O rozkladu některých kolineací prostoru $2n$-rozměrného v produkt harmonických homologií.

Jan Srb, Olomouc.

(Došlo dne 9. února 1936.)

Všimneme-li si invariantních útvarů partikulárních kolineací r-rozměrného prostoru, je přímo patrno, že *kolineaci r-rozměrného prostoru typu* $[(0 \ldots 0)\, 0]$ (podle symboliky Predellovy), *v níž hyperbolická projektivnost indukovaná na samodružné přímce je involuční, je vždy možno rozložit v produkt r harmonických homologií.*

V kolineaci typu $[(0 \ldots 0)\, 0]$ soumístných r-rozměrných prostorů S_r a S'_r buďte body X a Y jediné hlavní prostory. Na samodružné přímce $y \equiv (XY)$ buď touto kolineací indukována hyperbolická involuce se samodružnými body X, Y a na samodružné přímce x jdoucí bodem X (různé od y) projektivnost parabolická se samodružným bodem X. Hlavní svazy kolineace jsou dvě samodružné nadroviny S_{r-1} a S'_{r-1} různé, z nichž nechť S_{r-1} obsahuje rovinu (xy) a S'_{r-1} jen přímku x. Obě nadroviny se tedy protínají v $(r-2)$ rozmerném prostoru S_{r-2}, který neobsahuje bod Y. V nadrovině S'_{r-2} zvolme dvě korespondující přímky a, a', jdoucí bodem X a nelezící v prostoru S_{r-2}. Řady korespondujících bodů těchto přímek mají společný bod X samodružný. Jsou proto perspektivní se středem perspektivnosti v prostoru S_{r-2}, který jako jediný samodružný prostor je zároveň basí hlavního svazu kolineace typu $[(0 \ldots 0)]$, indukované v nadrovině S'_{r-1}. Zvolme nyní osou harmonické homologie H_1 nadrovinu S_{r-1} a středem libovolný bod v rovině (a, a'), který odděluje střed perspektivnosti korespondujících řad na přímkách a, a' s oběma přímkami harmonicky. Tento bod nepadne jistě do osy S_{r-1}, s kterou tedy H_1 určuje. Leží totiž na spojnici dvou různých korespondujících bodů nadroviny S'_{r-1}, neobsažených v průsečném prostoru S_{r-2} obou nadrovin. Tato spojnice protíná prostor S_{r-2} a tedy také nadrovinu S_{r-1} v jediném bodě, který je středem perspektivnosti řad (a) a (a'). Bod s tímto středem harmonicky sdružený ke dvěma bodům různým s ním nesplývá a neleží tedy v nadrovině S_{r-1}.

Harmonickou homologií H_1 přejde prostor S'_r v soumístný $S_r^{(1)}$ kolineárný se soumístným S_r. Řada (a') přejde v řadu (a'') na přímce a, a protože osa harmonické homologie prochází středem perspektivnosti řad (a) a (a'), budou projektivní soumístné řady (a) a (a'') hyperbolicky involuční se samodružnými body X a Y_1 na a. Přímka y a prostor S_{r-2} leží v nadrovině S_{r-1}, jsou tedy při H_1 invariantní. Přímka a má s prostorem S_{r-2} jen bod X společný. Leží proto bod Y_1 v nadrovině S'_{r-1}, ne však v prostoru S_{r-2}, který tedy s body Y, Y_1 neleží v jedné nadrovině $(r - 1)$ rozměrné.

V samodružném prostoru S_{r-2} kolineace soumístných prostorů S_r a $S_r^{(1)}$ je touto indukována kolineace typu $[(0 \dots 0)]$. Base hlavního svazu splývá s jedinou samodružnou nadrovinou S_{r-3} prostoru S_{r-2}, obsahující bod X a přímku x. V prostoru S_{r-2} zvolme dvě v kolineaci prostorů S_r a $S_r^{(1)}$ (ale i S_r a S'_r) korespondující přímky a_1, a'_1, procházející bodem X, ale neležící v S_{r-3}. Osou harmonické homologie H_2 zvolme nadrovinu $S_{r-1}^{(2)}$, určenou prostorem S_{r-3} a body Y, Y_1, středem bod různý od X, který v rovině (a_1, a'_1) odděluje harmonicky tyto přímky a střed perspektivnosti řad bodů na nich korespondujících v kolineaci prostorů S_r a $S_r^{(1)}$. Tento střed nepadne do osy $S_{r-1}^{(2)}$. Z téhož důvodu jako při H_1 je v S_{r-2}, ale ne v S_{r-3}, a nadrovina $S_{r-1}^{(2)} \equiv (S_{r-3}, Y_1, Y)$ má s S_{r-2} jenom S_{r-3} společný. Jinak by totiž S_{r-2} v ní ležel celý a body Y, Y_1 by náležely s prostorem S_{r-2} téže nadrovině $(r - 1)$ rozměrné. Transformací H_2 přejde prostor $S_r^{(1)}$ v soumístný $S_r^{(2)}$ kolineárný se soumístným S_r. Přímka a'_1 přejde v a_1 a projektivní soumístné řady korespondujících bodů na a_1 budou hyperbolicky involuční, protože osa harmonické homologie prochází středem perspektivnosti řad na a_1 a a'_1 ležícím v S_{r-3}. Involuce na a_1 má samodružné body X a Y_2. Prostor S_{r-3} jakož i přímky XY a XY_1 leží v ose harmonické homologie H_2, jsou tedy při ní invariantní. Bod Y_2 leží v S_{r-2}, ale ne v S_{r-3}. Neleží tedy body Y, Y_1, Y_2 s prostorem S_{r-3} v žádné nadrovině $(r - 1)$ rozměrné.

Pokračujeme-li takto dále, bude po provedení $(r - 3)$ harmonické homologie H_{r-3} v kolineaci soumístných prostorů S_r a $S_r^{(r-3)}$ samodružný prostor S_2, jdoucí bodem X a přímkou x s indukovanou kolineací typu $[(00)]$ a $(r - 2)$ samodružných přímek, jdoucích bodem X s indukovanými hyperbolickými involucemi, s jedním samodružným bodem X společným a ostatními Y, $Y_1, \dots$ $\dots, Y_{r-3}$ takovými, že s rovinou S_2 nenáleží žádné nadrovině $(r - 1)$ rozměrné. V samodružné rovině S_2 zvolme dvě korespondující přímky a_{r-2}, a'_{r-2} procházející bodem X. Řady (a_{r-2}) a (a'_{r-2}) jsou perspektivní se středem perspektivnosti na přímce x. Osou $(r - 2)$. harmonické homologie H_{r-2} zvolme nadrovinu $S_{r-1}^{(r-2)}$, určenou body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-3}$ a samodružnou přímkou x, která protíná $(r - 2)$ rozměrný prostor určený těmito body a bodem X v X a v řečeném prostoru neleží. Středem zvolme bod v rovině S_2, různý od X takový, aby odděloval přímky a_{r-2} a a'_{r-2} se středem perspektivnosti řad na nich indukovaných, harmonicky. H_{r-2} je určena, protože její střed nepadne na osu. Osa totiž protíná rovinu S_2 v přímce x a střed leží na přímce, která tuto odděluje harmonicky s dvěma přímkami různými. Harmonickou homologií H_{r-2} přejde prostor $S_r^{(r-3)}$ v $S_r^{(r-2)}$ soumístný a kolineárný s S_r. Přímka a'_{r-2} přejde v a_{r-2} a řady na a_{r-2} budou z téhož důvodu jako nahoře involuční. Samodružné body této involuce jsou X a Y_{r-2} takové, že se samodružnými body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-3}$ tvoří skupinu bodů nezávislých a přímka x neleží v nadrovině jimi určené. Středem $(r - 1)$. harmonické homologie H_{r-1} zvolme samodružný bod X a osou libovolnou nadrovinu jednomocného svazku, jehož base je určena $r - 1$ nezávislými body $Y, Y_1, \ldots, Y_{r-2}$, neprocházející bodem X. Touto přejde prostor $S_r^{(r-2)}$ v soumístný $S_r^{(r-1)}$ kolineárný s S_r. Involuce na samodružných přímkách $XY, XY_1, \ldots, XY_{r-2}$ přejdou v řady samodružných bodů, tedy nadrovina určená body $X, Y, Y_1, \ldots, Y_{r-2}$ v nadrovinu samodružných bodů. Kolineace soumístných prostorů $S_r^{(r-1)}$ a S_r je tedy homologie. Protože střed harmonické homologie H_{r-1} byl zvolen v samodružném bodě X parabolické projektivnosti indukované kolineací prostorů $S_r^{(r-2)}$, a S_r na přímce x a osa protíná tuto přímku v bodě jiném, zbude x při H_{r-1} invariantní, parabolická projektivnost na ní však přejde v hyperbolickou involuci a homologie prostorů $S_r^{(r-1)}$ a S_r je harmonická.

Dále ukážeme, že *každou kolineaci 2n-rozměrného prostoru, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, lze rozložit v produkt harmonické homologie a kolineace typu* $[(0 \ldots 0)\, 0]$, *která indukuje na samodružné přímce řady hyperbolicky involuční.*

V kolineaci dvou soumístných prostorů r-rozměrných S_r a S'_r, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, buďte A, A' dva korespondující body, neležící v žádné samodružné nadrovině. $(r - 1)$-rozměrné trsy indukované v bodech A, A' vytvoří průsečíky sdružených přímek racionální normální křivku C^r r-rozměrného prostoru, procházející body A, A' a všemi samodružnými body kolineace. Křivce $C^r \equiv K'^r$ odpovídají v kolineaci dané a inversní dvě opět racionální normální křivky C'^r a K^r prostorů S'_r a S_r, nemající mimo hlavní body kolineace žádného společného bodu. Kdyby obě křivky měly nesamodružný bod $B \equiv C'$ společný, náležely by nezávislé body A, B, C a korespondující A', B', C' téže rovině a body A, A' by ležely v rovině samodružné proti předpokladu. Nebo by body B, B', C, C' ležely na přímce AA', která by byla, opět proti předpokladu, samodružnou. Bodové řady (C'^r) a (K^r)

jsou projektivní s řadou $(C^r) \equiv (K'^r)$, jsou tedy i spolu projektivní a přímky spojující korespondující body obou řad vytvoří racionální normální plochu V_2^{r-1}. Plocha je totiž vytvořena spojnicemi bodů dvou křivek r-tého stupně, korespondujících v biracionální korespondenci, s $r + 1$ body koincidence. Je tedy její stupeň $r + r - (r + 1) = r - 1$. Každá přímka tvořící této plochy leží v rovině, která promítá bod křivky $C^r \equiv K'^r$ z přímky AA'. Každá tvořící přímka protíná tedy přímku AA', ale tak, že žádné dvě ji neprotínají v témž bodě. Kdyby se dvě přímky tvořící na př. BC' a ED' protínaly v bodě F přímky AA', pak přímky EB, $B'E' \equiv CD$, $C'D'$, které jsou průsečnicemi tří rovin (ACD), $(A'B'E')$ a (BEF) prostoru S_3, stanoveného rovinami (ACA') a (ADA'), by se protínaly v jednom bodě X. Bod X by byl průsečík přímek EB a CD prostoru S_r a zároveň přímek korespondujících $E'B'$ a $C'D'$ prostoru S'_r, tedy bod samodružný ležící na všech třech normálních křivkách a každá z nich by měla s přímkou tři společné body. To je pro nezávislost libovolných $r + 1$ bodů křivky normální nemožné. Je tedy plocha, vytvořená spojnicemi korespondujících bodů obou křivek, racionální normální V_2^{r-1} a přímka AA' je její minimální řídicí křivkou. Tvořící přímky protínají proto přímku AA' v řadě (M) projektivní s řadami (C'^r) a (K^r), tedy také s $(C^r) \equiv (K'^r)$. Z podmínky pro stupeň minimální řídicí křivky, pro lichá r $1 \leqq \frac{1}{2}r - 1$, t. j. $r \geqq 3$, a pro sudá r $1 \leqq \frac{1}{2}r - 2$, t. j. $r \geqq 4$, plyne platnost řečeného pro všechna $r \geqq 3$.

Je-li nyní $r = 2n$ $(n \geqq 2)$, je korelace přiřazující bodům normální křivky C^{2n} její nadroviny oskulační polární, t. j. oskulační nadroviny této křivky jsou tečnými nadrovinami nadplochy incidenční $V^2{}_{2n-1}$. Obě oskulační nadroviny S_{2n-1} a S'_{2n-1} v bodech A, A' křivky C^{2n} se protnou v $(2n - 2)$ rozměrném prostoru S_{2n-2}, který nemá s křivkou společného bodu. Nadroviny jednomocného svazku s basí S_{2n-2}, určené body řady (M), vytínají tedy na C^{2n} $2n$-bodové skupiny involuce $I^1{}_{2n}$, která s řadou (C^{2n}) $[(C^{2n}) \barwedge (M)]$ tvoří na C^{2n} algebraickou příbuznost $(1, 2n)$. Tato má podle korespondenčního principu $2n + 1$ bodů incidence, tedy alespoň jeden reálný B, který nepadne ani do A ani do A'. V trsu A' odpovídá totiž přímce AN $(N \equiv A')$ tečna $A'N'$ křivky C^{2n} v bodě A'. Tedy bodu $A' \equiv N$ řady (C^{2n}) odpovídá přímka AN' normální plochy $V_2{}^{2n-1}$, t. j. bodu $A' \equiv N$ řady (C^{2n}) bod A řady (M). Odpovídá tedy oskulační rovina křivky C^{2n} v bodě A ve svazku S_{2n-2} bodu A' řady (C^{2n}) a naopak. Bod B je možno sestrojit jako průsečík dvou normálních křivek C^{2n} a ${}^1C^{2n}$. Promítneme-li na př. z bodu A křivky C^{2n} řadu (C^{2n}) na této kuželem $K_2{}^{2n-1}$, protínají korespondující nadroviny svazku S_{2n-2} přímky tohoto kužele v normální křivce ${}^1C^{2n}$. Obecná nadrovina $2n$-rozměrného prostoru protne totiž kužel $K_2{}^{2n-1}$ v normální křivce C^{2n-1} této nadroviny.

Jednomocný svazek nadrovin pak protne tuto nadrovinu v jednomocném svazku prostorů $(2n - 2)$-rozměrných. Korespondence $(1, 2n - 1)$ na křivce C^{2n-1}, vytvořená průsečíky $(2n - 2)$-rozměrných prostorů svazku a body na korespondujících přímkách kužele K_2^{2n-1}, má $2n - 1 + 1 = 2n$ bodů incidence, jež jsou průsečíky variety, vytvořené řečenými svazky s obecnou nadrovinou. Průsečík křivek C^{2n} a ${}^1C^{2n}$, a podle dřívějšího je vždy alespoň jeden reálný, je hledaný bod B. Sestrojíme-li nyní v bodě B oskulační nadrovinu křivky C^{2n}, protne tato přímku AA' v bodě, který odděluje harmonicky body A, A' a bod korespondující v řadě (M) bodu B řady (C^{2n}).

V harmonické homologii $2n$-rozměrného prostoru buď osou oskulační nadrovina křivky C^{2n} v bodě B, středem bod M řady (M) korespondující bodu B řady (C^{2n}). Touto přejde prostor S'_{2n} v soumístný S_{2n}^1 kolineárný se soumístným S_{2n}. Bod A' přejde v bod $A_1 \equiv A$ a přímka $a' \equiv A'B$ v $a_1 \equiv A_1B \equiv AB$. Jsou tedy v kolineaci prostorů S_{2n} a S^1_{2n} přímka AB a bod A samodružné. Není-li bod B samodružný v kolineaci dané, tedy $B \equiv D'$, korespondují mu na přímce AB bod D prostoru S_{2n} a na $A'B$ bod B' prostoru S'_{2n}. Jejich spojnice je podle předešlého přímka plochy V^2_{2n-1} procházející bodem M. Harmonickou homologií přejde proto bod B' v $B_1 \equiv D$. Na samodružné přímce a kolineace prostorů S_{2n} a S_{2n}^1 je $B_1 \equiv D$ a $B \equiv D_1$ dvojina bodů obapolně si odpovídajících a projektivnost na ní indukovaná je tedy involuční s jedním reálným bodem samodružným A a druhým od něho rozdílným E. Řadu (M) na AA' můžeme také sestrojiti jinak. V každé rovině $(A, A', C \equiv D')$ obalují spojnice v dané kolineaci korespondujících bodů na přímkách AC, $A'C'$ kuželosečku. Je-li společný bod $C \equiv D'$ obou řad nesamodružný, je kuželosečka pravá a body C', D jsou dotyčné na přímkách $A'C'$ a AC. Je-li $S \equiv (A'D \times AC')$, je $M' \equiv (CS \times AA')$ dotyčný bod kuželosečky na AA' a pro $M \equiv$ $\equiv (C'D \times AA')$, jest $(MM'AA') = -1$. Je-li nyní bod B samodružný, degeneruje kuželosečka ve svazek přímek, jehož střed M' na AA' je středem perspektivnosti korespondujících řad na přímkách AB a $A'B$. Koresponduje tedy samodružnému bodu řady (C^{2n}) v řadě (M) bod, který odděluje harmonicky body A, A' s bodem, ve kterém protne přímka AA' basi hlavního svazu přidruženého tomuto samodružnému bodu. Padne-li tedy bod B řady (C^{2n}) do bodu samodružného dané kolineace, prochází nadrovina oskulační křivky C^{2n} v tomto bodě středem perspektivnosti řad na AB, $A'B'$ a tedy také v tomto případě indukuje kolineace prostorů S_{2n} a S^1_{2n} na přímce a hyperbolickou involuci.

V kolineaci prostorů S_{2n} a S_{2n}^1 neprochází bodem A mimo přímku a žádná samodružná přímka, protože osa harmonické homologie je oskulační nadrovina v bodě B křivky C^{2n}, vytvořené průsečíky sdružených paprsků trsů indukovaných kolineací prostorů S_{2n} a S'_{2n} v bodech A, A', tedy mimo AB a $A'B$ se žádné dva sdružené paprsky těchto trsů na ose neprotínají. Ještě alespoň jedna existující reálná přímka samodružná b musí proto procházet bodem E. Projektivnost indukovaná na přímce b je parabolická se samodružným bodem E. Kdyby nebyla, existoval by na ní ještě jeden reálný samodružný bod jiný než E (neležící na a) a spojnice tohoto s bodem A by byla samodružná přímka (různá od a) procházející bodem A. Mimo obě přímky a, b nemůže bodem E procházet jiná přímka samodružná. Kdyby procházela a byla reálná, pak by podle předešlého projektivnost na ní indukovaná byla parabolická se samodružným bodem E. Kolineace indukovaná v samodružné rovině, určené touto přímkou a b, byla by typu [(00)] a bodem E by procházela řada invariantních bodů. Kdyby byla imaginární, byla by spojnicí bodu E s imaginárním samodružným bodem neležícím na a. Pak by však spojnice tohoto bodu s A byla druhá samodružná přímka procházející bodem A. Je proto kolineace prostorů S_{2n} a $S_{2n}{}^1$ typu [(0 . . . 0) 0] s hyperbolickou involucí indukovanou na samodružné přímce a kolineace daná je produktem jejím a harmonické homologie.

Je-li $r = 2n + 1$ $(n \geqq 1)$, je korelace, přidružující bodům křivky normální nadroviny oskulační, nulová. Sestrojíme-li z bodů řady (M') takové, že $(M'MAA') = -1$ nadroviny oskulační k normální křivce C^{2n+1}, určují skupiny $2n + 1$ bodů dotyčných na této křivce involuci I^1_{2n+1}, jež s řadou $(C^{2n+1}) \overline{\wedge} M \overline{\wedge} M'$ vytvoří příbuznost $(1, 2n + 1)$ s $2n + 2$ body incidence. Je-li některý z těchto bodů reálný, je možno stejným způsobem jako pro $r = 2n$ rozložit danou kolineaci v produkt harmonické homologie a kolineace typu [(0 . . . 0) 0] s hyperbolickou involucí na samodružné přímce.

Protože každou kolineaci $2n$-rozměrného prostoru $(n > 1)$ jejíž hlavní prostory jsou pouze body, je možno rozložit v produkt harmonické homologie a kolineace, která je produktem $2n$-harmonických homologií, je tato kolineace produktem $2n + 1$-harmonických homologií. V článku „O rozkladu rovinných kolineací"*) jsem ukázal, že rozklad je možný také pro $n = 1$. Je tím tedy dokázáno, že

každou kolineaci $2n$-rozměrného prostoru, jejíž hlavní prostory jsou pouze body, lze rozložit v produkt $2n + 1$ harmonických homologií.

*

*) Časopis **65** (1936), str. 77.