Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny.

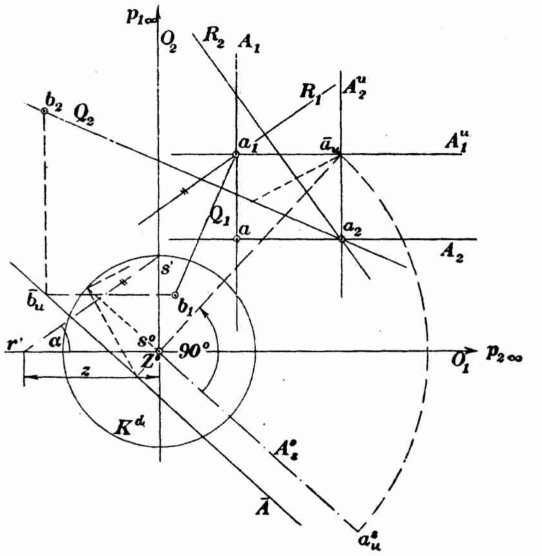
Josef Klíma, Brno.

(Došlo dne 23. prosince 1936.)

V pojednání „O jistém lineárním zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny" ve Věstníku Královské české společnosti nauk, roč. 1936 v odstavci 31 poukázal jsem na nejzajímavější zvláštní případ tohoto zobrazení, o němž bude zde pojednáno. Pojednání toto v dalším označím vždy písmenou Z s číslem příslušného odstavce.

1. Za základní dva komplexy lineární zvolíme zde shodné komplexy Σ_1, Σ_2, jichž osy O_1, O_2 leží v obrazně π a jsou vzájemně kolmé (obr. 1). Parametr obou komplexů budiž označen $+ d$, t. j. jejich paprsky jsou normálami šroubovic pravotočivého šroubového pohybu o redukované výšce d. Levotočivé komplexy Σ_1, Σ_2 jsou v involuci a svazek jimi určený má za základní lineární kongruenci $T_{1,2}$ rotační kongruenci o hlavním paprsku $Z \perp \pi$ v průsečíku (O_1O_2). V obraze 1 vyznačen kolmý průmět na obraznu $\pi \equiv (O_1O_2)$. Ježto nulové body p_1, p_2 roviny π jsou úběžnými body os O_2, O_1, přechází zde karakteristická projektivita Π_X obecného případu v involuci na úběžné přímce X_∞ roviny π, o níž lze se snadno přesvědčiti, že má samodružné body v kruhových bodech $+ i$, $- i$ roviny π. Řídicí přímky ${}^1D$, ${}^2D$ kongruence $T_{1,2}$ jsou zde imaginární druhého druhu a sice jsou minimálními v rovinách vzdálených od π o délku $+ i$, a $- i$, z nich pak prvá jde bodem $+ i$ a druhá $- i$. Obrazy libovolné přímky jsou v stopnících konjugovaných polár této přímky vzhledem k základním komplexům na π. Přímky roviny $\varrho \parallel \pi$, vedené ve vzdálenosti z od π, mají tytéž úběžné obrazy $r_{1\infty}$, $r_{2\infty}$ a sice v nulových bodech (pólech) roviny ϱ vzhledem k Σ_1 a Σ_2.

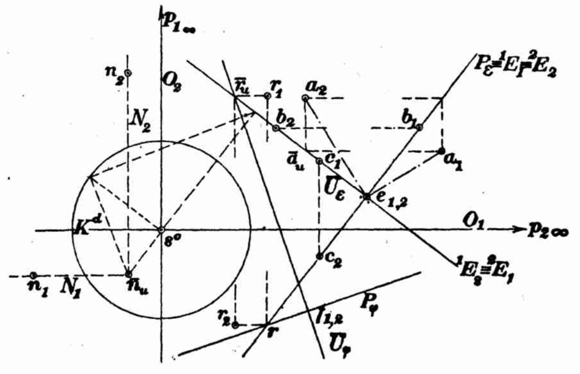
Pól $r_{1\infty}$ je v úběžném bodě paprsků komplexu Σ_1 ležících v rovině ϱ, jež svírají s osou $+ O_1$ úhel α, jehož $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{d}{z}$. Zvolme středové promítání o středu s, ležícím na ose Z kongruence $T_{1,2}$, průmětně π a distanci $ss^0 = d$ nad π. Jestliže je s' průsečík osy $+ O_2$ s distanční kružnicí K^d tohoto promítání, a přeneseme-li vzdálenost z roviny ϱ od π a sice kladné z (nad π) ve smyslu — O_1 od hlavního bodu s^0 do bodu r', tu $r's'$ udává směr paprsků komplexu Σ_1, v rovině ϱ a tedy pól $r_{1\infty}$. Pól $r_{2\infty}$ roviny ϱ ke komplexu Σ_2 je ve směru kolmém k směru určujícímu $r_{1\infty}$. Body r roviny ϱ zobrazují se v páry kolmic R_1, R_2, jež jdou úběžnými body $r_{1\infty}$ resp. $r_{2\infty}$. Přímky trsu r mají prvé obrazy na R_1 a druhé na R_2.



Obr. 1.

Určeme obrazy a_1, a_2 libovolné přímky A, jež je dána v středovém promítání (s, π) stopníkem a a úběžníkem a^s_u. V rotační kongruenci $T_{1,2}$ je přímka rovnoběžná s A, jejíž stopník je v otočeném úběžníku $\bar{a}_u$, který vznikne z úběžníku a^s_u otočením o 90° ve smyslu $+$ kolem hlavního bodu s^0. Stopník a přímky A má obrazy v přímkách $A_1 \equiv ap_{1\infty}$ a $A_2 \equiv ap_{2\infty}$ a úběžný její bod a_u v přímkách $A_1^u \equiv \bar{a}_u p_{2\infty}$ a $A^u_2 \equiv \bar{a}_u p_{1\infty}$. V průsečících $(A_1 A_1^u)$, $(A_2 A_2^u)$ jsou obrazy a_1, a_2 přímky A. Z konstrukce obrazů a_1, a_2 přímky je též patrno, jak obráceně od obrazů a_1, a_2 přejdeme k přímce A v prostoru. Zaměníme-li obrazy a_1, a_2 a označíme $a'_1 \equiv a_2$ a $a'_2 \equiv a_1$, tu příslušná přímka A' odpovídá přímce A v zborcené involuci o imag. řídicích přímkách ${}^1D$, ${}^2D$. Splývá-li $a_1 \equiv a_2 \equiv \bar{a}_u \equiv a$ náleží příslušná přímka A rotační síti $T_{1,2}$.[1]) Přímky komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v páry bodové, jichž spojnice jde bodem $p_{2\infty}(p_{1\infty})$. Tomuto zobrazení vymykají se přímky rovnoběžné s obraznou π. Tyto přímky určujeme vždy dvěma jejich body, jichž prvé a tudíž i druhé obrazy jsou spolu rovnoběžny. Přímky $B, \ldots$, kolmé k přímce A, musí míti otočený úběžník $\bar{b}_u$ na antipoláře $\bar{A}$ otočeného úběžníku $\bar{a}_u$ přímky A vzhledem k distanční kružnici K^d. V obraze 1 zvolena přímka B tak, aby se protínala s A v bodě q, takže spojnice $a_1b_1 \equiv Q_1$, $a_2b_2 \equiv Q_2$ co obrazy téhož bodu q jsou k sobě kolmy. Jak určily by se obrazy c_1, c_2 přímky, jdoucí bodem q kolmo k (AB) ponechává se čtenáři.

2. Rovina ε (obr. 2) zobrazuje se v podobnost (ε) dvou polí π_1, π_2, jež jsou soumístné v π a jejichž odpovídající si přímky jsou



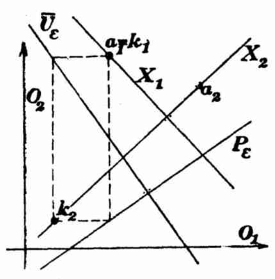
Obr. 2.

k sobě kolmé (Z, 4). Takovou podobnost (ε) možno určiti na př. samodružným bodem $e_{1,2}$ a párem bodů a_1, a_2 za podmínky, že $e_{1,2}a_2 \perp e_{1,2}a_1$, ježto přímky E, A se protínají. Stopníky $a, e, \ldots$ přímek $A, E, \ldots$ roviny ε jsou na její stopě P_ε a otočené úběžníky $\bar{a}_u$; $\bar{e}_u \equiv e_{1,2}, \ldots$ na otočené úběžnici $\bar{U}_\varepsilon \perp P_\varepsilon$. Z obrazu patrno, jak k libovolně zvolenému obrazu $a_1(a_2)$ sestrojí se odpovídající $a_2(a_1)$, dáno-li P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$. Lze tudíž rovinu ε určiti zde též vzájemně kolmými přímkami P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$. V obrazci vyznačeny obrazy libovolné přímky $B(C)$ roviny ε, jež náleží komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$, patrně $b_1b_2 \parallel O_1(c_1c_2 \parallel O_2)$. Průsečík $e_{1,2}$ je obrazem přímky E kongruence $T_{1,2}$, jež je v rovině ε. Přímky P_ε, $\bar{U}_\varepsilon$ jsou obrazy nulového bodu ${}^1e({}^2e)$ roviny ε vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$. Poměr podobnosti $k = e_2c_2 : e_1c_1 = e_2a_2 : e_1a_1 \ldots$ pro (ε) je týž pro všechny roviny, jež jdou týmž

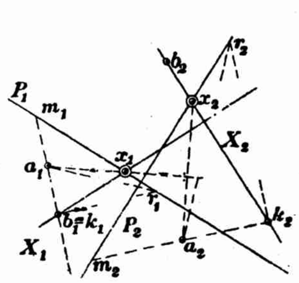
[1]) L. Eckhart: „Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene“ ve zprávách Vídeňské akademie, roč. 1918.

úběžným bodem v π na X_∞ a které mají stopy rovnoběžné. Přímky N kolmé k rovině ε mají týž otočený úběžník $\overline{n}_u$, který je antipólem otočené úběžnice $\overline{U}_\varepsilon$ vzhledem k distanční kružnici K^d. Obrazy n_1, n_2 libovolné kolmice zvoleny na obrazech N_1, N_2 úběžného bodu n_∞ těchto kolmic libovolně.

Roviny jdoucí nulovým bodem $p_1(p_2)$ obrazny π vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v singulární podobnost prvého řádu, jejíž singulární bod v prvém poli π_1 (v druhém poli π_2) je nulový bod té roviny k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ a singulární přímka v druhém (prvém) poli je úběžná přímka X_∞. Roviny rovnoběžné s π zobrazují se v singulární podobnost druhého řádu, jejíž singulární body i přímky jsou úběžné.



Obr. 3.



Obr. 4.

V obr. 2 dána ještě rovina φ stopou P_φ a otočenou úběžnicí $\overline{U}_\varphi$ i lze snadno určiti obrazy r_1, r_2 průsečnice $R \equiv (\varepsilon\varphi)$ znajíce její stopník $r \equiv (P_\varepsilon P_\varphi)$ a otočený úběžník $\overline{r}_u \equiv (\overline{U}_\varepsilon \overline{U}_\varphi)$. Dána-li by byla ještě třetí rovina ψ a určili bychom ještě obrazy průsečnic $(\varepsilon\psi)$, $(\varphi\psi)$ tu musely by prvé obrazy všech tří průsečnic býti na přímce a druhé obrazy též na přímce kolmé k prvé, ježto tyto přímky byly by obrazy průsečíku $(\varepsilon\varphi\psi)$.

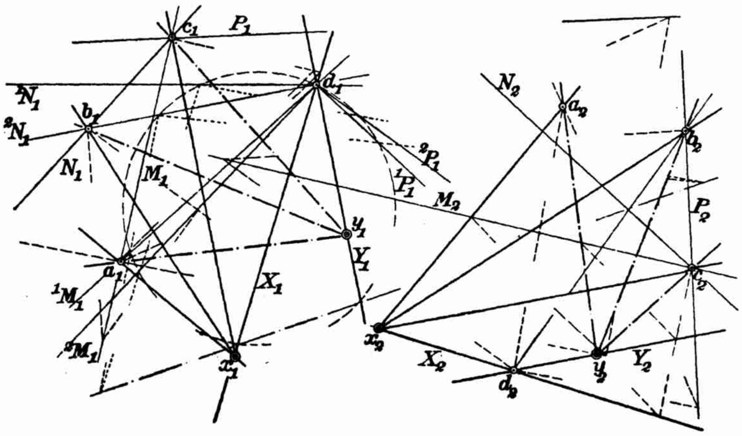
3. Řešme některé úlohy týkající se vzájemné polohy bodu, přímky a roviny.

a) V obr. 3 sestrojen průsečík x roviny $\varepsilon(P_\varepsilon, \overline{U}_\varepsilon)$ s přímkou A (a_1, a_2). V rovině ε myslíme si přímku K, jejíž $k_1 \equiv a_1$, říkejme prvou krycí přímku s A. Přímky K a A jsou různoběžné, ležíce v téže nulové rovině komplexu Σ_1 a proto $k_2 a_2 \equiv X_2$ a $X_1 \perp \perp X_2$. Kdyby rovina ε byla rovnoběžná s π ve vzdálenosti z, znali bychom ihned směr obrazu X_1 podle obr. 1 ve spojnici $s'r'$.

b) V obr. 4 určeny obrazy příčky X, jdoucí bodem p (P_1, P_2) k mimoběžkám A (a_1, a_2), B (b_1, b_2). Přímka A s bodem p určují rovinu ε, jež zobrazuje se v kolmou podobnost (ε) danou $(P_1, a_1) \sim \sim (P_2, a_2)$. V rovině ε zvolíme podle a) prvou krycí přímku K

s přímkou B ($k_1 \equiv b_1$) a určíme její druhý obraz k_2 jako odpovídající bod ke k_1 v (ε). V obr. 4, je $a_2k_2 \perp a_1k_1$ a jsou-li průsečíky těchto kolmic s P_1 a P_2 body m_1, m_2, tu musí $m_2a_2k_2 \sim m_1a_1k_1$. Nebo na P_1, P_2 zvoleny odpovídající si body r_1, r_2 ($a_2r_2 \perp a_1r_1$) a tu $r_2k_2 \perp r_1k_1$. Průsečík $x \equiv (\varepsilon B)$ má obrazy $X_2 \equiv b_2k_2$ a $X_1 \perp X_2$ bodem b_1. Hledaná příčka je $X \equiv (xp)$, při čemž je kontrola $a_1x_1 \perp a_2x_2$. Kdyby příčka mimoběžek A, B měla býti rovnoběžná s přímkou C (c_1, c_2), tu bod p předchozího případu přešel by v úběžný bod přímky C, t. j. obraz P_1 šel by bodem c_1 rovnoběžně s O_1 atd.

c) Čtyři mimoběžky A, B, C, D mají obecně dvě příčky X, Y, nemají-li polohu hyperboloidickou. Zobrazíme-li tyto přímky družinami $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2, x_1x_2, y_1y_2$, tu promítají se body a_1, b_1, c_1, d_1 z x_1 (y_1) paprsky, jež jsou kolmy k spojnicím bodu x_2 (y_2) s odpovídajícími body a_2, b_2, c_2, d_2, i řeší nám družiny x_1x_2, y_1y_2 zajímavou planimetrickou úlohu.

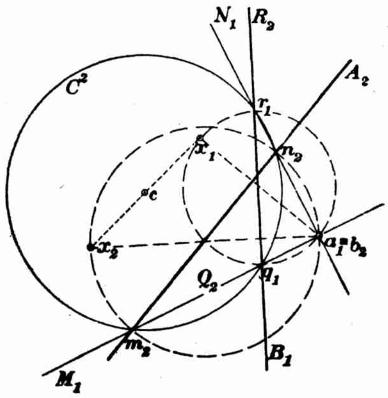


Obr. 5.

Příčky mimoběžek v našem zobrazení určíme obvyklým způsobem. Na přímce C zvolíme tři body m, n, p a promítneme je z mimoběžky A na přímku D do bodů $^1m, ^1n, ^1p$ a z B na tutéž přímku D do bodů $^2m, ^2n, ^2p$. Samodružné body x, y projektivních soumístných řad $^1m^1n^1p \barwedge {^2m^2n^2p}$ náležejí hledaným příčkám.

V obr. 5 zvolen bod m tak, že rovina (mA) jde pólem obrazny π k Σ_1, takže $M_1 \equiv c_1a_1$ a prvý obraz bodu ^1m je $^1M_1 \equiv a_1d_1$, kdežto druhý obraz $^1M_2$ netřeba rýsovati. Obraz $^2M_1$ obdržíme podle b). Podobně vhodně zvoleno $N_1 \equiv b_1c_1$ a $P_2 \equiv b_2c_2$ a sestrojeny prvé obrazy $^1N_1$, $^2N_1$ a $^1P_1$, $^2P_1$. Samodružné paprsky X_1, Y_1 projektivních soumístných svazků d_1 ($^1M_1{^1N_1}{^1P_1}$) $\barwedge$ d_1 ($^2M_1{^2N_1}{^2P_1}$) jsou prvými obrazy bodů x, y, druhé pak obrazy X_2, Y_2 jdou bodem d_2 kolmo k prvým obrazům. Sestrojením příček z bodů x, y k A, C tím, že určíme průsečíky rovin (xC) a (yC) s A dospíváme k obrazům x_1x_2, y_1y_2 jež řeší též vytknutou planimetrickou úlohu.

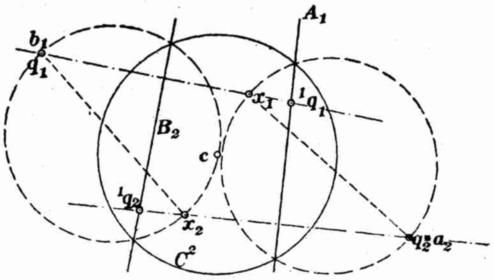
4. **Lineární komplex** Γ zobrazuje se v korelaci (Γ) jež obsahuje involuci, určující absolutní body na úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Pólová kuželosečka je zde kružnicí C^2 (Z, 18) (obr. 6) a její body jsou koincidenční s odpovídajícími přímkami v (Γ). Prvý obraz x_1 sdružené poláry ${}^1X$ k přímce X_∞ vzhledem ke Γ, odpovídá v (Γ) úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Ježto spojnice bodu x_1 s kruhovými body dotýkají se polárné kuželosečky Γ^2 je x_1 ohniskem kuželosečky Γ^2. Stejně druhý obraz x_2 poláry ${}^1X$ je ohniskem kuželosečky Γ^2. Koincidenční kuželosečky v korelaci (Γ) dotýkají se dvojnásob a společný pól dotyčné tětivy k oběma těmto kuželosečkám má splývající odpovídající přímky v (Γ) a je tudíž na X_∞, ježto přímka tato obsahuje involuci konjugovaných bodů v (Γ). Prochází tudíž spojnice x_1x_2 středem c kružnice C^2 a průměr na této spojnici je hlavní osou kuželosečky Γ^2. Kuželosečka Γ^2 je hyperbolou (elipsou), jestliže x_1 je vně (uvnitř) kružnice C^2. Když x_1 a tudíž i x_2 je na C^2 je komplex Γ speciálním komplexem sestávajícím z příček přímky ${}^1X$. Dospíváme tak k zobrazení lineárního komplexu v prvek **bod — kružnice** podle **Eckharta**.[1]) Zvolíme-li prvý obraz a_1 paprsku A komplexu Γ, odpovídá mu v (Γ) ∞^1 druhých obrazů, jež jsou body odpovídající přímky A_2, která je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad průměrem a_1x_2. Tečny ke kuželosečce Γ^2 (v obr. 6 je to elipsa), jež má ohniska x_1, x_2 a C^2 za kružnici nad hlavní osou, počítáme-li k poli π_1, a označíme je M_1, N_1, mají odpovídající body v (Γ) v průsečících m_2, n_2 a sice musí $x_2m_2 \perp M_1$ a $x_2n_2 \perp N_1$. Jest totiž na př. x_2m_2 odpov. přímkou k úběžnému bodu přímky M_1 a musí jíti konjugovaným bodem v Π_X. Jestliže bod a_1 označíme jakožto druhý obraz b_2, jsou prvé obrazy na přímce B_1, jež je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad b_2x_1 jakožto průměrem.



Obr. 6.

5. V obr. 7 ukázáno jak k **přímce** Q dané obrazy q_1, q_2 **sestrojíme obrazy** ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ **sdružené poláry** ${}^1Q$ **vzhledem ke komplexu** Γ, danému podle odstavce 4 kružnicí C^2 a obrazy x_1, x_2.

Přímky komplexu Γ, jež protínají Q protínají též ${}^1Q$. Přímka B komplexu Γ, jejíž prvý obraz b_1 je v q_1 protíná Q a má druhý obraz v libovolném bodě odpovídající přímky $B_2 \perp b_1x_1$. Ježto všechny tyto přímky B musí protínati též ${}^1Q$, je ${}^1q_1$ na q_1x_1 a ${}^1q_2$ na B_2. Stejně, označíme-li q_2 jakožto a_2 je prvý obraz a_1 přímky A komplexu Γ vázán na odpov. přímku $A_1 \perp x_2q_2$, a ze stejných důvodů musí ${}^1q_2$ býti na x_2q_2 a ${}^1q_1$ na A_1. Tím jsou obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ konjugované poláry ${}^1Q$ určeny. Oba páry $X_\infty{}^1X$, $Q{}^1Q$ konjugovaných polár mají polohu hyperboloidickou a proto prvé obrazy q_1, x_1, ${}^1q_1$ jsou na přímce a stejně druhé obrazy a sice jest $q_1x_1{}^1q_1 \sim q_2x_2{}^1q_2$ (Z, 20).

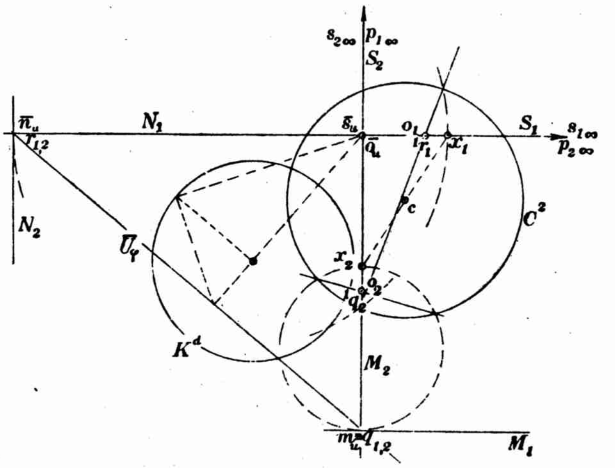


Obr. 7.

6. Kdybychom měli určiti polárnou rovinu ε bodu e (E_1, E_2) vzhledem ke komplexu lineárnímu $\Gamma\,(C^2, x_1x_2)$, zvolíme v trsu o středu e libovolný paprsek Q, na př. ten, který náleží kongruenci $T_{1,2}$, jehož oba obrazy splývají v průsečíku $q_{1,2} \equiv (E_1E_2)$. Konjugovaná polára ${}^1Q$ ku Q je v rovině ε a tudíž její obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ sestrojené podle odst. 5 určují s E_1 případně E_2 podobnost (ε). Obdobně si počínáme při určení pólu f roviny φ $(P_\varphi, \overline{U}_\varphi)$. V rovině φ zvolíme opět přímku Q na př. opět tu, jež náleží kongruenci $T_{1,2}$, stanovíme její konjugovanou poláru ku Γ a její průsečík s rovinou φ, určený podle odst. 3 a) je hledaným pólem f.

7. Budiž v obraze 8 sestrojiti obrazy o_1, o_2 osy O lineárního komplexu $\Gamma\,(C^2, x_1x_2)$. Úběžné přímky mají tytéž dva obrazy $s_{1\infty}$, $s_{2\infty}$, kde $s_1 \equiv p_2$, $s_2 \equiv p_1$. Konjugované k nim poláry mají týž úběžný bod s, jehož obrazy jsou $S_1 \equiv x_1s_{1\infty}$, $S_2 \equiv x_2s_{2\infty}$. Průsečík $\overline{s}_u \equiv (S_1S_2)$ je otočeným úběžníkem všech průměrů komplexu a tedy též osy O. Osa O je konjugovanou polárou úběžné přímky roviny φ kolmé k směru průměrů. Otočená úběžnice $\overline{U}_\varphi$ roviny φ je tudíž antipolárou k $\overline{s}_u$ vzhledem k distanční kružnici K^d. Na úběžné přímce roviny φ zvolíme dva body m, n, jejichž nulové roviny μ, ν protínají se v hledané ose O. Výhodné je zvoliti obraz $M_2 \equiv S_2$ a $N_1 \equiv S_1$, ježto nulová rovina μ (ν) jde nulovým bodem

p_2 (p_1) roviny π k Σ_2 (Σ_1). Singulární body v konečnu podobností (μ), (ν) jsou obrazy osy O. Bodem m (n) zvolena přímka Q (R) na př., která náleží $T_{1,2}$ a určen druhý (prvý) obraz ${}^1q_2$ (${}^1r_1$) konjugované poláry ${}^1Q$ (${}^1R$) a tu $o_1 \equiv {}^1r_1$, $o_2 \equiv {}^1q_2$.

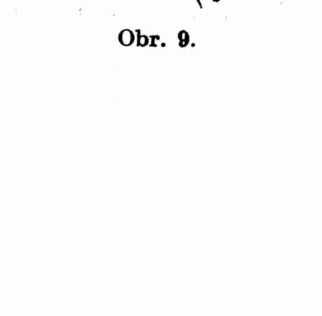


Obr. 8.

8. Jestliže polára ${}^1X$ úběžné osy X_∞ roviny π vzhledem ke komplexu lineárnímu Γ náleží koincidenční kongruenci $T_{1,2}$, takže $x_1 \equiv x_2$ je v středu c kružnice C^2, tu korelace (Γ) přejde v polaritu vzhledem k C^2. Komplex Γ je invariantní vzhledem k zborcené involuci o imaginárních osách ${}^1D$, ${}^2D$, t. j. obsahuje tyto osy a komplex Γ je v involuci k oběma základním komplexům Σ_1, Σ_2 (Z, 28).

„Kružnice obrazny s jejich středy zobrazují nám lineární komplexy trojmocné soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku základních komplexů ($\Sigma_1\Sigma_2$).

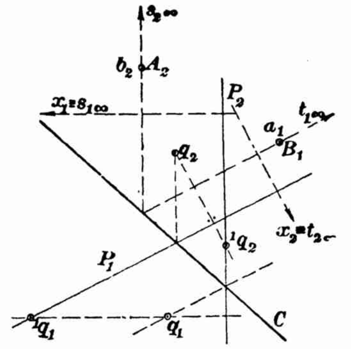
Obrazy ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ konjugované poláry ${}^1Q$ k libovolné přímce Q (obr. 9) určí se stejně jako v obraze 7; snadno z obrazce vyplývá že ${}^1q_1{}^1q_2 \parallel q_1q_2$. Náleží-li Q ke kongruenci $T_{1,2}$ z konstrukce ihned plyne, že i ${}^1Q$ je v $T_{1,2}$ a proto komplex Γ obsahuje přímky ${}^1D$, ${}^2D$.



Obr. 9.

9. Obsahuje-li lineární komplex Γ osu X_∞, ale nená-

leží svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, přejde kružnice C^2 v přímku C (obr. 10) a body x_1, x_2 jsou úběžné a neodpovídají si v absolutní involuci Π_X (Z, 16). Body $t_{1\infty}$, $s_{2\infty}$ odpovídající v Π_X bodům $t_2 \equiv x_{2\infty}$ a $s_1 \equiv x_{1\infty}$ jsou singulárními body centrální korelace (Γ). Libovolnému bodu a_1 odpovídá přímka A_2 svazku $s_{2\infty}$, která se spojnicí $a_1t_{1\infty}$ protíná se na přímce C a naopak bodu b_2 odpovídá paprsek B_1 procházející bodem $t_{1\infty}$ a protínající se se spojnicí s_2b_2 na C. V obraze 10 vyznačena konstrukce obrazů ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ poláry ${}^1Q$ přímky Q o obrazech q_1, q_2 vzhledem k lineárnímu komplexu Γ, jež vyplývá z konstrukce odst. 5. ∞^4 lineárních komplexů obsahujících osu X_∞, zobrazuje se v ∞^4 centrálních korelací, jejichž singulární body t_1, s_2 jsou na úběžné přímce a odpovídající singulární paprsky protínají se na přímce C v konečnu.



Obr. 10.

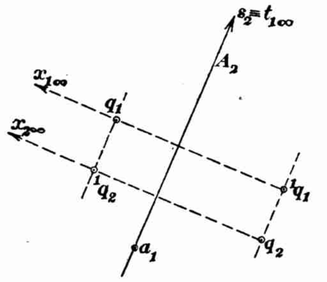
Jestliže $x_{1\infty}$, $x_{2\infty}$ odpovídá si v absolutní involuci Π_X, je příslušný lineární komplex speciální a sestává z příček přímky, jež protíná osu X_∞ a je v rovině rovnoběžné s obraznou π, jejíž nulový bod vzhledem k Σ_1 je v $x_{1\infty}$. V případě pak kdy mimo to přímka C je kolma k směru $x_{1\infty}$ $(x_{2\infty})$, dostáváme dvojnásob singulární korelaci, jejíž singulární přímka v druhém (prvém) poli je C a v prvém (druhém) poli úběžná přímka; singulární body jsou v prvém poli úběžný bod na C $(x_{1\infty})$ a v druhém poli $x_{2\infty}$ (úběžný bod na C).

10. Nechť v předchozím případě splynou body x_1, x_2 v témž úběžném bodě, komplex Γ obsahuje osu X_∞ a nenáleží-li svazku (Σ_1, Σ_2) má korelace (Γ) koincidenční přímku C, jež je kolma k směru $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$. Korelace (Γ) je centrální o společném středu v úběžném bodě $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ na přímce C a charakteristická projektivnost obou svazků je taká, že samodružné paprsky jsou v C a X_∞. K určení obrazu takového komplexu stačí mimo přímky C znáti ještě obrazy a_1, a_2 jedné jeho přímky A, čímž projektivnost tato je dána. Patrně vzdálenosti bodu v prvém poli a odpovídající přímky v druhém poli od přímky C jsou v konstantním poměru k. Pro $k = -1$ dostáváme obraz lineárního komplexu, který je v involuci k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$ (odst. 8) a (Γ) je centrální involutorní reciprocitou.

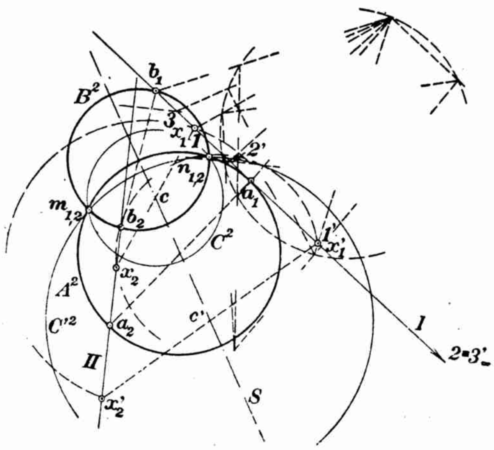
Pro $k = 0$ je (Γ) dvojnásob singulární o singulární přímce C v prvém poli a X_∞ v druhém poli.

Náleží-li lineární komplex Γ předchozího případu svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, tu $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ (Z, 17) a tedy též $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ a oba svazky singulárních paprsků splývají. V obr. 11 vyznačen tento případ, jakož i konstrukce obrazů ${}^1q_1$, ${}^1q_2$ poláry ${}^1Q$ k libovolné přímce Q. Pro základní komplex Σ_1 je $t_1 \equiv s_2 \equiv p_{2\infty}$ a pro Σ_2 pak $t_1 \equiv s_2 \equiv p_1$ (odst. 1).

Čtyřmocnou soustavu lineárních komplexů obsahujících osu X_∞ označme pro další Ξ^4 a trojmocnou soustavu z těchto, pro něž $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ označme Ξ^3.



Obr. 11.



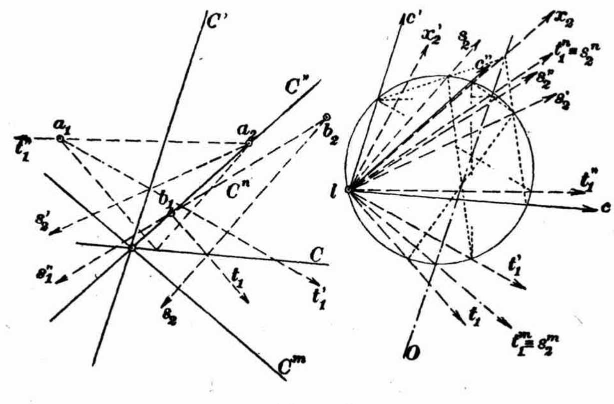
Obr. 12.

11. Uvažujme o dvou lineárních komplexech Γ, Γ' určených v obraze prvky C, x_1x_2 a C', $x'_1x'_2$ (obr. 12). Komplexy ty určují svazek lineárních komplexů, jež obsahují jejich společnou lineární kongruenci $(\Gamma\Gamma')$, která má s kongruencí $T_{1,2}$ společné přímky M, N, jejichž obrazy jsou v průsečících $m_{1,2}$, $n_{1,2}$ kružnic C^2, C'^2. Další komplexy $\Gamma^\times$ svazku mají za pólovou kružnici $C^{\times 2}$ kružnici svazku $(C^2C'^2)$ a obraz $x_1^\times$ je na přímce $I \equiv x_1x'_1$ a $x_2^\times$ na přímce $II \equiv x_2x'_2$ a sice řada $x_1x'_1x_1^\times \ldots$ na I je podobnou s řadou $x_2x'_2x_2^\times \ldots$ na II. Úběžné body přímek I, II příslušejí totiž ke komplexu svazku, který obsahuje úběžnou přímku X_∞ a jehož koincidenční kružnice přechází v přímku $m_{1,2}n_{1,2}$ svazku $(C^2C'^2)$ (odst. 9). Středy c, c', $c^\times$, ... kružnic C^2, C'^2, $C^{\times 2}$, ... tvoří řadu S $(c, c', c^\times, \ldots)$ podobnou s řadou I $(x_1, x'_1, x_1^\times, \ldots)$. Spojnice x_1x_2, $x'_1x'_2$, $x_1^\times x_2^\times$, ... obalují parabolu dotýkající se přímek I, S, II. Svazek lineárních komplexů obsahuje dva speciální komplexy sestávající z příček přímky A, případně B. Určeme obrazy a_1a_2, b_1b_2 přímek A, B! K tomu užijeme toho, že přímky A, B jsou konjugovanými polárami k oběma komplexům Γ, Γ'. Body a_1, b_1 jsou na I a a_2, b_2 na II. K libovolnému bodu $x_1^\times$ na I náleží určitý bod $x_2^\times$ na II a body ty jsou obrazy konjugované polá-

ry ${}^1X^\times$ osy X_∞ vzhledem ke $\Gamma^\times$. Konjugované poláry k přímce ${}^1X^\times$ vzhledem ke Γ a Γ' splývají jen tehdy, když ${}^1X^\times$ splyne s A nebo B. Mění-li se komplex $\Gamma^\times$ ve svazku $(\Gamma\Gamma')$ budou prvé obrazy konjugovaných polár k příslušným přímkám ${}^1X^\times$ vzhledem ku Γ a Γ' tvořiti na přímce I dvě projektivní řady, jichž samodružné body jsou v obrazech a_1, b_1 řídicích přímek kongruence $(\Gamma\Gamma')$. Druhé obrazy a_2, b_2 lze obdobně dostati anebo na základě toho, že úsečky a_1a_2, b_1b_2 jsou půleny přímkou S. Zvolme nejprve $x_1^\times$, $x_2^\times$ v úběžných bodech přímek I, II, tu dostaneme na I družinu bodovou $1 \equiv x_1$, $1' \equiv x'_1$. Dále zvolme $x_1^\times$, $x_2^\times$ v x_1, x_2 a dostaneme na I družinu 2_∞, $2'$, kde $2'$ je na chordále kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2x'_1$ co průměrem. Stejně pro splynutí $x_1^\times$, $x_2^\times$ s x'_1, x'_2 dostaneme obdobně určenou třetí družinu 3, $3'_\infty$. Ze tří družin $11'$, $22'$, $33'$ projektivnosti na přímce I určíme samodružné body a_1, b_1 a k nim body a_2, b_2 na II. Kružnice A^2, B^2 opsané nad a_1a_2, b_1b_2 co průměry náleží k svazku $(C^2C'^2)$ a jsou obrazy speciálních lineárních komplexů svazku $(\Gamma\Gamma')$ sestávajících z příček přímek A, B. V obraze přímky A, B jsou reálné a kongruence $(\Gamma\Gamma')$ je hyperbolickou o řídicích přímkách A, B.

V případě, kdy $x_1x'_1 \perp x_2x'_2$, t. j. poláry ${}^1X$, ${}^1X'$ se protínají, známe předem jednu řídicí přímku na př. B, ježto protíná osu X_∞ a má úběžné obrazy $b_{1\infty}$, $b_{2\infty}$ a speciální komplex (B) má obraz v chordále kružnic C^2, C'^2.

12. Libovolný svazek lineárních komplexů v soustavě Ξ^4 (odst. 10) obsahuje dva komplexy soustavy Ξ^3, ježto projektivní

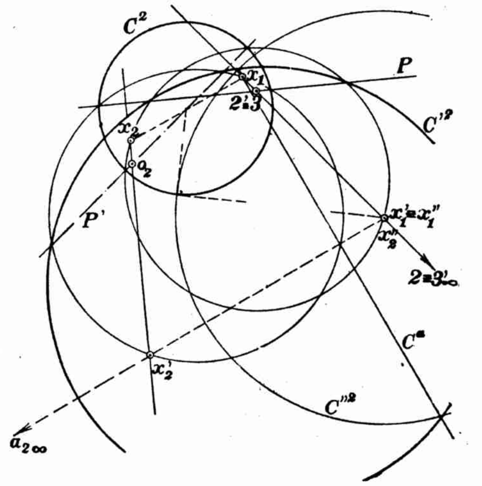


Obr. 13.

řady bodové $x_1 \ldots \barwedge x_2 \ldots$ na X_∞ mají dva samodružné body. Mějme v obr. 13 dány dva lineární komplexy Γ, Γ' náležející k Ξ^4 a sice koincidenčními přímkami C, C' a úběžnými středy t_1, s_2, t'_1, s'_2

singulárních svazků. Další komplex Γ'' svazku $(\Gamma\Gamma')$ má koincidenční přímku C'' jdoucí průsečíkem (CC'). Příslušné úběžné body t''_1, s''_2 lze stanoviti dvojím způsobem. Libovolný bod a_2 (b_1) na C'' je druhým (prvním) obrazem jisté přímky A kongruence $(\Gamma\Gamma')$, k němuž najdeme první (druhý) obraz a_1 (b_2) na základě toho, že přímka ta je v obou komplexech Γ, Γ'. Udává pak spojnice a_2a_1 (b_1b_2) bod $t''_{1\infty}$ $(s''_{2\infty})$. Jinak lze užíti projektivnost $t_1t'_1t''_1 \ldots \overline{\wedge}\, s_2s'_2s''_2 \,\overline{\wedge}\, \overline{\wedge}\, CC'C'' \ldots$ Sestrojíme tedy libovolným bodem l rovnoběžky se směry určujícími tyto úběžné body, případně s koincidenčními přímkami. Samodružnými body $t_1^m \equiv s_2^m$ a $t_1^n \equiv s_2^n$ procházejí též koincidenční přímky C^m, C^n, ježto příslušné k nim komplexy náležejí soustavě Ξ^3 (odst. 10). Mají proto tři tyto vzájemně projektivní svazky o středu l tytéž dva samodružné paprsky z dvou známých odpovídajících si jejich trojin $(t_1s_2c,\ t'_1s'_2c')$ lze proto určiti společnou direkční osu O a pomocí ní lze obrazy komplexů svazku $(\Gamma\Gamma')$ doplňovati. Pro speciální lineární komplexy svazku musí směry $t_{1\infty}{}^a$, $t_{1\infty}{}^b$ státi kolmo k směrům $s_{2\infty}{}^a$, $s_{2\infty}{}^b$ a proto směry $s_{2\infty}{}^a$, $s_{2\infty}{}^b$ jsou samodružnými paprsky projektivních svazků $l\,(s_2, s'_2, \ldots) \,\overline{\wedge}\, \overline{\wedge}\, l\,(x_2, x'_2, \ldots)$ (v obraze 13 nesestrojováno).

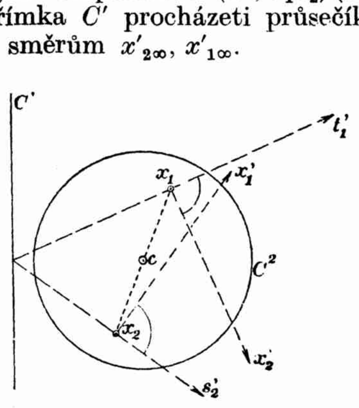
13. Mají-li lineární komplexy Γ, Γ' býti v involuci, musí v obr. 12 obrazy x_1, x'_1 býti harmonicky sdruženy k a_1, b_1



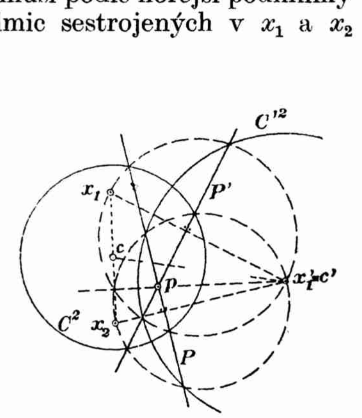
Obr. 14.

a tudíž též $(x_2x'_2a_2b_2) = -1$, t. j. projektivita určující body a_1, b_1 (a_2, b_2) na přímce I (II) je involucí. K tomu postačí, aby $2' \equiv 3$ a tedy chordála P kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2x'_1$ co průměrem, byla totožna s chordálou kružnice

C^2 s kružnicí mající $x_2x'_2$ za průměr (obr. 14). Ovšem platí též současně, že chordála P' kružnice C^2 s kružnicí o průměru $x_2x'_1$ splývá s chordálou kružnice C'^2 s kružnicí průměru $x_1x'_2$. Dán-li lineární komplex Γ útvary C^2, x_1x_2 obrazny, lze pro lineární komplex Γ', který je s ním v involuci, zvoliti body x'_1, x'_2 libovolně, ale kružnice C'^2 sestrojí se již snadno z předchozí podmínky. Z této podmínky pro involutornost komplexů Γ a Γ' vyplývá ihned, že speciální komplex sestávající ze sečen přímky A je v involuci s Γ, jestli přímka A je obsažena v komplexu Γ. Jestliže komplex Γ' obsahuje úběžnou osu X_∞ obrazny π, tu aby byl v involuci s obecným komplexem Γ (C^2, x_1x_2) (obr. 15), musí podle hořejší podmínky přímka C' procházeti průsečíkem kolmic sestrojených v x_1 a x_2 k směrům $x'_{2\infty}$, $x'_{1\infty}$.



Obr. 15.



Obr. 16.

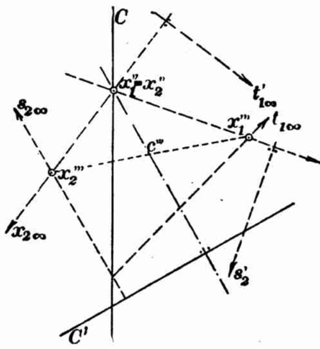
Eckhart v uvedeném pojednání[1]) ve větě 6 uvádí jinou podmínku pro involutornost komplexů Γ, Γ'. Abychom tuto podmínku odvodili, povšimněme si v obr. 16 případu, kdy Γ' je v involuci se základními komplexy Σ_1, Σ_2 (odst. 8), t. j. $x'_1 \equiv x'_2 \equiv c'$. Zvolíme-li podle předchozího obecného případu lineární komplex Γ' v involuci s Γ, jdou chordály všech vytknutých kružnic týmž bodem p, který je k středu c' kružnice C'^2 involutorně sdružen v korelaci (Γ), v niž se zobrazuje komplex Γ. Jest patrně $x'_1p \perp x_1x_2$. Body $x'_1 \equiv c'$ a p jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke koincidenční kružnici C^2 a proto kružnice C'^2 protíná kolmo kružnici C^2.

Všechny komplexy lineární, jež jsou v involuci k lineárnímu komplexu Γ, tvoří čtyřmocnou soustavu a ta má s trojmocnou soustavou komplexů Γ', jež jsou v involuci k Σ_1 a Σ_2, společnou dvojmocnou soustavu lineárních komplexů, jichž koincidenční kružnice protínají kolmo kružnici C^2.

Mysleme si nyní v obr. 14 ještě lineární komplex Γ''', který je v involuci ku Γ a jehož $x''_1 \equiv x''_2 \equiv x'_1$ a tudíž příslušná kružnice C'''^2 protíná kolmo C^2. Komplexy Γ'', Γ''' jsouce v involuci ke Γ, určují svazek $(\Gamma'\Gamma'')$, jehož všechny komplexy jsou ke Γ v involuci. V tomto svazku $(\Gamma'\Gamma'')$ je též komplex obsahující osu X_∞, který je tu speciálním komplexem, jehož přímky sečou přímku A jdoucí pólem p_1 obrazny π vzhledem k základnímu lineárnímu komplexu Σ_1. Koincidenční útvar korelace (A) je v konečnu chordála C^a kružnic C'^2, C''^2. Aby tento speciální komplex byl v involuci s Γ, musí podle hořejší podmínky chordála C^a procházeti bodem x_1. Tento vztah je Eckhartovou podmínkou involutornosti komplexů Γ, Γ'.

Dva lineární komplexy $\Gamma(C^2, x_1x_2)$, $\Gamma'(C'^2, x'_1x'_2)$ jsou v involuci, jestliže chordála kružnice C'^2 s kružnicí o středu x'_1 a protínající kolmo kružnici C^2, jde bodem x_1.

Z odvození patrno, že v této podmínce lze zaměniti C^2, C'^2, při současné záměně x'_1 a x_1, anebo zaměniti x_1, x'_1 za x_2, x'_2.



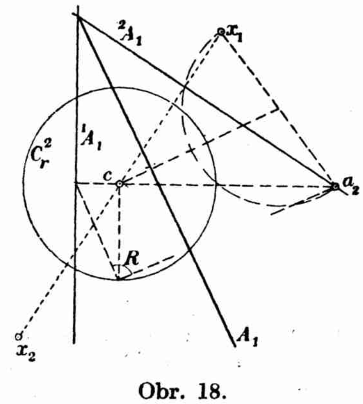
Obr. 17.

14. Určeme podmínku involuce dvou lineárních komplexů Γ, Γ' soustavy $\mathfrak{E}^4$ (odst. 10)! Budiž jeden tento komplex Γ dán koincidenční přímkou C a úběžnými body t_1, s_2, kdežto pro druhý komplex Γ' zvolme úběžné body t'_1, s'_2 (obr 17)! Vyhovuje zde ∞^1 komplexů Γ' a jich koincidenční přímky C' jsou spolu rovnoběžné. Abychom určili směr těchto přímek, zvolme dva lineární komplexy Γ'', Γ''', jež jsou v involuci s Γ podle obr. 16, a jichž svazek $(\Gamma''\Gamma''')$ obsahuje jeden z komplexů Γ'. Zvolíme $x''_1 \equiv x''_2$ kdekoliv na přímce C a jím vedeme přímky směřující k úběžným bodům x'_1 a x'_2, na nichž třeba zvoliti x'''_1 a x'''_2 tak, aby jimi jdoucí přímky směrů $t_{1\infty}$, $s_{2\infty}$ protínaly se na přímce C. Libovolné kružnice C''^2, C'''^2 opsané kolem středů x''_1 a půlícím bodem c''' úsečky $x'''_1x'''_2$, jsou

koincidenčními kružnicemi takových dvou komplexů Γ'', Γ'''. Chordála kružnic C''^2, C'''^2 udává směr koincidenční přímky C', který je též kolmý k spojnici x''_1c'''.

15. Svazek lineárních komplexů $(\Gamma\Gamma')$, jehož $C^2 \equiv C'^2$, má všechny koincidenční kružnice totožné a obsahuje komplex svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, jehož obraz má všechny body průmětny za samodružné a totožné singulární svazky obrazu mají střed v úběžném bodě kolmic k spojnici $x_1x'_1$ (odst. 10). Jestliže shodné řady x_1, $x'_1, \ldots, x_2, x'_2, \ldots$ jsou na téže přímce jdoucí středem kružnice $C^2 \equiv C^{2\prime}$, tu svazek $(\Gamma\Gamma')$ obsahuje jeden komplex Γ^0 trojmocné soustavy lineárních komplexů involutorní k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$, jehož $x_1^0 \equiv x_2^0$. Průsečíky spojnice x_1x_2 s C^2 v posledním případě jsou póly x_1^a, x_2^a nebo $x_1^b \equiv x_2^a$, $x_2^b \equiv x_1^a$ dvou speciálních lineárních komplexů tohoto svazku, jichž parametr $= 0$. Komplex lineární Γ^0 je pravotočivý ježto je v involuci k základnímu komplexu Σ_1, který je levotočivý a svazek $(\Gamma^0\Sigma_1)$ má reálné speciální komplexy. Jest proto lineární komplex Γ, jehož x_1 a tudíž i x_2 leží uvnitř koincidenční kružnice C^2 pravotočivým a leží-li vně levotočivým.

16. Lineární komplexy Γ, Γ', v jejichž obrazech $x'_1 \equiv x_1$ a $x'_2 \equiv x_2$ určují svazek, jejichž koincidenční kružnice



Obr. 18.

jsou soustředné a příslušné obrazy konjugované poláry ^1X splývají. Svazek $(\Gamma\Gamma')$ obsahuje lineární kongruenci o řídicích přímkách ^1X, X_∞. Speciální komplexy Γ^a, Γ^b svazku tohoto mají koincidenční kružnice C^a, C^b, z nichž prvá má průměr x_1x_2 a druhá nekonečně veliký. Svazek obsahuje též komplexy, jichž kružnice koincidenční jsou imaginární a které jsou levotočivé a jich společné přímky s kongruencí $T_{1,2}$ tvoříce imaginární plochu 2°, jež je společná třem stejně vinutým lineárním komplexům. Zvolíme-li reálného zástupce imaginární kružnice C^2 kružnici C_r^2 (obr. 18), tu korelace (Γ) určuje se obdobně jako při reálné koincidenční kružnici. Na př. bodu a_2 odpovídá přímka A_1, která je chordálou kružnice C^2 a kružnice opsané nad a_2x_1 jakožto průměrem. Chordálu A_1 možno obdržeti též uvažováním o svazku lineárních komplexů o společné kružnici koincidenční C^2, při němž probíhá bod x_1 průměr cx_1. Přímky A_1 odpovídající bodu a_2 v obrazech těchto lineárních komplexů opisují svazek. Splyne-li x_1 se středem c, tu odpovídající přímka ${}^1A_1$ je antipolárou k a_2 vzhledem C_r^2, a je-li x_1 úběžným bodem, odpovídající přímka ${}^2A_1$ jde bodem a_2 kolmo k cx_1. Odpovídající přímka A_1 v (Γ) bodu a_2 jde průsečíkem (${}^1A\,{}^2A$) kolmo k centrále kružnice C^2 a kružnice opsané nad průměrem a_2x_1. Z konstrukce ihned patrno, jak se tato zjednoduší, kdyby kružnice C^2 měla poloměr $= 0$ a přešla v minimální přímky bodu c.

17. Tři lineární komplexy $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ nenáležející témuž svazku určují dvojmocnou soustavu lineárních komplexů zvanou též síť komplexů lineárních. Lineární komplexy, jež jsou v involuci s těmito třemi základními komplexy $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ a tudíž s celou sítí, tvoří opět síť lineární lineárních komplexů $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$, která obsahuje komplex Λ^0 trojmocné lineární soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$. I musí koincidenční kružnice $C^2, C'_2, C''_2, \ldots$ sítě $[\Gamma\Gamma'\Gamma''\ldots]$ kolmo protínati koincidenční kružnici $L^{2,0}$ komplexu Λ^0. Podle toho lze snadno sestrojiti koincidenční kružnice komplexů sítě $[\Gamma\Gamma'\Gamma'']$. Jsou-li $c, c', c'', \ldots$ středy kružnic $C^2, C'^2, C''^2, \ldots$, tu musí pole bodové $c, c', c'', \ldots$ býti afinní se soumístným polem $x_1, x'_1, x''_1, \ldots$, ježto odpovídající si řady bodové, přináležející témuž svazku lineárních komplexů obsaženému v síti, jsou podobné. Afinita těchto dvou soumístných polí má jeden samodružný bod $c'^0 \equiv x_1{}^0$ v konečnu, k němuž patřící komplex Γ^0 je v involuci se svazkem $(\Sigma_1\Sigma_2)$ a jeho kružnice koincidenční $C^{2,0}$ protíná kolmo kružnice koincidenční sítě $[\Lambda\Lambda'\Lambda'']$.

18. Čtyři lineární komplexy $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$, které nejsou v téže síti, určují lineární trojmocnou soustavu lineárních komplexů, jež je v involuci k lineárnímu svazku lineárních komplexů $\Lambda, \Lambda', \ldots$ Koincidenční kružnice $L^2, L'^2, \ldots$ protínají kolmo kružnici $C^{2,0}$ patřící k síti $[\Gamma\Gamma'\Gamma'']$ a kružnici ${}^1C^{2,0}$ patřící k síti $[\Gamma'\Gamma''\Gamma''']$ a proto řada $l, l', \ldots$ středů koincidenčních kružnic je na chordále obou těchto kružnic a je podobná s řadou $x_1{}^l, x_1{}^{l'}, \ldots$ bodů patřících k $\Lambda, \Lambda', \ldots$ Dva páry odpovídajících si bodů obou řad lze snadno určiti. Kdyby komplexy $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ byly speciální, dostali bychom určení svazku lineárních komplexů čtyřmi paprsky společné kongruence lineární.

19. Mějme konečně pět lineárních komplexů $\Gamma, \ldots, \Gamma^{IV}$, které nejsou v téže lineární trojmocné soustavě, tu určují jeden