Théorèmes d'existence pour les caractères des points.

Par **Bedřich Pospíšil**, Brno.

(Reçu le 12 mai 1937.)

Dédié à la Mémoire de Miroslav Konečný.

Introduction.

Nos espaces satisferont à l'axiome A de M. Hausdorff[1]) sans satisfaire en général aux autres. Les petits types allemands désigneront des puissances infinies; j'écris $\exp \mathfrak{x} = 2^{\mathfrak{x}}$. Désignons encore par $\mathfrak{p}(M)$ la puissance de l'ensemble M.

Sous le nom de (i) *caractère* $\chi_E(S)$ ou (ii) *pseudocaractère* $\psi_E(S)$ ou (iii) *quasicaractère* $\omega_E(S)$ resp. du sous-ensemble S de l'espace E on entend[2]) la plus petite puissance d'un système (i) complet ou (ii) pseudocomplet ou (iii) quasicomplet resp. d'entourages de S dans l'espace E, c'est à dire d'un tel système $\mathfrak{U}$ que, si l'on désigne par C la partie commune de tous les $U \in \mathfrak{U}$, on a toujours. pour un entourage G quelconque de S dans l'espace E, (i) $U \subset G$, U étant un élément de $\mathfrak{U}$ qui dépend de G ou (ii) $C \subset G$ ou (iii) $G - C \neq 0$ resp. De plus, la relation $\omega_E(S) = 1$ veut dire qu'il n'y a pas de tels systèmes quasicomplets $\mathfrak{U}$.

Dorénavant, le symbole I (muni d'indices éventuellement) désigne toujours un espace non isolé satisfaisant aux axiomes A, B, C, D de Hausdorff[1]) ne contenant qu'un seul point qui ne soit pas isolé; ce point sera désigné toujours par le symbole ∞ muni des mêmes indices que l'est I. De plus, j'écris $\chi(\infty)$, $\psi(\infty)$, $\omega(\infty)$ resp. au lieu de $\chi_I(\infty)$, $\psi_I(\infty)$, $\omega_I(\infty)$ resp., supposé que les symboles I et ∞ soient munis des mêmes indices.

A tout espace I faisons correspondre un espace N (le symbole N ayant les mêmes indices que I) dont les points seront les suites finies $p = \{p^1, p^2, \ldots, p^n\}$ avec $p^k \in I - (\infty)$; posons $n = \lambda p$.

---

1) Grundzüge der Mengenlehre, p. 213.

2) Alexandroff-Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen d. konink. Akademie von Wetenschappen te Amsterdam, Deel XIV, No. 1, Sectie I.

Soit U_p l'ensemble de tous les $q = \{q^1, q^2, \ldots, q^n, \ldots\} \epsilon N$ avec $\lambda q \geqq \lambda p$ et $q^k = p^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, \lambda p$. Les entourages (définissants) du point p dans l'espace N seront les ensembles $O_p = U_p - \sum_x U_x$ avec $x \epsilon U_p - (p)$, $\lambda x = \lambda p + 1$ et $x^{\lambda x}$ parcourant un ensemble $X \subset I$ tel que $O = I - X$ est un entourage de ∞ dans I. Un tel O_p est déterminé par p et O.

Lorsque (i) les caratères ou (ii) les pseudocaratères ou (iii) les quasicaratères resp. de tous les points d'un espace E sont égaux l'un à l'autre, leur valeur commune sera désignée par (i) $\chi_0(E)$ ou (ii) $\psi_0(E)$ ou (iii) $\omega_0(E)$ resp.

0.1. *L'espace N est un espace complètement normal de dimension 0; de plus,* $\mathfrak{p}(N) = \mathfrak{p}(I)$, $\chi_0(N) = \chi(\infty)$, $\psi_0(N) = \psi(\infty)$, $\omega_0(N) = \omega(\infty)$.

Les axiomes A, B, C, D ainsi que nos égalités pour N étant faciles à vérifier, on n'a qu'à prouver la normalité complète de N. Car on voit sans peine que les entourages définissants dans N sont tous ouverts et fermés en même temps; c'est alors que N est un espace de dimension 0. Les sous-ensembles F_1 et F_2 de N soient séparés. Il existe alors, pour tout point p de F_i, un entourage (définissant) O_p disjoint de F_j, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$; $i \neq j$. Soit $G_i = \sum_p O_p$ où p parcourt F_i. La démonstration de la relation désirée $G_1 G_2 = \emptyset$ se réduit à prouver que $O_p O_q = \emptyset$ pour $p \epsilon F_1$, $q \epsilon F_2$ ce qui est bien facile.

0.2. *L'espace I étant du type L de M. Fréchet, l'espace N l'est également.*

Le point p de $N - M$ soit contenu dans la fermeture dans N de l'ensemble $M \subset N$. Alors $M U_p \neq \emptyset$ et $\lambda m > \lambda p$ pour $m \epsilon M U_p$. Soit M^s l'ensemble de tous les m^s avec $m \epsilon U_p \,.\, M$, $s = \lambda p + 1$. Alors, la fermeture dans I de l'ensemble M^s contient le point ∞. Par hypothèse, M^s contient une suite infinie dénombrable π_r qui converge vers ∞. Soit $p_r \epsilon M U_p$, $p_r^s = \pi_r$; alors, $p_r \to p$, c. q. f. d..

Désignons par $I_1 (\times) I_2 (\times) \ldots (\times) I_n$ l'espace I_0 que je vais définir. Cet espace se compose de deux parties disjointes, l'une ne contenant que le point ∞_0 et l'autre dont les éléments sont les suites finies $\{x_1, x_2, \ldots\}$ avec $x_k \epsilon I_k - (\infty_k)$. Les entourages (définissants) de ∞_0 dans l'espace I_0 seront les ensembles $O_1 (\times) O_2 (\times) \ldots (\times) O_n$ qui se composent de ∞_0 ainsi que de tous les $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, où x_k parcourt un entourage O_k de ∞_k dans I_k donné d'avance. On prouve sans peine le lemme suivant.

0.3. *Lorsque* $I_0 = I_1 (\times) I_2 (\times) \ldots (\times) I_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *on a* $\mathfrak{p}(I_0) = \max_k \mathfrak{p}(I_k)$, $\chi(\infty_0) = \max_k \chi(\infty_k)$, $\psi(\infty_0) = \min_k \psi(\infty_k)$, $\omega(\infty_0) = \min_k \omega(\infty_k)$.

Dorénavant, l'espace $I_0 = I_1 (+) I_2 (+) \ldots (+) I_n$ se composera du point ∞_0 ainsi que de tous les couples ordonnés $\{x, k\}$ avec $x \in I_k - (\infty_k)$; O_k parcourant les entourages (définissants) du point ∞_k dans l'espace I_k, les ensembles-sommes $(\infty_0) + \sum_k \{O_k - - (\infty_k)\} = O_1 (+) O_2 (+) \ldots (+) O_n$ parcourront les entourages (définissants) du point ∞_0 dans l'espace I_0. On tire immédiatement les deux lemmes qui suivent.

0.4. *Soit* $I_0 = I_1 (+) I_2 (+) \ldots (+) I_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; *on a*

$$\mathfrak{p}(I_0) = \max_k \mathfrak{p}(I_k), \quad \chi(\infty_0) = \max_k \chi(\infty_k), \quad \psi(\infty_0) = \max_k \psi(\infty_k),$$
$$\omega(\infty_0) = \min_k \omega(\infty_k).$$

0.5. *Les espaces I_k étant du type L de Fréchet, il en est de même de l'espace $I_1 (+) I_2 (+) \ldots (+) I_n$.*

Dorénavant, l'espace $I^0 = I(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ avec $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{u}$ sera la somme de trois ensembles disjoints (∞^0), U, W avec $\mathfrak{p}(U) = \mathfrak{u}$, $\mathfrak{p}(W) = \mathfrak{w}$. Les ensembles $I^0 - K - W$ avec $K \subset U$, $\mathfrak{p}(K) < \mathfrak{v}$ parcourront les entourages définissants du point ∞^0 dans I^0. Le couple $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ est dit *régulier*, lorsque, ou bien ses alephs sont réguliers tous les deux, ou bien $\mathfrak{v}$ est régulier et $\mathfrak{v} < \mathfrak{u}$. Je désigne encore par $(\mathfrak{u}/\mathfrak{v})$ le nombre de tous les sous-ensembles de puissance $< \mathfrak{v}$ d'un ensemble de puissance $\mathfrak{u}$. Le lemme suivant est bien facile à prouver.

0.6. *Soit* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ *un couple régulier*, $\mathfrak{v} \leq \mathfrak{u}$; *soit* $I^0 = I(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. *Alors, on a* $\mathfrak{p}(I^0) = \max(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$, $\mathfrak{u} \leq \chi(\infty^0) \leq (\mathfrak{u}/\mathfrak{v})$, $\psi(\infty^0) = \mathfrak{u}$, $\omega(\infty^0) = \mathfrak{v}$.

0.7. *Soit* $I_k = I(\mathfrak{u}_k, \aleph_0, \mathfrak{w}_k)$, $I_0 = I_1 (\times) I_2 (\times) \ldots (\times) I_n$, $k = = 1, 2, \ldots, n$. *Alors,* I_0 *est un espace L de Fréchet avec* $\mathfrak{p}(I_0) = = \max_k (\mathfrak{u}_k \mathfrak{w}_k)$, $\chi(\infty_0) = \max_k \mathfrak{u}_k$, $\psi(\infty_0) = \min_k \mathfrak{u}_k$, $\omega(\infty_0) = \aleph_0$.

En effet, le point ∞_0 soit contenu dans la fermeture dans I_0 d'un ensemble $M \subset I_0 - (\infty_0)$. Soit O_0 un entourage définissant quelconque de ∞_0 dans I_0. Admettons que l'on ait déjà défini les points $p_1, p_2, \ldots, p_r$ de MO_0. Soit O_k un entourage de ∞_k dans I_k qui ne contient aucun point $p_{k\nu}$ avec $\nu = 1, 2, \ldots, r$ où $p = \{p_{1\nu}, p_{2\nu}, \ldots, p_{n\nu}\}$, $p_{k\nu} \in I_k$. Soit $p_{r+1} \in MO_0 (O_1 (\times) O_2 (\times) \ldots (\times) O_n)$. On a $p_r \to \infty_0$, c. q. f. d.

* * *

I. Dans tout espace qui satisfait à l'axiome B de Hausdorff, les χ et les ψ sont $= 1$ ou infinis. Dans un espace de puissance $\mathfrak{x}$, tous les χ sont $\leq \exp \mathfrak{x}$. Si tous les points de cet espace sont fermés, on a de plus $\psi \leqq \mathfrak{x}$. On a toujours $\omega \leqq \psi \leqq \chi$. Cherchons à trouver les cas qui sont vraiment possibles pour les espaces aux points fermés assujettis à l'axiome B. La lettre N, munie d'indices eventuellement, désigne toujours un espace complètement normal de dimension 0.

1. *Soit* $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$, $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{h}$. *Alors, il existe un espace* N^1 *de puissance* $\mathfrak{h}$ *et tel que* $\chi_0(N^1) = \mathfrak{a}$, $\psi_0(N^1) = \mathfrak{z}$.

En effet, pour $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{z} = \aleph_0$, on n'a qu'à poser $N^1 = N$ où I est l'espace du dernier théorème de mon article cité ci-dessous.[3]) En général, soit $I_1 = I(\mathfrak{z}, \aleph_0, \mathfrak{h})$, $I_2 = I(\min(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}), \aleph_0, \mathfrak{h})$. Pour $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{h}$ resp., je pose $I^1 = I_0 (+) \{I_1 (\times) I_2\}$ avec $I_0 = I$ ou $I_0 = I''$ resp. où I'' est un espace défini de la même façon que I où l'on a remplacé $\mathfrak{h}$ par le plus petit aleph $\mathfrak{h}''$ pour lequel on peut avoir $\chi(\infty'') = \mathfrak{a}$.

Chaque système complet d'entourages du point p dans l'espace E contient un sous-système complet de puissance $\chi_E(p)$; il n'en est pas ainsi des systèmes pseudocomplets. En effet, soit $\mathfrak{z} < \mathfrak{h}$. Dans les notations de la définition qui suit le lemme 0.5, soit $Z(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ le système de tous les $I^0 - K - (w)$ avec $w \in Z \subset W$. Soit $\mathfrak{O}_0$ un système pseudocomplet dénombrable de ∞_0 dans l'espace I_0. Soit $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}$, $\mathfrak{v} = \aleph_0$, $\mathfrak{w} = \mathfrak{h}$. L'ensemble Z soit choisi de façon que sa puissance $\mathfrak{x}$ soit $> \mathfrak{z}$. Le système de tous les $O_0 (+) \{O_1 (\times) I_2\}$ avec $O_0 \in \mathfrak{O}_0$, $O_1 \in Z(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ est un système pseudocomplet d'entourages de ∞^1 dans l'espace I^1. Mais, évidemment, il ne contient aucun système pseudocomplet de puissance $\mathfrak{z}$. On en tire la propriété suivante de l'espace:

Soit $\mathfrak{z} < \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{h}$. *Pour tout point* p *de* N^1, *il existe un système pseudocomplet d'entourages dans* N^1 *du point* p *qui ne contient aucun sous-système pseudocomplet de puissance* $\mathfrak{z} = \psi_0(N^1)$.

L'hypothèse que $\mathfrak{z} < \mathfrak{h}$ est essentielle. En effet, soit E un espace aux points fermés, $\mathfrak{p}(E) = \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{O}$ un système pseudocomplet d'entourages de p dans E. A chaque $e \in E - (p)$, faisons correspondre un $O_e \in \mathfrak{O}$ avec $e \in E - O_e$. Les O_e parcourent un système pseudocomplet de puissance $\leqq \mathfrak{h}$ d'entourages de p dans E.

Si l'on se borne à l'étude des espaces où les caractères des points ne surpassent pas la puissance de l'espace, on peut supprimer I_0 dans la définition de I^1 et I'_0 dans celle de $I^{(1)}$, c'est à dire, on considère $I_1 (\times) I_2$ au lieu de I^1 etc. Toutes les propositions données plus haut restent vraies dans ce domaine d'espaces et, de plus, tous les espaces en question sont du type L de Fréchet en vertu du lemme 0.7. Notre espace N^1 du théorème 1 contient toujours un tel espace du type L ayant la puissance, les caractères et pseudo-

[3]) Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée, Časopis **67** (1938), 89—96.

caractères des points donnés (d'une façon quelconque admissible a priori) et qui contient un sous-ensemble fini quelconque de N^1 donné d'avance.

II. La fermeture dans l'espace E d'un M sera désignée par $\overline{M}$. Soit $M \subset E$; je désigne par M^* l'ensemble-somme des fermetures $\overline{m}$ dans E de tous les (m) avec $m \in M$.

2. *Soit E un espace qui satisfait à l'axiome C de Hausdorff; soit $A \subset E$, $M \subset E$, $AM^* = \emptyset$, $A\overline{M} \neq \emptyset$. Alors, on a $\omega_E(A) \leqq \mathfrak{p}(M)$. Alors, E étant du type L, on a $\omega_E(A) \leqq \aleph_0$.*

En effet, $E - M^*$ est la partie commune des entourages $E - \overline{m}$ $(m \in M)$ de A en nombre $\leqq \mathfrak{p}(M)$. Si l'on avait un U ouvert avec $A \subset U \subset E - M^*$, on aurait $M^* \subset E - U$, alors $\overline{M} = \overline{M^*} \subset \subset \overline{E - U} = E - U \subset E - A$, d'où l'on tire la relation impossible $A\overline{M} = \emptyset$.

3. *Lorsque l'espace E satisfait à l'axiome B de Hausdorff, chaque quasicaractère $\omega_E(A)$ est ou bien $= 1$ ou bien un aleph régulier.*

Cela résulte du fait que je vais prouver, que, dans tout espace, les quasicaractères infinis sont réguliers. Pour le prouver, soit $\mathfrak{U}$ un système quasicomplet d'entourages de l'ensemble A dans l'espace E; $\mathfrak{p}(\mathfrak{U}) = \omega_E(A) = \mathfrak{o}$. Si $\mathfrak{o}$ était irrégulier, il y aurait de tels $\mathfrak{U}_\iota \subset \mathfrak{U}$ en un nombre $< \mathfrak{o}$ que $\mathfrak{U} = \sum\limits_\iota \mathfrak{U}_\iota$ et que $\mathfrak{p}(\mathfrak{U}_\iota) < \mathfrak{o}$. Alors, par définition de $\mathfrak{o}$, l'ensemble ΠV $(V \in \mathfrak{U}_\iota)$ contiendrait un entourage U_ι de A dans E. De même, $\prod\limits_\iota U_\iota$ contiendrait un entourage U de A dans E qui serait un sous-ensemble de ΠV $(V \in \mathfrak{U})$ ce qui contredit à l'hypothèse que l'on a faite sur $\mathfrak{U}$.

D'autre part, tout aleph régulier peut être un $\omega_E(p)$:

4. *Soit $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}$ et $\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}$ deux couples réguliers, $\mathfrak{v} \leqq \mathfrak{u}_2 \leqq \mathfrak{u}_1 \leqq \mathfrak{w}$. Dans ces hypothèses, il existe un espace N^4 de puissance $\mathfrak{w}$ avec $\mathfrak{u}_1 \leqq \chi(N^4) \leqq (\mathfrak{u}_1/\mathfrak{v})$, $\psi(N^4) = \mathfrak{u}_2$, $\omega(N^4) = \mathfrak{v}$.*

En effet, on peut poser $I^4 = I(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) (\times) I(\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$.

Les caractères et les pseudocaractères dans un sous-espace ne peuvent pas surpasser ceux dans l'espace tout entier. Une proposition analogue pour les quasicaractères serait en défaut:

5. *Soit $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$, $\mathfrak{m} > \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$. Lorsque les alephs $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont réguliers, il existe un espace N^5 de puissance $\mathfrak{m}$ avec $\omega_0(N^5) = \mathfrak{m}$ et tel que, pour tout $\mathfrak{m}'$ $[\mathfrak{q} < \mathfrak{m}' \leqq \mathfrak{m}]$ et tout sous-ensemble fini F de N^5, il existe un sous-espace Q de N^5 avec $\mathfrak{p}(Q) = \mathfrak{m}'$, $\omega_0(Q) = \mathfrak{q}$, $F \subset Q$.*

En effet, soit $I^5 = I(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}) (\times) I(\mathfrak{m}, \mathfrak{q}, \mathfrak{m})$. On n'a qu'à poser $Q = N^V$, I^V étant un sous-espace de I^5 homéomorphe à