12), (13),

[11]) Srv. J. V. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, loc. cit. p. 328, rovn. (51).

(48) a (48′) tyto výrazy

$$v_{nm} = \frac{2\pi}{\alpha} \cdot f_{nm} \sqrt{1 - (f/f_{nm})^2} \tag{52}$$

$$\varkappa_{nm} = \frac{2\pi}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} f_{nm} \sqrt{1 - (f/f_{nm})^2}. \tag{53}$$

Toto řešení odpovídá nesymetrické vlně elektrické; pro $n = 0$ přecházejí výrazy pro v_{nm} a $\varkappa_{nm}$ ve výrazy (22) až (25) odpovídající symetrické vlně elektrické.

Jako příklad je v tab. 4 vypočten útlum a fázová rychlost vln v měděné trubici ($\sigma_1 = 5{,}75 \,.\, 10^{-4} \,.\, c^2$ elektrost. jedn.) poloměru $\varrho = 5$ cm. Výpočty jsou provedeny pro $n = 1$ a pro první kořen $y_1 = 3.83$.

Tab. 4.

l cm	f_{11} sec^{-1} . 10^{-10}	q . 10^5	p	v_{11} cm/sec . 10^{-10}	$\varkappa_{11}$ cm^{-1}	Δz_{11} cm
4	0,750	3,77	+ 1,8803	3,43	1,38 . 10^{-5}	7,28 . 10^5
8	0,375	1,31	+ 0,0301	13,75	3,26 . 10^{-5}	2,66 . 10^5
8,2	0,365	1,29	+ 0,0004	1,16 . 10^2	3,22 . 10^{-4}	0,31 . 10^5
8,25	0,363	1,27	—0,0067	2,92 . 10^4	8,19 . 10^{-2}	12,2
8,26	0,363	1,27	—0,0081	3,20 . 10^4	8,94 . 10^{-2}	11,2
8,5	0,352	1,22	—0,0403	7,21 . 10^4	20,07 . 10^{-2}	4,98
10	0,300	0,95	—0,1920	17,4 . 10^4	43,82 . 10^{-2}	2,28
20	0,150	0,34	—0,4880	38,85 . 10^4	69,86 . 10^{-2}	1,43
30	0,100	0,28	—0,5428	33,4 . 10^4	73,67 . 10^{-2}	1,36

Průběhy útlumu a fázové rychlosti jsou obdobné předešlým případům. Mezní hodnota l je tu 8,2 cm.

Zbývá ještě vyšetřiti nulový kořen rovnice $I_n(y) = 0$ ($n > 0$). Pak je $y_{nm} = 0$ a

$$y = y_{nm} + \eta = \eta;$$

y je tedy malé. Pro malá y a $n > 0$ platí přibližně

$$\frac{I'_n(y)}{I_n(y)} = \frac{n}{y}.$$

To dosadíme do rovnice (34), píšeme η místo y a dostaneme

$$\frac{n^2 \lambda_n^2}{\eta^4} = \left(\frac{k_1 i}{\mu_1 \varrho} - \frac{k_2^2 n}{\eta^2}\right) \cdot \left(-\frac{n}{\eta^2}\right),$$

aneb po zkrácení a úpravě

$$\frac{n^2\lambda^2}{\eta^2} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{k_1 i}{\varrho} + \frac{nk_2^2}{\eta^2}.$$

Avšak

$$\lambda_n^2 = k_2^2 - \frac{\eta^2}{\varrho^2},$$

je tedy

$$\frac{n^2k_2^2}{\eta^2} - \frac{n}{\varrho^2} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{k_1 i}{\varrho} + \frac{nk_2^2}{\eta^2}.$$

To vede k nemožné rovnici

$$\frac{n}{\varrho^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\frac{k_1 i}{\varrho}$$

což dokazuje, že nulový kořen rovnice $I_n(y) = 0$ musíme vyloučiti.

Ústav pro teoretickou fysiku Karlovy university.

*

Elektromagnetische Wellen in leitenden Röhren.

(Inhalt des oberen Artikels.)

Die Gesetze der Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen in leitenden Röhren von kreisförmigem Durchschnitt wurden zum erstenmal von Carson, Mead und Schelkunoff untersucht.*) Ähnlich wie die Drahtwellen kann man auch die Wellen, welche sich in einem leitenden Rohr fortpflanzen, in elektrische und magnetische teilen; beide können symmetrisch oder asymmetrisch sein. Aber der Vorgang ist hier viel komplizierter als bei den Drahtwellen, denn jede bestimmte Wellenart besteht aus unendlicher Anzahl von Wellen derselben Art, z. B. die symmetrische elektrische Welle entsteht durch Superposition von unendlich vielen symmetrischen elektrischen Partialwellen, die bei gleicher Frequenz verschiedene Geschwindigkeiten und Dämpfungskonstanten haben. Bei niedrigen Schwingungsfrequenzen sind alle diese Wellen so stark gedämpft, daß sie sich nicht beobachten lassen. Wenn die Frequenz steigt, läßt sich für jede Partialwelle eine kritische Frequenz bestimmen, bei welcher die Dämpufng plötzlich zu sinken beginnt, bis sie einen kleinen Wert erreicht, so daß bei genügend hoher Frequenz eine ganze Reihe schwach gedämpfter Wellen im Rohre entstehen kann.

In der zitierten Arbeit haben sich Carson, Mead und Schelkunoff nur mit den schwach gedämpften Wellen beschäftigt und

*) J. R. Carson, S. P. Mead and S. A. Schelkunoff, The Bell System Technical Journal, **15** (1936), 310.

deren Geschwindigkeiten und Dämpfungskonstanten berechnet unter der Voraussetzung, daß die Leitfähigkeit des Rohrmaterials groß ist. In dieser Arbeit wird zur Berechnung der Dämpfung und Phasengeschwindigkeit eine Methode angewandt, welche es ermöglicht, beide Größen für jede Frequenz zu bestimmen, wenn die Leitungsfähigkeit der Wände des Rohres zwar groß aber endlich ist.

Bei symmetrischer elektrischer Welle gilt, wenn die Frequenz f größer ist als die kritische Frequenz f_{om}, für die Phasengeschwindigkeit die Gleichung (22) und für die Dämpfung die Gleichung (23). Wenn f kleiner als f_{om} ist, dann hat man für diese Größen die Gleichungen (24) und (25). Ähnlich erhält man für die symmetrische magnetische Welle die Gleichungen (32) und (33), resp. (34) und (35). Die Phasengeschwindigkeiten und die Dämpfungskonstanten der asymmetrischen magnetischen Welle sind durch die Gleichungen (41), (42) resp. (43), (44) gegeben und analogisch gelten für die asymmetrischen elektrischen Wellen die Gleichungen (50), (51) resp. (52) und (53).

Vydává a nakládá Jednota českých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8—12 a od 14—18 hodin kromě soboty odpol., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohlédací úřad Praha 25.