$$E_3(x) \geqq E_1(x) + (\beta(m_1 - 1) + \delta) + (\beta(m_2 - m_1 - 1) + \delta)$$
$$+ \ldots + (\beta(m_i - m_{i-1} - 1) + \delta) + (\beta(x - m_i - 1) + \delta)$$
$$= E_1(x) + \beta x - (\beta - \delta) \, . \, (i + 1).$$

Nun gilt 1. $i + 1 \leqq x - E_3(x)$; denn keine der $i + 1$ Zahlen
$$k_0 + 1, k_1 + 1, \ldots, k_i + 1$$
liegt in $\mathfrak{M}_3$. und die Anzahl dieser Zahlen ist höchstens gleich der Anzahl aller nicht in $\mathfrak{M}_3$ gelegenen Zahlen $\leqq x$, d. h. höchstens gleich $x - E_3(x)$. Daher haben wir
$$E_3(x) \geqq \alpha x + \beta x - (\beta - \delta)(x - E_3(x))$$
oder
$$E_3(x)(1 - \beta + \delta) \geqq (\alpha + \delta) \, . \, x.$$

2. $i + 1 \leqq E_3(x)$; denn die $i + 1$ Zahlen
$$m_0 + 1, m_1 + 1, \ldots, m_i + 1$$
liegen in $\mathfrak{M}_3$, sogar in $\mathfrak{M}_1$. Also
$$E_3(x) \geqq \alpha x + \beta x - (\beta - \delta) \, . \, E_3(x)$$
oder
$$E_3(x)(1 + \beta - \delta) \geqq (\alpha + \beta) \, . \, x.$$

3. $i + 1 \leqq E_1(x)$; also
$$E_3(x) \geqq E_1(x) + \beta x - (\beta - \delta) \, . \, E_1(x) =$$
$$= E_1(x)(1 - \beta + \delta) + \beta x \geqq (\alpha(1 - \beta + \delta) + \beta) \, . \, x.$$

Die Behauptung (1) gilt somit für alle x mit $k_i < x \leqq m_{i+1}$.

Sie ist richtig für $x = 1$; ist (1) mit $x - 1$ statt x schon bewiesen und gilt $x \subset \mathfrak{M}_3$, so ist der Induktionsschluß trivial. Denn die linke Seite von (1) wächst dann bei Übergang von $x - 1$ zu x um Eins, die rechte um weniger. Liegt x aber nicht in $\mathfrak{M}_3$, so in einem Intervall $k_i < x \leqq m_{i+1}$.

*

Poznámka o množinách přirozených čísel.

(Obsah předešlého článku.)

$\mathfrak{M}_1$ resp. $\mathfrak{M}_2$ budiž množina přirozených čísel a resp. b. Budiž $\mathfrak{M}_3$ množina všech čísel, jež jsou buďto a nebo $a + b$. $E_i(x)$ budiž počet oněch čísel z $\mathfrak{M}_i$, jež jsou $\leqq x$. Budiž $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, $0 \leqq \beta - \delta < 1$,
$$E_1(x) \geqq \alpha x, \; E_2(x) \geqq \beta x + \delta$$
pro všechna celá $x > 0$. Potom platí nerovnost (1) pro všechna celá $x > 0$.