O řešení zobecněné Chapmanovy funkční rovnice.

Bohuslav Hostinský, Brno.

(Došlo 27. září 1938.)

Věnováno k jubileu pana prof. dr. Karla Petra.

1. Integrální rovnice Fredholmova typu a druhého druhu

$$\varphi(x) + \int_a^b F(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

kde $F(x, y)$ značí danou spojitou funkci proměnných x a y, $f(x)$ danou spojitou funkci proměnné x a $\varphi(x)$ funkci neznámou ($a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$), má obecně (pokud nenastává t. zv. singulární případ) jediné řešení vyjádřené známými Fredholmovými vzorci (viz na př. E. Goursat: Cours d'Analyse mathém., t. III.). Jsou však i jiné způsoby, kterými se dá vyjádřiti řešení integrální rovnice (1). Jeden z nich zakládá se na tomto postupu (viz vzorce uvedené v odst. 2): Rovnice (1) definuje lineární funkční transformaci, která dané funkci $\varphi(x)$ přiřaďuje funkci $f(x)$. Rozložíme-li tuto transformaci v sled infinitesimálních transformací (t. j. takových, kterými se hodnota funkce mění o nekonečně malou veličinu), a sestrojíme-li ke každé z nich transformaci inversní, dá se úloha řešiti; stačí složiti všechny tyto inversní transformace v obráceném pořadí, abychom dostali tak transformaci, která je k původní transformaci inversní a která přiřaďuje dané funkci $f(x)$ jinou funkci $\varphi(x)$.

2. Budiž u proměnný parametr, který se mění v mezích s a t, $s < u < t$, a budiž $K(x, y, u)$ spojitá funkce proměnných x, y a u. Rozdělme interval (s, t) na n stejných dílů o délce h, takže dělícím bodům odpovídají hodnoty $s + h, s + 2h, \ldots, s + (n - 1)\, h$; $h = (t - s)/n$. m-tému dělícímu bodu $s + mh$ nechť odpovídá funkční transformace S_m daná formulí

$$g(x) = f(x) + h \int^b K(x, y, s + mh)\, f(y)\, dy, \tag{2}$$

která přiřaďuje dané funkci $f(x)$ funkci $g(x)$. Je-li m nekonečně veliké a tedy h nekonečně malé, je transformace (2) infinitesimální (rozdíl $g(x) - f(x)$ je nekonečně malý). Složme nyní transformace S_m tak, že nejprve provedeme S_n, pak S_{n-1}, na to $S_{n-2} \ldots$, na konec S_1. Složená transformace $S_1 S_2 \ldots S_{n-1} S_n$ blíží se určité limitní transformaci T, roste-li n do nekonečna. T je vyjádřena formulí*)

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \Big[\int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \ldots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_1) .$$
$$K(z_1, z_2, u_2) \ldots K(z_{n-1}, y, u_n)\, du_1 du_2 \ldots du_n\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1} \Big] f(y)\, dy. \tag{3}$$

Transformace S_m^{-1} inversní k transformaci S_m dané vzorcem (2) je vyjádřena vzorcem

$$f(x) = g(x) - h \int_a^b K(x, y, s + mh)\, g(y)\, dy. \tag{4}$$

Složme nyní transformace S_m^{-1} tak, že provedeme napřed S_1^{-1}, pak $S_2^{-1} \ldots$ a na konec S_n^{-1}. Složená transformace $S_n^{-1} S_{n-1}^{-1} \ldots S_2^{-1} S_1^{-1}$ blíží se určité limitní transformaci T^{-1}, roste-li n do nekonečna. Transformace T^{-1}, inversní k T, přiřaďuje dané funkci $\varphi(x)$ funkci $f(x)$ a je vyjádřena vzorcem

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^b \Big[- \int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \ldots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_n).$$
$$K(z_1, z_2, u_{n-1}) \ldots K(z_{n-1}, y, u_1)\, du_1\, du_2 \ldots du_n\, dz_1\, dz_2 \ldots \tag{5}$$
$$dz_{n-1} \Big] f(y)\, dy.$$

Označme symbolem $\psi(x, y, s, t)$ výraz, který se vyskytuje v hranaté závorce formule (3); pak se dá ukázati (zaměníme ve vzorci (3) s s t, pak zaměníme u každého jednoduchého integrálu podle $u_1, u_2, \ldots, u_n$ integrační meze a na konec napíšeme $u_1, u_2, \ldots, u_n$ místo resp. $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1$), že výraz v hranaté závorce (5) rovná se $\psi(x, y, t, s)$. Místo (3) a (5) můžeme tedy psáti

*) Viz B. Hostinský: Sur une équation fonctionnelle de la Théorie des probabilités (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 156 (1932), str. 14; podrobný výklad je v knize Volterra-Hostinský: Opérations infinitésimales linéaires (Paris, 1938; Chap. XVII).

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b \psi(x, y, s, t)\, f(y)\, \mathrm{d}y \tag{3'}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^b \psi(x, y, t, s)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y. \tag{5'}$$

(5′) jest integrální rovnice tvaru (1); je-li jádro $F(x, y)$ rovnice (1) tvaru $\psi(x, y, t, s)$, řeší se tedy rovnice (5′) vzorcem (3′) a řešení je jednoznačné. Při tom platí

$$\psi(x, y, s, t) + \psi(x, y, t, s) + \int_a^b \psi(x, z, s, t)\, \psi(z, y, t, s)\, \mathrm{d}z = 0. \tag{6}$$

Funkce ψ je vyjádřena řadou

$$\psi(x, y, s, t) = \int_s^t K(x, y, u)\, \mathrm{d}u +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int_s^t \int_s^{u_n} \int_s^{u_{n-1}} \cdots \int_s^{u_2} K(x, z_1, u_1)\, K(z_1, z_2, u_2) \ldots K(z_{n-1}, y, u_n)\,. \tag{7}$$

$$\mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n\, \mathrm{d}z_1\, \mathrm{d}z_2 \ldots \mathrm{d}z_{n-1};$$

$$\psi(x, y, s, s) = 0.$$

Důkazy rovnic (6) a (8) jsou uvedeny v citované knize.

3. Rovnice (6) je speciální případ obecnější rovnice

$$\psi(x, y, s, t) = \tag{8}$$

$$= \psi(x, y, s, u) + \psi(x, y, u, t) + \int_a^b \psi(x, z, s, u)\,.\,\psi(z, y, u, t)\, \mathrm{d}z$$

platné pro libovolné tři hodnoty s, u, t.*) Každá funkce ψ tvaru (7), kde $K(x, y, u)$ je libovolná spojitá funkce, vyhovuje rovnici (8). Výsledky úvah odst. 2 a 3 shrneme větou: **Je-li $\psi(x, y, s, t)$ funkce vyjádřená řadou (7), kde $K(x, y, u)$ je libovolná spojitá funkce, platí rovnice (6) a (8), a funkční transformace (3′) jest inversní k (5′).** Jinými slovy: řada (7) dává řešení funkční rovnice (8).

4. Upravíme nyní předchozí vzorce užívajíce nového označení. Původní integrační interval (a, b) označíme znakem R a jeho část (α, β) znakem Y; platí $a < \alpha < \beta < b$.

Budeme psáti, je-li $f(y)$ spojitá funkce, $\int_R f(y)\, \mathrm{d}y$ místo

---

*) Dřívější omezení $s < u < t$ není nutné.

$\int\limits_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$; $\int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y$ místo $\int\limits_\alpha^\beta f(y)\,\mathrm{d}y$. Poslední integrál je funkcí intervalu Y a položíme

$$\int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y = P(Y). \tag{9}$$

$P(Y)$ jest additivní funkce (funkcionál) intervalu Y. To znamená: jsou-li Y_1 a Y_2 dva intervaly bez společného bodu (nebo s jediným společným bodem), jest

$$P(Y_1 + Y_2) = P(Y_1) + P(Y_2);$$

$P(Y_1 + Y_2)$ značí zde integrál funkce $f(y)$ vztažený k intervalu $Y_1 + Y_2$ složenému z obou intervalů Y_1 a Y_2.

Rozdělme interval Y na n dílčích intervalů $\mathrm{d}Y_1, \mathrm{d}Y_2, \ldots, \mathrm{d}Y_n$, takže $Y = \mathrm{d}Y_1 + \mathrm{d}Y_2 + \ldots + \mathrm{d}Y_n$. Roste-li n do nekonečna a konverguje-li současně délka každého z těchto n intervalů k nule, je podle obvyklé (Riemannovy) definice

$$P(Y) = \int\limits_Y f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\,.\,\mathrm{d}Y_i;$$

y_i značí bod intervalu $\mathrm{d}Y_i$. Místo této rovnice může se také psáti

$$P(Y) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{d}Y_i) \text{ nebo } P(Y) = \int\limits_Y P(\mathrm{d}Y). \tag{10}$$

V dalších vzorcích budeme užívati tohoto označení (zavedeného v práci pana B. Pospíšila, která bude citována): x je bod ležící v intervalu $\mathrm{d}X$, y bod v $\mathrm{d}Y$, α_i bod v $\mathrm{d}X_i$, z_i bod v $\mathrm{d}Z_i$ atd.; $E(x, Y) = 1$, leží-li bod x v intervalu Y; $E(x, Y) = 0$, je-li bod x vně Y. Je-li $f(y)$ spojitá funkce a x bod v intervalu R, platí

$$\int\limits_R E(x, \mathrm{d}Y)\,.\,f(y) = f(x)$$

a rovnice (1) dá se nahraditi rovnicí

$$\int\limits_R F_1(x, \mathrm{d}Y)\,\varphi(y) = f(x), \tag{11}$$

při čemž $F_1(x, Y) = \int\limits_Y F(x, y)\,\mathrm{d}y + E(x, Y)$. Položme dále

$$\Phi(x, Y, s, t) = \int\limits_Y \psi(x, y, s, t)\,\mathrm{d}y + E(x, Y),$$

kde ψ značí řadu (7), a budiž

$$A(x, Y, u) = \int_Y K(x, y, u)\, dy;$$

$K(x, y, u)$ je spojitá funkce tří proměnných, $A(x, Y, u)$ je funkce dvou proměnných x, u a intervalu Y. Užívajíce nového označení nahradíme formuli (7) novým vzorcem:

$$\Phi(x, Y, s, t) = E(x, Y) + \int_s^t A(x, Y, u)\, du +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \int_R \int_R \ldots \int_R \int_s^t \int_s^{u_n} \ldots \int_s^{u_2} A(x, dZ_1, u_1)\, A(z_1, dZ_2, u_2) \ldots \tag{12}$$

$$\ldots A(z_{n-1}, Y, u_n)\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Rovnice (5′) přechází v

$$\int_R \Phi(x, dY, t, s)\, \varphi(y) = f(x) \tag{13}$$

a rovnice (3′) v

$$\varphi(x) = \int_R \Phi(x, dY, s, t)\, f(y). \tag{14}$$

Eliminujme funkci $\varphi(x)$ z rovnic (13) a (14); vychází

$$\int_R \left[\int_R \Phi(x, dZ, t, s)\, \Phi(z, dY, s, t)\right] f(y) = f(x).$$

Poněvadž funkce $f(x)$ je libovolná spojitá funkce, je tento vztah možný jedině v tom případě, že

$$\int_R \Phi(x, dZ, t, s)\, \Phi(z, Y, s, t) = E(x, Y). \tag{15}$$

Rovnice (15) odpovídá rovnici (6).

5. Abychom konečně odvodili rovnici obdobnou rovnici (8), integrujme (8) po obou stranách podle y (integrační obor Y), připočtěme pak na obou stranách $E(x, Y)$ a zaveďme funkci Φ podle definice z odst. 4. Vychází

$$\Phi(x, Y, s, t) = \Phi(x, Y, s, u) + \Phi(x, Y, u, t) - E(x, Y) +$$

$$+\int_R [\Phi(x, dZ, s, u) - E(x, dZ)]\, [\Phi(z, Y, u, t) - E(z, Y)].$$

Poněvadž pak podle definice symbolu $E(x, Y)$ (odst. 4) platí

$$\int_R E(z, Y) E(x, dZ) = E(x, Y),$$

$$\int_R \Phi(x, dZ, s, u) E(z, Y) = \Phi(x, Y, s, u),$$

$$\int_R \Phi(z, Y, u, t) E(x, dZ) = \Phi(x, Y, u, t),$$

redukuje se předešlá rovnice na

$$\Phi(x, Y, s, t) = \int_R \Phi(x, dZ, s, u) \Phi(z, Y, u, t). \tag{16}$$

Následující věta, obdobná větě uvedené na konci odst. 3, shrnuje předešlé formule: Je-li $\Phi(x, Y, s, t)$ funkce vyjádřená řadou (12), platí rovnice (15) a (16), a integrální rovnice (13) — kde $\varphi(x)$ značí neznámou funkci — má řešení dané vzorcem (14); funkční transformace (14) jest inversní k transformaci (13). Považujeme-li Φ za neznámou funkci, má funkční rovnice (16) řešení dané vzorcem (12), kde A je libovolná funkce (additivní vzhledem k Y).

6. Věta vyslovená v předešlém odstavci liší se, za předpokladů učiněných v odst. 4, jen označením od věty vyslovené na konci odst. 3. Avšak vzorcům, v nichž se užívá označení zavedeného v odst. 4, dá se přisouditi obecnější význam, než je ten, který mají vzorce odst. 2 a 3.

A. Kolmogorov*) uvádí rovnici (16), kterou nazveme zobecněnou rovnicí Chapmanovou, za předpokladů velmi obecných. Zobecnění je v trojím směru: předně na místo bodu určeného úsečkou x v daném intervalu nastupuje bod v prostoru R o libovolném počtu rozměrů; za druhé na místo dílčích intervalů Y nastupují bodová množství v R a místo funkcí intervalů Y funkce těchto bodových množství; za třetí integrály vztažené k těmto množstvím jsou podle Kolmogorova definovány způsobem, jenž se v podstatě zakládá na definicích integrálu, které podali Stieltjes a Lebesgue.

R. 1936 uveřejnil B. Pospíšil práci,**) ve které se zabývá řešením zobecněné Chapmanovy rovnice (16) a ukazuje, že za určitých podmínek, v práci podrobně vytčených, má ta rovnice jediné řešení vyjádřené řadou (12). Tato řada vyhovuje ovšem rovnici (15), neboť rovnici (15) obdržíme kladouce $s = t$ v rovnici (16); platí také vztahy (13) a (14). Budiž $A(x, Y, u)$ funkce vyho-

*) A. Kolmogoroff: Die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Annalen, Bd. **104**, 1931, p. 415—458).

) B. Pospíšil: Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff (Časopis pro pěstování m. a f., r. **65, 1936, p. 64—76).