

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0067|log53

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 67.

SEŠIT 3.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ,
V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER, K. RYCHLÍK,
J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, ST. TEPLÝ, FRANT.
VYČICHLO, AL. WANGLER, FR. ZÁVIŠKA,
AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1938

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.

Abonnement pour un an 120 Kč.

Chèques postaux: Praha 13103.

Année 67

Fascicule 3

1987/88

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická — Travaux mathématiques

- R. L. Wilder, Ann Arbor, Mich.: Sets which satisfy certain avoidability conditions — Množiny, na nichž se lze vyhnouti danému bodu 185
- K. Mack, Praha I, Husova 5: Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schliessungsaufgabe — O konfiguraci rovnoběžníků při úplném čtyřstranu 199
- Jan Šrb, reálka, Olomouc: Několik konstrukcí kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru ze 14 bodů — Quelques constructions de l'hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions, déterminée par quatorze points 203
- Vladimír Kořínek, Praha II, U Karlova 3: Correction concernant l'article: „Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes“, publié dans ce Journal t. 66, p. 261—286 — Oprava k článku „Sur...“, otištěnému v tomto časopise, roč. 66, str. 261—286 209

Část fyzikální — Travaux de physique

- J. Bačkovský - V. Dolejšek, Praha II, U Karlova 5: O rozlišovací mohutnosti paprsků X na plasticky deformovaných krystalech a o emisní době při vzniku $K\alpha$ mědi a molybdenu — The resolving power on the plastically deformed rocksalt crystals and the time of emission of the lines $Cu K\alpha$ and $Mo K\alpha$... 211
- Arnošt Dittrich, Třeboň: Délka dne v babylonských tabulkách měsíčních — La longueur du jour dans les tables lunaires des Babyloniens 216
- Zdeněk Horák, Praha II, Karlovo nám. 14: Určení radiantu roje z pozorovaných stop meteorů — Sur la détermination du radiant d'un courant météorique observé 222

ČÁST MATEMATICKÁ

Sets which satisfy certain avoidability conditions.*)

R. L. Wilder, Ann Arbor, Mich.

(Received September 8, 1937.)

In a recent paper¹⁾ I have made use of certain avoidability conditions in order to define a type of generalized closed manifold. These conditions are repeated in Definitions I and II below, and together with other types of avoidability introduced in the subsequent definitions, are employed in the present paper to obtain further results concerning the relations of closed sets to their complements in euclidean n -space.

We precede the applications by a determination of the logical relationships between the various definitions in certain special types of closed sets. This is done not only with a view to settling these relations once and for all for the sake of subsequent developments and abbreviation of proofs, but because many results may be seen, later on, to hold for alternative choices of the types of avoidability used in the hypotheses of theorems. Where the latter is the case, we have sometimes explicitly pointed out the fact; where we have not done so, it is left to the reader to observe that such is the case.

In the following definitions, M denotes a metric space, and P a point of M .

Definition I. M is *completely i -avoidable at P* if for every $\varepsilon > 0$ there exist δ and η such that $\varepsilon > \delta > \eta > 0$ and every i -cycle of $F(P, \delta)$ bounds on $S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)$.

Definition II. M is *locally i -avoidable at P* if for every $\varepsilon > 0$ there exist δ and η such that $\varepsilon > \delta > \eta > 0$ and every i -cycle of $F(P, \delta)$ bounds on $M - S(P, \eta)$.

Definition III. M is *i -avoidable at P* if for every $\varepsilon > 0$ there

*) Presented to the American Mathematical Society, Nov. 25, 1935.

¹⁾ *Generalized closed manifolds in n -space*, *Annals of Math.* **85** (1934), pp. 876—903; to be referred to hereafter as G. C. M. (For other definitions of generalized manifolds the reader is referred to recent works of Čech, Lefschetz, Alexandroff and Pontrjagin.)

exists a $\delta > 0$ such that $\varepsilon > \delta$ and every i -cycle of $F(P, \varepsilon)$ bounds on $M - S(P, \delta)$.

Definition IV.²⁾ P is a *non- i -cut-point* of M if every i -cycle of $M - P$ bounds on $M - P$.

Definition V. P is a *local non- i -cut-point* of M if for every $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that every i -cycle of $S(P, \delta) - P$ bounds on $S(P, \varepsilon) - P$.

In establishing the relations between these definitions, we shall use the following conventions concerning symbols: The symbol $\supset$ will mean „implies“; ³⁾ the symbol $\text{non } \supset$ means „does not imply“. Thus, $I \supset II$ will mean that the property (of a space M under consideration) of being completely i -avoidable (for any i) at P implies that M is locally i -avoidable at P . For the sake of brevity, we shall also use the symbol $>$ as indicated in the following example: $I > II$ means that $I \supset II$ and that $II \text{ non } \supset I$. Finally, $I \equiv II$ means $I \supset II$ and $II \supset I$. If no implication relates two or more definitions, we state simply that they are independent.

Lemma A. In a compact (or any more general) metric space,

(a) $I > II$; $III > II$; I and III are independent.

(b) IV is independent of I , II , III and V

(c) V is independent of I , II , III and IV .

Proof of (a). That $I \supset II$ and $III \supset II$ is obvious. That $II \text{ non } \supset I$ is shown by the

Example α_1 : The euclidean n -sphere with $i = n - 1$. That $II \text{ non } \supset III$ is shown by the

Example α_2 : The set of points (x, y, z) of cartesian 3-space such that $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, and the set such that $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, with $P = (0, 0, 0)$, $\varepsilon = 2$ and $i = 1$.

That $I \text{ non } \supset III$ is shown by Example α_2 , and that $III \text{ non } \supset I$ is shown by Example α_1 .

Proof of (b). That $IV \text{ non } \supset II$ is shown by the

Example α_3 : The set of points (ϱ, Θ) of the polar coordinate plane such that (1) $\Theta = \pi/4^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $0 \leq \varrho \leq 1$; (2) $\Theta = 0$, $0 \leq \varrho \leq 1$; (3) $\varrho = \tan \Theta$, $0 \leq \Theta \leq \pi/4$; (4) any arc joining the point $P = (0, 0)$ to $(1, \pi/4)$, but otherwise not containing any of the points defined in (1)–(3); with $i = 0$.

²⁾ In this definition we do not restrict the notion to simply i -connected spaces. Although for $i = 0$ this restriction has customarily been made in the theory of sets of points, we deem it inadvisable in the case $i > 0$. (See Example α_4 below for instance.)

³⁾ That $\supset$ and $>$ are also used in another sense below (the former as a set-theoretic symbol and the latter as a symbol for numerical magnitude) should occasion no difficulty, the meanings of symbols between which these binary relations are used being sufficient to indicate the correct meaning in each case.

Consequently, by (a), $IV \text{ non } \supset I$, $IV \text{ non } \supset III$. That $IV \text{ non } \supset V$ follows from Example α_1 .

That $I \text{ non } \supset IV$ is shown by Example α_2 . That $III \text{ non } \supset IV$ follows from the trivial fact that III may be satisfied for every $\varepsilon > 0$, and yet $M - P$ contain a cycle non-bounding on $M - P$ which lies on no $F(P, \varepsilon)$; thus, with the usual euclidean metric, in the

Example α_4 : The set of points (x, y) of the cartesian plane such that $x^2 + y^2 = 1$, and the points $1 < x \leq 2$, $y = 0$, with $P = (2, 0)$ and $i = 1$.

That $II \text{ non } \supset IV$ now follows from (a). Finally, $V \text{ non } \supset IV$; for instance, consider a space which is the sum of two closed mutually exclusive subsets A and B , where A satisfies V at a point P , and B contains a cycle which is unbounding in the space.

Proof of (c). The independence of IV and V is already shown in (b). That $V \text{ non } \supset II$ is shown by the set of points (ρ, θ) which satisfy conditions (1) and (2) in Example α_3 , as well as the points for which $\rho = 1/2^n$, $\pi/4^n < \theta < 2\pi$; let $i = 0$, $P = (0, 0)$. Consequently, by (a), $V \text{ non } \supset I$ and $V \text{ non } \supset III$.

To show that $I \text{ non } \supset V$ and $III \text{ non } \supset V$, and hence by (a) that $II \text{ non } \supset V$, consider, with $i = 1$,

Example α_5 : The set of points (x, y) of the cartesian plane lying on circles whose respective diameters are the portions of the x -axis from $(1/n, 0)$ to $(1/n + 1, 0)$ for all natural numbers n , together with the origin.

Lemma B. *In a semi- i -connected,⁴⁾ compact metric space,*

(a) $I > II$; $III > II$; I and III are independent,

(b) IV is independent of I, II, III and V .

(c) $I > V$; V is independent of II, III and IV .

The proofs of (a) and (b) are as in Lemma A, (a) and (b) respectively.

Proof of (c). That IV and V are independent is proved as in Lemma A (c). That $V \text{ non } \supset II$, and hence, by (a), $V \text{ non } \supset I$ and $V \text{ non } \supset III$, is shown as in Lemma A (c). To show that $III \text{ non } \supset V$, consider

Example α_6 : The set of points (x, y, z) in cartesian 3-space whose x - and y -coordinates satisfy the equations of the circles defined in Example α_5 , and such that $0 \leq z \leq 1$; the set of points for which $z = 1$ and whose projections on the xy -plane lie interior

⁴⁾ A metric space M is called semi- i -connected if, given a point P of M , there exists an $\varepsilon > 0$ such that all i -cycles of $S(P, \varepsilon)$ bound on M ; for a previous use of this notion, see my paper *On locally connected spaces*, Duke Math. Journ. 1 (1935), 543—555 (to be referred to hereafter as L. C.) If all i -cycles bound on M , we call M simply i -connected.

to the circles of Example α_8 ; and the set of points $(0, 0, z)$ such that $0 \leq z \leq 1$ with $P = (0, 0, 0)$ and $i = 1$.

Consequently, by (a), $\text{II non} \supset \text{V}$. It remains to show that $\text{I} \supset \text{V}$.

Let M be a semi- i -connected space which satisfies I at a certain point P , and consider an arbitrary $\varepsilon > 0$. Then there exist δ and η such that any i -cycle of $F(P, \delta)$ bounds on $S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)$. Since M is semi- i -connected, we may assume η to be so small that i -cycles of $S(P, \eta)$ bound on M .

Consider any cycle γ^i of $S(P, \eta) - P$. Select ε' so that $|\gamma^i| \cdot \overline{S(P, \varepsilon')} = 0$.⁵⁾ Since I holds at P , there exist δ' and η' such that any cycle Γ^i of $F(P, \delta')$ bounds on $S(P, \varepsilon') - S(P, \eta')$. Consider any chain $K^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ on M . By infinitesimal alterations of K^{i+1} and harmonizing⁶⁾ of chains, we can say that the portion of K^{i+1} exterior to $S(P, \delta)$ is a chain F^{i+1} whose boundary is a cycle Γ^i of $F(P, \delta)$, and we let $H^{i+1} \rightarrow \Gamma^i$ be a chain of $S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)$. Similarly, we may regard the portion of K^{i+1} interior to $S(P, \delta')$ as a chain F_1^{i+1} bounded by a Γ_1^i of $F(P, \delta')$, and we let $H_1^{i+1} \rightarrow \Gamma_1^i$ be a chain of $S(P, \varepsilon') - S(P, \eta')$. The chain $K^{i+1} - (F^{i+1} + F_1^{i+1}) + (H^{i+1} + H_1^{i+1}) \rightarrow \gamma^i$ lies in $S(P, \varepsilon) - P$. Thus, any i -cycle of $S(P, \eta) - P$ bounds on $S(P, \varepsilon) - P$, and M satisfies V at P .

Lemma C. In a simply i -connected compact metric space,

(a) $\text{I} > \text{II} \equiv \text{III} > \text{IV}$,

(b) $\text{I} > \text{V} > \text{IV}$; II and V are independent.

Proof of (a). By Lemma A, $\text{I} \supset \text{II}$ and $\text{III} \supset \text{II}$. That $\text{I} > \text{II}$ is shown as in Lemma A. We can show that $\text{II} \supset \text{III}$ as follows: Consider any P and $\varepsilon > 0$. By II, there exist δ and η such that any cycle γ^i of $F(P, \delta)$ bounds on $M - S(P, \eta)$. Consider a Γ^i of $F(P, \varepsilon)$, and let $K^{i+1} \rightarrow \Gamma^i$ be a chain of M . As in the proof that $\text{I} \supset \text{V}$ in Lemma B, we may consider the portion of K^{i+1} interior to $S(P, \delta)$ as a chain F^{i+1} bounded by a γ^i of $F(P, \delta)$. There exists an $H^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ on $M - S(P, \eta)$. Then $K^{i+1} - F^{i+1} + H^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ is a chain of $M - S(P, \eta)$.

We next show that $\text{III} \supset \text{IV}$. Consider any P and let γ^i be a cycle of $M - P$. Select an $\varepsilon > 0$ such that $|\gamma^i| \cdot \overline{S(P, \varepsilon)} = 0$. By III, there is a $\delta > 0$ such that any i -cycle of $F(P, \varepsilon)$ bounds on $M - S(P, \delta)$. Let $K^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ be a chain of M . As in the preceding paragraph, the chain K^{i+1} may be converted into a chain of $M - S(P, \delta)$.

That $\text{IV non} \supset \text{III}$ is shown by the following example, with $i = 0$. The set of points (x, y) of the cartesian plane (1) lying on the

⁵⁾ By $|\gamma^i|$ we mean the closure of the set of all points on the cycle γ^i .

⁶⁾ See L. C.

curve $y = \sin 1/x$; $0 < x \leq 1/\pi$; (2) all points $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$; (3) an arc joining $(1/\pi, 0)$ to $(0, 1)$, but otherwise not containing any points defined in (1) and (2). Let P be the point $(0, -1)$.

Proof of (b). That $I > V$ follows as in Lemma B. To show that $V \supset IV$, consider any cycle γ^i of $M - P$, and let $\varepsilon > 0$ be such that $|\gamma^i| \cdot \overline{S(P, \varepsilon)} = 0$. By V, there exists a $\delta > 0$ such that any i -cycle of $S(P, \delta) - P$ bounds on $S(P, \varepsilon) - P$. Consider any positive number $\eta < \delta$, and let K^{i+1} be a chain of M bounded by γ^i . If $|K^{i+1}| \supset P$, the portion of K^{i+1} in $S(P, \eta)$ is a chain F^{i+1} bounded by a cycle Γ^i of $F(P, \eta)$. Let $H^{i+1} \rightarrow \Gamma^i$ be a chain of $S(P, \varepsilon) - P$. Then $K^{i+1} - F^{i+1} + H^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ is on $M - P$. That $IV \text{ non } \supset V$ follows from Example α_1 .

That $V \text{ non } \supset III$ follows as in Lemma A (c), and that $III \text{ non } \supset V$ follows from example α_6 .

Lemma D. In a compact J^k ,⁷⁾ where $i \leq k$,

(a) $I > II$; $III > II$; I and III are independent.

(b) $IV > III$; IV is independent of I and V.

(c) $I \equiv V$.

Proof of (a). As in Lemma A (a).

Proof of (b). That IV is independent of V, as well as that $III \text{ non } \supset IV$ is shown as in Lemma A (b). We have to show that $IV \supset III$. Consider any P and $\varepsilon > 0$. Let δ and η be arbitrary, except that $\varepsilon > \delta > \eta > 0$. As our space is a J^k , there exist⁸⁾ cycles γ_m^i , $m = 1, 2, \dots, s$, of $F(P, \delta)$ which form a basis for homologies in $S(P, \varepsilon) - \overline{S(P, \eta)}$. As P is a non- i -cut-point, there exist chains $K_m^{i+1} \rightarrow \gamma_m^i$ on $M - P$. Let $\delta' > 0$ be such that for each m , $|K_m^{i+1}| \cdot \overline{S(P, \delta')} = 0$. Let γ^i be a cycle of $F(P, \varepsilon)$. As P is a non- i -cut-point, there is a $K^{i+1} \rightarrow \gamma^i$ on $M - P$. The portion of K^{i+1} in $S(P, \delta)$ can be considered as a chain F^{i+1} bounded by a Γ^i of $F(P, \delta)$. Since Γ^i is related to the cycles γ_m^i by a homology in $S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)$, and the γ_m^i 's in turn bound exterior to $S(P, \delta')$, the chain K^{i+1} can be replaced by one not meeting $S(P, \delta')$.

Proof of (c). By Lemma B (c), $I \supset V$. We have to show that $V \supset I$. Consider any P and $\varepsilon > 0$, and take $\delta < \varepsilon$ such that every cycle of $F(P, \delta)$ bounds on $S(P, \varepsilon) - P$. Let η be any positive number less than δ . Since our space is a J^k , there is a finite basis of cycles γ_m^i of $F(P, \delta)$ for homologies in $S(P, \varepsilon) - \overline{S(P, \eta)}$. For each m , there is a $K_m^{i+1} \rightarrow \gamma_m^i$ on $S(P, \varepsilon) - P$. Let η' be a positive number such that $|K^{i+1}| \cdot \overline{S(P, \eta')} = 0$ for each m . The remainder of the proof should be obvious from the methods used above.

⁷⁾ We use the symbol J^k to denote a metric space that is locally i -connected for $i = 0, 1, \dots, k$ (See L. C.).

⁸⁾ See Theorem 2 of L. C.

Lemma E. In a simply i -connected compact J^k ,

$$I \equiv V > II \equiv III \equiv IV.$$

Proof. By Lemma D (c), $I \equiv V$. By Lemma C(a), $II \equiv III$. By Lemma C (a), $III \supset IV$, and by Lemma D (b), $IV \supset III$; accordingly $III \equiv IV$. That $V \supset II$ follows from Lemma D (a), (c). That $II \not\supset V$ is shown by Example α_1 .

We now turn to the study of some of the relations of closed point sets, that satisfy various avoidability conditions, to their complements in euclidean spaces. In the theorems (this does not include the lemmas) that follow we assume that the sets considered lie in the euclidean n -space, E_n , $n \geq 2$. (In case $n = 2$, and a condition is stated in a hypothesis for $i = 0, 1, \dots, n - 3$, it is to be understood that this condition is deleted.)

Theorem 1. In E_n , let M be a closed point set and r a non-negative integer such that the complementary domains of M have (1) diameters that form a null sequence,⁹⁾ (2) boundaries that are locally r -connected, and (3) boundaries all but a finite number of which are simply r -connected. Then M is locally r -connected.

Proof. Consider any point P of M and $\varepsilon > 0$. We may assume ε so small that any complementary domain of M that lies wholly in $S(P, \varepsilon)$ has a simply r -connected boundary. As the diameters of the complementary domains form a null sequence, there is an $\varepsilon' < \varepsilon$ such that if a complementary domain meets both $F(P, \varepsilon)$ and $F(P, \varepsilon')$, it has P on its boundary.

Denote the domains that meet both $F(P, \varepsilon)$ and $F(P, \varepsilon')$ by D_m , $m = 1, 2, \dots, s$. There exists, by (2), a $\delta < \varepsilon'$ such that any r -cycle of $B_m \cdot S(P, \delta)$, where B_m is the boundary of D_m , bounds a chain of $B_m \cdot S(P, \varepsilon)$.

Consider any cycle γ^r of $M \cdot S(P, \delta)$, and suppose it fails to bound on $M \cdot \overline{S(P, \varepsilon)}$. Then in the complement of the latter set there exists a cycle Γ^{n-r-1} that is linked with γ^r . However, consider any chain $K^{r+1} \rightarrow \gamma^r$ in $S(P, \delta)$. The intersections of K^{r+1} and Γ^{n-r-1} must lie in a finite number of domains complementary to M . These intersections may be removed as follows: The portion of K^{r+1} in a domain D complementary to M is a chain H^{r+1} bounded by a cycle on the boundary B of D . If D is a D_m , H^{r+1} may be replaced by a chain of $B_m \cdot S(P, \varepsilon)$. If D is not a D_m , then it must lie wholly in $S(P, \varepsilon)$, is therefore a domain with simply r -connected boundary, and H^{r+1} may be replaced by a chain of this boundary. The total effect of these replacements is the replacement of K^{r+1} by a new chain $L^{r+1} \rightarrow \gamma^r$ in $S(P, \varepsilon)$ and not meeting Γ^{n-r-1} ,

⁹⁾ We call a sequence of numbers ε_k a null sequence if $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

contradicting the fact that γ^r and Γ^{n-r-1} are linked. Thus γ^r must bound on $M \cdot \overline{S(P, \varepsilon)}$ and M is locally r -connected.

Theorem 2. *In E_n , let M be a closed point set whose complementary domains have (1) diameters that form a null sequence, and (2) boundaries that are g. c. $(n-1)$ -m.'s¹⁰ all but a finite number of which are simply i -connected for $i = 1, 2, \dots, n-2$. Then M is a J^{n-2} .*

Since the g. c. $(n-1)$ -m.'s are locally i -connected for $i = 0, 1, \dots, n-2$, Theorem 2 follows from Theorem 1.

We digress at this point to prove some lemmas needed in the sequel.

Lemma F. *If M is both r -avoidable and completely r -avoidable at P , then for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for any positive number $\eta < \delta$, there exists an $\eta' < \eta$ such that if γ^r is any cycle on $F(P, \Theta)$, where $\delta \geq \Theta \geq \eta$, then γ^r bounds on $M \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta')]$.¹¹*

Proof. We first select δ and η satisfying the definition of complete r -avoidability, and let η' be a positive number $< \eta$ such that any r -cycle of $M \cdot F(P, \delta)$ or $M \cdot F(P, \eta)$ bounds on $M - M \cdot S(P, \eta')$. Consider any number Θ such that $\delta \geq \Theta \geq \eta$, and let γ^r be a cycle of $F(P, \Theta)$. Since M is r -avoidable at P , γ^r bounds a chain K^{r+1} on $M - P$. If this chain meets $S(P, \eta')$, the portion of it in $S(P, \eta)$ is a chain H^{r+1} bounded by a cycle Z^r on $F(P, \eta)$, and we may replace H^{r+1} by a chain L^{r+1} on $M - M \cdot S(P, \eta')$. Then the chain $F^{r+1} = K^{r+1} - H^{r+1} + L^{r+1} \rightarrow \gamma^r$ lies on $M - M \cdot S(P, \eta')$. If F^{r+1} meets $F(P, \varepsilon)$, the portion of it on $M - M \cdot S(P, \delta)$ is a chain h^{r+1} bounded by a cycle z^r of $F(P, \delta)$ which may be replaced by a chain $\bar{h}^{r+1}$ of $M \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)]$. We then have $F^{r+1} - h^{r+1} + \bar{h}^{r+1} \rightarrow \gamma^r$ on $M \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta')]$. We observe, finally, that any number $\eta < \delta$, greater than the η obtained above from the definition of complete r -avoidability, may be used with the same η' as determined above. Also, that if any η less than that used above is assigned, a new η' may be obtained and the conclusion holds as before.

Lemma F'. *If certain sets M_m , $m = 1, 2, \dots, s$, finite in number, have a point P in common, and if for each m , M_m is both r -avoidable and completely r -avoidable at P , then for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for any $\eta < \delta$, there exists an $\eta' < \eta$ such that if γ^r is a cycle on $M_m \cdot F(P, \Theta)$, ($m = 1, 2, \dots, s$), where $\delta \geq \Theta \geq \eta$, then γ^r bounds on $M_m \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta')]$.*

¹⁰ G. c. n -m. = generalized closed n -manifold as defined in G. C. M.

¹¹ Compare this lemma with Axiom H^k of Čech, *Annals of Math.* **84** (1933), p. 667.

Proof. We select δ_m as provided relative to ε for each M_m by Lemma F. Let δ be a positive number less than the minimum δ_m , and let $\eta < \delta$ be arbitrary. For each m , by Lemma F, there exists an $\eta'_m < \eta$ as provided by Lemma F. Let η' be the smallest η'_m . Now if γ^r is a cycle of any $M_m \cdot F(P, \Theta)$ for $\delta \geq \Theta \geq \eta$, then since $\delta_m > \delta \geq \Theta \geq \eta \geq \eta_m$, γ^r bounds a chain on $M_m \cdot [S(P, \delta_m) - S(P, \eta'_m)]$ and hence on $M_m \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta')]$.

Lemma G. *If M is completely r -avoidable at P , and for some neighborhood U of P all r -cycles of $U - P$ bound on M , then the conclusion of Lemma F holds.*

Proof. For $\varepsilon > 0$ arbitrary, subject to the condition that all r -cycles of $M \cdot S(P, \varepsilon) - P$ bound on M , we determine δ and η as in the definition of complete r -avoidability. Obviously any smaller number than η may be selected. We then determine δ_1 and η_1 such that any γ^r on $M \cdot F(P, \delta_1)$ bounds on $M \cdot [S(P, \eta) - S(P, \eta_1)]$. Let Θ be such that $\delta \geq \Theta \geq \eta$. Then if γ^r is on $M \cdot F(P, \Theta)$, it bounds a chain K^{r+1} on M . If H^{r+1} meets $S(P, \eta_1)$, the portion of it in $S(P, \delta_1)$ is a chain H^{r+1} bounded by a cycle Z^r of $F(P, \delta_1)$. This may be replaced by a chain L^{r+1} on $M \cdot [S(P, \eta) - S(P, \eta_1)]$. Similarly a portion exterior to $S(P, \varepsilon)$ may be replaced by a chain on $M \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)]$. We observe, finally, that η may be replaced by any number greater than η and less than δ , by retaining δ_1 and η_1 as already determined above.

The following lemma now follows from Lemma G just as Lemma F' follows from Lemma F:

Lemma G'. *If certain sets M_m , finite in number, have a point P in common, and if for each m , M_m is completely r -avoidable at P and for some neighborhood U_m of P all r -cycles of $U_m - P$ bound on M_m , then the conclusion of Lemma F' holds.*

Theorem 3. *Let M be a closed point set and r a non-negative integer $\leq n - 2$ such that the complementary domains of M have (1) diameters that form a null sequence, (2) boundaries that satisfy at all points the hypothesis of either Lemma F or Lemma G, and (3) boundaries all but a finite number of which are simply r -connected. Then M is completely r -avoidable at all its points.*

Proof. We proceed as in the first paragraph of the proof of Theorem 1, and define the domains D_m (with boundaries B_m) as in the second paragraph of that proof. By Lemma F' or Lemma G', there exist δ and η such that $\varepsilon' > \delta > \eta > 0$ and such that any r -cycle of $B_m \cdot F(P, \delta)$ bounds on $B_m \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)]$. Of the domains complementary to M that do not meet $F(P, \varepsilon)$ but do meet $F(P, \delta)$, only a finite number have P on their boundaries, and there exists an η' such that $\eta > \eta' > 0$ and such that of these domains only the latter have points in $S(P, \eta')$. Denote those domains that meet $F(P, \delta)$, have P on their boundaries, and do not

meet $S(P, \varepsilon)$, by G_k , $k = 1, 2, \dots, t$. Then there exist δ_1 and η_1 such that $\eta' > \delta_1 > \eta_1 > 0$, and such that any r -cycle of F_k , boundary of G_k , on $F(P, \delta_1)$ bounds on $F_k \cdot [S(P, \eta') - S(P, \eta_1)]$.

The numbers ε , δ and η_1 satisfy the complete avoidability definition. For consider a cycle γ^r on $M \cdot F(P, \delta)$. As $r \leq n - 2$, there exists on $F(P, \delta)$ a chain $K^{r+1} \rightarrow \gamma^r$. Suppose γ^r does not bound on $H = M \cdot [\overline{S(P, \varepsilon)} - S(P, \eta_1)]$. Then there exists a cycle Γ^{n-r-1} of $E_n - H$ that is linked with γ^r . The intersections of Γ^{n-r-1} and K^{r+1} lie in a finite number of the complementary domains of M , and these intersections may be removed as follows: If D is a domain containing such an intersection, then the portion of K^{r+1} in D is a chain H^{r+1} bounded by a cycle Z^r on the boundary B of D . Now if D is a D_m , H^{r+1} may be replaced by a chain $\bar{H}^{r+1} \rightarrow Z^r$ on $B_m \cdot [S(P, \varepsilon) - S(P, \eta)] \subset H$. If D is not a D_m and does not have P on its boundary, then its boundary B is simply r -connected and lies in H , and hence the chain $\bar{H}^{r+1}$ may be chosen on $B \subset H$. The only remaining possibility is for D to be a domain G_k . In this case we first let L^{r+1} be any chain of F_k bounded by Z^r . If L^{r+1} lies on H , we denote it by $\bar{H}^{r+1}$; otherwise, the portion of it in $S(P, \eta_1)$ is a chain N^{r+1} bounded by a cycle z^r on $F(P, \eta_1)$. But as we have chosen δ_1 and η_1 , there is a chain $h^{r+1} \rightarrow z^r$ on $F_k \cdot [(S(P, \eta') - S(P, \eta_1))] \subset H$, and we let $\bar{H}^{r+1} = L^{r+1} - N^{r+1} + h^{r+1}$. The chain $K^{r+1} - \Sigma H^{r+1} + \Sigma \bar{H}^{r+1} \rightarrow \gamma^r$ does not meet Γ^{n-r-1} , contradicting the fact that γ^r and Γ^{n-r-1} are linked.

For the proof of the next theorem we need the following lemma:

Lemma H. *If certain sets M_m , finite in number, have a point P in common, and if for each m , M_m is locally r -avoidable at P and for some neighborhood U_m of P all r -cycles of $M_m \cdot U_m - P$ bound on M_m , then for any $\varepsilon > 0$ there exist δ and η such that if γ^r is a cycle of $M_m \cdot F(P, \delta)$, then γ^r bounds on $M_m - M_m \cdot S(P, \eta)$.*

Proof. Let ε be small enough that all r -cycles of any $M_m \cdot S(P, \varepsilon) - P$ bound on M_m . Since each M_m is r -avoidable at P , there exist, for each m , positive numbers δ_m and η_m such that any γ^r of $M_m \cdot F(P, \delta_m)$ bounds on $M_m - M_m \cdot S(P, \eta_m)$. Let δ be such that $\varepsilon > \delta > \delta_m$ for all m , and η such that $\eta_m > \eta > 0$ for all m . If γ^r is a cycle of $M_m \cdot F(P, \delta)$, it bounds a chain K^{r+1} on M_m ; if this chain meets $S(P, \eta)$, the portion of it in $S(P, \eta_m)$ (and hence the portion in $S(P, \eta)$) may be removed by methods similar to those used in proofs above.

Theorem 4. *Let M be a closed point set and r a non-negative integer $< n$ such that the complementary domains of M have (1) diameters that form a null sequence, (2) boundaries all but a finite number of which are simply r -connected, and (3) boundaries which at each*

point P satisfy the conditions placed on M_m in Lemma H. Then M is r -avoidable at all its points.

The proof of Theorem 4 employs methods similar to those used in the proof of Theorem 3. We use Lemma H to provide δ and η such that any r -cycle of $B_m \cdot F(P, \delta)$ bounds on $B_m \cdot [E_n - S(P, \eta)]$, and δ_1 and η_1 such that any r -cycle of $F_m \cdot F(P, \delta_1)$ bounds on $F_m \cdot [E_n - S(P, \eta_1)]$.

Theorem 5. Let M be a compact connected J^{n-2} . Then the diameters of the complementary domains of M form a null sequence.¹²⁾

Proof. Suppose M has infinitely many complementary domains of diameter greater than some $\varepsilon > 0$. Then there exists a point P of E_n and positive numbers δ and η , where $\delta > \eta$, such that infinitely many complementary domains of M , say $D_1, D_2, \dots, D_m, \dots$, contain points of both $F(P, \delta)$ and $F(P, \eta)$.

We may show that the set $M' = E_n - \sum_{m=1}^{\infty} D_m$ is a locally compact J^{n-2} , by methods used in the first part of the proof of Theorem 7 of L. C.

In each D_m there is an arc $x_m y_m$ such that x_m and y_m are points of $F(P, \delta)$ and $F(P, \eta)$, respectively, and $x_m y_m - x_m - y_m \subset S(P, \delta) - \overline{S(P, \eta)}$. Let Θ be such that $\delta > \Theta > \eta$, and let $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots$ be a sequence of subdivisions of $F(P, \Theta)$ whose meshes form a null sequence. For a fixed integer h , only a finite number of the sets D_m can contain vertices of S_h , and consequently there exists for each h a domain $D_{m(h)}$ that contains no vertex of S_h .

Now by methods similar to those used in paragraphs seven to eleven of the proof of Theorem 7 of L. C., we can show the existence, for h great enough, of a cycle Γ_h^{n-1} which fails to meet the arc $x_{m(h)} y_{m(h)}$, and yet which approximates S_h as closely as we please (dependent on h). Since for h great enough such a cycle must meet the arc $x_{m(h)} y_{m(h)}$, a contradiction results.

Theorem 6. Let M be a compact connected J^{n-2} . Then all but a finite number of the complementary domains of M are simply i -connected for $i = 1, 2, \dots, n - 2$.

Proof. As M is compact, there exists an $\varepsilon > 0$ such that all i -cycles of diameter $< \varepsilon$ bound on M . If the complementary domains of M are infinite in number, then by Theorem 5 all but a finite number of them are of diameter less than ε , and we assert that those domains whose diameters are less than ε are simply i -connected. For if D is such a domain, and γ^i is a cycle of D which fails to bound in D , then γ^i is linked with a cycle Γ^{n-i-1} of the boundary

¹²⁾ For the plane, this result was proved by Schoenflies. See Schoenflies, A., *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Ergänzungsband, Jahresb. d. Deut. Math.-Ver., Leipzig, 1908, p. 237.

of D . But I^{n-i-1} is of diameter less than ε and must therefore bound on M , hence bound a chain which fails to meet γ^i .

We now state one of our principal theorems, the motive for which will be found in Principal Theorem D of G. C. M.

Principal Theorem A. *In order that a compact continuum M should have only complementary domains (1) whose boundaries are g. c. $(n-1)$ -m's all but a finite number of which are simply i -connected for $i = 1, 2, \dots, n-2$, and (2) whose diameters form a null sequence, it is necessary and sufficient that M be a J^{n-2} which is completely i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n-3$, and locally $(n-2)$ -avoidable.*

The necessity follows from the properties of g. c. $(n-1)$ -m.'s and Theorems 2–6 above, and the sufficiency follows from Principal Theorem D of G. C. M.

As an important corollary of this theorem we have:

Corollary. *Among the compact connected J^{n-2} 's, those which have g. c. $(n-1)$ -m.'s as boundaries of all their complementary domains are characterized by the fact that they are completely i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n-3$ and locally $(n-2)$ -avoidable.*

It should be noted here that by Lemma D, *Principal Theorem A* and its Corollary remain true if the condition that the set be completely i -avoidable is replaced by the condition that all its points be local-non- i -cut-points — a matter not without interest in view of the fact that (by Lemma A) these two conditions are in general independent.

Theorem 7. *Let M be a closed point set whose complementary domains have diameters that form a null sequence and whose boundaries are all simply i -connected ($i = 0, 1, \dots, n-2$) g. c. $(n-1)$ -m.'s. Then all points of M are non- i -cut-points, i -avoidable and locally i -avoidable.*

Proof. By Theorem 1, M is a J^{n-2} . That M is simply i -connected follows from the duality theorem for closed sets. Hence by the Corollary above, M is completely i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n-3$ and locally $(n-2)$ -avoidable. By Lemma E, M has only non- i -cut-points, and its points are also i -avoidable and locally i -avoidable.

Theorem 8. *Let M be a compact continuum and D a domain complementary to M such that (1) D is u. l. i -c.¹³ for $i = 0, 1, \dots, k$, where $k \leq n-3$; (2) small i -cycles bound in D for $k < i \leq n-2$, and (3) $\bar{M}$ is locally i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n-k-3$. Then the boundary of D is a g. c. $(n-1)$ -m.*

Proof. We show that D is u. l. i -c. for $k < i \leq n-2$. Suppose D not u. l. i -c. Then there exist a point P of $\bar{M}$ and an $\varepsilon > 0$ such that for every $\eta > 0$ there exists in $D \cdot S(P, \eta)$ a cycle γ^i which fails to bound in $D \cdot S(P, \varepsilon)$. By condition (3) there exist δ and η such that any j -cycle, γ^j , where $j = n-i-2$, of $M \cdot F(P, \delta)$

¹³ U. l. i -c. = uniformly locally i -connected (defined in G. C. M.).

bounds on $M - M \cdot S(P, \eta)$. We may take η so small that it not only satisfies this condition, but also the condition (2) that i -cycles of diameter $< \eta$ bound in D .

Consider a cycle γ^i . It bounds a chain K^{i+1} of D which a fortiori lies in $E_n - M \cdot S(P, \delta)$. Any chain L^{i+1} bounded by γ^i in $S(P, \eta)$ also lies in $E_n - [F(P, \epsilon) + M - M \cdot S(P, \delta)]$. The cycle $K^{i+1} - L^{i+1}$ must fail to link $M \cdot F(P, \delta)$, since j -cycles on the latter set bound on $M - M \cdot S(P, \eta)$ and cannot meet the chain $K^{i+1} - L^{i+1}$. Thus by the Alexander Addition Theorem γ^i bounds in $D \cdot S(P, \epsilon)$, D is u. l. i -c., and the boundary of D is a g. c. $(n - 1)$ -m. by Principal Theorem C of G. C. M.

The proof of the following theorem is similar to the proof just given:

Theorem 8a. *Let M be a compact continuum and D a domain complementary to M such that (1) small i -cycles of D bound in D for $i = 1, 2, \dots, n - 2$, and (2) M is locally i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n - 2$. Then the boundary of D is a g. c. $(n - 1)$ -m.*

The following corollaries are of interest.

Corollary. *In the plane, if M is a continuum all of whose points are locally 0-avoidable, then the boundaries of the complementary domains of M are simple closed curves.*

Corollary. *In 3-space, if M is a continuum all of whose points are locally 0- and 1-avoidable, and D is a complementary domain of M whose small 1-cycles bound in D , then the boundary of D is a closed 2-dimensional manifold.*

Theorem 9. *In order that the boundary, B , of a bounded, simply $(n - 1)$ -connected domain D should be a g. c. $(n - 1)$ -m., it is necessary and sufficient that (1) the small i -cycles of D bound in D for $i = 1, 2, \dots, n - 2$ and that (2) B be locally i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n - 2$.*

Proof. The necessity follows from the properties of a g. c. $(n - 1)$ -m. and Lemma A (I $>$ II); the sufficiency from Theorem 8a.

As a Corollary of Theorems 6 and 8a we have:

Theorem 10. *If a compact continuum M is a J^{n-2} and locally i -avoidable for $i = 0, 1, \dots, n - 2$, then all but a finite number of the complementary domains of M are bounded by simply i -connected g. c. $(n - 1)$ -m.'s.*

Theorem 11. *In order that a simply i -connected ($i = 0, 1, \dots, n - 2$) compact closed set should have only simply i -connected g. c. $(n - 1)$ -m.'s as boundaries of its complementary domains, it is sufficient that M should be locally i -avoidable.*

Proof. Being simply 0-connected, M is a continuum. Condition (1) of Theorem 8a holds for any complementary domain of M , since M is simply i -connected for $i = 1, 2, \dots, n - 2$, and condition (2)

of Theorem 8a is part of our hypothesis. Consequently the boundaries of the domains complementary to M are g. c. $(n-1)$ -m.'s.

Let D be a domain complementary to M , and B its boundary. By Principal Theorem A of G. C. M., $E_n - B$ is the sum of two domains D_1 and D_2 , of which B is the common boundary. As $D \subset E_n - M \subset E_n - B$, we know that $D \subset D_1 + D_2$, and hence $D \subset D_1$, say. Then $D \equiv D_1$ and $D_2 \supset M - B$. Suppose $p^i(B) > 0$, where $1 \leq i \leq n-2$. Then $p^{n-i-1}(E_n - B) > 0$. It readily follows from the duality in Theorem 5 of G. C. M. that $p^{n-i-1}(D) > 0$, hence by the duality for closed sets that $p^i(M) > 0$, which is contrary to hypothesis.

Corollary. In E_3 , if M is a simply 1-connected continuum which is locally i -avoidable for $i = 0, 1$, then the complementary domains of M all have 2-spheres as boundaries.

Principal Theorem B. In order that a simply i -connected ($i = 0, 1, \dots, n-2$) compact J^{n-2} should have only simply i -connected g. c. $(n-1)$ -m.'s as boundaries of its complementary domains, it is necessary and sufficient that it have only non- i -cut-points.

Proof. The necessity follows from Theorems 7 and 5. As for the sufficiency: By Lemma D, M is locally i -avoidable at all points, and consequently by Theorem 11 the boundaries of the complementary domains of M are all g. c. $(n-1)$ -m.'s.

We conclude with a theorem concerning the common boundary of two domains:

Theorem 12. Let M be a compact, common boundary of two domains D_1 and D_2 such that (1) D_k is u. l. i -c. for $i = 0, 1, \dots, n_k$ ($k = 1, 2$), where $n_1 + n_2 < n-3$; (2) small i -cycles of D_1 bound in D_1 for $i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n - n_2 - 2$; (3) M is locally i -avoidable for $i = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n - n_1 - 3$. Then M is a g. c. $(n-1)$ -m.

Proof. We first show that D_1 is u. l. i -c. for any i such that $n_1 + 1 \leq i \leq n - n_2 - 3$. If for some such i , D_1 is not u. l. i -c., there exist a point P of M and $\varepsilon > 0$ such that for any $\eta > 0$ there is a cycle γ^i of $D_1 \cdot S(P, \eta)$ that fails to bound in $D_1 \cdot S(P, \varepsilon)$. However, let δ and η be selected so as to satisfy the local $(n-i-2)$ -avoidability definition at P , as well as so that i -cycles of $D_1 \cdot S(P, \eta)$ bound in D_1 . By using the argument of the second paragraph of the proof of Theorem 8, we may now show that any γ^i bounds in $D_1 \cdot S(P, \varepsilon)$, thus obtaining a contradiction.

We conclude, then, that D_1 is u. l. i -c. for $i = 0, 1, \dots, n - n_2 - 3$, and since D_2 is u. l. i -c. for $i = 0, 1, \dots, n_2$ it follows¹⁴ that M is a g. c. $(n-1)$ -m.

¹⁴ By Theorem 2 of my paper *A characterization of manifold boundaries* ..., Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), pp. 436-441.

Množiny, na nichž se lze vyhnouti danému bodu.

(Obsah předešlého článku.)

Je-li P bod topologického prostoru M , je-li Γ cyklus, jehož nosič neobsahuje bod P a je-li $\Gamma \sim 0$ v prostoru M , pak jedna z vyšetřovaných vlastností je, že Γ musí být ~ 0 v prostoru $M - P$. Další vlastnosti (celkem je jich pět) vzniknou rozmanitými lokalisacemi. Některé z těchto vlastností se již dříve vyskytly (u autora i u jiných matematiků) při axiomatické definici variety pomocí homologie. V první části článku se studují vzájemné vztahy pěti vyšetřovaných vlastností. Ve druhé části jsou mimo jiné odvozeny podmínky, které stačí předpokládati o uzavřené množině M vnořené do euklidovského E_n , aby hranice každé komplementární oblasti byla $(n-1)$ -rozměrnou varietou.

Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schließungsaufgabe.

K. Mack, Praha.

(Eingegangen am 13. März 1937.)

1. Vier beliebige Geraden $abcd$, von denen keine drei durch einen Punkt*) gehen („vollständiges Vierseit“) schneiden sich bekanntlich in 6 Punkten, die zu je dreien auf je einer der gegebenen Geraden liegen. Es gibt 4 solcher Punkte-Tripel, von denen je 2 einen gemeinsamen Punkt haben. Zu jedem dieser 6 Schnittpunkte gibt es stets einen und nur einen Punkt, der mit ihm nicht auf derselben Geraden liegt. Wir nennen sie „Gegenpunkte im Vierseit“. Die 6 Schnittpunkte werden also von 3 Paar Gegenpunkten im Vierseit gebildet. Zwei Punkte, von denen nicht der eine Gegenpunkt des andern ist, sollen „Nachbarpunkte“ genannt werden. Nach dieser Festsetzung hat also jeder Punkt 4 Nachbarpunkte.

2. Definition. Wählt man einen Punkt P in der Ebene des „vollständigen Vierseits“, welcher nicht auf einer der gegebenen Geraden des Vierseits liegt, und verbindet man P mit den 6 Schnittpunkten des vollständigen Vierseits, so sollen diese 6 Strahlen der „Schein des Vierseits aus P “ genannt werden. Je 3 Strahlen, welche die Punkte eines Tripels (siehe 1.) mit P verbinden, sollen ein „Drilling“, je 2 Strahlen, die Gegenpunkte im Vierseit verbinden, ein „Zwilling“ genannt werden. Je 2 Strahlen, die nicht einem „Zwilling“ angehören, bestimmen einen Drilling, der diese beiden Strahlen enthält.

3. Eigenschaften des Scheins eines Vierseits. „Es gibt unendlich viele Parallelogramme, deren Paare gegenüberliegender Eckpunkte je auf den Strahlen zweier Zwillinge liegen, wobei die Parallelogrammseiten zu den Strahlen des dritten Zwillings (Richtungszwilling) parallel sind.“

Ein solches Parallelogramm ist durch einen Punkt auf einem beliebigen Strahl und einen Zwilling (der diesen Strahl nicht

*) Auch ein uneigentlicher Punkt soll darunter verstanden werden.

enthalten darf), dessen Strahlen die Richtung der Parallelogrammseiten angeben, bestimmt. Parallelogramme mit parallelen Seiten sind ähnlich und liegen zentrisch mit dem Zentrum P .

4. Beweis: Man faßt die vier gegebenen Geraden als Spuren von vier Ebenen auf, welche durch einen gemeinsamen Punkt S im Raum gehen, von dem P die Parallelprojektion auf die Zeichenebene in der Richtung (SP) ist. Die vier Ebenen begrenzen also

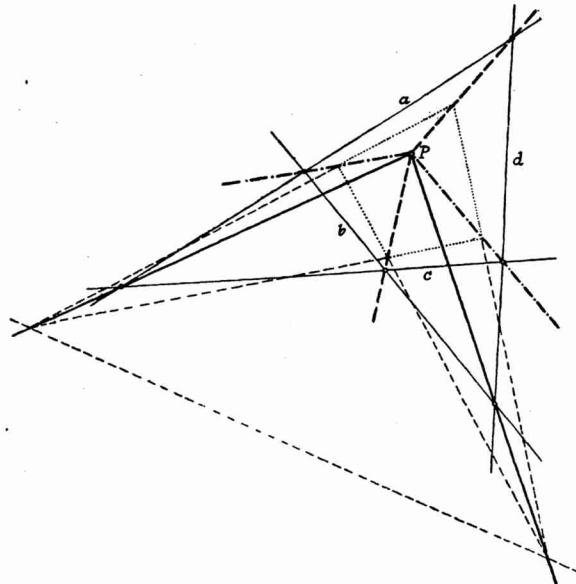


Fig. 1.

eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S . Dann sind irgend zwei Zwillinge — etwa die Strahlenpaare von P nach den Schnitten $[a . b]$ $[c . d]$ bzw. $[b . c]$ $[d . a]$ — die Parallelprojektion von gegenüberliegenden Kanten dieser Pyramide, während der dritte Zwillings nach den Schnittpunkten $[a . c]$ $[b . d]$ die Parallelprojektion der Schnittlinie zweier gegenüberliegenden Pyramidenflächen darstellt. Schneidet man die Pyramide mit einer Ebene, welche sowohl zu der Schnittlinie von S nach $[a . c]$ als auch von S nach $[b . d]$ parallel ist, dann werden gegenüberliegende Flächen in parallelen Geraden zu diesen Linien geschnitten, die Ebene schneidet also aus der Pyramide ein Parallelogramm aus, dessen Bild die in 3. gemachte Aussage erfüllt. (Fig. 1.) Ein solches Parallelogramm ist durch den Richtungszwilling und einen Eckpunkt bestimmt. Da zwei beliebige Zwillinge als Bilder von Gegenkanten einer Pyramide

aufgefaßt werden können, so ergibt sich, daß es drei Gattungen von Parallelogrammen gibt, deren Seiten jeweils zu dem Strahlenpaar eines Zwillings parallel sind. (Fig. 2.)

5. Projektive Verallgemeinerung. Denkt man sich die Seiten eines solchen Parallelogrammes unbegrenzt verlängert, so ist es nichts anderes als ein vollständiges Vierseit, das die Schnittpunkte der Strahlen eines Zwillings mit der unendlich fernen Geraden als gegenüberliegende Punkte besitzt. Ersetzt man in

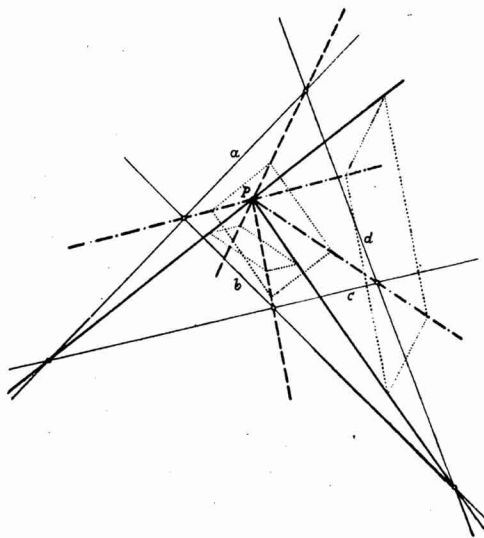


Fig. 2.

diesem Zusammenhange die unendlich ferne Gerade durch eine beliebige Gerade v so treten anstelle der angegebenen Parallelogramme Vierseite, deren Paare gegenüberliegender Punkte auf den Strahlenpaaren der „Zwillinge“ liegen.

Beweis: Man transformiere durch eine solche kollineare Abbildung das gegebene Vierseit und die Gerade v , daß v im transformierten System zur unendlich fernen Geraden wird. Im transformierten System gibt es nach Satz 3. Parallelogramme, denen im Originalsystem Vierseite entsprechen, von denen drei Paare gegenüberliegender Eckpunkte bzw. auf den Strahlenpaaren der drei Zwillinge liegen. Ein solches Vierseit ist bestimmt durch ein Paar auf den beiden Strahlen eines Zwillings angenommener Gegenpunkte und durch einen Eckpunkt auf einem weiteren Strahl. Da die Wahl dieser drei Punkte beliebig auf je einen Strahl

des Scheines erfolgen kann, ergeben sich ∞^3 Vierseite, von denen jeder Eckpunkt in je einem Strahl des Scheines liegt.

6. Es gibt ∞^3 vollständige Vierseite, von denen je ein Eckpunkt so auf je einem der 6 Strahlen des Scheines liegt, daß gegenüberliegende Eckpunkte stets auf Strahlen eines Zwillings liegen.

Den in 3. und 6. ausgesprochenen Lehrsätzen kann offenbar eine kinematische Deutung gegeben werden.

*

O konfiguraci rovnoběžníků při úplném čtyřstranu.

(Obsah předešlého článku.)

V úplném čtyřstranu vytvořeném čtyřmi přímkami a, b, c, d má každý ze šesti rohů právě jeden t. zv. protější roh; na př. $[ac]$, $[bd]$ jsou dva protější rohy. Necht P značí libovolný bod roviny, různý od každého rohu čtyřstranu; dvojice paprsků spojujících bod P se dvěma protějšími rohy jest t. zv. sdružená dvojice paprsků (Zwilling). V předcházejícím článku jest dokázána tato věta:

Jsou tři řady o nekonečném počtu rovnoběžníků takové, že páry protějších vrcholů rovnoběžníků každé řady leží na obou paprscích jedné sdružené dvojice a strany těch rovnoběžníků jsou rovnoběžné s paprsky třetí sdružené dvojice.

Při důkazu považujeme čtyři přímky úplného čtyřstranu za stopy čtyř rovin procházejících bodem S v prostoru, který v nějakém rovnoběžném promítání má obraz P . Necht $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ značí tyto čtyři roviny. Průsečný rovnoběžník těch rovin s rovinou rovnoběžnou s oběma přímkami $[\alpha\gamma]$ a $[\beta\delta]$ vede na rovnoběžník jedné řady s popsányi vlastnostmi. Výměnou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ obdržíme další řady. — Hořejší věta se dá projektivně zobecniti tak, že se místo přímky v nekonečnu uvažuje nějaká přímka v konečnu.

Několik konstrukcí kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru ze 14 bodů.

Jan Srb, Olomouc.

(Došlo dne 25. května 1936.)

Kvadratická nadplocha čtyřrozměrného prostoru je určena 14 body takovými, že žádných 5 neleží v téže trojrozměrné nadrovině. Abychom dovedli sestrojít řez nadplochy libovolným prostorem, stačí, dovedeme-li sestrojít buď druhý průsečík libovolné přímky, vedené některým z daných, s nadplochou, nebo sestrojít polárnost, v níž je hledaná nadplocha incidenční, nebo sestrojít tři pevné řezy v různých nadrovinách. První případ je zřejmě možno převést na případ třetí. V druhém případě je řez nadplochy prostorem nižším incidenční varieta polárnosti indukované v tomto prostoru danou polárností. V případě třetím jsou řezy tři kvadratické plochy, ležící v různých nadrovinách, protínající se po dvou ve třech kuželosečkách (jsou-li nadroviny nezávislé), nebo protínající se v jedné kuželosečce. Řez libovolnou nadrovinou je určen třemi kuželosečkami, ležícími v různých rovinách, protínajícími se buď po dvou ve dvou bodech, nebo protínajícími se ve dvou bodech tak, že tečny ve společném bodě leží v téže rovině.

1. Druhý průsečík přímky p , jdoucí jedním z daných bodů A , s nadplochou je možno sestrojít tak, že k libovolnému bodu P přímky p sestrojíme polární nadrovinu, která protne p v bodě P' . Pak bod B takový, že $(P, P', A, B) = -1$, je hledaný průsečík. Polární nadrovinu bodu vzhledem ke kvadratické nadploše sestrojíme pomocí věty:

Polární nadroviny bodu vzhledem ke všem nadplochám trojmočné lineární soustavy kvadratických nadploch procházejí jedním bodem.

Buďte ${}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2, {}^4V_3^2$ čtyři lineární nezávislé (t. j. neobsažené v téže lineární dvojmočné soustavě) kvadratické nadplochy čtyřrozměrného prostoru. Polární nadroviny bodu P vzhledem k těmto čtyřem nadplochám jsou pak také lineární nezávislé a protínají se v bodě Q . Protože polární nadroviny bodu P k nadplochám ${}^1V_3^2$ a ${}^2V_3^2$ procházejí bodem Q , prochází

jím i base svazku polárných nadrovin, přidružených bodu P vzhledem ke všem nadplochám svazku $(^1V_3^2, ^2V_3^2)$, tedy každá polární nadrovina bodu P , přidružená libovolné nadploše svazku $(^1V_3^2, ^2V_3^2)$. Polární nadrovina bodu P k nadploše $^3V_3^2$ prochází bodem Q , pak z téhož důvodu jako nahoře prochází tímto bodem polární nadrovina bodu P vzhledem ke každé nadploše svazku určeného nadplochou $^3V_3^2$ a libovolnou nadplochou svazku $(^1V_3^2, ^2V_3^2)$, t. j. ke každé nadploše dvojmocné lineární soustavy $(^1V_3^2, ^2V_3^2, ^3V_3^2)$. A stejně, protože polární nadrovina bodu P vzhledem k nadploše $^4V_3^2$ prochází bodem Q , prochází jím i polární nadrovina vzhledem ke každé nadploše svazku určeného $^4V_3^2$ a libovolnou nadplochou soustavy $(^1V_3^2, ^2V_3^2, ^3V_3^2)$, t. j. vzhledem ke každé nadploše trojmocné lineární soustavy $(^1V_3^2, ^2V_3^2, ^3V_3^2, ^4V_3^2)$.

Podle jisté obecné věty¹⁾ tvoří všechny kvadratické nadplochy, procházející 11 pevnými body čtyřrozměrného prostoru, lineární trojmocný systém, protože třemi obecnými body je určena jediná nadplocha systému. Rozdělíme-li tedy 14 bodů ve čtyři skupiny po 11 bodech tak, aby každé dvě skupiny obsahovaly alespoň jeden bod různý, a sestrojíme-li body $Q_1, \dots, Q_4$, příslušné těmto bodu P ve čtyřech trojmocných soustavách kvadratických nadploch určených těmito skupinami, bude každá nadrovina, procházející body $Q_1, \dots, Q_4$, polární nadrovinou bodu P vzhledem ke kvadratické nadploše procházející 14 body. Určuje-li 14 bodů jedinou kvadratickou nadplochu, jsou body $Q_1, \dots, Q_4$ nezávislé a určují polární nadrovinu bodu P . Je tedy naší úlohou proložit 11 body 4 lineárně nezávislé kvadratické nadplochy.

V čtyřrozměrném prostoru R_4 buď dáno 11 bodů takových, že žádných 5 neleží v téže trojrozměrné nadrovině. Body rozdělme libovolně ve dvě skupiny: $A_1, A_2, \dots, A_7$; $B_1, \dots, B_4$. 7 body $A_1, \dots, A_7$ je určena normální křivka C^4 čtyřrozměrného prostoru R_4 , kterou prochází pětímocný lineární systém kvadratických nadploch.²⁾ Nadplochy tohoto systému, které procházejí 4 body $B_1, \dots, B_4$, tvoří tedy svazek Φ , protože každá je určena jediným obecným bodem. Base svazku Φ je bikvadratická plocha V_2^4 prostoru R_4 , kterou obecná nadrovina protíná v bikvadratické křivce druhu prvního, t. j. v basi svazku kvadratických ploch, v němž nadrovina protíná svazek Φ . Bikvadratická křivka K^4 , v níž V_2^4 protíná nadrovinu R_3 určenou body $B_1, \dots, B_4$, je dána těmito 4 body a 4 dalšími, ve kterých R_3 protíná normální křivku C^4 . Tyto průsečíky sestrojíme jako samodružné body kolineace, ve které protnou R_3 dva kolineární trojmocné trsy přímek, určené libovolnými dvěma z bodů $A_1, \dots, A_7$, na př. A_1, A_2 jako

¹⁾ Bertini-Duschek, Einführung in die proj. Geometrie mehrdim. Räume — 1924, str. 180.

²⁾ Bertini-Duschek, str. 328.

vrcholy a ostatními pěti $A_3, \dots, A_7$ jako průsečíky sdružených přímk. Bikvadratická křivka, ve které V_2^4 protíná obecnou nadrovinu, je nyní určena 4 průsečíky této nadroviny s C^4 a 4 body, ve kterých protíná K^4 rovina společná této nadrovině a R_3 . Nadplochu svazku Φ , procházející obecným bodem, určíme buď tak, že bodem proložíme tři libovolné nadroviny. V každé je určen řez nadplochy bikvadratickou křivkou ve které protne V_2^4 a daným bodem. Nebo bodem proložíme jednu nadrovinu a sestrojíme kvadratickou plochu V_2^2 , určenou tímto bodem a bikvadratickou křivkou, ve které nadrovina protne V_2^4 . Řez nadplochy obecnou nadrovinou je pak určen kuželosečkou, ve které nadrovina protne V_2^2 a čtyřmi nezávislými body, ve kterých protne normální křivku C^4 . Podle řečeného provedeme tedy konstrukci takto: Bodem P , jehož polární nadrovinu chceme určit, proložíme dvě různé trojrozměrné nadroviny ${}^1R_3, {}^2R_3$, nezávislými body $B_1, \dots, B_4$ nadrovinu R_3 . Z bodů na př. A_1, A_2 promítneme 5 bodů $A_3, \dots, A_7$ do těchto tří nadrovin. Tím získáme v každé nadrovině 5 dvojic bodů, jež určují kolinearitu těchto nadrovin tak, že jsou v každé nadrovině sdruženy průměty téhož bodu a průměty ze stejného bodu patří téže soustavě. Sestrojíme samodružné body těchto kolinearit v 1R_3 : ${}^1C_1, \dots, {}^1C_4$; v 2R_3 : ${}^2C_1, \dots, {}^2C_4$; v R_3 : $C_1, \dots, C_4$. Body $B_1, \dots, B_4, C_1, \dots, C_4$ určená bikvadratická křivka prvního druhu K^4 protne 1R_3 ve čtyřech bodech (v rovině společné nadrovinám R_3 a 1R_3) ${}^1D_1, \dots, {}^1D_4$; 2R_3 v ${}^2D_1, \dots, {}^2D_4$. Sestrojíme-li poláry p_1, p_2 (t. j. osy svazků polárních rovin) bodu P vzhledem k bikvadratické křivce ${}^1K^4$, určené v 1R_3 8 body ${}^1C_1, \dots, {}^1C_4, {}^1D_1, \dots, {}^1D_4$ a ${}^2K^4$ určené v 2R_3 8 body ${}^2C_1, \dots, {}^2C_4, {}^2D_1, \dots, {}^2D_4$, určují obě přímky rovinu α (obě se totiž protnou v pólu bodu P vzhledem ke svazku kuželoseček, v němž společnou rovinu obou nadrovin protne svazek Φ); jež je basí svazku polárních nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazku kvadratických nadploch, procházejících 11 danými body.

Stejně proložíme na př. body $A_1, \dots, A_3, B_1, \dots, B_4$ racionální normální křivku ${}^1C^4$, body $A_4, \dots, A_7$ nadrovinu R'_3 . Bikvadratická křivka ${}^1K^4$ prostoru R'_3 , určená body $A_4, \dots, A_7$ a $D'_1, \dots, D'_4$, v nichž R'_3 protne ${}^1C^4$, určuje s ${}^1C^4$ svazek kvadratických nadploch Φ_1 , procházejících 11 body $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_4$. Nadroviny R_3 a R'_3 se protnou v rovině β . Každá z křivek $K^4, {}^1K^4$ protne β v bodové čtveřině. Body $B_1, \dots, B_4$ a body, ve kterých protne β křivku ${}^1K^4$, prochází bikvadratická křivka K'^4 , ve které base svazku Φ_1 protne R_3 . Jenom v případě, kdyby splynuly 3 body jedné čtveřiny v β s třemi body druhé, procházela by oběma křivkami K^4, K'^4 kvadratická plocha prostoru R_3 , která by s oběma křivkami C^4 a ${}^1C^4$ určovala tutéž kvadratickou nadplochu. Pak by oba svazky Φ, Φ_1 , majíce jednu společnou nadplochu, náležely

dvojmočné soustavě nadploch a bylo by nutno záměnou bodů v obou skupinách určit ještě jeden svazek nadploch. Obecně však žádné body v rovině β nesplynou, t. j. svazky Φ , Φ_1 nenáleží téže dvojmočné soustavě, polární rovina α_1 bodu P vzhledem k svazku Φ_1 má obecnou polohu k rovině α a protíná ji v hledaném bodě Q .

2. Protože dovedeme sestrojiti polární nadrovinu libovolného bodu ke kvadratické nadploše jdoucí danými 14 body, je tím stanovena polárnost, v níž je tato plocha incidenční. Výhodné stanovení incidenční nadplochy obdržíme, sestrojíme-li známým způsobem její autopolární normální jehlan. Pak je totiž každý řez nižším prostorem, proloženým některým z daných bodů, stanoven autopolárním normálním jehlanem, ve kterém tento prostor protíná jehlan nadplochy, a daným bodem.

3. Konstrukci vyloženou v 1. můžeme poněkud zjednodušit. 12 body čtyřrozměrného prostoru takovými, že žádných pět neleží v nadrovině, je určen dvojmočný lineární systém kvadratických nadploch, protože dvěma obecnými body prochází jediná nadplocha systému. Jako v 1. pak dokážeme: *polární nadroviny bodu vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám dvojmočného lineárního systému procházejí pevnou přímkou*. Polární nadroviny bodu P vzhledem ke třem lineárně nezávislým kvadratickým nadplochám čtyřrozměrného prostoru ${}^1V_3^2$, ${}^2V_3^2$, ${}^3V_3^2$ jsou také lineárně nezávislé a protínají se tedy v přímce p . Přímkou p proto procházejí base svazků polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazků $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$ a $({}^1V_3^2, {}^3V_3^2)$, tedy i polární nadroviny všech nadploch těchto svazků. Z toho plyne, že přímkou p procházejí i všechny base svazků polárných nadrovin bodu P vzhledem k nadplochám svazků určených kterýmikoliv dvěma nadplochami svazků $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2)$ a $({}^1V_3^2, {}^3V_3^2)$, tedy polární nadroviny bodu P vzhledem ke všem nadplochám dvojmočné lineární soustavy $({}^1V_3^2, {}^2V_3^2, {}^3V_3^2)$. Rozdělme 14 bodů ve dvě skupiny po 12 bodech tak, aby v každé skupině byly dva body různé a sestrojme polární přímky obecného bodu vzhledem k dvojmočné soustavě kvadratických nadploch určené prvou a druhou skupinou 12 bodů. Ke každé polární nadrovině, jdoucí prvou (druhou) přímkou, existuje jediná nadplocha, procházející prvou (druhou) skupinou 12 bodů. Ke každé polární nadrovině, procházející oběma přímkami, existuje tedy nadplocha, procházející danými 14 body. Určuje-li 14 bodů jedinou kvadratickou nadplochu, jsou obě přímky v poloze obecné a určují polární nadrovinu bodu P . Máme-li najíti polární přímkou p , v níž se protínají polární nadroviny bodu P vzhledem ke všem kvadratickým nadplochám dvojmočného lineárního svazku určeného dvanácti body, proložíme libovolnými 11 z nich jako v 1. svazek kvadratických nadploch Φ . Bodem dvanáctým a P proložíme dvě

libovolné nadroviny 1R_3 a 2R_3 . Konstrukcí uvedenou v 1. sestrojíme obě bikvadratické křivky ${}^1K^4$ a ${}^2K^4$, ve kterých nadroviny 1R_3 a 2R_3 protnou basi svazku Φ . Dvanáctým bodem a křivkou ${}^1K^4$ (${}^2K^4$) je v 1R_3 (2R_3) určena kvadratická plocha, která je řezem prostoru 1R_3 (2R_3) s kvadratickou nadplochou svazku Φ , jdoucí tímto bodem. Sestrojíme-li polární roviny bodu P k oběma plochám, protínají se v přímce (v poláře bodu P vzhledem ke kuželosečce, v níž se obě plochy, ve společné rovině nadrovin 1R_3 a 2R_3 , protínají) a určují polární nadrovinu kvadratické nadplochy procházející danými dvanácti body. Jinou volbou dvanáctého bodu a skupin určujících svazek nadploch zbývajících 11 body, sestrojíme ještě dvě polární nadroviny bodu P vzhledem ke dvěma jiným nadplochám procházejícím dvanácti body. Obecně nebudou nadroviny náležet témuž svazku a protnou se v hledané přímce.

4. Druhý průsečík přímky p , jdoucí jedním ze 14 daných bodů, s kvadratickou nadplochou, těmito body určenou, můžeme sestrojiti jinak. Přímku p , jdoucí bodem A_1 , a libovolným z daných bodů A_2 proložíme rovinou α ; touto rovinou a jedním ze zbývajících bodů A_3 nadrovinu R_3 . Zbývajících 11 body proložíme jako v 1. svazek kvadratických nadploch a sestrojíme bikvadratickou křivku, ve které jeho base protíná R_3 . Bikvadratickou křivkou a bodem A_3 je určena kvadratická plocha prostoru R_3 , která protne rovinu α tohoto prostoru v kuželosečce K_1^2 . Kuželosečka K_1^2 je tedy řez kvadratické nadplochy, jdoucí 12 z daných 14 bodů, rovinou α . Těmito 12 body proložíme (výměnou bodových skupin jako v 3.) ještě dvě jiné nadplochy nepatřící témuž svazku, které protnou rovinu α v kuželosečkách K_2^2, K_3^2 , jež s K_1^2 nenáleží témuž svazku. Společné body kuželoseček K_1^2 a K_2^2 jsou průsečíky base jistého svazku kvadratických nadploch, jdoucích 12 z daných bodů, s rovinou α . Kuželosečka určená ve svazku (K_1^2, K_2^2) bodem A_2 , je křivka ve které protíná rovinu α kvadratická nadplocha jdoucí 13 z daných bodů. Tato kuželosečka nechť protne přímku p v bodech M, M' , kuželosečka určená bodem A_2 ve svazku (K_1^2, K_3^2) , v bodech N, N' . Body M, M', N, N' jsou průsečíky přímky p s dvěma kvadratickými nadplochami procházejícími 13 danými body a určují involuci, ve které svazek určený těmito nadplochami protíná přímku p . Sestrojíme-li tedy v involuci MM', NN' bod A'_1 , korespondující bodu A_1 , je tento bod druhým průsečíkem přímky p s kvadratickou nadplochou procházející danými 14 body. Zároveň je tím sestrojen řez nadplochy s rovinou α .

*

Quelques constructions de l'hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions, déterminée par quatorze points.

(Extrait de l'article précédent.)

On peut faire passer une hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions par douze points généraux de la manière suivante: sept points arbitraires déterminent une courbe C^4 normale, par laquelle passent les hyperquadriques d'un système linéaire à cinq paramètres. Prenons de plus quatre points, ceux-ci déterminent, dans ce système, un faisceau d'hyperquadriques Φ . Dans le R_3 (espace à trois dimensions) déterminé par ces quatre points construisons la quartique K^4 déterminée par ces quatre points et par les quatre points communs à R_3 et C^4 ; l'intersection K_1^4 de la base V_2^4 du faisceau Φ avec un hyperplan 1R_3 général est déterminée par quatre points communs à 1R_3 et à C^4 et par quatre points communs à 1R_3 et K^4 . Faisons passer par un douzième point trois hyperplans; chacun d'eux contient une quadrique déterminée par ce point et par la quartique. Ces trois surfaces déterminent une hyperquadrique passant par les douze points. A l'aide du théorème disant que les hyperplans polaires d'un point P par rapport aux hyperquadriques d'un système linéaire à trois (à deux) paramètres passent par un point Q (une droite p), on construit l'hyperplan polaire d'un point quelconque par rapport à l'hyperquadrique déterminée par 14 points. Groupons les 14 points donnés en quatre (deux) groupes contenant 11 (12) points chacun, de sorte que ces groupes diffèrent de un (deux) point. Dans chaque groupe construisons 4 (3) hyperquadriques linéairement indépendantes en faisant passer, chaque fois, la courbe C^4 par différents points du groupe. Les hyperplans polaires du point P par rapport à ces trois (deux) hyperquadriques se coupent au point Q (suivant la droite p). Quatre points Q (deux droites p) déterminent l'hyperplan polaire du point P par rapport à l'hyperquadrique à déterminer. De la sorte, on peut construire la polarité dans laquelle cette hyperquadrique est autopolaire, ou bien construire le point d'intersection de l'hyperquadrique avec une droite passant par un des points donnés. On peut aussi construire le faisceau d'hyperquadriques passant par treize des points donnés et y déterminer, par le quatorzième point, l'hyperquadrique cherchée.

Correction concernant l'article: „Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes“, publié dans ce Journal t. 66, p. 261—286.

Vladimír Kořinek, Praha.

(Reçu le 16 février 1938.)

M. Alexander Kuroš m'a averti dans une lettre que la démonstration du lemme 2,2 p. 267 contient une faute. En effet, la relation y employée

$$\mathfrak{F}'\vartheta = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})\vartheta = (\mathfrak{H}\vartheta) \cap (\mathfrak{F}\vartheta)$$

est en général fausse, ce n'est que la relation

$$(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})\vartheta \subseteq (\mathfrak{H}\vartheta) \cap (\mathfrak{F}\vartheta)$$

qui est valable.

Je veux indiquer ici les modifications qu'il faut faire dans les démonstrations de mon travail pour les rendre correctes. D'abord il faut ajouter aux suppositions du lemme 2,2 une supposition supplémentaire et le lemme doit avoir la forme:

2,2. Lemme. *Soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{G}$. Supposons que parmi les sousgroupes maximum reproduits par ϑ , il y ait un sous-groupe normal $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$, satisfaisant à la supposition des chaînes descendantes finies. En ce cas $\mathfrak{H}$ est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ .*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}' = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ la partie commune des ensembles $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{F}$. On a

$$\mathfrak{F}'\vartheta = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})\vartheta \subseteq (\mathfrak{H}\vartheta) \cap (\mathfrak{F}\vartheta) = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'.$$

La correspondance $F' \rightarrow F'\vartheta$ est évidemment un isomorphisme. Parce que $\mathfrak{H}$ et par conséquent aussi $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{H}$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, $\mathfrak{F}'$ ne peut pas être isomorphe à son propre sousgroupe. Donc $\mathfrak{F}'\vartheta = \mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}'$ est reproduit par ϑ . La démonstration continue maintenant comme dans le texte.

A cause de cette supposition supplémentaire il faut faire dans le texte ultérieur du travail les modifications suivantes:

Dans la définition 2,4, p. 268, il faut rayer la phrase finale: „il est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ .”

Dans la démonstration du lemme 3,31, p. 275, il faut faire voir que $\overline{\mathfrak{G}}_i$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. Dans le texte on a démontré la relation $\overline{\mathfrak{G}}_i \subseteq \mathfrak{G}_i \kappa_{i1} \kappa_{i2}$. Ce dernier sousgroupe est un sousgroupe de $\mathfrak{C}_\Omega$. $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est donc normal et satisfait, en vertu de 3,1, à la supposition des chaînes descendantes finies. Par conséquent $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est le sousgroupe maximum unique de $\mathfrak{G}_i$ reproduit par $\kappa_{i1} \kappa_{i2}$.

Dans la démonstration du lemme 3,32, p. 276,¹⁾ il faut faire voir la même chose pour le sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$. Chaque élément du sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij}$ reste invariant par $\kappa_{ij} = \gamma_i \delta_j \gamma_i$ et $\mathfrak{D}_{ij}$ est un sousgroupe normal. Il en suit que $\mathfrak{D}_{ij}$ est contenu dans chaque sousgroupe maximum $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ reproduit par κ_{ij} , car le sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij} \cap \overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ est reproduit par κ_{ij} et on démontre la relation $\mathfrak{D}_{ij} = \overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ par la même voie comme dans la démonstration du lemme 2,2. Soit maintenant $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ un sousgroupe maximum reproduit par κ_{ij} . Dans la démonstration de 3,32 on voit que $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}/\mathfrak{D}_{ij}$ est un sousgroupe normal satisfaisant à la supposition de chaînes descendantes finies. Il est donc d'après 2,2 unique. Par conséquent $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ est de même unique. C'est le sousgroupe maximum unique de $\mathfrak{G}_i$ reproduit par κ_{ij} .

Pour éviter tout malentendu je remarque que dans 3,1, p. 273 la supposition des chaînes descendantes finies doit être valable pour les sousgroupes de $\mathfrak{C}_\Omega$ au sens absolu du mot, abstraction faite du champ d'opérateurs Ω .

*

Oprava k článku „Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes“, otištěnému v tomto Časopise, roč. 66, str. 261—286.

(Obsah předešlého článku.)

Tato poznámka obsahuje opravu nedopatření v důkazu pomocné věty 2,2 citovaného článku.

¹⁾ Dans la démonstration du lemme 3,32, p. 276, il faut corriger une faute d'impression: $\overline{\mathfrak{G}}_i$ doit y être remplacé partout par $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

O rozlišovací mohutnosti paprsků X na plasticky deformovaných krystalech a o emisní době při vzniku $K\alpha$ mědi a molybdenu.

J. Bačkovský a V. Dolejšek, Praha.

(Došlo 7. prosince 1937.)

Byla studována reflexe paprsků X na plasticky deformovaném krystalu soli kamenné pro čáry Cu $K\alpha_1, \alpha_2$ a Mo $K\alpha_1, \alpha_2$, při čemž bylo docíleno krajní rozlišovací mohutnosti. Ze šířky těchto čar byla určena podle principu neostrosti životní doba příslušných emisních stavů. Pro Cu $K\alpha_1$ byla nalezena doba $2 \cdot 10^{-15}$ sec, zatím co pro Cu $K\alpha_2$ nalezena doba kratší $1 \cdot 10^{-15}$ sec. Pro čáry Mo $K\alpha_1, \alpha_2$ nebyl dosud stanoven rozdíl v trvání vzbuzeného stavu atomu, neboť rozlišovací mohutnost vzhledem ke kratší vlnové délce v tomto případě byla jen taková, že bylo možno stanovit jen čas kratší, než $6 \cdot 10^{-15}$ sec. Byla provedena diskuse výsledků v práci obdržených a porovnání s výsledky jiných metod.

Sledovali jsme jaké rozlišovací mohutnosti lze dosáhnouti na spektrografu uspořádaném podle Kunzlovy fokusační metody¹⁾ užitím krystalu kamenné soli plasticky deformované způsobem popsaným jedním z autorů a Neprašovou. Krystal kamenné soli je zařazován mezi krystaly s mosaikovou strukturou a ačkoliv byl dříve pokládán za normál pro spektroskopická měření paprsků X (poněvadž jeho mřížku bylo lze snadno stanovit teoreticky), není již vůbec používán pro přesná měření. Za nejdokonalejší krystaly jsou pokládány vápenec a křemen. Tak na př. nejmenší hodnota w_c pro křemen měřená Parrattem²⁾ je asi $2''$. Naproti tomu hodnoty w_c pro kamennou sůl jsou nepoměrně větší; tak udávají na př. Bosorth a Haworth³⁾ $w_c = 400''$, Dawis a Stempel⁴⁾ $w_c = 300''$, Kirkpatrick a Ross⁵⁾ $w_c = 87''$ (w_c je poloviční šířka v poloviční výšce křivky, která udává intensitu reflektovaného záření v závislosti na úhlu sklonu φ při monochromatickém λ).

¹⁾ V. Kunzl, C. R., 201 (1935), 656.

²⁾ L. G. Parratt, Rev. Sc. Instr., 5 (1934), 395; 6 (1935), 113.

³⁾ R. M. Bosorth - F. E. Haworth, Phys. Rev., 45 (1934), 821.

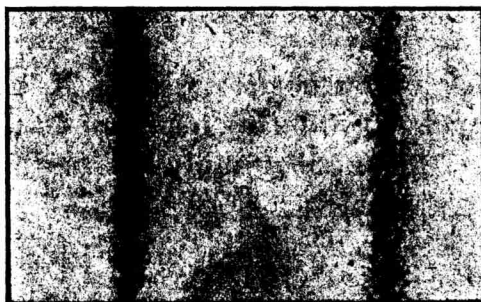
⁴⁾ B. Davis - W. M. Stempel, Phys. Rev., 17 (1922), 608.

⁵⁾ P. Kirkpatrick - P. A. Ross, Phys. Rev. 48 (1933), 596.

Z těchto dat se podle dosavadních výsledků nedá očekávat, že by bylo možno dosáhnouti pomocí spektrografu s kamennou solí značné rozlišovací mohutnosti, která by se vyrovnala rozlišovací mohutnosti dosažené krystaly dokonalými.

Cu $K\alpha_1$

α_2

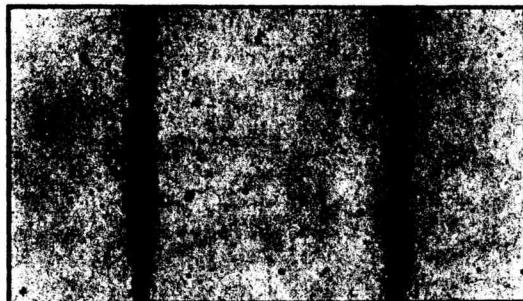


Obr. 1a.

Při uspořádání, kterého jsme použili se ukázalo, že námi dosažená rozlišovací mohutnost s fotografickou registrací úplně se vyrovná rozlišovací mohutnosti dosažené „dublecristalspectro-

Mo α_1

α_2



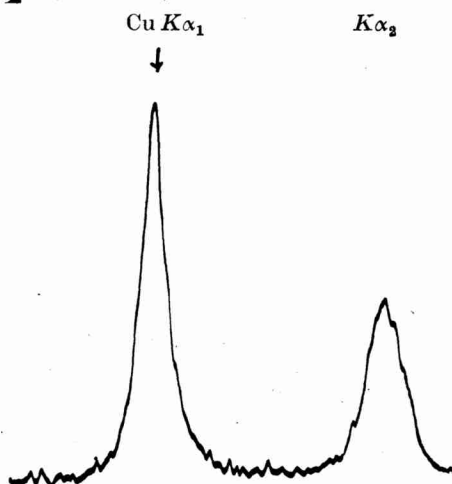
Obr. 1b.

metry“ s ionisační registrací resp. tubusspektrometrem a fotografickou metodou. U fokusační metody fotografické se zakřiveným krystalem podle Cauchois byla vyšetřována šířka obdržených čar pro Mo $K\alpha_1$ od Carlssona⁶⁾ v různých řádech a obdrženy hodnoty 0,48 X. j., 0,31 X. j., 0,30 X. j. a 0,28 X. j. pro 1 až 4-tý řád.

Zkoumali jsme čáry $K\alpha_1, \alpha_2$ Cu a Mo a dosáhli jsme takové rozlišovací mohutnosti, že podle srovnání s výsledky ostatních

autorů je nutno předpokládati, že šířka čar obdržená fotograficky odpovídá vlastní šířce čar, takže rozšíření vzniklé vadami krystalu je zanedbatelné (viz obr. 1).

Pro $\text{Mo } K\alpha_1, \alpha_2$ jsme obdrželi pro celou šířku čáry měřenou v poloviční výšce křivky černání, hodnotu $0,30 \text{ X. j.}$, což odpovídá $7,4 \text{ V}$. Pro Cu jsme obdrželi hodnoty různé pro $K\alpha_1$ a pro $K\alpha_2$. Pro $K\alpha_1$ obnášela šířka čáry $0,41 \text{ X. j.}$, což odpovídá $2,1 \text{ V}$ a pro $K\alpha_2$ $0,70 \text{ X. j.}$, což odpovídá $3,5 \text{ V}$ (viz mikrofotometrickou křivku Cu , obr. 2).



Obr. 2.

Rozdíl šířek čar $\text{Cu } K\alpha_1$ a α_2 ukazuje na různé doby životní vzbuzeného stavu těchto dvou čar. Podle principu neostrosti doba emise pro $\text{Cu } K\alpha_1$ je $\tau = 2 \cdot 10^{-15} \text{ vteřin}$ (z šířky čáry námi nalezené). Pro $\text{Cu } K\alpha_2$ odpovídá příslušné $\tau = 1 \cdot 10^{-15} \text{ vteřin}$. Uvedený rozdíl v šířce čáry byl již pozorován některými autory (jak plyne z hodnot uvedených v tab. 1) a dokonce některými autory byla předpokládána závislost rozdílu šířky čar na atomovém čísle⁷⁾. Naše hodnota pro šířku čáry $\text{Cu } K\alpha_1$ je menší než dosud měřená pomocí dublcrystalspektrometru. Jen hodnota uvedená Siegbahnem ve Spektroskopie der Röntgenstrahlen⁸⁾ získaná vakuovým spektrografem Braggova typu je menší, než je naše hodnota a obnáší $0,3 \text{ X. j.}$, což odpovídá $1,6 \text{ voltu}$. Tato hodnota je měřena přímo ze zvětšeniny. Kdybychom měřili naše hodnoty rovněž přímo ze snímků (viz obraz 1a) a ne z mikrofotometrické

⁶⁾ E. Carlsson, Zs. Phys., 84 (1933), 801.

⁷⁾ S. K. Allison, Phys. Rev., 44 (1933), 63.

⁸⁾ M. Siegbahn, Spektroskopie der Röntgenstrahlen, 1930, str. 116.

křivky, kde k rozšíření čáry přispívá optická šířka štěrby mikrofotometru, dostali bychom hodnotu menší rovněž, asi 0,3 X. j. Někteří autoři udávají také rozdíl ve vlnových délkách pro šířku čar Mo $K\alpha_1$ a α_2 . V našem případě jsme v mezích přesnosti ne-
nalezi žádného rozdílu, spíše se zdálo, že α_1 je širší než α_2 . Později se ukázalo, že tento poměr šířek čar byl pouze na některých snímcích a neodpovídal skutečnosti (možnost rozšíření čáry následkem přeexposice při fotografické registraci).

Autor	Δ Mo $K\alpha_{1,2}$		Δ Cu $K\alpha_1$		Δ Cu $K\alpha_2$		Registrace
	X. j.	volt	X. j.	volt	X. j.	volt	
Spencer	0,281	6,9	0,61	3,2	0,75	3,9	} ionisační
Allison	0,29	7,2	0,58	3,0	0,77	4,0	
Bearden-Shaw....	—	—	0,50	2,5	0,70	3,5	
Siegbahn	—	—	0,3	1,6	—	—	
Valasek	0,40	9,9	0,52	2,7	—	—	} foto- grafická
Carlsson	0,28	6,9	—	—	—	—	
Bačkovský } Dolejšek }	0,30	7,4	0,41	2,1	0,70	3,6	

Přepočteme-li však šířku čar v energetických hodnotách, vidíme, je-li trvání emise čar Mo stejná jako trvání emise čar Cu, že rozlišovací mohutnost dosud docílená nedostačí k dokázání rozdílu životních dob vzbuzeného stavu atomu u molybdenu, jak bylo dokázáno u mědi. Ze srovnání v tabulce 1 je zřejmo, že energetický rozdíl odpovídající šířce čar u Cu je asi 2—3 volty, naproti tomu u molybdenu je asi 7 volt, což znamená, že při stanovení stejné životní doby u Mo bylo by zapotřebí asi třikrát větší rozlišovací mohutnosti, než jaká je dosud dosažena. Trvání emise čar Mo $K\alpha$ z našeho výsledku odpovídá $6 \cdot 10^{-16}$ sek.

Nejdelší doba vzbuzeného stavu atomu při emisi paprsků X je asi $2 \cdot 10^{-15}$ sek. Srovnáme-li tento výsledek s normální dobou emise 10^{-8} sek a uvážíme-li, že doba emise $2 \cdot 10^{-15}$ sek je současně mez rozlišovací mohutnosti dosud dosažené, zdá se, že šířka čáry Cu $K\alpha_2$ je způsobena tím, že je v ní obsaženo dosud nerozštěpená jemná struktura čáry a že doby emise paprsků X jsou delší, než jest dosud možno zjistiti.

Zdůrazňujeme, že při měření šířek linií v tabulce uvedených jsme neprováděli korekci na šířku štěrby spektrografu, a to za předpokladu, že podmínky jsou takové, že $w = w_c$, což je možno podle Allisona⁶⁾ tehdy, lze-li psáti vztah:

$$a/2R \leq w_c/4,$$

kdež a je šířka štěrby, R je optická dráha paprsků a w_c znamená obor reflexe krystalu. Dosadíme-li hodnoty námi použité, t. j. $a = 0,034$ mm, $R = 140$ cm, obdržíme $w_c \geq 10''$. Poněvadž však jak

uvedeno naše hodnota šířky linií w rovná se krajním dosud obdrženým hodnotám, je nutno předpokládati, že hodnota w_c se projevuje v našem případě tak malá, že odpovídá hodnotám dokonalých krystalů a že ji lze zanedbat proti hodnotě dosažené šířky čáry.

*

The resolving power on the plastically deformed rocksalt crystals and the time of emission of the lines Cu $K\alpha$ and Mo $K\alpha$.

(Abstract of the preceding paper.)

Rocksalt crystals curved in a bearer with evenly stressed border fibres were used in the focusing method, in which the axis of the cylindrical crystal is perpendicular to the axis of the spectrograph. As shown in the figure 1a, 1b, such plastically curved crystals exhibit — at short time exposures — very high resolving power for Cu and Mo $K\alpha$ lines.

The uncorrected values for the width of the line Cu $K\alpha_2$ (see the figure 1a), which is 49" or 3,5 V, and for the width of Mo $K\alpha_1$ and $K\alpha_2$, which are both 42" or 7,5 V, attains the largest resolving power ever obtained for these lines, the uncorrected width of the line Cu $K\alpha_1$, which is 29" or 2,2 V is even smaller than mostly values (see the table 1).

The true resolving power resulting from these rocksalt values is unexpectedly high, especially since rocksalt is known to be an imperfect crystal. Here we can estimate the amount of w_c , which appears from our results. It can be seen from our results that the resolving power obtained is such, that no correction of the width of the lines on the slit is possible. Therefore we obtain for the perfection of the grating rocksalt crystal by means of Allison's equations taking $a/2R \leq w_c/4$. The resolving power obtained with rocksalt shows that the here applied focusing method using the plastically deformed crystals leads to very high resolving power.

To understand why no such difference is found between the width of the Mo-lines as between the Cu-lines, we must consider that for Cu $K\alpha_1$ the time of emission is

$$\Delta\tau \sim \frac{1}{\Delta\nu} \sim 2 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

and for Cu $K\alpha_2$ is $1 \cdot 10^{-15}$ sec.

For Mo-lines the smallest width found corresponds to $6 \cdot 10^{-16}$ sec, so that to prove an analogous difference in the time of emission for the lines Mo $K\alpha_1$ and Mo $K\alpha_2$ (if we will not suppose that the time of emission for the elements with higher atomic number is shorter) a still greater resolving power would be necessary.

Spectroscopic Institute of Charles University.

Délka dne v babylonských tabulkách měsíčních.

Arnošt Dittrich, Praha.

Věnováno panu profesorovi dr. Františku
Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den
3. prosince 1937.

V babylonských tabulkách měsíčních vyskytuje se sloupec věnovaný délce dne. Zpravidla následuje za délkou novu, jež je zároveň délkou slunce. Patrně se z ní počítá. Též délka dne je oscilující veličinou, jež kolísá mezi letní a zimní slunovratovou hodnotou. Ale kolísání to nezpracuje se pomocí babylonské řady aritmetické se stálou diferencí. Zde se difference skočmo mění.

Všimněme si tab. 1. — Vyjímá z Kidinnuovy tabulky nového světla, Nro. 272, sloupec *B*, jenž udává délku novu, sloupec *C*, délku dne, a sloupec *D*, jenž udává délku poloviční noci. Délka novu udává se ve stupních a jejich šedesátinných zlomcích. Den a polovina noci udává se v míře z°' , nám již ze sloupců *G* až *L* povědomých.¹⁾ Prvé číslo, značené z , jež nikdy nepřekročí 6, značí násobek 4^h , druhé je vyjádřeno v šedesátinách jedné čtyřhodiny, značí tedy 4^m našeho obvyklého čítání času. Značkou čtyřminuty je $^{\circ}$. Rovník otočí se za 4^m právě o 1° , čím tato značka se motivuje. Další značka $'$ znamená šedesátinu z 1° , tedy 4^s .

V této časomíře doplňuje se Babyloňanům den se svou nocí na $6z$. Proto počítá se délka poloviční noci *D* ze vzorce

$$D = \frac{6 - C}{2}.$$

Přezkoumáme-li čísla *C*, *D* z tab. 1. vidíme, že v sloupci *D* poloviny časového stupně, jež platí 4^m , se zaokrouhlují, a to zpravidla dolů, tedy vynecháváním. Také délky dne jsou zaokrouhleny na celistvé $^{\circ}$ časové. Jsou však přece jen spolehlivější. Proto se budeme držeti především jich.

¹⁾ Pojednání to jest pokračováním v tomto časopise uveřejněných článků: „Matematické prostředky babylonských astronomů“ (1933). — „Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci“ (1934).

Tabulka 1.

Z tabulky pro nové světlo Luny*) č. 272,81—7—6.

Čís.	Délka novu ~ B				Délka dne ~ C	Polovina noci ~ D
1	2°	2'	6"	20''' Arietis	2 ^z 56°	1 ^z 32°
2	0	52	45	38 Tauri	3 14	1 23
3	29	25	24	56 Tauri	3 26	1 17
4	27	40	4	14 Gemin.	3 34	1 13
5	26	4	44	16 Canceri	3 32	1 14
6	24	47	24	18 Leonis	3 24	1 18
7	23	48	4	20 Virginis	3 9	1 25
8	23	6	44	22 Librae	2 51	1 34
9	22	43	24	24 Scorpui	2 36	1 42
10	22	38	4	26 Arcit.	2 27	1 46
11	22	29	22	24 Capri	2 27	1 46
12	22	2	40	22 Amph.	2 36	1 42
13	21	17	58	20 Piscium	2 50	1 35
14	20	15	16	18 Arietis	3 7	1 27
15	18	54	34	16 Tauri	3 22	1 19
16	17	15	52	14 Gemin.	3 32	1 14
17	15	33	53	36 Canceri	3 35	1 12
18	14	9	54	58 Leonis	3 28	1 16
19	13	3	56	20 Virginis	3 15	1 22
20	12	15	57	42 Librae	2 58	1 31
21	11	45	59	4 Scorpui	2 41	1 40
22	11	34	0	26 Arcit.	2 29	1 45
23	11	31	57	4 Capri	2 25	1 47
24	11	11	53	42 Amph.	2 31	1 44
25	10	33	50	20 Piscium	2 43	1 38
26	9	37	46	58 Arietis	3 1	1 29
27	8	23	43	36 Tauri	3 18	1 21
28	6	51	40	14 Gemin.	3 29	1 15
29	5	3	2	56 Canceri	3 35	1 12
30	3	32	25	38 Leonis	3 31	1 14
31	2	19	48	20 Virginis	3 20	1 20
32	1	25	11	2 Librae	3 4	1 28
33	0	48	33	44 Scorpui	2 46	1 37
34	0	29	56	26 Arcit.	2 33	1 43
35	0	29	19	8 Capri	2 26	1 47
36	0	15	54	26 Amph.	2 28	1 46
37	29	44	29	44 Amph.	2 39	1 40
38	28	55	5	2 Piscium	2 54	1 33
39	27	47	40	20 Arietis	3 12	1 24

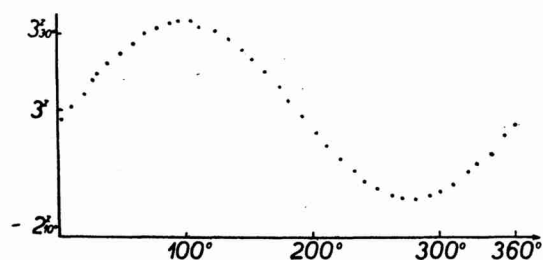
Založme si nyní tab. 2. Obsahuje celkem čísla z tab. 1., ale jsou přerovnaná, jak patrně na očíslování ve sloupci 1. Přerovnění nechává délky neustále růsti. Délky jsou nyní vyjádřeny celými stupni obloukovými a jejich decimálními zlomky až do tisícín. V dalším sloupci nalezneme příslušnou délku dne.

*) F. X. Kugler, Die Babylonische Mondrechnung, 12 (1900).

Tabulka 2.

Čís.	Délka novu	Délka dne	Čís.	Délka novu	Délka dne
1	2,035°	2 ^z 56°	32	181,420°	3 ^z 4°
26	9,630	3 1	20	192,266	2 58
14	20,255	3 7	8	203,112	2 51
39	27,795	3 12	33	210,800	2 46
2	30,879	3 14	21	221,766	2 41
27	38,395	3 18	9	232,723	2 36
15	48,910	3 22	34	240,499	2 33
3	59,423	3 26	22	251,567	2 29
28	66,861	3 29	10	262,635	2 27
16	77,265	3 32	35	270,489	2 26
4	87,668	3 34	23	281,532	2 25
29	95,051	3 35	11	292,490	2 27
17	105,565	3 35	36	300,265	2 28
5	116,079	3 32	24	311,198	2 31
30	123,540	3 31	12	322,045	2 36
18	134,165	3 28	37	329,742	2 39
6	144,790	3 24	25	340,564	2 43
31	152,330	3 20	13	351,300	2 50
19	163,066	3 15	38	358,918	2 54
7	173,801	3 9	1	2,035	2 56

Vykreslíme si graf, jenž směrem vodorovným nanáší délku slunce, svislým délkou dne. Viz obr. 1. Obdržíme vlnu složenou z lomených úseček, jež se blíží sinusoidě. Obecně Babyloňané



Obr. 1.

čtvrtvlnu nahradí jedinou tětivou. Zde užity tětivy tři. Usiluje se patrně o jemnější přiblížení než aritmetickou řadou střídavě stoupající a klesající.

Přes zaokrouhlení na celistvé stupně časové pro 4^m je tabulka důvěryhodná. Chceme z ní určit, na který stupeň padl Babyloňanův bod jarní. Otázka ta není zbytečná. U Řeků byl na 0°, což jsme i my přejali. Ale kdysi byl i na 15°, ba jsou i záznamy, jež jej kladou na 8° neb 10°. Pohyb bodu jarního může býti zdánlivý

od nepřesného roku tropického. Ale je i skutečný od praecesse. Dokud tato nebyla objevena, projevoval se jako přemístění bodu jarního v ekliptice od předků zděděné.

Stanovil jsem nejprve polohu slunovratů. Sluneční délce $90 + x$ přísluší u Babyloňanů den tak dlouhý, jako v čas délky $90 - x$. Totéž platí o délkách $270 + x$, $270 - x$. Vyjdeme od tab. 2 a nalezneme obyčejnou lineární interpolací ke každé délce dne souměrnou vůči slunovratu. Máme nyní dvě délky sluneční, jež souměrně obstupují slunovrat. Aritmetický střed obou dá délku slunovratu samého. Dostaneme pro něj 39 hodnot. Tři vyloučíme. Jsou nespolehlivé, pocházejíce z hodnot slunovratu blízkých, kdy zaokrouhlení dne na celistvé stupně časové nejvíce ruší. Zbude nám 36 položek slunovratových, mezi $99,5^\circ$ až $96,7^\circ$. Průměr: $98,227^\circ$.

Podobně jsem užil rovnodennosti. V babylonské aproximaci má den délku $3^z - y^\circ$ právě x dnů před rovnodenností, ale $3^z + y^\circ$ právě x dnů po rovnodennosti. Zase jsme vyloučili tři hodnoty opírající se o nejkratší a nejdelší dny. Zbylo 36 hodnot, jež kolísají mezi $9,8^\circ$ až $6,6^\circ$. Střední hodnota jest $8,242^\circ$.

Ze slunovratů dostaneme tedy bod jarní $8,23^\circ$, z rovnodennosti $8,24^\circ$. Zajisté lze počítati na to, že zlomek stupně byl okrouhlý v šedesátičném ponětí čísel. Vidím v něm přiblížení k $15'$, takže bod jarní padl na $8^\circ 15'$.

To je ale právě hodnota, k níž Kugler²⁾ dospěl zcela jinou cestou, totiž přes klínopisný materiál. Zvolil si nejprve tabulky, kde délka dne byla udána nezkráceně. Pak se mohl opřít o babylonské schema k počítání délky dne z délky slunce; je zachováno ve formě úplného početního návodu. Nyní navrhl si sám změny konstant, aby se početní schema hodilo pro tabulku Kidinnuovu. Pak určil numerickou zkouškou polohu bodu jarního. Schema Kuglerovo vyjadřuje tab. 3.

Tabulka 3.

Délka slunce	Na 1°	Den	Na 1°	Délka slunce
$8^\circ 15'$ Capri		$2^z 24^\circ$		$8^\circ 15'$ Capri
8 15 Amph.	+ 12'	2 30	— 12'	8 15 Arcit.
8 15 Piscium	+ 24	2 42	— 24	8 15 Scropii
8 15 Arietis	+ 36	3 0	— 36	8 15 Librae
8 15 Tauri	+ 36	3 18	— 36	8 15 Virginis
8 15 Gemin.	+ 24	3 30	— 24	8 15 Leonis
8 15 Cancr.	+ 12	3 36	— 12	8 15 Cancr.

²⁾ Kugler, Mondrechnung, 95.

Chceme-li znáti délku dne, když slunce stálo v $9^{\circ} 15'$ Capri, musíme k $2^z 24^{\circ}$ přidati $12'$, kde $1' = 4^s$. Pro $10^{\circ} 15'$ Capri dostaneme $2^z 24^{\circ} 24'$ atd.

Kugler legitimuje správnost svého postupu úspěchem.³⁾ Vypočítává pro příslušné délky sluneční trvání dne, zaokrouhluje na celistvé stupně časové a srovnává se sloupcem C a D . Den vyjde vždy přesně pro každou dobře čitelnou hodnotu originálu. Jen na třech místech jsou úchytky o jednotku posledního místa, t. j. o čtyři minuty. Ale to se vyrovnává shodou pro polovinu noci D .

Lomené úsečky, již Babyloňané aproximovali vlnu, nebudeme tentokrát vyjadřovat cosinem. Raději srovnáme přímo jejich aproximaci s délkou dne v Babyloně v různou dobu roční, jak nám jej poskytují tabulky Schochovy.⁴⁾

Tabulka 4.

☉	Den	Den	Schoch	Δ	☉
270°	2 ^z 24°	9 ^h 36 ^m	9 ^h 58 ^m	— 22 ^m	↑ 270°
280	2 26	9 44	10 2	— 18	260
290	2 28	9 52	10 8	— 16	250
300	2 30	10 0	10 18	— 18	240
310	2 34	10 16	10 34	— 18	230
320	2 38	10 32	10 50	— 18	220
330	2 42	10 48	11 8	— 20	210
340	2 48	11 12	11 28	— 16	200
350	2 54	11 36	11 48	— 12	190
0	3 0	12 0	12 8	— 8	180
10	3 6	12 24	12 28	— 4	170
20	3 12	12 48	12 48	0	160
30	3 18	13 12	13 8	+ 4	150
40	3 22	13 28	13 26	+ 2	140
50	3 26	13 44	13 44	0	130
60	3 30	14 0	13 58	+ 2	120
70	3 32	14 8	14 10	— 2	110
80	3 34	14 16	14 16	0	100
90	3 36	14 24	14 20	+ 4	90

V tabulce 4 je den Kidinnův udán v našich hodinách a minutách ve 3. sloupci. Ve sloupci 4. jsou čísla Schochova a za ním difference Δ . Vidíme, že babylonská schematisace odchyluje se až o — 22^m od nejkratšího dne, kdežto nejdelší den o + 4^m se pro-

³⁾ „Mondrechnung“, 101, sloupec VI. a VII.

⁴⁾ K. Schoch, „Planeten-Tafeln für jedermann“. Str. 3. Tab. B. (1927). — Udává se polovina denního oblouku. Den začíná, když refrakcí zvednutý horní okraj slunce stojí na obzoru. Končí posledním zábleskem světla za obdobných okolností.

dlužuje. Brali patrně nejdelší den okrouhle jako $3\frac{2}{3}$, nejkratší $2\frac{2}{3}$ čtyrhodin. Schoch udává na str. 3 v tab. D nejdelší den babylonských $14^h 19,5^m$, nejkratší $9^h 58,9^m$.

Ani babylonská astronomie nespadla s nebe jako zázrak a dokonalost. I její vymoženosti se postupně vybojovaly a zlepšovaly. Ještě není odvaha držeti se empirického, tabulovaného zákona. Přednost se dává zjednodušující schematisaci.

*

La longueur du jour dans les tables lunaires des Babyloniens.

(Extrait de l'article précédent.)

La table de Kidinnu No. 272 contient après la colonne *B* avec les longueurs du soleil la colonne *C* avec les longueurs du jour respectives. Voilà la table 1. La colonne *D* calcule de *C* la moitié de la nuit. Dans la table 2, qui est arrangée d'après les longueurs, on trouve 39 valeurs pour *C* comme fonction de la quantité *B*. Le graphique (fig. 1.) montre que cette fonction approche de la sinusoïde. Chaque de l'onde est composé de trois cordes. A l'aide des valeurs qui sont placées symétriquement autour des solstices ou des équinoxes 4^m autour a trouvé la position du point vernal des Babyloniens $8^\circ 15'$.

La table No. 3. explique le mécanisme du calcul des Babyloniens découvert par Kugler. La table No. 4. fait la comparaison entre les longueurs du jour des Babyloniens et entre celles de Schoch. La différence s'explique par la tendance des Babyloniens à avoir une valeur arrondie pour le plus court et le plus long jour.

Určení radiantu roje z pozorovaných stop meteorů.

Zdeněk Horák, Praha.

Věnováno panu profesorovi dr. Františku
Nušlovi k jeho sedmdesátinám dne 3. pro-
since 1937.

Při stanovení radiantu meteorického roje má podstatný význam otázka vah veličin, kterými je určena poloha zakreslených stop. Podle toho, jaké váhy přisoudíme těmto veličinám, docházíme metodou nejmenších čtverců k různým podmínkám pro radiant. Prof. Svoboda řešil tuto otázku experimentálně pomocí t. zv. umělého meteoru.¹⁾ Výsledek jeho pokusů je tento²⁾: Ze tří podmínek vyžadujících, aby byl nejmenší součet čtverců:

- (I) vzdáleností radiantu od stop,
 - (II) úhlů sevřených stopou a spojnicí jejího středu s radiantem,
 - (III) předešlých vzdáleností a úhlů,
- dává metoda II nejsprávnější hodnoty souřadnic radiantu.

V tomto článku řeším problém teoreticky za předpokladu, že souřadnice krajních bodů všech stop jsou určeny se stejnou přesností. Tím docházím k podmínce, která v případě stejně dlouhých stop přibližně odpovídá metodě II, kterou prof. Svoboda shledal nejvýhodnější. Za hořejšího předpokladu je možno provésti určení radiantu prostě užitím vyrovnávacího počtu, stanovíme-li jakkoliv přibližnou polohu radiantu. K tomu se dobře hodí grafická metoda, kterou uvádím v tomto článku. Spočívá v tom, že každé stopě přiřadí se podle zákona polaritý určitý bod a tak se dostanou body ležící přibližně na přímce, které duálně odpovídá bod, jenž je hledaným radiantem. Metoda je zvláště jednoduchá, jestliže se k vyrovnání řady bodů užije přibližné metody, kterou jsem již

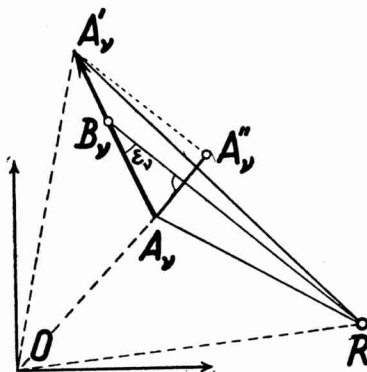
¹⁾ J. Svoboda: Versuche mit dem künstlichen Meteor, Vierteljahrsschr. d. Astron. Ges., 70, Lipsko 1935, str. 305—306.

²⁾ J. Svoboda: Les essais expérimentaux du calcul d'un radiant du courant météorique des trajets observés, C. R. du Congrès int. d. Math. Oslo 1936, II, p. 237—238.

dříve teoreticky odvodil a prakticky vyzkoušel při měření závislosti tepelné vodivosti práškových hmot na teplotě.³⁾ Uvedené grafické metody je možno užít také přímo jako rychlé a pohodlné metody k určení přibližného radiantu roje. V případě řešení početně ve 4. odst. tohoto článku dává ostatně tato metoda sama dostatečně přesný výsledek.

1. Základní podmínka.

Označíme-li ξ_v, η_v pravouhlé souřadnice počátečního bodu A_v a ξ'_v, η'_v souřadnice koncového bodu A'_v v -té stopy (obr. 1), platí



Obr. 1.

pro souřadnice m, n libovolného bodu stopy rovnice

$$n - \eta_v = \frac{\eta'_v - \eta_v}{\xi'_v - \xi_v} (m - \xi_v)$$

čili

$$(\eta'_v - \eta_v) m - (\xi'_v - \xi_v) n + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = 0. \quad (1)$$

Obecně tato rovnice bude splněna pravděnejpodobnějšími souřadnicemi X, Y radiantu R jen přibližně, t. j.

$$(\eta'_v - \eta_v) X - (\xi'_v - \xi_v) Y + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = v_v, \quad (2)$$

při čemž opravy v_v mají malé hodnoty. Abychom mohli užít metody nejmenších čtverců, nutno určit váhy P_v oprav v_v , pro které platí známý vzorec (srovn.⁵⁾ str. 55)

$$\frac{1}{P_v} = \left(\frac{\partial v_v}{\partial \xi_v} \right)^2 \frac{1}{p_v} + \left(\frac{\partial v_v}{\partial \eta_v} \right)^2 \frac{1}{q_v} + \left(\frac{\partial v_v}{\partial \xi'_v} \right)^2 \frac{1}{p'_v} + \left(\frac{\partial v_v}{\partial \eta'_v} \right)^2 \frac{1}{q'_v}, \quad (3)$$

³⁾ Z. Horák: Teplotní koeficienty tepelné vodivosti práškových hmot, Technický Obzor, XLV, Praha 1937, str. 68—71, 86—89. — Srovn. též Technický Obzor, XLIV, 1936, str. 200—204.

kde $p_v, q_v; p'_v, q'_v$ jsou váhy souřadnic $\xi_v, \eta_v; \xi'_v, \eta'_v$. Předpokládám především, že všechny čtyři souřadnice krajních bodů téže stopy mají stejnou váhu, což podle (2) a (3) vede k výsledku

$$\frac{1}{P_v} = \frac{1}{p_v} [(Y - \eta'_v)^2 + (\xi'_v - X)^2 + (\eta_v - Y)^2 + (X - \xi_v)^2] = \frac{\delta_v^2 + \delta'_v{}^2}{p_v}, \quad (4)$$

značí-li δ_v a δ'_v vzdálenosti počátečního a koncového bodu stopy od radiantu. Kdybychom znali váhy p_v , vypočetli bychom z rov. (4) P_v a mohli bychom již napsati základní podmínku Gaussovy metody

$$\sum_v P_v v_v^2 = [Pvv] = \text{minimum}, \quad (5)$$

která vede k rovnicím:

$$\frac{\partial [Pvv]}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial [Pvv]}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

určujícím pravděnejpodobnější souřadnice radiantu X, Y . Nejjednodušší předpoklad, který se mi zároveň zdá nejbezpečnějším a většinou aspoň přibližně splněným, je předpoklad, že souřadnice krajních bodů všech stop jsou odhadnuty stejně přesně. Bylo by možno sice pokládati krajní body stop pomalejších nebo jasnějších meteorů za přesněji určené, ale pochybuji, že by bylo lehko kvantitativně správně vystihnouti nějakým obecným pravidlem všechny případy. Je ovšem možno od případu k případu různými vahami p_v oceniti zvláště přesná i méně jistá pozorování, jako je tomu při každém měření. Pak platí obecný vzorec plynoucí z (4)

$$P_v = \frac{p_v}{\delta_v^2 + \delta'_v{}^2}, \quad (4')$$

v dalším budu však ve smyslu hořejšího předpokladu klásti všechna $p_v = 1$, t. j.

$$P_v = \frac{1}{\delta_v^2 + \delta'_v{}^2}, \quad (7)$$

čímž rovnice (5) přejde v podmínku

$$\sum_v \frac{v_v^2}{\delta_v^2 + \delta'_v{}^2} = \text{minimum}. \quad (8)$$

Abychom mohli tento výsledek porovnat s výsledky pokusů Svobodových, je nutno dáti této podmínce geometrický význam. Výrazy v_v je možno psáti podle (2) ve tvaru

$$v_v = \begin{vmatrix} XY \\ \xi'_v \eta'_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} XY \\ \xi_v \eta_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_v \eta_v \\ \xi'_v \eta'_v \end{vmatrix},$$

z něhož je při pohledu na obr. 1 zřejmo, že

$$v_r = 2\Delta ORA' - 2\Delta ORA_r - 2\Delta OA_r A' = 2\Delta RA_r A'. \quad (9)$$

Oprava v_r je tedy rovna dvojnásobné ploše trojúhelníka tvořeného radiantem a krajními body r -té stopy. Tuto plochu nutno bráti kladně, leží-li radiant napravo od stopy, díváme-li se směrem pohybu meteoru. Je-li tedy B_r libovolný bod této stopy a ε_r úhel, který svírá se stopou jeho spojnice s radiantem, jest

$$v_r = \overline{A_r A'} \cdot \overline{RB_r} \cdot \sin \varepsilon_r. \quad (10)$$

Volme nyní body B_r tak, aby čtverce jejich vzdáleností od R byly nepřímo úměrné vahám P_r , tedy podle (7) aby

$$\overline{RB_r}^2 = k (\delta_r^2 + \delta_r'^2), \quad (11)$$

kde k je libovolná, ale pro všechny stopy stejná konstanta. Značí-li s_r délku stopy, lze psáti vzhledem k (10) a (11) rovnici (8) ve tvaru

$$k \sum_r s_r^2 \sin^2 \varepsilon_r = \text{minimum.}$$

Konstantou k lze ovšem dělit, čímž obdržíme podmínku

$$\sum_r (s_r \sin \varepsilon_r)^2 = \text{minimum,}$$

v níž k již nevystupuje a můžeme tedy bez újmy obecnosti voliti $k = \frac{1}{2}$. Pak je bod B_r určen tím, že jeho vzdálenost od radiantu je kvadratickým středem vzdáleností obou krajních bodů a budu jej stručně nazývati kvadratickým středem stopy (ač jeho poloha je závislá na poloze radiantu). Součin $s_r \sin \varepsilon_r$ je roven průmětu $A_r A_r''$ stopy do směru kolmého k přímce $\overline{RB_r}$, což vede k výsledku: Pravděnejpodobnější poloha radiantu je dána podmínkou, že součet čtverců stop, promítnutých kolmo k spojnici jejich kvadratických středů s radiantem, je nejmenší.

Pro názornější představu o poloze kvadratického středu stopy odvodím jeho konstrukci. Položíme-li $\delta_r' = \delta_r + \sigma_r$, bude

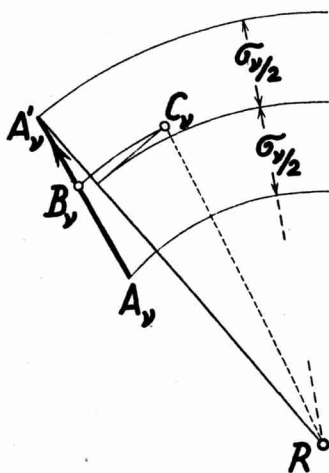
$$\overline{RB_r}^2 = \frac{\delta_r^2 + \delta_r'^2}{2} = \delta_r^2 + \delta_r \sigma_r + \frac{\sigma_r^2}{2} = \left(\delta_r + \frac{\sigma_r}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{2} \right)^2,$$

odkud plyne tato konstrukce (obr. 2): Nanesme na kolmici, vztyčenou k spojnici RA' , ve vzdálenosti $\sigma_r/2$ od A' , délku $\sigma_r/2$ a koncovým bodem C_r opišme kolem R kružnici. Její průsečík se stopou je jejím kvadratickým středem B_r . Je patrné, že bod takto sestrojený leží vždy dále od R než geometrický střed stopy a odděluje krajní body v poměru, který je různý pro různé stopy. Bylo by tedy možno volbou konstanty k docíliti obecně toho, aby bod B_r splynul se středem stopy, jen pro jediný meteor.

Většinou jsou však úhly ϵ_r dosti malé, takže $\sigma_r \doteq s_r$. Není-li pak stopa příliš blízko radiantu, je kvadratický střed jen málo vzdálen od geometrického středu stopy a tím méně liší se navzájem poměry, v nichž kvadratické středy dělí jednotlivé stopy. Pro malé úhly můžeme nahraditi sinus úhlem, což vede k podmínce

$$\sum s_r^2 \epsilon_r^2 = \text{minimum},$$

ve které podle předešlého můžeme s malou chybou měřiti úhly ϵ_r ,



Obr. 2.

od geometrického středu místo od středu kvadratického. Ve zvláštním případě, kdy všechny stopy jsou stejně dlouhé, máme tedy:

$$\sum \epsilon_r^2 = \text{minimum}.$$

Tato podmínka odpovídá právě metodě II, která podle Svobodových pokusů je nejvýhodnější ze tří jím uvažovaných metod. Ježto pokusy byly konány se stopami stejně dlouhými, vidíme, že Svobodova metoda II odpovídá přibližně podmínce zde odvozené. Z toho možno souditi, že můj předpoklad o stejně přesném určení koncových bodů všech stop byl při pokusech s umělým meteoritem aspoň přibližně splněn, ježto odchylky metodou II počítaných souřadnic radiantu od souřadnic skutečného radiantu jsou menší než jejich pravděpodobné chyby (Svoboda²).

2. Početní metoda vyrovnávací.

Pravděpodobnější souřadnice X, Y radiantu roje jsou určeny rovnicemi (6), do nichž je nutno dosaditi za v_r z rovnic (2)

a za P_v hodnoty (7), po př. (4'). Číselný výpočet lze však provésti pohodlněji užitím vyrovnávacího počtu. Jedná se zde o vyrovnání pozorování zprostředkujících v případě, kdy určující rovnice jsou nerozvinuté a vzhledem k zprostředkujícím veličinám nelineární. Řešení obecného problému tohoto druhu je stručně naznačeno v Helmertově učebnici vyrovnávacího počtu⁴⁾ a podrobně uvedeno v Čuříkové Počtu vyrovnávacím.⁵⁾

Určující rovnice zní podle (1)

$$(\eta'_v - \eta_v) X - (\xi'_v - \xi_v) Y + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = 0.$$

Buďte X_0, Y_0 přibližné hodnoty, které se od nejvýhodnějších hodnot

$$X = X_0 + x, Y = Y_0 + y \quad (12)$$

liší o malé korekce x, y , jichž čtverce lze zanedbat. Označíme-li

$$(\eta'_v - \eta_v) X_0 - (\xi'_v - \xi_v) Y_0 + \eta_v \xi'_v - \xi_v \eta'_v = l_v, \quad (13)$$

$$\eta'_v - \eta_v = a_v, \quad \xi'_v - \xi_v = -b_v, \quad (14)$$

jsou rovnice oprav

$$v_v = a_v x + b_v y + l_v. \quad (15)$$

Opravy mají váhy absolutních členů l_v :

$$\frac{1}{P_{0v}} = \left(\frac{\partial l_v}{\partial \xi_v} \right)^2 \frac{1}{p_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \eta_v} \right)^2 \frac{1}{q_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \xi'_v} \right)^2 \frac{1}{p'_v} + \left(\frac{\partial l_v}{\partial \eta'_v} \right)^2 \frac{1}{q'_v}$$

a mají za dříve učiněného předpokladu $p_v = q_v = p'_v = q'_v$ hodnoty

$$P_{0v} = \frac{p_v}{\delta_{0v}^2 + \delta'_{0v}^2} \text{ po př. } P_{0v} = \frac{1}{\delta_{0v}^2 + \delta'_{0v}^2}, \quad (16)$$

značí-li $\delta_{0v}, \delta'_{0v}$ vzdálenosti počátečního a koncového bodu stopy od přibližného radiantu $R_0(X_0, Y_0)$. Druhá rovnice (16) platí v případě, že pokládáme všechny váhy p_v za stejné a klademe je rovny jedné (srovn. (7)). Normální rovnice sestavíme podle známého předpisu:

$$\begin{aligned} [P_{0aa}] x + [P_{0ab}] y + [P_{0al}] &= 0, \\ [P_{0ab}] x + [P_{0bb}] y + [P_{0bl}] &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

a řešíme obvyklým způsobem, čímž získáme korekce x, y . Koeficienty vypočteme ze změřených souřadnic krajních bodů stop. Pohodlněji je však získáme graficky na podkladě jejich geometrického významu: Koeficienty a_v, b_v jsou prostě rozdíly souřadnic krajních bodů. Vyznačíme-li na mapě také bod R_0 , sestrojíme

⁴⁾ F. R. Helmert - H. Hohenner: Die Ausgleichungsrechnung nach d. Meth. d. kleinsten Quadrate, B. G. Teubner, 3. vyd., 1924, str. 173.

⁵⁾ Česká matice technická (č. sp. 173), Praha 1936, odst. 46. — V následujícím přidržím se názvosloví i označení této knihy.

$\sqrt{\delta_{0''}^2 + \delta'_{0''}{}^2}$ jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $\delta_{0''}$, $\delta'_{0''}$ a l'' jako součin délky stopy s'' a kolmé vzdálenosti R_0 od stopy. Součin je kladný, leží-li R_0 napravo od stopy, uvažované jako vektor směru souhlasného s rychlostí meteoru.

Uvedený postup je správný, pokud X_0 , Y_0 jsou dostatečně přesné, a čím přesnější jsou, tím snáze se provádí výpočet korekcí x , y . Proto je výhodno užít k určení souřadnic X_0 , Y_0 nějaké přibližné metody na př. grafické metody, kterou uvádím v následujícím odstavci.

3. Metoda grafická.

Metoda pozorování meteorů je v podstatě metodou grafickou. I když určujeme polohu radiantu výpočtem, máme co činit s veličinami, které přímo nepozorujeme, nýbrž které odvozujeme graficky ze zakreslených stop. Při tom dopouštíme se nových chyb, ježto zakreslené stopy nevylučují jistou libovůli v odhadu souřadnic krajních bodů. Proto hledal jsem vhodnou metodu grafickou — odpovídající grafickému charakteru metody pozorovací, která by dovozovala přímo na zakreslovací mapě sestrojiti radiant roje. Metodu založil jsem na geometrickém zákonu duality. Podle tohoto zákona, jak známo, zůstávají v rovině všechny geometrické věty v platnosti, zaměníme-li body a přímky. V našem případě jde o stanovení pravděnejpodobnějšího průsečíku přímek, které teoreticky mají procházeti jedním bodem. Duálně odpovídá této úloze problém najíti pravděnejpodobnější polohu přímky, na níž teoreticky mají ležeti body oněm přímkám příslušné. Přiřadíme-li tedy nějakou duální transformaci každé stopě určitý bod, můžeme přímku, na které mají ležeti všechny tyto body, stanoviti vyrovnáním lineární závislosti mezi souřadnicemi bodů. Duálně této přímkou odpovídající bod je pak hledaným radiantem.

Výhodno je voliti za duální transformaci polaritu, jejíž základní kuželosečkou je kružnice. Narýsujeme tedy na mapě, ve které jsou zakresleny stopy meteorů, kružnici, jejíž střed neleží příliš blízko žádné ze stop, a sestrojíme známým způsobem pro každou stopu její pól vzhledem k narýsované kružnici.⁶⁾ Tím dostaneme řadu bodů, které přibližně leží na přímce, jejíž pól vzhledem k dané kružnici je již hledaným radiantem roje. Nejvýhodnější

⁶⁾ Protíná-li (prodloužená) stopa kružnici, je jejím pólem průsečík tečen ke kružnici, sestrojených v průsečících stopy s kružnicí. Neprotíná-li stopa kružnici, sestrojíme průměr kolmý ke stopě a na něm bod, který tvoří s patou kolmice a koncovými body průměru harmonickou čtveřinu. Konstrukci čtvrtého bodu harmonického provedeme známým způsobem pomocí rovnoběžek vedených koncovými body průměru, jež protneme příčkou jdoucí průsečíkem průměru se stopou.

polohu této přímky najdeme nejsnáze některou z grafických metod vyrovnávacích.⁷⁾

Tím by bylo grafické řešení problému provedeno, kdybychom znali váhy jednotlivých pólů stop. Obecně odpověď na tuto otázku není jednoduchá, neboť váhy pólů stop závisí také na volbě kružnice. Zavedením vah by tedy grafická metoda pozbyla na své jednoduchosti a tím také na své výhodnosti. Chceme-li, aby byla jednoduchá, musíme se spokojit s menší přesností. Proto učiním předpoklad, že póly všech stop mají stejnou váhu, který vede k pohodlné grafické metodě, již lze užít jako metody přibližné. Nezjišťujeme-li totiž váhy bodů, je zbytečno přesně je vyrovnávat a stačí k stanovení poláry radiantu některá metoda přibližná, čímž se konstrukce velmi zjednoduší.

Vhodná je zde na př. přibližná metoda vyrovnání lineární závislosti, kterou jsem odvodil v odst. 1. již citované práce³⁾, při čemž jsem ukázal, že lze ji upravit na metodu grafickou (l. c., str. 70). Postup konstrukce je následující: Rozdělíme všechny body do dvou stejně početných⁸⁾ skupin kolmicí k odhadnutému směru vyrovnané přímky a sestrojíme těžiště první i druhé skupiny bodů. Spojnice obou těžišť je přibližná poloha vyrovnané přímky. Konstrukci těžiště každé skupiny provádíme nejsnáze postupně, sestrojíme nejprve těžiště dvojic bodů a pak těžiště těchto těžišť, která pak mají váhu dvojnásobnou atd. Konstrukce je téměř stejně jednoduchá i v případě bodů různé váhy.

4. Příklad.

K objasnění uvedené metody provedu určení radiantu z deseti zakreslených stop umělého meteoru, pozorovaných prof. Svobodou na astronomické observatoři českého vysokého učení technického v Praze. Obraz 3 představuje mapu s pravoúhlou souřadnou soustavou přímek. Zakreslené stopy meteoru jsou označeny čísly 1 až 10, umístěnými u koncových bodů stop opatřených šipkami udávajícími směr letu. Na mapě byla provedena konstrukce přibližné polohy radiantu grafickou metodou popsanou v odst. 3. Body označené 1 až 10 jsou póly stop 1 až 10 vzhledem ke kružnici K opsané kolem středu S . Bod I je těžiště levé poloviny bodů, t. j. pólů: 2, 7, 9, 1, 10 a bod II je těžiště pravé poloviny, t. j.

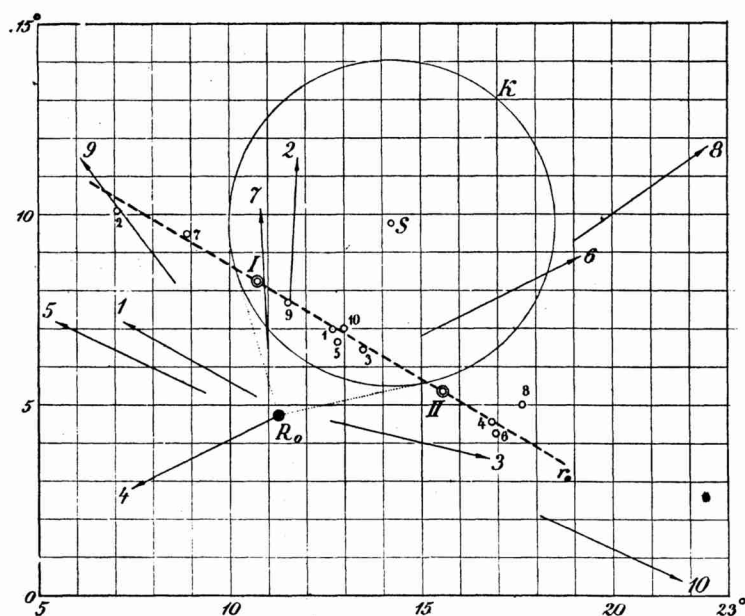
⁷⁾ Viz na př. ⁵⁾ odst. 57.

⁸⁾ Je-li počet bodů lichý, vedeme kolmicí prostředním bodem a počítáme jej do obou skupin s poloviční vahou. Mají-li však body jedné skupiny větší odchylky než body skupiny druhé, připojíme lichý bod ke skupině první. Podobně je nutno (i v případě sudého počtu bodů) vzít do jedné skupiny více bodů, jestliže vykazuje značně větší rozptyl než druhá a to tak, aby těžiště obou skupin byla určena přibližně se stejnou střední chybou.

pólů: 5, 3, 4, 6, 8. Pól R_0 spojnice r_0 bodů I a II vzhledem ke kružnici K je přibližným radiantem roje.

K zjištění pravděnejpodobnější polohy R radiantu užil jsem vyrovnávací metody uvedené v odst. 2. Za přibližné hodnoty X_0, Y_0 zvolil jsem souřadnice bodu R_0 odečtené na mapě:

$$X_0 = 11,31^\circ, Y_0 = 4,73^\circ. \quad (18)$$



Obr. 3.

K sestavení normálních rovnic (17) pro korekce x, y je třeba určit veličiny a'', b'', l'', P_0'' definované rovnicemi (13), (14), (16), podle nichž lze je počítati ze souřadnic krajních bodů stop odečtených na mapě. Pohodlnější je odvoditi jejich hodnoty přímo z mapy. Pro a'', b'' je to velmi snadné. Plocha l'' je rovna součinu z délky stopy a její kolmé vzdálenosti od R_0 a je kladná, když R_0 leží napravo od stopy, díváme-li se ve směru šipky. K zjištění P_0'' změříme přeponu pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $\overline{R_0 A''}$, $\overline{R_0 A'''}$, umocníme na druhou a vezmeme převrtnou hodnotu. Tímto způsobem získané hodnoty podává níže uvedené schema výpočtu. Při tom jsou všechny veličiny měřeny ve stupních a za P_0'' byly pro pohodlnější výpočet vzaty hodnoty dané druhou rovnicí (16) násobené stem. Odchyly v'' , nutné pro výpočet střední chyby, počítány byly po rozřešení normálních rovnic podle

vztahu (15). Dosazením součtů, uvedených v posledním řádku, do rovnic (17) obdržíme normální rovnice:

$$139,9x + 23,6y - 2,4 = 0,$$

$$23,6x + 274,9y - 13,4 = 0,$$

jichž řešením plynou korekce

$$x = 0,009^\circ, y = 0,048^\circ. \quad (19)$$

Schema výpočtu.

v	a	b	l	P_0	P_0aa	P_0ab	P_0al	P_0bb	P_0bl	v	P_0vv
1	+2,0	+3,5	-0,40	4,30	17,2	+30,1	-3,4	52,7	-6,0	-0,22	0,20
2	+3,8	-0,2	-0,57	1,84	26,6	-1,4	-4,0	0,1	+0,2	-0,55	0,57
3	-1,0	-4,2	+0,60	3,02	3,0	+12,7	-1,8	53,3	-7,6	+0,39	0,47
4	-2,0	+4,0	0,00	5,26	21,0	-42,1	0,0	84,2	0,0	+0,08	0,03
5	+1,9	+4,0	+0,15	2,94	10,6	+22,3	+0,8	47,0	+1,7	+0,26	0,20
6	+2,1	-4,2	+0,80	1,03	4,5	-9,1	+1,7	18,2	-3,5	+0,61	0,39
7	+3,7	+0,2	+0,74	3,02	41,3	+2,2	+8,3	0,1	+0,4	+0,78	1,85
8	+2,5	-3,5	-3,11	0,41	2,6	-3,6	-3,2	5,0	+4,5	-3,26	4,35
9	+3,3	+2,5	+0,26	1,09	11,9	+9,0	+1,0	6,8	+0,7	+0,41	0,19
10	-1,7	-3,7	+1,87	0,55	1,6	+3,5	-1,8	7,5	-3,8	+1,68	1,55
[]					139,9	+23,6	-2,4	274,9	-13,4		9,80

Střední chyba jedničky váhy

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_0vv]}{10-2}} = \pm 1,1^\circ$$

a váhy korekcí

$$p_x = [P_0aa] - \frac{[P_0ab]^2}{[P_0bb]} = 138, \quad p_y = [P_0bb] - \frac{[P_0ab]^2}{[P_0aa]} = 271,$$

takže jejich střední chyby

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} = \pm 0,09^\circ, \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \pm 0,07^\circ.$$

Pravděpodobnější souřadnice radiantu jsou tedy podle (12), (18) a (19):

$$X = 11,32^\circ \pm 0,06^\circ, \quad Y = 4,78^\circ \pm 0,05^\circ. \quad (20)$$

K souřadnicím připojené pravděpodobné chyby jsou větší než korekce (19); vidíme tedy, že v tomto případě přibližná grafická metoda dává dostatečně přesný výsledek. Svobodova metoda II vede k výsledku [2] groupe 7]

$$X' = 11,37^\circ, \quad Y' = 4,78^\circ,$$

tedy v mezích přesnosti úplně shodnému s hodnotami (20), což odpovídá dříve zjištěnému vztahu obou metod.

Z předešlého příkladu je patrna užitečnost grafické metody. I když se nespokojíme s výsledkem, který poskytuje sama o sobě, usnadní značně sestavení a řešení normálních rovnic i určení chyb, ježto lze se omeziti na zcela malý počet míst.

*

Sur la détermination du radiant d'un courant météorique observé.

(Résumé de l'article précédent.)

En appliquant la méthode des moindres carrés au problème du calcul du radiant d'un courant météorique, on obtient des résultats différents suivant les poids adoptés pour les trajets observés. M. Svoboda a étudié le problème au moyen d'expériences faites sur un météore artificiel¹⁾ et il a trouvé comme étant la plus exacte la méthode fondée sur la supposition que la somme des carrés des angles, dont il faut faire tourner les trajets dessinés autour de leurs centres pour les faire passer par le radiant, est minima.²⁾

Dans cet article, j'envisage la question de la détermination du radiant du point de vue théorique, en me plaçant dans l'hypothèse que les coordonnées des extrémités de tous les trajets, obtenus par l'observation, sont d'égale précision. Par là, je parviens à une condition qui, en cas de trajets d'égale longueur, se réduit à peu près à celle trouvée par M. Svoboda comme la plus exacte. Pour pouvoir y appliquer les méthodes de compensation connues, on a besoin de valeurs approchées des coordonnées du radiant. On les obtient, par exemple, en se servant de la méthode approximative graphique que j'ai imaginée dans ce but: On trace une circonférence convenablement choisie et l'on construit, pour chaque trajet météorique, son pôle relatif à la circonférence. Comme tous les trajets pointent — approximativement — vers le radiant du courant, leurs pôles sont alors sensiblement placés sur une droite à savoir la polaire du radiant. Il suffit donc de trouver d'une manière quelconque la position de cette droite et de construire son pôle, pour avoir le radiant cherché. On obtient facilement la position de la polaire par le procédé approximatif suivant: On divise les pôles des trajets en deux groupes égaux et l'on construit les centres de gravité de chacun d'eux. Ceci fait, la droite, qui joint ces deux centres, est la polaire du radiant approximatif. En terminant l'article, je montre par un exemple numérique que la méthode graphique, dont je viens de parler, donne elle-même, dans le cas présent, les coordonnées du radiant avec une précision très satisfaisante.

KRUH, svazek 12.

ÚVOD DO INTEGRÁLNÍHO POČTU

Napsal dr. VOJTĚCH JARNÍK, profesor Karlovy university v Praze

8° 168 str. 12 obr.

1938

Brož. Kč 26,40

Knížka je myšlena jako první úvod do integrálního počtu pro začátečníky, a to jako pokračování Kösslerova Úvodu do počtu diferenciálního (Kruh, 4). Předpokládá, že čtenář ovládá látku obsaženou v Kösslerově spisu, přes to však opakuje v I. kap. některé věci z této knížky a připojuje k nim doplňky. Kap. II—V se pak zabývají integrálním počtem, při čemž se zásadně omezují jen na reálná čísla. Cvičení (85) jsou volena většinou jako bezprostřední aplikace vyložené látky.

Je to spolehlivý a při tom snadno srozumitelný výklad prvních počátků integrálního počtu a tvoří s Kösslerovou knížkou nepostrádatelnou pomůcku pro všechny, kteří chtějí vniknouti do základů diferenciálního a integrálního počtu.

PRÁVĚ VYŠLO

Prof. dr. Karel Rychlík

Úvod do počtu pravděpodobnosti.

4° VI, 144 str.

1938

Brož. Kč 30,—.

Dodá každý knihkupec nebo nakladatel

Jednota československých matematiků a fysiků v Praze.

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

**přesně vyrobené
spolehlivě fungující
odborně vyzkoušené**

**vyrábí a dodává,
všechny přístroje a pomůcky kterékoliv výroby
pečlivě a odborně opravuje**

FYSMA,

společnost s ručením omezeným,

založená Jednotou československých matematiků a fysiků

 **přesídlila** 

PRAHA II, Žitná 25.

Telefon 28714, 29308.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze.
Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od
8—12 a od 14—18 hodin kromě soboty odpoč., neděle a svátku. —
Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus
v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová
sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII.
Dohledací úřad Praha 25.