Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0067|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe.

F. Vyčichlo, Praha.

(Reçu le 19 août 1937.)

1. Soit X_n un espace à n dimensions, décrit moyennant n coordonnées ξ^ν [1]) et soient $\xi^\nu = \xi^\nu(t)$ les équations paramétriques d'une courbe $C(t)$, régulière dans X_n et soit $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$ une densité tensorielle (du poids q) r-fois contrevariante, connue à un facteur $f(t)$ près le long de la courbe C. (Dans ce que suit nous appellerons ces grandeurs par les mots „les tenseurs".)

Enfin soit donnée dans l'espace X_n une connexion symétrique $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ jusqu'à la transformation isohodoïque près

$$^\times\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + p_\lambda \delta^\nu_\mu + p_\mu \delta^\nu_\lambda, \tag{1, 1}$$

où p_λ est n'importe quel vecteur covariant dans X_n. Les connexions $^\times\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ conservent les lignes géodésiques de la connexion $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ [2]) et conduisent à une connexion projective (courbe), invariante par rapport (1, 1).[3])

Le champ $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$, ou bien les composantes des tenseurs subissent des changements suivants:

Pendant le changement du système des coordonnées $\xi^\nu \to \bar{\xi}^\nu$ au jacobien

$$\Delta = \text{Dét.} \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi} \right| \neq 0$$

---

[1]) Les indices grecs parcourent les symboles $\dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{n}$.

[2]) J. A. Schouten: Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1926, pg 76.

[3]) Voir V. Hlavatý: Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif courbe. Abh. Seminar für Vektor- und Tensor-Analysis, Moscou, **2—3** (1935), 13—50. Dans la suite nous désignons ce Mémoire: Hlavatý (1).

Voir aussi: Schouten-Gołąb: Über projektive Übertragungen u. Ableitungen, Math. Zeitschrift, **32** (1930), 192—214 et Annali di Matematica, 8, (1930), 141—157.

on a

$$\bar{A}^{\nu_1 \dots \nu_r} = \Delta^q A^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_r}}{\partial \xi^{\lambda_r}}. \tag{1, 2a}$$

A côté de cette transformation, on peut changer le facteur de proportionnalité $f(t)$

$$'A^{\nu_1 \dots \nu_r} = f(t)\, A^{\nu_1 \dots \nu_r}. \tag{1, 2b}$$

Un invariant (une grandeur) indépendant de ce facteur et aussi du vecteur p_λ sera dit l'invariant (grandeur) projectif. (Les invariants indépendants du facteur $f(t)$ seront dits les invariants intrinsèques.) Les invariants projectifs sont aussi les invariants intrinsèques.

Cela posé, le problème à résoudre dans ce Mémoire peut être formulé de la manière suivante:

Un champ $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$ étant donnée dans X_n le long de la courbe $C(t)$ on doit trouver: 1° le système complet de ses invariants projectifs différentiels; 2° ses grandeurs projectives qui satisfont aux équations analogues aux équations de Frenet pour une courbe.

2. Posons pour abréger

$$P^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} = \Delta^{-\frac{r}{n}} \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_r}}{\partial \xi^{\lambda_r}} \tag{2, 1}$$

et rangeons dans l'ordre naturel les n^r combinaisons que donnent les indices $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r$ et désignons les par les symboles $\ddot{0}, \ddot{1}, \dots \ddot{N} = n^r - 1$ en écrivant

$\ddot{0}$ pour la combinaison $\dot{1}\dot{1} \dots \dot{1}\dot{1}$
$\ddot{1}$ pour la combinaison $\dot{1}\dot{1} \dots \dot{1}\dot{2}$
. . . .
$\ddot{n} - \ddot{1}$ pour la combinaison $\dot{1}\dot{1} \dots \dot{1}\dot{n}$
$\ddot{n}$ pour la combinaison $\dot{1}\dot{1} \dots \dot{2}\dot{1}$
. . . .
. . . .
$\ddot{N}$ pour la combinaison $\dot{n}\dot{n} \quad \dot{n}\dot{n}$.

Ceci nous permet d'écrire $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$[4]) pour $P^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\lambda_1 \dots \lambda_\nu}$.

Cela posé, nous trouvons

$$P = \text{Dét.}\, | P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} | = 1. \tag{2, 2}$$

En raison de cette équation nous pouvons déterminer les coefficients

[4]) Les indices allemands (courants) parcourent les symboles $\ddot{0}, \ddot{1}, \ddot{2}, \dots \ddot{N} = n^r - 1$.

$Q^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$ par les relations

$$P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} Q^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{a}} = P^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{a}} Q^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \delta^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{b}} = \begin{cases} 0, \mathfrak{r} \neq \mathfrak{b} \\ 1, \mathfrak{r} = \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Le groupe linéaire aux coefficients $P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}$ sera dit dans la suite le groupe projectif fondamental et désigné par $G(\xi)$. Au point $\underset{0}{\xi^\nu}$ de l'espace X_n appartiennent les valeurs des coefficients du groupe $G(\xi)$ qui donnent naissance à un groupe projectif local $G(\underset{0}{\xi})$.

Soit $K_N(\underset{0}{\xi})$ un espace projectif (abstrait) à N dimensions dont les grandeurs se transforment à l'aide de ce groupe $G(\underset{0}{\xi})$. [On peut adjoindre l'espace $K_N(\underset{0}{\xi})$ au point $\underset{0}{\xi}$ à l'aide du groupe $G(\underset{0}{\xi})$.] La totalité des espaces $K_N(\underset{0}{\xi})$ sera dite la variété K_N (de M. R. König). C'est une variété projective à N dimensions, mais non la plus générale variété projective à N dimensions[5]) à cause de la définition des coefficients $\underset{\mathfrak{a}}{P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}}(\underset{0}{\xi})$ du groupe $G(\underset{0}{\xi})$.

Soient maintenant $\underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{a}}}$ (resp. $\underset{\mathfrak{b}}{u_{\mathfrak{b}}}$)[6]) les ensembles bien connus qui constituent la notion du „repère de mesure" (repère fondamental) attaché au point ξ de la variété K_N. Supposons que ces ensembles ne soient connus qu'à un facteur arbitraire, (mais analytique) $F(\xi)$ près.

Alors les $\underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{a}}}$ se transforment d'après

$$\overline{\underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{a}}}} = P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}} \underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{r}}}, \quad '\underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{a}}} = F \underset{\mathfrak{b}}{u^{\mathfrak{a}}}. \tag{2, 3}$$

La grandeur de la variété K_N qui se transforme par rapport aux transformations (2, 3) suivant les lois:

$$\overline{U}^{\nu_1 \ldots \nu_u}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v} = \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_u}}{\partial \xi^{\alpha_u}} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \xi^{\beta_v}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_v}} \Delta^p \, U^{\alpha_1 \ldots \alpha_u}_{\beta_1 \ldots \beta_v};$$

$$'U^{\nu_1 \ldots \nu_u}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v} = F^i \, U^{\nu_1 \ldots \nu_u}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v}$$

sera dit l'agrégat scalaire à la caractéristique $\left[\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\, i \, p\right]$. ($i$, p sont les nombres réels.) Les composantes de cet agrégat sont connues à un facteur près.

[5]) Voir V. Hlavatý: Espaces abstraits courbes de König. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, **59** (1935), 1—39; voir pg 5, 20. Dans la suite nous désignons ce travail par: Hlavatý (2).

[6]) Voir Hlavatý (2), pg 7.

Les agrégats scalaires $\overset{\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_s}{\underset{\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_t}{U^{\nu_1 \ldots \nu_u}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v}}}$ à la caractéristique $\left[\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}, i - s + t, p\right]$ étant donnés, on peut en former les grandeurs

$$V^{\nu_1 \ldots \nu_u\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_t} = \overset{\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_s}{\underset{\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_t}{U^{\nu_1 \ldots \nu_u}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v}}} \underset{\mathfrak{l}_1}{u^{\mathfrak{a}_1}} \ldots \underset{\mathfrak{l}_s}{u^{\mathfrak{a}_s}} \overset{\mathfrak{e}_1}{u_{\mathfrak{b}_1}} \ldots \overset{\mathfrak{e}_t}{u_{\mathfrak{b}_t}},$$

qui se transforment par rapport à (2, 3) d'après:

$$\overline{V}^{\nu_1 \ldots \nu_u\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_t} = \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_u}}{\partial \xi^{\alpha_u}} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_1}} \ldots \frac{\partial \xi^{\beta_v}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_v}} \cdot$$

$$\cdot\, \Delta^p \cdot P^{\mathfrak{a}_1}_{\mathfrak{r}_1} \ldots P^{\mathfrak{a}_s}_{\mathfrak{r}_s} \cdot Q^{\mathfrak{u}_1}_{\mathfrak{b}_1} \ldots Q^{\mathfrak{u}_t}_{\mathfrak{b}_t} \cdot V^{\alpha_1 \ldots \alpha_u \mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_s}_{\beta_1 \ldots \beta_v \mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_t},$$

$${}'V^{\nu_1 \ldots \nu_u\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_t} = F^i V^{\nu_1 \ldots \nu_u\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_s}_{\lambda_1 \ldots \lambda_v\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_t}.$$

Cette grandeur sera dite l'agrégat projectoriel (de K_N) à la caractéristique $\begin{pmatrix} u & & & s \\ & i & p & \\ v & & & t \end{pmatrix}$; elle a des composantes connues à un facteur près.

A l'aide de la notion du raccordement affine des repères fondamentaux nous pouvons définir la connexion (projective) de K_N[7]) par les coefficients:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu},\; Q_\mu = \frac{r}{n} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} - \frac{\partial \log m}{\partial \xi^\mu}, \quad \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} - \frac{r}{n} \delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}, \quad (2, 5)$$

où $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ est la connexion symétrique et intrinsèque donnée dans l'espace X_n et $m(\xi)$ est une grandeur (de K_N) à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1, -\frac{r}{n} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire une densité connue à un facteur près) et enfin

$$\Gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Gamma^{\nu_1}_{\lambda_1\mu} \delta^{\nu_2}_{\lambda_2} \ldots \delta^{\nu_r}_{\nu_r} + \Gamma^{\nu_2}_{\lambda_2\mu} \delta^{\nu_1}_{\lambda_1} \ldots \delta^{\nu_r}_{\lambda_r} + \ldots + \Gamma^{\nu_r}_{\lambda_r\mu} \delta^{\nu_1}_{\lambda_1} \ldots \delta^{\nu_{r-1}}_{\lambda_{r-1}}. \quad (2,5a)$$

Cela étant, on peut définir la dérivée (projective) covariante de la grandeur à la caractéristique arbitraire:

Soit par exemple $V^{\mathfrak{a}}$ un vecteur contrevariant dans K_N, c'est-à-dire la grandeur à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & i & p & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. Sa dérivée covariante est:

$$\mathrm{D}_\mu V^{\mathfrak{a}} = \frac{\partial V^{\mathfrak{a}}}{\partial \xi^\mu} + i Q_\mu V^{\mathfrak{a}} + p \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} V^{\mathfrak{a}} + \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} V^{\mathfrak{b}}.\,^{8)} \quad (2, 6)$$

---

[7]) Voir Hlavatý (2), pg 14—17.

[8]) Voir Hlavatý (2), pg 16.

Les coefficients (2, 5) se transforment pendant $\xi^\nu \to \bar{\xi}^\nu$ resp. pendant le changement du facteur F dans (2, 3) suivant les lois:

$$\text{a) } \bar{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} = \frac{\partial\bar{\xi}^\nu}{\partial\xi^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\bar{\xi}^\lambda}\cdot\frac{\partial\xi^\gamma}{\partial\bar{\xi}^\mu}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial\bar{\xi}^\nu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\bar{\xi}^\lambda\,\partial\bar{\xi}^\mu}; \quad '\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu};$$

$$\text{b) } Q_\mu = Q_\lambda\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\bar{\xi}^\mu}; \quad 'Q_\mu = Q_\mu - \frac{\partial\log F}{\partial\xi^\mu}; \qquad (2, 7)$$

$$\text{c) } \bar{\Omega}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \left(P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}}Q^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{b}}\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{u}\lambda} + P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}}\frac{\partial Q^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{b}}}{\partial\xi^\lambda}\right)\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\bar{\xi}^\mu}; \quad '\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}.$$

Démonstration résulte de la définition (2, 5). Les équations (2, 6) et (2, 7) nous permettent de constater que $\mathrm{D}_\mu V^{\mathfrak{a}}$ est une grandeur à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & i\ p & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$:

$$\text{d)} \qquad '\mathrm{D}_\mu\,'V^{\mathfrak{a}} = F^i\mathrm{D}_\mu V^{\mathfrak{a}}. \qquad (2, 7)$$

3. Grâce à la définition de K_N (voir § 2) nous pouvons maintenant interpréter le champ de tenseurs $A^{\nu_1\cdots\nu_r}(t)$ comme un champ de vecteurs $A^{\mathfrak{a}}(t)$ à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & i\ p & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$[9] alors connus à un facteur près le long de la courbe $C(t)$ dans K_N.

Les invariants de ce champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$ sont les invariants cherchés du champ de tenseurs.

Cela dit, nous pouvons formuler le problème que nous allons résoudre comme il suit:

Un champ de vecteurs $A^{\mathfrak{a}}(t)$ à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & i\ p & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$[9] étant donné dans K_N le long de la courbe $C(t)$, on doit trouver 1° les invariants projectifs qui forment le système complet des invariants du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$ et 2° les formules de Frenet pour les grandeurs projectives invariantes.

4. Tout d'abord nous démontrerons le lemme suivant:

Soient $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, Q_μ, $\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}$ les coefficients (2, 5) de la connexion de la variété K_N. Les grandeurs:

$$\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} - \frac{1}{N+1}\,\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}\delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \qquad (4, 1)$$

sont les coefficients de la connexion projective dans K_N, c'est-à-dire ils satisfont aux lois:

$$\bar{\Lambda}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \left(P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}}Q^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{b}}\Lambda^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{u}\lambda} + P^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{r}}\frac{\partial Q^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{b}}}{\partial\xi^\lambda}\right)\frac{\partial\xi^\lambda}{\partial\bar{\xi}^\mu}, \qquad (4, 2)$$

---

[9]) Nous posons: $p = q - \frac{r}{n}$, voir (1, 2a); $f(t) \equiv F^i(\xi(t))$.

$$'\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}, \tag{4, 3}$$

$$^{\times}\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}.\,[10] \tag{4, 4}$$

Démonstration. α) L'équation (4, 2) résulte immédiatement des équations (2, 7c) et (4, 1).

β) L'équation (4, 3) suit de le seconde équation (2, 7).

γ) Pendant la transformation (1, 1) on obtient

$$^{\times}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} + (n + 1)\, p_\mu. \tag{4, 5}$$

Ensuite on trouve à l'aide de (2, 5a)

$$^{\times}\Gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} + 2r p_\mu \delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}. \tag{4, 6}$$

D'autre part on trouve en raison de (2, 5) et (4, 6)

$$^{\times}\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} + \frac{r}{n}(n - 1)\; p_\mu \delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}. \tag{4, 7}$$

En effectuant la transformation (1, 1) à (4, 1) nous obtiendrons d'après (4, 7)

$$^{\times}\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} = {}^{\times}\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} - \frac{1}{N+1}\, {}^{\times}\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}\delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu} + \frac{r}{n}(n - 1)\, p_\mu \delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} -$$

$$- \frac{1}{N+1}\left[\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu} + \frac{r}{n}(n - 1)(N + 1)\, p_\mu\right] . \,\delta^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}.$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons nous servir des coefficients $\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}$ — comme des coefficients de la connexion projective — pour trouver les invariants projectifs du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant. Pour une connexion (1, 1), caractérisée par certain vecteur p_μ, résulte de (4, 1), en raison de l'équation intrinsèque

$$\underset{(p)}{\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}\mu}} = 0,\,[11] \tag{4, 8}$$

l'équation intrinsèque suivante:

$$\underset{(p)}{\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}} = \underset{(p)}{\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}}. \tag{4. 9}$$

Alors on peut employer les coefficients $\underset{(p)}{\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}}$ pour chercher les invariants i n t r i n s è q u e s du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$ (pour une connexion $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ donnée et fixée) de la même manière que les coefficients $\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}$ pour chercher les invariants p r o j e c t i f s du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$.

Si nous changeons p_μ (c'est-à-dire, si $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ change d'après (1, 1))

---

[10]) Voir (1, 1).
[11]) Voir (2, 5).

les coefficients $\Omega^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}$ se transforment aussi, mais les expressions $\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}$ restent invariantes; alors il ne nous reste qu'à considérer le changement du facteur $F(t)$.

5. La dérivée absolue d'un vecteur du champ en question, le long de la courbe $C(t)$, soit exprimée de la manière suivante

$$\overset{\circ}{\mathrm{D}}A^{\mathfrak{n}} = \frac{\mathrm{d}A^{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}t} + (\Lambda^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{b}\mu}A^{\mathfrak{b}} + p\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}A^{\mathfrak{n}})\, q^{\mu}, \qquad \left(q^{\mu} = \frac{\mathrm{d}\xi^{\mu}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{5, 1}$$

La transformation (1, 1) de la connexion $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ a pour conséquence, en raison de (4, 5):

$$^{\times}\overset{\circ}{\mathrm{D}}A^{\mathfrak{n}} = \overset{\circ}{\mathrm{D}}A^{\mathfrak{n}} + p\,(n+1)\, p_{\mu}q^{\mu}A^{\mathfrak{n}}.$$

Si l'on y substitue la valeur p_{μ} tirée de (4, 7), on trouve

$$\begin{aligned} &^{\times}\overset{\circ}{\mathrm{D}}A^{\mathfrak{n}} - \frac{pn\,(n+1)}{r\,(n-1)\,(N+1)}\, {}^{\times}\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}q^{\mu}A^{\mathfrak{n}} = \\ &= \overset{\circ}{\mathrm{D}}A^{\mathfrak{n}} - \frac{pn\,(n+1)}{r\,(n-1)\,(N+1)}\, \Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}q^{\mu}A^{\mathfrak{n}}. \end{aligned} \tag{5, 2}$$

Nous avons à peine besoin d'accentuer que cet invariant (par rapport à (1, 1)) peut être considéré comme une nouvelle derivée absolue le long de le courbe $C(t)$. Posons dans ce qui suit

$$\mathrm{D}A^{\mathfrak{n}} = \frac{\mathrm{d}A^{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}t} + \left(\Lambda^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{b}\mu}A^{\mathfrak{b}} + p\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}A^{\mathfrak{n}} - \frac{pn\,(n+1)}{r\,(n-1)\,(N+1)}\, \Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}A^{\mathfrak{n}}\right) q^{\mu}. \tag{5, 3a}$$

Donc:

$$^{\times}\mathrm{D}A^{\mathfrak{n}} = \mathrm{D}A^{\mathfrak{n}}.\text{[12]} \tag{5, 3b}$$

Dans la suite nous nous servirons de cette dérivée absolue. Désignons, de plus:

$$\underset{0}{A} = A^{\mathfrak{a}}(t),\ \underset{1}{A} = \mathrm{D}\underset{0}{A},\ \underset{2}{A} = \mathrm{D}\underset{1}{A},\ \ldots,\ \underset{i}{A} = \mathrm{D}\underset{i-1}{A} \tag{5, 4}$$

et appelons $\underset{i}{A}$ le i-ième vecteur dérivé du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$, qui appartient au point au paramètre t.

Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant:

Si les m premiers vecteurs dérivés $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{m1}{A}$ $(2 < m \leq N+1)$ pour $t = t_0$ sont linéairement indépendants), tandisque $\underset{m}{A}$ et les vecteurs suivants résultent*

---

[12]) En effectuant le changement du facteur $F(t)$ on obtient pour $'\mathrm{D}'A^{\mathfrak{a}}$ l'équation (5, 8).

*) C'est-à-dire il n'existe aucune combinaison linéaire $\sum_{0}^{k}{}_{i}M_{k-i}\underset{i}{A} = 0$ (avec quelques coefficients $M_i \neq 0$) pour $k \leq m-1$.

comme une combinaison linéaire des ces vecteurs précédents, c'est-à-dire

$$\sum_0^m{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \underset{j}{A}{}^{\alpha} = 0,^{13)} \quad (a_0 \neq 0) \tag{5, 5}$$

on peut trouver un système des invariants projectifs $I_2, I_3, \ldots, I_m$, qui sont les fonctions des coefficients

$$L_k = \frac{a_k}{a_0}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{5, 6}$$

La structure de l'invariant I_q, $(q = 2, 3, \ldots, m)$ est telle que:

a) L'invariant I_q est isobare du poids arithmétique q(**) par rapport à t.

b) I_q ne contient que $L_1, L_2, \ldots, L_q$, $L'_1, L'_2, \ldots, L'_{q-1}$, $\left(L'_k = \dfrac{dL_k}{dt}\right)$.

c) Les dérivées $L'_1, L'_2, \ldots, L'_{q-1}$ n'y interviennent que linéairement.

d) I_q peut être exprimé par la formule

$$I_q = L_q - L'_{q-1} + \ldots,$$

où les membres omis ne contiennent ni L_q, ni L'_{q-1}.

e) L'invariant I_q ne dépend pas de m, c'est-à-dire: quel que soit le nombre m des vecteurs dérivés linéairement indépendants,les premiers invariants $I_2, I_3, \ldots, I_m$ sont exprimés de la même manière en fonction des coefficients L_i.

Démonstration. α) Le changement du facteur F dans (2, 3) substitue, d'après le paragraphe 3 au vecteur $\underset{0}{A}$ le vecteur $'\underset{0}{A}$

$$'\underset{0}{A} = F^i \underset{0}{A}. \tag{5, 7}$$

Il s'ensuit à l'aide de (2, 7a—c), (4, 3) et (5, 3)

$$'\mathrm{D}\, '\underset{0}{A} = \mathrm{D}\, '\underset{0}{A} = F^i(\mathrm{D}\underset{0}{A} + \varphi' \underset{0}{A}), \quad \left(\varphi' = \frac{d \log F^i}{dt}\right). \tag{5, 8}$$

En raison de ce changement, le vecteur $\underset{r}{A}$ $(r \leqq m)$ se transforme

[13]) Les indices latins $j, k, \ldots$ parcourent les symboles $0, 1, 2, \ldots, m \leqq \leqq N + 1$; la sommation portant aussi sur les indices autres que $j, k, \ldots$ sera toujours désigné pas Σ.

(**) La fonction $I_q(t)$ est du poids arithmétique q par rapport à t, si l'on a $I_q^* = c^q I_q$ pendant le changement $t^* = c^{-1} \cdot t$, $(c = \text{const} \neq 0)$.

en $'\underset{r}{A}$, qui est une combinaison linéaire des vecteurs $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{r}{A}$.

Compte tenu de (5, 3), (5, 4) et (2, 7a—c) on a avant tout

$$'\underset{k+1}{A} = \mathrm{D}\,'\underset{k}{A}, \tag{5, 9}$$

D'autre part, la dérivation absolue de (5, 7) nous donne:

$$'\underset{1}{A} = F^i(\underset{1}{A} + \varphi'\underset{0}{A}),$$

$$'\underset{2}{A} = F^i[\underset{2}{A} + 2\varphi'\underset{1}{A} + (\varphi'' + \varphi'^2)\underset{0}{A}], \tag{5, 10}$$

$$'\underset{3}{A} = F^i[\underset{3}{A} + 3\varphi'\underset{2}{A} + 3\,(\varphi'' + \varphi'^2)\underset{1}{A} + (\varphi''' + 3\varphi'\varphi'' + \varphi'^3)\underset{0}{A}].$$ [14])

....

Il en résulte par l'induction

$$'\underset{k}{A} = \sum_{0}^{k}{}_j F^i \binom{k}{j} \overset{j}{\underset{k}{r}}\underset{j}{A}, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{5, 11}$$

Les coefficients $\overset{j}{\underset{k}{r}}$ sont des polynômes de $\varphi(t)$ et de ses dérivées d'après t. Dans la suite nous allons étudier de près les relations qui sont valables pour ces scalaires et nous nous en servirons bientôt.

β) La formule (5, 11) nous donne:

$$'\underset{k+1}{A} = \sum_{0}^{k+1}{}_j F^i \binom{k+1}{j} \overset{j}{\underset{k+1}{r}}\underset{j}{A}, \quad (k = -1, 0, 1, \ldots, m-1). \tag{5, 12}$$

La dérivée absolue de l'équation (5, 11) est:

$$'\underset{k+1}{A} = \sum_{0}^{k}{}_j F^i \binom{k}{j} [\varphi'\overset{j}{\underset{k}{r}}\underset{j}{A} + \overset{j}{\underset{k}{r}}\underset{j}{A} + \overset{j}{\underset{k}{r}}\underset{j+1}{A}], \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{5, 13}$$

Le rapprochement des formules (5, 12) et (5, 13) nous permet d'écrire:

$$\overset{j}{\underset{k+1}{r}} = \frac{k+1-j}{k+1}(\varphi'\overset{j}{\underset{k}{r}} + \overset{j}{\underset{k}{r}}{}') + \frac{j}{k+1}\overset{j-1}{\underset{k}{r}}, \tag{5, 14}$$

$$(j \leqq k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

où $\overset{-1}{\underset{k}{r}} = 0$, $\overset{j}{\underset{k}{r}} = 0$ pour $j > k = 0, 1, \ldots, m-1$.

L'équation (5, 14) donne:

$$\overset{k+1}{\underset{k+1}{r}} = \overset{k}{\underset{k}{r}} = \ldots = \overset{0}{\underset{0}{r}}, \tag{5, 15}$$

$$\overset{0}{\underset{k+1}{r}} = \overset{0}{\underset{k}{r}}\varphi' + \overset{0}{\underset{k}{r}}{}', \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5, 16}$$

---

[14]) L'accent désigne la dérivée d'après t.

Cela étant nous démontrerons la relation

$$\overset{k}{\underset{s}{r}} = \overset{0}{\underset{s-k}{r}} \tag{5, 17}$$

$$s = 0, 1, \ldots, l, (l < m), \qquad k = s, s - 1, \ldots, 0.$$

Supposons que la relation soit valable pour les valeurs $s = 0, 1, \ldots, l', l' < l, k = l', l' - 1, \ldots, 0$; nous démontrerons qu'elle reste valable pour $s + 1$ $(\leqq l' + 1)$.

On a d'abord:

$$\overset{k}{\underset{s+1}{r}} = \frac{s + 1 - k}{s + 1}\left(\overset{k}{\underset{s}{r}}\varphi' + \overset{k}{\underset{s}{r'}}\right) + \frac{k}{s + 1}\overset{k-1}{\underset{s}{r}}.$$

ou, en raison de (5, 17):

$$\overset{k}{\underset{s+1}{r}} = \frac{s + 1 - k}{s + 1}\left(\overset{0}{\underset{s-k}{r}}\varphi' + \overset{0}{\underset{s-k}{r'}}\right) + \frac{k}{s + 1}\overset{0}{\underset{s-k+1}{r}}.$$

Il en résulte à l'aide de (5, 16):

$$\overset{k}{\underset{s+1}{r}} = \overset{0}{\underset{s-k+1}{r}} \text{ pour } k = s + 1, s, \ldots, 0.$$

D'autre part le calcul direct des coefficients $\overset{i}{\underset{j}{r}}$ (des équations (5, 10)) donne:

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{\underset{0}{r}} = 1,\\
&\overset{1}{\underset{1}{r}} = 1, \overset{0}{\underset{1}{r}} = \varphi',\\
&\overset{2}{\underset{2}{r}} = 1, \overset{1}{\underset{2}{r}} = \varphi', \overset{0}{\underset{2}{r}} = \varphi'' + \varphi'^2,\\
&\overset{3}{\underset{3}{r}} = 1, \overset{2}{\underset{3}{r}} = \varphi', \overset{1}{\underset{3}{r}} = \varphi'' + \varphi'^2, \overset{0}{\underset{3}{r}} = \varphi''' + 3\varphi'\varphi'' + \varphi'^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc. } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{5, 18}$$

On voit donc, que la formule (5, 17) est vraie pour $s = 0, 1, 2, 3$, $r = 3, 2, 1, 0$. Il s'ensuit que (5, 17) est valable pour n'importe quel r, $s < m$.

Écrivons, pour abréger:

$$\overset{0}{\underset{k}{r}} = \overset{k}{r}. \tag{5, 19}$$

Or, la formule (5, 17) peut être écrite:

$$\overset{k}{\underset{s}{r}} = \overset{0}{\underset{s-k}{r}} = \overset{s-k}{r}, \quad \text{pour } s = 0, 1, \ldots, m - 1, \ k \leqq s. \tag{5, 20}$$

L'équation (5, 16) s'écrit à l'aide de (5, 19) de la manière suivante:

$$\overset{k+1}{r} = \overset{k}{r}{}' + \overset{1}{r}\,\overset{k}{r}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5, 21}$$

C'est l'équation qui lie les coefficients en question et dont nous nous servirons pour calculer les invariants projectifs cherchés du champ $A^\alpha(t)$.

γ) D'après la supposition concernant les vecteurs dérivés du champ $A^\alpha(t)$, le vecteur $\underset{m}{A}$ est la combinaison des vecteurs $\underset{0}{A}, \ldots, \underset{m-1}{A}$. La relation respective est exprimée par (5, 5). En effectuant le changement F dans (2, 3) on obtient de l'équation (5, 5)

$$\sum_{0}^{m}{}_{j} \binom{m}{j}\, 'a_{m-j}\, '\underset{j}{A} = 0, \qquad 'a_0 \neq 0. \tag{5, 22}$$

Si l'on y remplace $'\underset{j}{A}$ à l'aide de l'équation (5, 11) et (5, 20) on obtient la relation suivante:

$$\sum_{0}^{m}{}_{j} \binom{m}{j}\, 'a_{\,m-j} \sum_{0}^{j}{}_{k} \binom{j}{k}\, \overset{j-k}{r}\, \underset{k}{A} = 0. \tag{5, 23}$$

Le rapprochement de (5, 23) et (5, 5) nous donne

$$\varrho a_{m-q} = \sum_{0}^{m}{}_{j} \binom{m-q}{m-j}\, 'a_{m-j}\, \overset{j-q}{r}, \qquad \varrho \neq 0. \tag{5, 24}$$

Si l'on y pose $m - q = u$, $m - j = v$, l'équation (5, 24) prend la forme:

$$\varrho a_u = \sum_{0}^{u}{}_{v} \binom{u}{v}\, 'a_v\, \overset{u-v}{r}, \qquad u = 0, 1, \ldots, m. \tag{5, 25}$$

Supposons que soit $'a_0 = a_0$. Parce que on a $\varrho a_0 = 'a_0 \overset{0}{r} = 'a_0$, on tire de cette supposition $\varrho = 1$.

Le système (5, 25) des $m + 1$ équations linéaires aux inconnues $\overset{k}{r}$, $(k = 0, 1, \ldots, m)$ peut être écrit:

$$\begin{aligned} a_0 &= 'a_0 \overset{0}{r} \quad (= 'a_0), \\ a_u - 'a_u &= \sum_{1}^{u}{}_{v} \binom{u}{v}\, 'a_{u-v}\, \overset{v}{r}, \qquad u = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5, 26}$$

En posant à côté de (5, 6)

$$'L_k = \frac{'a_k}{a'_0},$$

il résulte de là:

$$\text{a)} \qquad L_0 = {}'L_0 = 1,$$

$$\text{b)} \qquad L_u - {}'L_u = \sum_1^n r \binom{u}{v} {}'L_{u-v} \overset{v}{r}, \quad u = 1, 2, \ldots, m. \tag{5, 27}$$

Le déterminant du système (5, 27b) aux inconnues $\overset{v}{r}$ est $('L_0)^m = 1$. Or, on a

$$\overset{v}{r} = \begin{vmatrix} \binom{1}{1}'L_0, & 0, & 0, & 0 \ldots 0. & L_1 - {}'L_1 \\ \binom{2}{1}'L_1, & 'L_0, & 0, & 0 \ldots 0. & L_2 - {}'L_2 \\ \binom{3}{1}'L_2, & \binom{3}{2}'L_1, & 'L_0, & 0 \ldots 0, & L_3 - {}'L_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{v}{1}'L_{v-1}, & \binom{v}{2}'L_{v-2}, & \ldots, & \binom{v}{v-1}'L_1, & L_v - {}'L_v \end{vmatrix} \tag{5, 28}$$

pour $v = 1, 2, \ldots, m$.

Si l'on substitue ces valeurs aux équations projectives (5, 21), on obtient les équations projectives invariantes en L et $'L$, qui sont de la forme:

$$I_{k+1}(L) - I_{k+1}('L) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{5, 29}$$

Ces équations nous donnent les invariants I_q en question.

Calculons à titre d'exemple les premiers deux invariants. On a de (5, 27b) pour $u = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \overset{1}{r} &= L_1 - {}'L_1, \\ \overset{2}{r} &= L_2 - {}'L_2 - 2L_1\,'L_1 + 2\,'L_1^2, \\ \overset{3}{r} &= L_3 - {}'L_3 - 3L_1\,'L_2 - 3\,'L_1L_2 + 6\,'L_1\,'L_2 + 6L_1\,'L_1^2 - 6\,'L_1^3. \end{aligned} \tag{5, 30}$$

Les équations (5, 21) se réduisent en raison de (5, 30) à

$$\begin{aligned} &\text{a) } L_1 - {}'L_1 = L_1 - {}'L_1 \quad (\text{pour } k = 0), \\ &\text{b) } L_2 - L'_1 - L_1^2 - ('L_2 - {}'L'_1 - {}'L_1^2) = 0 \quad (\text{pour } k = 1) \\ &\text{c) } L_3 - L'_2 - 3L_1L_2 + 2L_1^3 + 2L_1L'_1 - \\ &\qquad - ('L_3 - {}'L'_2 - 3\,'L_1\,'L_2 + 2\,'L_1^3 + 2\,'L_1\,'L'_1) = 0 \; (\text{pour } k=2) \end{aligned} \tag{5, 31}$$

Parce que (5, 31a) se réduit à l'identité, nous sommes parvenus aux invariants:

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} I_2 &= L_2 - L'_1 - L_1^2, \\ I_3 &= L_3 - L'_2 - 3L_1L_2 + 2L_1^3 + 2L_1L'_1. \end{aligned} \tag{5, 31}$$

On voit d'abord que la construction des invariants est algorithmique. Ensuite il est évident que les relations (5, 29) nous ne donnent les invariants que pour $k = 1, 2, \dots, m - 1$. (Voir (5, 31a).)

Nous obtiendrons ainsi les invariants $I_2, I_3, \dots, I_m$ qui forment un système des $(m - 1)$ invariants projectifs du champ pris en considération.

δ) L'algorithme de la construction des invariants I_q nous donne leur structure. Si l'on effectue la transformation

$$t^* = c^{-1}\, t, \quad (c = \text{const.} \neq 0) \tag{5, 32}$$

du paramètre t de la courbe $C(t)$, on obtient

$$\overset{k}{r}{}^* = c^k\, \overset{k}{r}, \tag{5, 33}$$

parce que $\overset{k}{r}$ contient les dérivées (d'après t) du poids k comme il s'ensuit de (5, 18) et (5, 21). En effectuant le changement (5, 32) à (5, 25) on a:

$$a_k^* = c^k\, a_k, \quad 'a_k^* = c^k\, 'a_k, \tag{5, 34}$$

parce que a_k, $'a_k$ se transforment de la même manière. Il en résulte:

$$L_k^* = c^k L_k, \quad 'L_k^* = c^k\, 'L_k. \tag{5, 35}$$

Enfin à cause de la construction de I_q (et à l'aide de (5, 21), (5, 28), (5, 33) et (5, 35)) on a:

$$I_q^* = c^q\, I_q, \quad q = 2, 3, \dots, m. \tag{5, 36}$$

Les invariants I_q sont isobares du poids arithmétique q par rapport à t.

En écrivant (5, 21) de la manière suivante

$$\overset{q}{r} = \overset{q-1}{r'} + \overset{1}{r}\,\overset{q-1}{r} \tag{5, 37}$$

et en y substituant $\overset{q}{r}$, $\overset{q-1}{r}$, les valeurs tirées de (5, 28) et $L_0 = 1$, on obtient l'invariant I_q exprimé par la formule:

$$I_q = L_q - L'_{q-1} + \dots, \tag{5, 38}$$

où les membres omis ne contiennent ni L_q, ni L'_{q-1}. Cette construction et l'équation (5, 28) montre que I_q ne dépend que de $L_1, L_2, \dots, L_q$, $L'_1, L'_2, \dots, L'_{q-1}$. Parce que (5, 37) contient $\overset{q-1}{r'}$ linéairement et $\overset{q-1}{r}$ est exprimé par (5, 28) en polynôme de L_i et $'L_i$, $(i = 0, 1, \dots, v)$, il en résulte que l'invariant I_q ne contient $L'_1, \dots, L'_{q-1}$ que linéairement.

La structure des premiers invariants I_q et leur construction restent les mêmes quel que soit le nombre (par exemple z) des vecteurs $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \dots, \underset{z-1}{A}$ linéairement indépendants.

Alors, le théorème énoncé plus haut est démontré.

6. Supposons maintenant dans le théorème que nous venons de démontrer $m = N + 1$, c'est-à-dire que soit:

$$\sum_{0}^{N+1} {}_j \binom{N+1}{j} a_{N+1-j} \underset{j}{A^\alpha} = 0, \quad (a \neq 0)\,^{15)} \qquad (6, 1)$$

et que les vecteurs $\underset{0}{A^\alpha}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{N}{A^\alpha}$ soient linéairement indépendants. D'après le paragraphe précédent, le champ $A^\alpha(t)$ a les N invariants projectifs $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$.

Cela posé on peut démontrer:

Le système des invariants $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$ du champ $A^\alpha(t)$ est le système complet des invariants projectifs de ce champ.[16])

Démonstration. α) Nous exprimerons avant tout que les invariants projectifs $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$ appartiennent à l'ensemble $\underset{0}{A^\alpha}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{N}{A^\alpha}$ des vecteurs linéairement indépendants et au vecteur $\underset{N+1}{A^\alpha}$ qui est une combinaison linéaire des vecteurs précédents. Construisons à cet effet les équations:

$$\sum_{0}^{N+1} {}_j \binom{N+1}{j} L_{N+1-j} \underset{j}{A^\alpha} = 0, \quad (L_0 = 1), \qquad (6, 2)$$

En tenant compte de l'indépendance linéaire des vecteurs $\underset{0}{A^\alpha}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{N}{A^\alpha}$ on voit que (6, 2) est un système irréductible, c'est-à-dire le système des équations (6, 2) ne peut pas être déduit d'un autre système tel que

$$\sum_{0}^{k} {}_j \binom{k}{j} M_{k-j} \underset{j}{A^\alpha} = 0$$

pour $k < N + 1$.

Remplaçons maintenant les valeurs $L_2, L_3, \ldots, L_{N+1}$ dans (6, 2) par les fonctions de $L_1, L'_1, \ldots, L_1^{(N)}$[17]) tirées et calculées pas à pas des formules pour $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$. Ainsi, par exemple, on obtient de (5, 31b—c) les premières formules suivantes:

$$L_2 = I_2 + L'_1 + L_1^2,$$
$$L_3 = I_3 + I'_2 + 3I_2L_1 + L''_1 + 3L_1L'_1 + L_1^3 \qquad (*)$$

[15]) Dans l'équation (6, 1) sont écrites les composantes $\underset{j}{A^\alpha}$ (au point général t de la courbe $C(t)$).

[16]) Pour éviter tout malentendu nous voulous exprimer cette propriété encore d'une autre manière: Une courbe régulière $\xi^\nu(t)$ et les invariants $I_2, \ldots, I_{N+1}$ étant donnés, on peut trouver, à moins des conditions initiales un seul champ $A^\alpha(t)$.

[17]) Voir la remarque ([14]).

et ainsi de suite. De là et de la structure des invariants I_q on peut voir que ces substitutions peuvent être faites linéairement. Nous obtiendrons ainsi pour (6, 2):

$$F^{\mathfrak{a}}(L_1, L'_1, \ldots, L_1^{(N)}; \underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N+1}{A}; I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}) = 0, \tag{6, 3}$$

où l'on a

$$\underset{i}{A^{\mathfrak{a}}} = \underbrace{\mathrm{DD}\ldots\mathrm{D}}_{i\text{-fois}}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} = \mathrm{D}^{(i)}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} \tag{6, 4}$$

avec $i = 1, 2, \ldots, N + 1$.

Les équations (*) et la structure des invariants I_q montrent que la dérivée $L_1^{(N)}$ se trouve dans (6, 3) linéairement et que le coefficient de cette dérivée est égal à $\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}}(t)$; c'est une fonction finie, régulière et différente de zéro.

Nous allons résoudre les équations (6, 3), (6, 4) aux inconnues $L_1, \underset{0}{A^{\mathfrak{a}}}, \underset{1}{A^{\mathfrak{a}}}, \ldots, \underset{N}{A^{\mathfrak{a}}}$. Posons à ce but:

$$L_1 = z_0,\ L'_1 = z_1, \ldots,\ L_1^{(N-1)} = z_{N-1}. \tag{6, 5}$$

Nous parvenons ainsi aux équations différentielles telles que

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ z_1 = z'_0,\ z_2 = z'_1, \ldots, z_{N-1} = z'_{N-2}.\\ &\text{b)}\ F^{\mathfrak{a}}(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}, z'_{N-1}; \underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N}{A}, \mathrm{D}\underset{N}{A}; I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}) = 0,\\ &\text{c)}\ \underset{i}{A^{\mathfrak{a}}} = \mathrm{D}^{(i)}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}},^{*)}\quad i = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{6, 6}$$

β) Cela fait nous démontrerons le lemme suivant:

Le système des invariants $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$ (et aussi le système (6, 6)) détermine l'intégrale $\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}}$ à moins d'un facteur près.

En substituant aux $\underset{i}{A^{\mathfrak{a}}}$, ($i = 1, 2, \ldots, N$), dans (6, 6b), les valeurs tirées de (6, 6c), on obtient l'équation différentielle d'ordre $N + 1$ pour l'inconnue $\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}}$ qui s'écrit, en raison de (6, 2) de la, manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{(N+1)}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} + \binom{N+1}{1} L_1\, \mathrm{D}^{(N)}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} + \ldots +\\ + \binom{N+1}{N} L_N\, \mathrm{D}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} + L_{N+1}\underset{0}{A^{\mathfrak{a}}} = 0, \end{aligned} \tag{6, 7}$$

où les coefficients L_i peuvent être exprimés en fonctions des invariants I_q et de la fonction arbitraire L_1. (Voir l'équation (*) à la page 39.)

*) On peut aussi écrire pour c):

$$\underset{i}{A^{\mathfrak{a}}} = \underset{i-1}{A^{\mathfrak{a}'}} + q^{\mu}\left(\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}\underset{i-1}{A^{\mathfrak{b}}} + p\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}\underset{i-1}{A^{\mathfrak{a}}} - \frac{pn(n+1)}{r(n-1)\,(N+1)}\,\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}\underset{i-1}{A^{\mathfrak{a}}}\right),\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Partons maintenant d'une autre fonction $'L_1$, définie par

$$'L_1 = L_1 - \frac{\mathrm{d} \log \Phi}{\mathrm{d}t} \tag{6, 8}$$

(où Φ est n'importe quelle fonction de t, qui n'est pas nulle pour aucune valeur de t de l'intervalle examiné et possède toutes les dérivées, dont nous aurons besoin).

Le rapprochement des formules (6, 8), (5, 7) et (5, 27) nous donne immédiatement

$$'\underset{0}{A^\alpha} = \Phi \underset{0}{A^\alpha}. \tag{6, 9}$$

Parce que les invariants projectifs I_q ne changent pas par rapport aux transformations (6, 8), (6, 9) nous obtenons, d'après la construction du système analogue à (6, 6), l'équation suivante:

$$\mathrm{D}^{(N+1)}\,'\underset{0}{A^\alpha} + \binom{N+1}{1}\,'L_1\,\mathrm{D}^{(N)}\,'\underset{0}{A^\alpha} + \ldots + 'L_{N+1}\,'\underset{0}{A^\alpha} = 0 \tag{6, 10}$$

pour l'inconnue $'\underset{0}{A^\alpha} = \Phi \underset{0}{A^\alpha}$, où l'on peut remplacer les valeurs $'L_i$ par les fonctions de $'L_1$ et I_q.

Or, en résolvant le probléme mentionné à la page 39 on obtient ainsi l'équation (6, 7) ou bien (6, 10). Ces équations sont équivalentes par rapport aux transformations prises en considération. Le lemme est ainsi démontré.

γ) Les équations (6, 6) constituent un système des équations différentielles d'ordre un, composé de $N - 1 + N + 1 + N(N + 1) = N^2 + 3N$ équations aux inconnues:

$$z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{N}{A^\alpha}, \Phi\underset{0}{A^\alpha},\text{[18]}$$

où $\Phi(t)$ est un scalaire arbitraire qui possède la propriété mentionnée plus haut. Le nombre des inconnues est à leur tour: $N + N(N + 1) + N = N^2 + 3N$.

D'après le théorème d'existence de Cauchy, le système (6, 6) admet la solution générale unique. Pour fixer les constantes qui y figurent, choisissons avant tout les valeurs $\underset{0}{A^{\ddot{0}}} : \underset{0}{A^{\ddot{1}}} : \ldots : \underset{0}{A^{\ddot{N}}}$ au point général $t = t_0$ de la courbe donnée.

En choisissant aussi un facteur $\Phi(t)$, nous avons aussi $\Phi(t_0)$ et les rapports choisis nous donnent $A^\alpha(t_0)$. Ensuite nous prescrivons les valeurs de $z_0(t_0), \ldots, z_{N-1}(t_0)$. Le choix du point t_0 nous donne en même temps les coefficients

$$\Lambda^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{b}\mu}(\xi(t_0)),\ \Omega^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{b}\mu}(\xi(t_0)),\ \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}(\xi(t_0)),$$

et par conséquent nous pouvons nous servir de ce fait pour prescrire

[18]) C'est-à-dire $\underset{0}{A^{\ddot{0}}} : \underset{0}{A^{\ddot{1}}} : \ldots : \underset{0}{A^{\ddot{N}}}$.

la position des vecteurs $\underset{1}{A^{\alpha}}, \ldots, \underset{N}{A^{\alpha}}$ linéairement indépendants au point t_0. Ces conditions fixent $N + N + N(N+1) = N^2 + 3N$ constantes jusqu'alors arbitraires dans l'intégrale. Les conditions prescrites au champ seront dites les conditions initiales. Elles fixent toutes les constantes et par conséquence elles fixent l'intégrale $A^{\alpha}(t)$ à moins du facteur $\Phi(t)$.[19])

L'intégrale cherchée définit un champ à moins des conditions initiales.

7. Les vecteurs $\underset{0}{A^{\alpha}}, \underset{1}{A^{\alpha}}, \ldots, \underset{N}{A^{\alpha}}$ étant donnés et étant linéairement indépendants, on peut trouver, par une méthode plus simple, les invariants projectifs du champ $A^{\alpha}(t)$. On se sert pour ce but d'une dérivée absolue désignée $\mathfrak{D}$, qui est invariante par rapport au changement (1, 1) de la connexion $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ et qui est multipliée par un facteur, si l'on change le facteur de proportionnalité dans le champ $A^{\alpha}(t)$ d'après $'A^{\alpha} = F^{i}A^{\alpha}$.

α) Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Soient $\underset{0}{A^{\mathfrak{n}}}, \underset{1}{A^{\mathfrak{n}}}, \ldots, \underset{N}{A^{\mathfrak{n}}}$ les vecteurs dérivés, linéairement indépendants et définis par l'équation (5, 4).

Désignons par

$$A = \text{Dét.} \,|\, \underset{0}{A}\, \underset{1}{A} \ldots \underset{N}{A} \,| \quad (\neq 0), \tag{7, 1}$$

$$\mathfrak{D}A^{\mathfrak{n}} = \mathrm{D}A^{\mathfrak{n}} - \frac{1}{N+1}\frac{\mathrm{D}A}{A}A^{\mathfrak{n}}. \tag{7, 2}$$

Il s'ensuit

$$^{\times}\mathfrak{D}A^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{D}A^{\mathfrak{n}}, \tag{7, 3a}$$
$$'\mathfrak{D}'A^{\mathfrak{n}} = F^{i}\mathfrak{D}A^{\mathfrak{n}}.\ ^{*)} \tag{7, 3b}$$

Démonstration. La première équation est la conséquence de (5, 3b). En effectuant le changement (5, 7), on trouve en raison

[19]) Le choix $\Phi(t)$ donne l'intégrale $A^{\mathfrak{n}}(t)$ du système (6, 6) à moins des conditions initiales. Si ${}^1A^{\mathfrak{n}}, {}^2A^{\mathfrak{n}}$ sont deux intégrales qui correspondent aux valeurs ${}^1\Phi \neq {}^2\Phi$ et aux mêmes conditions initiales, on obtient nécessairement au point t_0: $\underset{0}{{}^2A^{\mathfrak{n}}} = \underset{0}{{}^1A^{\mathfrak{n}}}\,\Phi(t_0)$, c'est-à-dire on a le champ unique.

*) Le rapprochement de l'équation (7, 2) à (2, 6) nous donne

$$\mathfrak{D}A^{\alpha} = d\xi^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}A^{\alpha}.$$

Nous avons donc construit le vecteur $Q_{\mu} = -\dfrac{1}{i\,(N+1)}A^{-1}\mathrm{D}_{\mu}A$ qui joue un rôle essentiel dans (2, 6) pendant le changement du facteur $F(t)$ dans $'A^{\alpha} = F^{i}A^{\alpha}$. (Voir (2, 7d) et (7, 3b).)

de (5, 11):

$$'A = F^{i(N+1)} A. \tag{7,4}$$

Parce que A est la grandeur de K_N à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}, i(N+1), p(N+1), \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$, on a d'après (5, 3):

$$'\mathrm{D}'A = \mathrm{D}'A = F^{i(N+1)}\, [\mathrm{D}A + (N+1)\, \varphi' A], \quad \left(\varphi' = \frac{\mathrm{d} \log F^i}{\mathrm{d}t}\right). \tag{7, 5}$$

Compte tenu de l'équation (7, 2) transformée à l'aide de (5, 8), (7, 4) et (7, 5) on a donc:

$$'\mathfrak{D}'A^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{D}'A^{\mathfrak{n}} = F^i\, (\mathrm{D}A^{\mathfrak{n}} + \varphi' A^{\mathfrak{n}}) - F^i \left(\frac{1}{N+1} \frac{\mathrm{D}A}{A} + \varphi'\right) A^{\mathfrak{n}} =$$
$$= F^i\, \mathfrak{D} A^{\mathfrak{n}}.$$

L'équation (7, 3b) est démontrée.

β) En employant la dérivée absolue $\mathfrak{D}$ on peut démontrer le théorème suivant:

Les vecteurs

$$\underset{0}{A^*} = A^{\mathfrak{a}}(t),\ \underset{1}{A^*} = \mathfrak{D}\underset{0}{A^*},\ \underset{2}{A^*} = \mathfrak{D}\underset{1}{A^*}, \ldots, \underset{N}{A^*} = \mathfrak{D}\underset{N-1}{A^*} \tag{7, 6}$$

étant linéairement indépendants*) pour $t = t_0$ et

$$\underset{N+1}{A^*} = \mathfrak{D}\underset{N}{A^*}$$

étant une combinaison linéaire des vecteurs précédents,

$$\sum_0^{N+1}{}_j \binom{N+1}{j} I^*_{N+1-j}\, \underset{j}{A^*} = 0, \quad I_0^* \neq 0, \tag{7, 7}$$

on peut trouver les N invariants projectifs, à savoir:

$$J_k = \frac{I_k^*}{I_0^*}, \quad \text{avec } k = 1, 2, \ldots, N. \tag{7, 8}$$

L'invariant J_k est isobare du poids arithmétique k par rapport à t.

Démonstration. La transformation (5, 8) appliquée aux équations (7, 6) nous donne en raison de (7, 3b):

$$'\underset{0}{A^*} = F^i \underset{0}{A^*},\ '\underset{1}{A^*} = F^i \underset{1}{A^*}, \ldots \tag{7, 9}$$

Pendant cette transformation l'équation (7, 7) devient:

*) C'est-à-dire il n'existe aucune combinaison linéaire

$$\sum_0^{k}{}_j M_{k-j} \underset{j}{A^*} = 0$$

(avec quelques coefficients $M_k \neq 0$) pour $k \leqq N$.

$$\sum_{0}^{N+1}{}_j \binom{N+1}{j} {}'I^*_{N+1-j} F^i \underset{j}{A^*} = 0. \qquad (7,\ 10)$$

Parce que $\underset{i}{A^*}$, $(i = 0, 1, \ldots, N)$ sont linéairement indépendants, le rapprochement des formules (7, 10) et (7, 7) nous donne:

$$\varrho\, 'I^*_k = F^i I^*_k, \quad \varrho \neq 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N+1,$$

or $$J_k = \frac{I_k^*}{I_0^*}, \quad (J_0 = 1), \quad k = 1, 2, \ldots, N+1 \qquad (7,\ 11)$$

sont les invariants projectifs du champ. Mais ces invariants ne sont pas linéairement indépendants, car on a:

$$\sum_{0}^{N+1}{}_j \binom{N+1}{j} \underset{j}{A^*} J_{N+1-j} = 0, \quad J_0 = 1 \qquad (7,\ 12)$$

d'où on peut calculer J_{N+1} en fonction linéaire des invariants $J_1, J_2, \ldots, J_N$. Nous sommes ainsi parvenus aux invariants J_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ mentionnés plus haut.

Déterminons maintenant le poids arithmétique des invariants J_k!

Pendant le changement

$$\overset{1}{t} = \frac{t}{c}, \quad (c = \text{const.} \neq 0), \qquad (7,\ 13)$$

on a d'abord

$$\underset{1}{\overset{1}{A}} = \mathrm{D}\underset{0}{\overset{1}{A}} = c\underset{1}{A}, \ldots, \underset{k}{\overset{1}{A}} = c^k \underset{k}{A}, \ldots \qquad (7,\ 14)$$

et ensuite en raison de (7, 2) et (7, 6)

$$\underset{1}{\overset{1}{A^*}} = \mathfrak{D}\underset{0}{\overset{1}{A^*}} = c\underset{1}{A^*}, \ldots, \underset{k}{\overset{1}{A^*}} = c^k \underset{k}{A^*}, \ldots \qquad (7,\ 15)$$

Pendant la transformation (7, 13) l'équation (7, 12) s'écrit

$$\sum_{0}^{N+1}{}_j \binom{N+1}{j} \underset{j}{\overset{1}{A^*}} \overset{1}{J}_{N+1-j} = 0, \quad \underset{0}{\overset{1}{J}} = 1,$$

et de là, d'après (7, 5), on obtient

$$\overset{1}{J}_k = c^k J_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N+1,$$

or, J_k est isobare du poids arithmétique k par rapport à t.

8. Dans le paragraphe précédent nous avons établi les invariants projectifs J_k, $(k = 1, 2, \ldots, N+1)$ du champ $A^\alpha(t)$ dont un, p. e. J_{N+1}, peut être exprimé par la formule connue à l'aide des invariants $J_1, J_2, \ldots, J_N$. Dans les paragraphes 5 et 6 nous avons déterminé les invariants projectifs $I_2, \ldots, I_{N+1}$ et nous

avons déduit que ce système est le système complet des invariants du champ $A^\alpha(t)$. On peut donc se demander quelle est la relation entre ces deux familles d'invariants.

Nous démontrerons l'équation suivante:

$$I_k(L) = I_k(J), \quad k = 2, 3, \ldots, N+1, \tag{8, 1}$$

c'est-à-dire: Les invariants I_k s'expriment par la même fonction en L_s et I_s, $(s = 1, 2, \ldots, N+1)$.

Démonstration. Si l'on effectue la transformation (5, 7), les vecteurs dérivés $\underset{0}{A}{}^*, \underset{1}{A}{}^*, \ldots, \underset{N+1}{A}{}^*$ deviennent $'\underset{0}{A}{}^*, '\underset{1}{A}{}^*, \ldots, '\underset{N+1}{A}{}^*$. Ces derniers sont liés aux vecteurs $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N+1}{A}$ par les équations:

$$'\underset{0}{A}{}^* = F^i \underset{0}{A},$$

$$'\underset{1}{A}{}^* = F^i \mathfrak{D} \underset{0}{A}{}^* = F^i(\mathrm{D}\underset{0}{A} + S\underset{0}{A}) = F^i(\underset{1}{A} + S\underset{0}{A}), \quad \left(S = -\frac{1}{N+1}\frac{\mathrm{D}A}{A}\right),$$

$$'\underset{2}{A}{}^* = F^i \mathfrak{D} \underset{1}{A}{}^* = F^i(\underset{2}{A} + 2\underset{1}{A}S + \underset{0}{A}S^2 + \underset{0}{A}\,\mathrm{D}S), \tag{8, 2}$$

. . . .

Il s'ensuit de là par l'induction:

$$'\underset{k}{A}{}^* = \sum_{0}^{k}{}_j F^i \binom{k}{j} \overset{j}{\underset{k}{r}}{}^* \underset{j}{A}, \quad k = 0, 1, \ldots, N+1, \tag{8, 3}$$

où $\overset{j}{\underset{k}{r}}{}^*$ satisfont aux équations analogues aux relations (5, 14) — (5, 20)[20]) et de même à l'équation

$$\overset{k+1}{r}{}^* = \overset{k}{r}{}^{*\prime} + \overset{1}{r}{}^* \overset{k}{r}{}^*, \quad \left(\overset{k}{r}{}^{*\prime} = \frac{\mathrm{d}\overset{k}{r}{}^*}{\mathrm{d}t}\right) \tag{8, 4}$$

qui est analogue à (5, 21).[20])

La formule (8, 4) est projective invariante. En partant de l'équation analogue à (7, 7), c'est-à-dire

$$\sum_{0}^{N+1}{}_j \binom{N+1}{j} J_{N+1-j}\, '\underset{j}{A}{}^* = 0, \quad (J_0 = 1) \tag{8, 5}$$

équivalente à l'équation

$$\sum_{0}^{N+1} \binom{N+1}{j} a_{N+1-j} \underset{j}{A} = 0, \tag{8, 6}$$

on obtient de là les invariants projectifs I_k du champ $A^n(t)$, en se servant de la méthode indiquée plus haut au paragraphe 5.

[20]) Où, bien entendu, on a à écrire $\overset{k}{r}{}^*$ au lieu de $\overset{k}{r}$ etc. et S au lieu de φ', DS au lieu de φ'' etc.

En partant de l'équation (8, 5), au lieu de (5, 22) pour $m =$ $= N + 1$, on obtient*):

$$L_u = \sum_0^u {}_v \binom{u}{v} J_v \overset{u-v}{r^*} \text{ avec } u = 0, 1, 2, \ldots, N + 1, \text{ où } L_k = \frac{a_k}{a_0},$$
$$L_0 = 1. \tag{8, 7}$$

Nous pouvons transcrire ce système de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &\text{a) } L_0 = J_0 \overset{0}{r^*} = 1, \\ &\text{b) } L_u - J_u = \sum_1^u {}_v \binom{u}{v} J_{u-v} \overset{v}{r^*}, \quad u = 1, 2, \ldots, N + 1. \end{aligned} \tag{8, 8}$$

Le déterminant du système des équations linéaires (8, 8b) aux inconnues $\overset{v}{r^*}$, $(v = 1, 2, \ldots, N + 1)$, est $(J_0)^{N+1} = 1$.

On a donc:

$$\overset{v}{r^*} = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} J_0 & 0 & 0 \ldots & 0 & L_1 - J_1 \\ \binom{2}{1} J_1 & J_0 & 0 \ldots & 0 & L_2 - J_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{v}{1} J_{v-1}, & \binom{v}{2} J_{v-2}, & \ldots & \binom{v}{v-1} J_1, & L_v - J_v \end{vmatrix}. \tag{8, 9}$$
$$v = 1, 2, \ldots, N + 1.$$

Les formules (8, 9) deviennent identiques aux (5, 28), si l'on y pose J_i au lieu de $'L_i$.

En portant les valeurs (8, 9) dans l'équation (8, 4), on obtient par rapport à (5, 29)

$$I_{k+1}(L) - I_{k+1}(J) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{8, 10}$$

Parce que la valeur $k = 0$ ne nous donne pas l'invariant, (voir (5, 31)) la formule (8, 10) n'est valable que pour $k = 1, 2, \ldots, N$.

Le calcul direct, en partant de (8, 8) pour $u = 1, 2, 3$, nous donne par exemple

$$\begin{aligned} &\overset{1}{r^*} = L_1 - J_1 \\ &\overset{2}{r^*} = L_2 - J_2 - 2L_1J_1 + 2J_1^2 \\ &\overset{3}{r^*} = L_3 - J_3 - 3L_1J_2 - 3J_1L_2 + 6J_1J_2 + 6L_1J_1^2 - 6J_1^3. \end{aligned} \tag{8, 11}$$

*) En substituant à $'\underset{j}{A}{}^*$ (dans (8, 5)) la valeur (8, 3), on trouve une relation (en $\underset{j}{A}$) qu'on peut rapprocher de l'équation (8, 6).

Ensuite pour $k = 0$ l'équation (8, 4) se réduit à

$$\overset{1}{r^*} = \overset{1}{r^*},$$

ou

$$L_1 - J_1 = L_1 - J_1,$$

c'est-à-dire à l'identité. (Voir (5, 31a).)

On tire de (8, 4) pour $k = 1$

$$\overset{2}{r^*} = \overset{1}{r^*}{}' + (\overset{1}{r^*})^2,$$

d'où il suit en raison de (8, 11)

$$L_2 - L'_1 - L_1^2 - (J_2 - J'_1 - J_1^2) = 0.$$

Il en résulte par rapport à (5, 31b):

$$I_2(L) - I_2(J) = 0$$

et par conséquent

$$I_2 = J_2 - J'_1 - J_1^2.$$

La même méthode nous donne pour $k = 2$, en raison de (8, 4) et (8, 11), la formule suivante:

$$I_3 = J_3 - J'_2 - 3J_1J_2 + 2J_1^3 + 2J_1J'_1.$$

9. Supposons de nouveau que les vecteurs dérivés $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N}{A}$ soient linéairement indépendants au point $t = t_0$ du champ $A^{\mathfrak{n}}(t)$ et qu'il soit:

$$\sum_{0}^{N+1}{}_{j} \binom{N+1}{j} L_{N+1-j} \underset{j}{A^{\mathfrak{n}}} = 0, \qquad L_0 = 1. \tag{9, 1}$$

Désignons par:

$$\mathfrak{A}^{(N+1)} = \text{Dét.}\ | \underset{0}{A} \underset{1}{A} \ldots \underset{N}{A} | \quad (\neq 0). \tag{9, 2a}$$

$$\underset{j}{\mathfrak{a}} = \frac{\underset{j}{A}}{\mathfrak{A}}.^{21)} \tag{9, 2b}$$

Cela posé on peut démontrer:

Les vecteurs

$$\underset{k}{\mathfrak{A}^{\mathfrak{n}}} = \sum_{0}^{k}{}_{j} \binom{k}{j} L_{k-j} \underset{j}{\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{9,3}$$

adjoints au champ $A^{\mathfrak{n}}(t)$ sont projectifs invariants, linéairement indépendants et leurs dérivées absolues

---

[21]) Pour éviter tout malentendu remarquons que nous nous servons de la convention: $\sqrt[N+1]{\mathfrak{A}^{[N+1]}} = |\mathfrak{A}|\,\text{sign}\ \mathfrak{A}$, $\sqrt[N+1]{F^{[i(N+1)]}} = |F^{(i)}|\,\text{sign}\, F^{(i)}$. Dans les paragraphes 9 et 10 les exposants sont mis en paranthèses.

le long de la courbe $C(t)$ sont aussi projectives invariantes.

Démonstration. $\mathfrak{A}^{(N+1)}$ change pendant la transformation

$$'\underset{0}{A}^{\mathfrak{n}} = F^{(i)}\underset{0}{A}^{\mathfrak{n}}$$

de la manière suivante

$$'\mathfrak{A}^{(N+1)} = \text{Dét.} \left| \sum_{0}^{\mathfrak{b}}{}_j F^{(i)} \binom{\mathfrak{b}}{j} r^{\mathfrak{b}-j} \underset{j}{A}^{\mathfrak{n}} \right| = F^{[i(N+1)]}\, \mathfrak{A}^{(N+1)}.$$

Il résulte de là en raison de la remarque ([21])

$$'\mathfrak{A} = F^{(i)}\, \mathfrak{A}. \tag{9, 4}$$

Si nous écrivons (5, 11) avec la notation (5, 20), à savoir

$$'\underset{k}{A} = \sum_{0}^{k}{}_j F^{(i)} \binom{k}{j} r^{k-j} \underset{j}{A}, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{9, 5}$$

et si nous divisons cette équation par la valeur $'\mathfrak{A}$ définie par (9, 4), nous obtenons:

$$'\underset{k}{\mathfrak{a}} = \sum_{0}^{k}{}_j \binom{k}{j} r^{k-j} \underset{j}{\mathfrak{a}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{9, 6}$$

On en déduit:

$$'\underset{k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{k}{}_j \binom{k}{j}\, 'L_{k-j}\, '\underset{j}{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{k}{}_j\, 'L_{k-j} \sum_{0}^{j}{}_u \binom{k}{j}\binom{j}{u} r^{j-u} \underset{u}{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{n}} =$$
$$= \sum_{0}^{k}{}_u \binom{k}{u} \underset{u}{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{n}} \sum_{u}^{k}{}_j \binom{k-u}{k-j}\, '\underset{k-j}{L}\, r^{j-u}. \tag{9, 7}$$

Ayant égard à (5, 25) et à (5, 6) on constate facilement que la dernière somme de (9, 7) est égale à L_{k-u} et par conséquent:

$$\underset{k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{k}{}_u \binom{k}{u} L_{k-u}\, \underset{k}{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{n}} = \underset{k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{9, 8}$$

En étendant la définition (9, 3) pour $k = N + 1$, on a, par rapport à (9, 1):

$$\underset{N+1}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} = 0, \; '\underset{N+1}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} = 0. \tag{9, 9}$$

Les vecteurs $\underset{k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, N$ sont linéairement indépendants. En effet on a d'après (9, 2b) et (9, 3):

$$\text{Dét.} \mid \underset{0}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} \underset{1}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} \ldots \underset{N}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{n}} \mid = \frac{1}{\mathfrak{A}^{(N+1)}} \text{Dét.} \mid \underset{0}{A}^{\mathfrak{n}} \underset{1}{A}^{\mathfrak{n}} \ldots \underset{N}{A}^{\mathfrak{n}} \mid \neq 0. \tag{9, 10}$$

La dérivée absolue du vecteur $\mathfrak{A}^{\mathfrak{n}}$ est:

$$\mathrm{D}\,\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{n}} = \frac{\mathrm{d}\,\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{n}}}{\mathrm{d}t} + q^{\mu}\,\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}\,\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{b}} \qquad (9,\,11)$$ [22])

Le rapprochement de (9, 8), (2, 7a, c) et (4, 3) nous donne

$$'\mathrm{D}\;'\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{n}} = \mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{n}}. \qquad (9,\,12)$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

10. Les grandeurs $\underset{k}{\mathfrak{A}}$, $k = 0, 1, \ldots, N$ étant données et linéairement indépendantes et $\underset{k}{\mathfrak{A}}$, $\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}}$ étant projectives, on peut écrire $\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}}$ en combinaison linéaire des $\underset{j}{\mathfrak{A}}$, $(j = 0, 1, \ldots, N)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{j}{\underset{k}{K}}\,\underset{j}{\mathfrak{A}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \qquad (10,\,1)$$

Nous voulons maintenant déterminer les coefficients $\overset{j}{\underset{k}{K}}$ et démontrer à cet effet le théorème suivant:

Désignons par

1. $\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N}{A}$ les vecteurs dérivés du champ $A^{\mathfrak{a}}(t)$, linéairement indépendants au point $t = t_0$ de la courbe $\xi^{\nu} = \xi^{\nu}(t)$, et posons:

$$\sum_{0}^{N+1}{}_{j}\binom{N+1}{j} L_{N+1-j}\,\underset{j}{A}{}^{\mathfrak{a}} = 0, \quad (L_0 = 1); \qquad (10,\,2)$$

2. $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$ les invariants qui forment le système complet des invariants projectifs de ce champ;

3. $\underset{k}{\mathfrak{A}}$, $k = 0, 1, \ldots, N+1$, les grandeurs projectives définies par (9, 3) resp. (9, 9).

Or, les dérivées absolues des grandeurs $\underset{k}{\mathfrak{A}}$ satisfont

---

[22]) Si l'on suppose que $\mathfrak{B}^{\mathfrak{a}}$ soit une grandeur (de K_N) à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & i\;p_1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$, on trouve en raison de (5, 3a)

$$\mathrm{D}\mathfrak{B}^{\mathfrak{a}} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{B}^{\mathfrak{a}}}{\mathrm{d}t} + q^{\mu}\left(\Lambda^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}\mu}\mathfrak{B}^{\mathfrak{b}} - p_1 \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{B}^{\mathfrak{a}} - \frac{p_1\,(n+1)\,n}{r(n-1)\,(N+1)}\,\Omega^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{r}\mu}\mathfrak{B}^{\mathfrak{a}}\right). \;(*)$$

Parce que $\underset{0}{A}{}^{\mathfrak{a}}$ est le vecteur à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & i\,p & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$, $\underset{k}{\mathfrak{A}}{}^{\mathfrak{a}}$ — d'après définition — est le vecteur à la caractéristique $\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & 0\;0 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$. L'équation (*) donne précisément (9, 11) pour $p_1 = 0$.

aux formules:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}\underset{0}{\mathfrak{A}} = \underset{1}{\mathfrak{A}}, \\
&\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}} = \underset{k+1}{\mathfrak{A}} - \sum_{1}^{k}{}_{s} \binom{k}{s} I_{s+1} \underset{k-s}{\mathfrak{A}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \\
&(\underset{N+1}{\mathfrak{A}} = 0).
\end{aligned}
\tag{10, 3}
$$

Ces équations seront dites les **formules de Frenet** du champ $A^a(t)$.

Démonstration. α) Après le changement $'A^a = F^{(i)} A^a$ l'équation (10, 1) devient

$$'\mathrm{D}\, '\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\, '\overset{j}{\underset{k}{K}} \underset{j}{\mathfrak{A}}, \tag{10, 4}$$

d'où il vient en raison de (9, 8) et (9, 12)

$$\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\, '\overset{j}{\underset{k}{K}} \underset{j}{\mathfrak{A}}. \tag{10, 5}$$

Le rapprochement des formules (10, 5), (10, 1) nous donne:

$$'\overset{j}{\underset{k}{K}} = \overset{j}{\underset{k}{K}}, \qquad j, k = 0, 1, \ldots, N. \tag{10, 6}$$

Or, les coefficients scalaires $\overset{j}{\underset{k}{K}}$ sont les invariants projectifs. Parce que I_q, $q = 2, 3, \ldots, N+1$, forment le système complet des invariants, les scalaires $\overset{j}{\underset{k}{K}}$ sont les fonctions de I_q.

β) Pour la détermination $\overset{j}{\underset{k}{K}}$ on aura besoin d'abord de la solution $\underset{j}{a}$ de l'équation (9, 3).

Posons pour abréger

$$\overset{i}{\underset{j}{a}} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i > j \\ \binom{j}{i} L_{j-i}, \quad i \leqq j, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots, N+1, \end{cases} \tag{10, 7}$$

où L_k sont les coefficients de l'équation (9, 3).

Soient maintenant $\overset{i}{\underset{j}{b}}$ les valeurs définies par

$$\sum_{0}^{N}{}_{k} \overset{i}{\underset{k}{b}} \overset{k}{\underset{j}{a}} = \sum_{0}^{N}{}_{k} \overset{k}{\underset{j}{b}} \overset{i}{\underset{k}{a}} = \delta^i_j. \tag{10, 8}$$

Le déterminant du système (10, 8) aux inconnues $\overset{i}{\underset{k}{b}}$ est Dét. $|\overset{i}{\underset{j}{a}}| =$
$= L_0{}^{(N+1)} = 1.$

Compte tenu de (10, 7) on peut écrire pour (9, 3)

$$\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{0}^{k}{}_{j} \overset{j}{\underset{k}{a}} \underset{j}{\mathfrak{a}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{10, 9}$$

dont la solution d'après $\underset{j}{\mathfrak{a}}$ est

$$\underset{j}{\mathfrak{a}} = \sum_{0}^{N}{}_{k} \overset{k}{\underset{j}{b}} \underset{k}{\mathfrak{A}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{10, 10}$$

Parce que $\underset{k}{\mathfrak{A}}$ ne dépend que de $\underset{0}{\mathfrak{a}}, \underset{1}{\mathfrak{a}}, \ldots, \underset{k}{\mathfrak{a}}$ (voir (9, 3)) on a

$$\overset{i}{\underset{j}{b}} = 0, \quad i > j. \tag{10, 11}$$

Or, les équations (10, 8) s'écrivent

$$\sum_{r-s}^{N}{}_{k} \overset{r-s}{\underset{k}{b}} \overset{k}{\underset{r}{a}} = \delta_r^{r-s}, \qquad \begin{array}{l} r = 0, 1, \ldots, N \\ s = 0, 1, \ldots, r. \end{array} \tag{10, 12}$$

On en tire pour $s = 0$

$$\overset{r}{\underset{r}{b}} \overset{r}{\underset{r}{a}} = 1, \tag{10, 13}$$

d'où, à cause de $\overset{r}{\underset{r}{a}} = L_0 = 1$ on a $\overset{r}{\underset{r}{b}} = 1.$

Pour $r = 1, 2, \ldots, N$, $s = 1, 2, \ldots, r$ on obtient de (10, 12):

$$\overset{r}{\underset{r+s}{b}} = (-1)^s \begin{vmatrix} \overset{r}{\underset{r+1}{a}} & \overset{r}{\underset{r}{a}} & 0 & 0 \ldots. 0 \\ \overset{r}{\underset{r+2}{a}} & \overset{r+1}{\underset{r+2}{a}} & \overset{r}{\underset{r}{a}} & 0 \ldots. 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overset{r}{\underset{r+s}{a}} & \overset{r+1}{\underset{r+s}{a}} & \overset{r+2}{\underset{r+s}{a}} \ldots. & \overset{r+s-1}{\underset{r+s}{a}} \end{vmatrix} \tag{10, 14}$$

γ) Déterminons maintenant les scalaires $\overset{j}{\underset{k}{K}}$!

1) Écrivons d'abord la dérivée absolue du déterminant $\mathfrak{A}$; on trouve à cause de (9, 2a) et (10, 2)

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}^{(N+1)} = \text{Dét.}\ |\underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \ldots, \underset{N-1}{A}, \underset{N+1}{A}| = -L_1(N+1)\mathfrak{A}^{(N+1)}. \tag{10, 15}$$

D'autre part, on a aussi:

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}^{(N+1)} = (N+1)\, \mathfrak{A}^{(N)}\, \mathrm{D}\mathfrak{A}\ (= -L_1(N+1)\, \mathfrak{A}^{(N+1)}),$$

d'où il vient

$$D\mathfrak{A} = -L_1\mathfrak{A}. \tag{10, 16a}$$

Il en résulte

$$D\,\mathfrak{A}^{(-1)} = L_1\,\mathfrak{A}^{(-1)}. \tag{10, 16b}$$

Dérivons l'équation (9, 2b); on a en raison de (10, 16b)

$$D\underset{j}{\mathfrak{a}} = D(\underset{j}{A}\mathfrak{A}^{(-1)}) = \underset{j+1}{\mathfrak{a}} + L_1\underset{j}{\mathfrak{a}}.\text{[23]} \tag{10, 17}$$

La formule (10, 17) n'est valable que pour $j = 0, 1, \ldots, N-1$, parce que la grandeur $\underset{N+1}{\mathfrak{a}} = \dfrac{\underset{N+1}{A}}{\mathfrak{A}}$ est définie par (10, 2). Enfin on déduit de (10, 9):

$$D\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{j=0}^{k}\left(\overset{j}{\underset{k}{a}}{}'\underset{j}{\mathfrak{a}} + \overset{j}{\underset{k}{a}}\underset{j}{\mathfrak{a}}L_1\right) + \sum_{j=1}^{k+1}\overset{j-1}{\underset{k}{a}}\underset{j}{\mathfrak{a}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10, 18}$$

De là et de (10, 10) on obtient:

$$D\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{r=0}^{N}\underset{r}{\mathfrak{A}}\sum_{j=0}^{N}\overset{r}{\underset{j}{b}}\left(\overset{j}{\underset{k}{a}}{}' + \overset{j-1}{\underset{k}{a}} + \overset{j}{\underset{k}{a}}L_1\right),\text{[24]} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10, 19}$$

Le rapprochement de cette équation à la formule (10, 1) nous donne, à l'aide de (10, 11), la valeur en question:

$$\overset{r}{\underset{k}{K}} = \sum_{j=0}^{N}\overset{r}{\underset{j}{b}}\left(\overset{j}{\underset{k}{a}}{}' + \overset{j-1}{\underset{k}{a}}\right) + \delta_k^r L_1, \quad r, k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10, 20}$$

2) Il ne nous reste qu'à évaluer $\overset{r}{\underset{N}{K}}$ pour $r = 0, 1, \ldots, N$. En partant de (10, 17) pour $j = N$, on obtient en raison de (10, 2):

$$D\underset{N}{\mathfrak{a}} = \underset{N}{\mathfrak{a}}L_1 - \sum_{j=0}^{N}\overset{j}{\underset{N+1}{a}}\underset{j}{\mathfrak{a}}. \tag{10, 21}$$

Ensuite on déduit de l'équation (10, 9), écrite pour $k = N$, à l'aide de (10, 10) et (10, 21):

$$\begin{aligned} D\underset{N}{\mathfrak{A}} = & \sum_{j=0}^{N-1}\left[\overset{j}{\underset{N}{a}}{}'\sum_{k=0}^{N}\overset{k}{\underset{j}{b}}\underset{k}{\mathfrak{A}} + \overset{j}{\underset{N}{a}}\sum_{k=0}^{N}\left(\overset{k}{\underset{j+1}{b}} + \overset{k}{\underset{j}{b}}L_1\right)\underset{k}{\mathfrak{A}}\right] + \\ & + \sum_{k=0}^{N}\overset{k}{\underset{N}{b}}L_1\underset{k}{\mathfrak{A}} - \sum_{j=0}^{N}\overset{j}{\underset{N+1}{a}}\sum_{k=0}^{N}\overset{k}{\underset{j}{b}}\underset{k}{\mathfrak{A}}, \end{aligned} \tag{10, 22}$$

ce qui est la formule analogue à (10, 18).

---

[23]) La relation $D(\underset{j}{A}\,\mathfrak{A}^{(-1)}) = (D\underset{j}{A})\mathfrak{A}^{(-1)} + \underset{j}{A}\,D\,\mathfrak{A}^{(-1)}$ suit de (5, 3a).

[24]) On a posé dans cette formule $\overset{-1}{\underset{k}{a}} = 0$.

La comparaison de la formule (10, 22) à (10, 1) pour $k = N$, nous donne:

$$\overset{r}{\underset{N}{K}} = \sum_{0}^{N-1}{}_{j}\left(\overset{j}{\underset{N}{a'}}\,\overset{r}{\underset{j}{b}} + \overset{j}{\underset{N}{a}}\,\overset{r}{\underset{j+1}{b}}\right) - \sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{j}{\underset{N+1}{a}}\,\overset{r}{\underset{j}{b}} + \delta_N^r L_1, \qquad (10, 23)$$

avec $r = 0, 1, \ldots, N$.

δ) Examinons maintenant des invariants $\overset{r}{\underset{k}{K}}$ aux cas suivants:

1) Si $r > k$, posons $r = k + s$, où $s > 0$ est un nombre entier. Soit alors $r = k + s$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, $s = 1, 2, \ldots, k + s \leqq \leqq N - 1$ dans (10, 20); on a donc

$$\overset{k+s}{\underset{k}{K}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{k+s}{\underset{j}{b}}\left(\overset{j}{\underset{k}{a'}} + \overset{j-1}{\underset{k}{a}}\right). \qquad (10, 24)$$

Mais d'autre part:

$$\sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{k+s}{\underset{j}{b}}\,\overset{j}{\underset{k}{a'}} = 0, \qquad (10, 25)$$

parce que on trouve $\overset{k+s}{\underset{j}{b}} = 0$ pour $k + s > j$, et d'après (10, 7) et (10, 11), on obtient $\overset{k+s}{\underset{j}{b}} \neq 0$, $\overset{j}{\underset{k}{a'}} = 0$ pour $k + s \leqq j$.

Or, l'équation (10, 24) se réduit à

$$\overset{k+s}{\underset{k}{K}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{k+s}{\underset{j}{b}}\,\overset{j-1}{\underset{k}{a}},$$

d'où il s'ensuit:

$$\overset{k+s}{\underset{k}{K}} = \delta_1^s \qquad (10, 26)$$

avec $k = 0, 1, \ldots, N - 1, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad k + s \leqq N - 1$

2) Si l'on suppose que soit $r = k = 0, 1, \ldots, N - 1$, on déduit de (10, 20):

$$\overset{r}{\underset{r}{K}} = \sum_{0}^{N}{}_{j}\,\overset{r}{\underset{j}{b}}\,(\overset{j}{\underset{r}{a'}} + \overset{j-1}{\underset{r}{a}}) + L_1. \qquad (10, 27)$$

Mais on trouve, comme au cas précédent (10, 25):

$$\sum_{0}^{r}{}_{j}\,\overset{r}{\underset{j}{b}}\,\overset{j}{\underset{r}{a'}} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, \quad N - 1. \qquad (10, 28)$$

Il résulte ensuite de (10, 27) en raison de (10, 7), (10, 14) et (10, 28):

$$\overset{r}{\underset{r}{K}} = \overset{r}{\underset{r}{b}}\,\overset{r-1}{\underset{r}{a}} + \overset{r}{\underset{r+1}{b}}\,\overset{r}{\underset{r}{a}} + L_1 = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, N - 1. \qquad (10, 29)$$

Si l'on pose $r = N$ dans (10, 23), on obtient en raison de (10, 7) et (10, 14):

$$\overset{N}{\underset{N}{K}} = 0. \tag{10, 30}$$

3) Soit enfin $r < k$. On déduit pour $r = k - s$, $k \geqq s = 1, 2, \ldots, N - 1$ de l'équation (10, 20)

$$\overset{k-s}{\underset{k}{K}} = \overset{N}{\underset{0}{\sum}}{}_j \overset{k-s}{\underset{j}{b}} (\overset{j}{\underset{k}{a'}} + \overset{j-1}{\underset{k}{a}}). \tag{10, 31a}$$

En substituant $r = N - s$ dans (10, 23), on obtient pour $k = N$:

$$\overset{N-s}{\underset{N}{K}} = \overset{N-1}{\underset{0}{\sum}}{}_j (\overset{N-s}{\underset{j}{b}} \overset{j}{\underset{N}{a'}} + \overset{j}{\underset{N}{a}} \overset{N-s}{\underset{j+1}{b}}) - \overset{N}{\underset{0}{\sum}}{}_j \overset{j}{\underset{N+1}{a}} \overset{N-s}{\underset{j}{b}}, \tag{10, 31b}$$

$s = 1, 2, \ldots, N$.

Les formules (10, 31) montrent que $\overset{k-s}{\underset{k}{K}}$, $k \geqq s = 1, 2, \ldots, N$ ne sont pas en général des constantes numériques. D'après (10, 6) et les lignes suivantes à la page 50 $\overset{k-s}{\underset{s}{K}}$ sont des fonctions des invariants I_q. Nous allons déterminer ces fonctions. Si l'on remplace $\overset{j}{\underset{k}{b}}$ dans (10, 31) par les valeurs (10, 14) et si l'on y substitue à $\overset{j}{\underset{k}{a}}$ les valeurs (10, 7), on voit, que $\overset{s}{\underset{k}{K}}$ s'expriment par les polynômes en L_i. Ces fonctions sont isobares du poids arithmétique $s + 1$ par rapport à t, car les coefficients $\overset{j}{\underset{k}{a}}$ sont, d'après (10, 7) et (5, 35), du poids arithmétique $k - j$ comme $\overset{j}{\underset{k}{b}}$. (Voir (10, 14) et (5, 35).) Parce que l'invariant I_q est la fonction entière des coefficients L_i du poids q et $\overset{k-s}{\underset{k}{K}}$ est une telle fonction des invariants $I_2, I_3, \ldots, I_{N+1}$, qu'elle devient une fonction entière des coefficients L_i du poids arithmétique $s + 1$ quand on y porte les valeurs I_q de (5, 38), il vient de là (et aussi de la structure des invariants I_q) que $\overset{k-s}{\underset{k}{K}}$ est nécessairement une fonction entière de $I_{s+1}, I_s', I_{s-1}'', \ldots, I_2^{(s-1)}$.[25])

Les relations (10, 31) montrent que le scalaire $\overset{k-s}{\underset{s}{K}}$ ne contient que la première dérivée des coefficients L_i et cela linéairement

[25]) Les accents désignent les dérivées d'après t.

et de plus que le coefficient dont l'indice est le plus élevé est:

$$\overset{k-s}{\underset{k-s}{b}}\;\overset{k-s}{\underset{k}{a'}} = \binom{k}{s} L_s'. \tag{10, 32}$$

Parce qu'on a d'après (5, 38):

$$I_{s+1} = L_{s+1} - L_s' + \ldots,$$

il en résulte nécessairement:

$$\overset{k-s}{\underset{k}{K}} = -\binom{k}{s} I_{s+1}, \quad k \geqq s = 1, 2, \ldots, N. \tag{10, 33}$$

ε) Les résultats (10, 26), (10, 29) et (10, 33) peuvent être résumés par les relations suivantes:

$$\overset{k+s}{\underset{k}{K}} = \delta_1^s = \begin{cases} 0, & s \neq 1 \\ 1, & s = 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots, N, \quad s = 0, 1, \ldots, N-k. \tag{10, 34a}$$

$$\overset{k-s}{\underset{k}{K}} = -\binom{k}{s} I_{s+1}, \quad k \geqq s = 1, 2, \ldots, N. \tag{10, 34b}$$

Or, les coefficients $\overset{i}{\underset{j}{K}}$ de l'équation (10, 1) sont déterminés.

L'équation (10, 1) s'écrit en raison de (10, 34)

$$\mathrm{D}\underset{0}{\mathfrak{A}} = \underset{1}{\mathfrak{A}},$$

$$\mathrm{D}\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{0}^{k+1}{}_j \overset{j}{\underset{k}{K}} \underset{j}{\mathfrak{A}} = \underset{k+1}{\mathfrak{A}} - \sum_{1}^{k}{}_s \binom{k}{s} I_{s+1} \underset{k-s}{\mathfrak{A}},$$

avec $k = 1, 2, \ldots, N$, $\underset{N+1}{\mathfrak{A}} = 0$. (Voir (9, 9).)

Ces relations sont les formules cherchées de Frenet. (Voir (10, 3).)

Remarque. Compte tenu de l'équation (10, 34b) pour $k = N$ et de l'équation (10, 31b), on en peut déduire une formule intéressante qui nous donne les invariants du champ:

$$-\binom{N}{s} I_{s+1} = \sum_{0}^{N-1}{}_j (\overset{N-s}{\underset{j}{b}}\;\overset{j}{\underset{N}{a'}} + \overset{j}{\underset{N}{a}}\;\overset{N-s}{\underset{j+1}{b}}) - \sum_{0}^{N}{}_j \overset{j}{\underset{N+1}{a}}\;\overset{N-s}{\underset{j}{b}}, \tag{10, 35}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, N$.[26])

Les scalaires $\overset{N-s}{\underset{j}{b}}$ peuvent être remplacés par les valeurs (10, 14).

11. Appendice. En partant des formules de Frenet (10, 3), on peut déduire les formules analogues pour les vecteurs cova-

[26]) Voir Hlavatý (1), la formule (9, 13').

riants $\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}}$ liés avec $\underset{k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}}$ par les relations suivantes:

$$\underset{\mathfrak{t}}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}}\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{r}}\overset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{t}} = \delta^{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{t}}, \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{r}, \mathfrak{t} = \ddot{0}, \ddot{1}, \ldots, \ddot{N}). \qquad (11, 1)$$

On trouve d'abord pour ces grandeurs

$$'\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = \overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} \qquad (11, 2a)$$

$$'\mathrm{D}\,'\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = \mathrm{D}\overset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}}, \qquad (11, 2b)$$

et de plus

$$\mathrm{D}\overset{N}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = -\overset{N-1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}},$$

$$\mathrm{D}\overset{s}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = -\overset{N-1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} + \sum_{1}^{N-s}{}_{k}\binom{k+s}{k} I_{k+1}\overset{k+s}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}}, \ s = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (11, 3)$$

$$(\overset{(-1)}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = 0, \ \overset{N+1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = 0).$$

Démonstration. α) La première équation (11, 2) résulte de l'équation (11, 1) écrite pour les vecteurs transformés à l'aide de (9, 8). La seconde des relations (11, 2) résulte de la dérivation de l'équation (11, 1) transformée, en raison de (9, 8), (9, 12) et (11, 2a).

β) Des équations (10, 3) écrites dans la forme:

$$\mathrm{D}\underset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}} = \underset{\mathfrak{r}+1}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}} - \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{k}\binom{\mathfrak{r}}{k} I_{k+1}\underset{\mathfrak{r}-k}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}}, \text{[27]} \quad \mathfrak{r} = 0, 1, \ldots, N$$

$$(\underset{N+1}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}} = 0)$$

on obtient en raison de (11, 1) et de sa dérivée

$$-(\mathrm{D}\overset{k}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}})\underset{\mathfrak{r}}{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{a}} = \delta^{k}_{\mathfrak{r}+1} - \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{m}\binom{\mathfrak{r}}{m} I_{m+1}\delta^{k}_{\mathfrak{r}-m},$$

avec $k = 0, 1, \ldots, N.$

Il s'ensuit:

$$\mathrm{D}\overset{k}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{b}} = -\overset{k-1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{b}} + \sum_{1}^{N-k}{}_{m}\binom{m+k}{m} I_{m+1}\overset{m+k}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{b}},$$

$$(\overset{(-1)}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{b}} = 0, \ \overset{N+1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{b}} = 0). \qquad (11, 4)$$

L'équation (11, 4) s'écrit aussi:

$$\mathrm{D}\overset{N}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}} = -\overset{N-1}{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{a}},$$

[27]) On suppose que pour $\mathfrak{r} = 0$ la somme à droite soit égale à zéro.

$$\mathrm{D}\overset{s}{\mathfrak{A}}_\alpha = -\overset{s-1}{\mathfrak{A}}_\alpha + \sum_1^{N-s}{}_k \binom{s+k}{k} I_{k+1} \overset{k+s}{\mathfrak{A}}_\alpha, \quad s = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$(\overset{(-1)}{\mathfrak{A}}_\alpha = 0, \overset{N+1}{\mathfrak{A}}_\alpha = 0);$$

ces relations sont les formules (11, 3).

12. Supposons maintenant de nouveau que le champ $A^\alpha(t)$ pris en considération ait au point $t = t_0$ les m $(2 < m \leqq N + 1)$ vecteurs $\underset{0}{A^\alpha}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{m-1}{A^\alpha}$[28]) linéairement indépendants, et que le vecteur $\underset{m}{A^\alpha}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs précédents à savoir:

$$\sum_0^m{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \underset{j}{A^\alpha} = 0, \qquad a_0 \neq 0. \tag{12,1}$$

Dans ce paragraphe nous allons montrer qu'on peut déterminer, dans le cas du nombre m général, les invariants projectifs et les vecteurs projectifs qui satisfont aux formules de Frenet. Nous emploierons à ce but, la même méthode dont nous nous sommes servis au cas $m = N + 1$. (Voir les paragraphes 6, 9, 10.)

Les vecteurs $\underset{0}{A^\alpha}, \underset{1}{A^\alpha}, \ldots, \underset{m-1}{A^\alpha}$ déterminent au point $t = t_0$ de la courbe $C(t)$ le repère L_m à m dimensions qui ne change pas pendant la transformation

$$'\underset{0}{A^\alpha}(t) = F^i \underset{0}{A^\alpha}(t), \tag{12, 2}$$

car on a d'après (5, 11):

$$'\underset{k}{A^\alpha}(t) = \sum_0^k{}_j F^i \binom{k}{j} \underset{k}{\overset{j}{r}} \underset{j}{A^\alpha},\text{[29])} \quad (k = 0, 1, \ldots, m), \tag{12, 3}$$

où $\underset{m}{A^\alpha}$ est défini par (12, 1). Alors $'\underset{k}{A^\alpha}$ est le vecteur de L_m. Cela posé on peut démontrer le théorème suivant:

S o i e n t $\underset{i}{Y^\alpha}$, $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ n'importe quels vecteurs linéairement indépendants de L_m et soient $\underset{i}{A^\alpha}$[30]) les composantes des vecteurs $\underset{i}{A^\alpha}$ en L_m, pour lesquelles

$$\underset{i}{A^\alpha} = \sum_0^{m-1}{}_k \underset{i}{A^k} \underset{k}{Y^\alpha} \text{ resp. } \underset{m}{A^\alpha} = \sum_0^{m-1}{}_k \underset{m}{A^k} \underset{k}{Y^\alpha}. \tag{12, 4}$$

L e s c o m p o s a n t e s $\underset{i}{A^k}$. $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ sont linéaire-

[28]) Voir (5, 4) et aussi la remarque (*) à la page 32.

[29]) Les coefficients $\underset{i}{\overset{}{r}}$ sont définis au paragraphe 5.

[30]) Les indices latins parcourent les symboles 0, 1, ..., $m - 1$.

ment indépendants et on a pour $\underset{m}{A^k}$:

$$\sum_{0}^{m}{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \underset{j}{A^a} = 0; \tag{12, 5}$$

cette formule est indépendante du choix des vecteurs $\underset{i}{Y^a}$. Les composantes $\underset{i}{A^a}$ changent pendant la transformation (12, 2) comme suit:

$$'\underset{k}{A^a} = \sum_{0}^{k}{}_j F^i \binom{k}{j} \underset{k}{\overset{j}{r}} \underset{j}{A^a}.^{31)} \tag{12, 6}$$

Si la dérivée des vecteurs $\underset{i}{Y^a}$ est définie par la formule

$$\mathrm{D}\underset{i}{Y^n} = \sum_{0}^{m-1}{}_k \Psi_i^k Y_k^n, \tag{12, 7}$$

et si l'on pose

$$\mathrm{D}\underset{i}{A^a} = \frac{\mathrm{d}\underset{i}{A^a}}{\mathrm{d}t} + \sum_{0}^{m-1}{}_r \underset{i}{A^r} \Psi_r^a, \tag{12, 8}$$

on trouve:

$$\mathrm{D}\underset{i}{A^a} = \underset{i+1}{A^a}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-2, \tag{12, 9a}$$

$$\mathrm{D}\underset{m-1}{A^a} = -\sum_{0}^{m-1}{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \underset{j}{A^a},$$

resp.

$$'\mathrm{D}\,'\underset{i}{A^a} = \mathrm{D}\,'\underset{i}{A^a} = '\underset{i+1}{A^a}, \tag{12, 9b}$$

$$'\mathrm{D}\,'\underset{m-1}{A^a} = \mathrm{D}\,'\underset{m-1}{A^a} = -\sum_{0}^{m-1}{}_j \binom{m}{j}\, 'a_{m-j}\, '\underset{j}{A^a}.$$

Démonstration. α) On tire de l'équation (12, 1) et de la seconde des relations (12, 4):

$$\sum_{0}^{m}{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \sum_{0}^{m-1}{}_k \underset{j}{A^k} \underset{k}{Y^a} = 0,$$

c'est l'équation qui est valable pour n'importe quels vecteurs $\underset{0}{Y^a}, \underset{1}{Y^a}, \ldots, \underset{m-1}{Y^a}$ linéairement indépendants de L_m.

Il en résulte:

$$\sum_{0}^{m}{}_j \binom{m}{j} a_{m-j} \underset{j}{A^k} = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (12, 5). L'indépendance de l'équation (12, 5) du choix $\underset{i}{Y^a}$ (de L_m) sera démontrée plus tard. (Voir δ).)

---

31) $\underset{m}{A^a}$ satisfait à (12, 5).

β) Le vecteur $'\underset{k}{A}^{\alpha}$ de L_m peut être exprimé comme suit:

$$'\underset{k}{A}^{\alpha} = \sum_{0}^{m-1}{}_{s}\, '\underset{k}{A}^{s}\, \underset{s}{Y}^{\alpha}, \quad k = 0, 1, \ldots, m; \tag{12, 10}$$

mais on a aussi d'après (12, 3):

$$'\underset{k}{A}^{\alpha} = \sum_{0}^{k}{}_{j}\, F^{i} \binom{k}{j} \overset{j}{\underset{k}{r}} \sum_{0}^{m-1}{}_{s}\, \underset{j}{A}^{s} Y^{\alpha}, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{12, 11}$$

Le rapprochement de (12, 10) et (12, 11) nous donne:

$$'\underset{k}{A}^{s} = \sum_{0}^{k}{}_{j}\, F^{i} \binom{k}{j} \overset{j}{\underset{k}{r}}\, \underset{j}{A}^{s}, \quad k = 0, 1, \ldots, m;$$

où, bien entendu, $\underset{m}{A}^{s}$ satisfait à (12, 5). L'équation (12, 6) est démontrée.

γ) La dérivée de l'équation (12, 4), en raison de (12, 7), est:

$$\mathrm{D}\underset{i}{A}^{\alpha} = \sum_{0}^{m-1}{}_{k} \left[\frac{\mathrm{d}\underset{i}{A}^{k}}{\mathrm{d}t} + \sum_{0}^{m-1}{}_{r}\, \underset{i}{A}^{r}\, \Psi_{r}{}^{k} \right] \underset{k}{Y}^{\alpha}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{12,12a}$$

Compte tenu de (12, 8), l'équation (12, 12a) peut être écrite

$$\mathrm{D}\underset{i}{A}^{\alpha} = \sum_{0}^{m-1}{}_{k}\, (\mathrm{D}\underset{i}{A}^{k})\, \underset{k}{Y}^{\alpha}. \tag{12, 12b}$$

En raison de la définition (5, 4) des vecteurs $\underset{i}{A}$ et de l'équation (12, 4) on trouve:

$$\mathrm{D}\underset{i}{A}^{\alpha} = \underset{i+1}{A}^{\alpha} = \sum_{0}^{m-1}{}_{k}\, \underset{i+1}{A}^{k}\, \underset{k}{Y}^{\alpha}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-2, \tag{12, 13a}$$

$$\mathrm{D}\underset{m-1}{A}^{\alpha} = \underset{m}{A}^{\alpha} = -\sum_{0}^{m-1}{}_{j,k} \binom{m}{j} a_{m-j}\, \underset{j}{A}^{k}\, \underset{k}{Y}^{\alpha}. \tag{12,13b}$$

Si nous comparons ces relations à (12, 12b), nous obtiendrons (12, 9a).

En partant de l'équation (12, 10) et posant:

$$\mathrm{D}\, '\underset{i}{A}^{a} = \frac{\mathrm{d}'\underset{i}{A}^{a}}{\mathrm{d}t} + \sum_{0}^{m-1}{}_{r}\, '\underset{i}{A}^{r}\, \Psi_{r}{}^{a} \tag{12, 14}$$

on déduit de la même manière les formules (12, 9b).

δ) Les m équations (12, 9a) étant linéairement indépendants on en peut calculer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$:

$$a_{m-j} = -\frac{1}{\text{Dét.}\, |\, \underset{i}{A}^{a} \,|}\, \text{Dét.}\, |\, \underset{0}{A}^{0} \underset{1}{A}^{0} \ldots \underset{j-1}{A}^{0}\, \mathrm{D}\, \underset{m-1}{A}^{0}\ \underset{j+1}{A}^{0} \ldots \underset{m-1}{A}^{0} \,| \tag{12, 15}$$

avec $j = 0, 1, \ldots, m-1$, où Dét. $|\, \underset{i}{A}^{a} \,|$ est le déterminant des composantes $\underset{i}{A^k}$. Les expressions (12, 15) sont invariantes par rapport à chaque transformation affine non dégénérée des vecteurs $\underset{i}{Y^a}$, c'est-à-dire les coefficients a_i ne dépendent pas du choix des vecteurs $\underset{i}{Y^a}$ (de L_m). Pour le faire voir, posons:

$$\underset{k}{\overline{\overline{Y}}^a} = \sum_{i=0}^{m-1} \underset{k}{\varrho^i}\, \underset{i}{Y^a}, \quad \text{où Dét. } |\underset{k}{\varrho^i}| \neq 0,$$

et désignons par $\overset{u}{\sigma_k}$ les valeurs définies par les relations:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \underset{b}{\varrho^k}\, \overset{u}{\sigma_k} = \sum_{k=0}^{m-1} \underset{k}{\varrho^u}\, \overset{k}{\sigma_b} = \delta^u_b.$$

Si l'on désigne par $\underset{i}{\overline{\overline{A}}^k}$ les composantes de $\underset{i}{A^a}$ par rapport au repère $\underset{k}{\overline{\overline{Y}}}$, on peut écrire:

$$\underset{i}{A^a} = \sum_{k=0}^{m-1} \underset{i}{\overline{\overline{A}}^k}\, \underset{k}{Y^a} = \sum_{k=0}^{m-1} \underset{i}{\overline{\overline{A}}^k} \sum_{i=0}^{m-1} \underset{k}{\varrho^i}\, \underset{i}{Y^a} = \sum_{k=0}^{m-1} \underset{i}{A^k}\, \underset{k}{Y^a},$$

d'où

$$\underset{i}{A^k} = \sum_{r=0}^{m-1} \underset{r}{\varrho^k}\, \underset{i}{\overline{\overline{A}}^r}.$$

En résolvant ces équations on trouve:

$$\underset{i}{\overline{\overline{A}}^u} = \sum_{k=0}^{m-1} \overset{u}{\sigma_k}\, \underset{i}{A^k}, \qquad \text{Dét. } |\overset{u}{\sigma_k}| \neq 0. \tag{12, 16}$$

L'équation (12, 15) écrite pour la valeur transformée $\overline{\overline{a}}_{m-j}$ nous donne à l'aide de (12, 16), (12, 9a) et (12, 15):

$$\overline{\overline{a}}_{m-j} = -\frac{1}{\text{Dét. } |\underset{i}{\overline{\overline{A}}^a}|}\, \text{Dét. } |\underset{0}{\overline{\overline{A}}^0}\, \underset{1}{\overline{\overline{A}}^0} \dots \underset{j-1}{\overline{\overline{A}}^0}\, \mathrm{D} \underset{m-1}{\overline{\overline{A}}^0}\, \underset{j+1}{\overline{\overline{A}}^0} \dots \underset{m-1}{\overline{\overline{A}}^0}| =$$

$$= -\frac{1}{\text{Dét. } |\overset{u}{\sigma_k}| \,.\, \text{Dét. } |\underset{i}{A^a}|} \,.\, \text{Dét. } |\overset{u}{\sigma_k}| \,.$$

$$.\, \text{Dét. } |\underset{0}{A^0}\, \underset{1}{A^0} \dots \underset{j-1}{A^0}\, \mathrm{D} \underset{m-1}{A^0}\, \underset{j+1}{A^0} \dots \underset{m-1}{A^0}| = a_{m-j}. \ \text{C. Q. F. D.}$$

Les équations (12, 5), (12, 6) et (12, 9) correspondent aux relations (5, 5), (5, 11) et (5, 4) resp. (5, 9) écrites pour $m = N + 1$, celles-ci ont été le point de départ des recherches aux paragraphes 6—11. On peut donc appliquer les méthodes utilisées dans ces paragraphes à l'étude $\underset{k}{A^a}$ en L_m et déduire les théorèmes analogues pour m général, aux théorèmes dessus cités pour $m = N + 1$. En voici les plus importants: