Zum Interpolationsprobleme im Kreisringe regulärer Funktionen I.

Ernst Lammel, Prag.

(Eingegangen am 29. April 1937.)

$f(z)$ sei eine im Kreisringe $r < |z| < R$ reguläre Funktion. Die Folge $\{z_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ liege daselbst so, daß sie weder auf $|z| = R$ noch auf $|z| = r$ Häufungspunkte besitzt. Es ist also für jedes μ

$$r < \varrho \leqq |z_\mu| \leqq P < R. \tag{1}$$

Wir wollen zeigen, daß sich dann $f(z)$ in der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{1 - \frac{\bar{z}_\mu z}{R^2}} + B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \tag{2}$$

darstellen läßt.

Jede im Kreisringe $r < |z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ läßt sich bekanntlich als Summe zweier Funktionen $f_R(z)$ und $f_r(z)$ darstellen, wobei $f_R(z)$ für $|z| < R$ und $f_r(z)$ für $|z| > r$ regulär ist. Man kann offenbar von $f_r(z)$ noch voraussetzen, daß $f_r(\infty) = 0$ ist.

§ 1. Reihenentwicklung für $f_R(z)$.

Da nach (1)

$$|z_\mu| \leqq P < R; \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

ist, so läßt sich $f_R(z)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{1 - \frac{\bar{z}_\mu z}{R^2}}$$

entwickeln, welche für jeden Wert von z aus $|z| < R$ und gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < R$ gegen $f_R(z)$ als Grenzfunktion konvergiert. Für die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$ gelten die Integraldarstellungen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_0} \frac{f_R(z)}{z - z_1}\, dz, \qquad (| z_1 | < R_0 < R),$$

$$A_1 = \frac{1 - \dfrac{\bar{z}_1 z_2}{R^2}}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_1} \frac{f_R(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz \; (| z_\nu | < R_1 < R; \quad \nu = 1, 2).$$

und

$$A_n = \frac{1 - \dfrac{\bar{z}_n z_{n+1}}{R^2}}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_n} \frac{f_R(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \dfrac{z - z_\nu}{1 - \dfrac{\bar{z}_\nu z}{R^2}}}\, dz$$

$(n \geqq 2;\ | z_\nu | < R_n < R$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n + 1)$.[1])

Nun gilt für die Funktion $f_r(z)$, welche für $| z | > r$ regulär ist, wegen $f_r(\infty) = 0$ die für jeden Wert von z aus $| z | > r$ konvergente Reihenentwicklung

$$f_r(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \tag{3}$$

welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $| z | > r$ gleichmäßig konvergiert. Da für $k = 1, 2, \ldots$

$$\oint\limits_{|z|=R_0} \frac{dz}{z^k (z - z_1)} = 0, \qquad \oint\limits_{|z|=R_1} \frac{dz}{z^k (z - z_1)(z - z_2)} = 0$$

und

$$\oint\limits_{|z|=R_n} \frac{dz}{z^k (z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \dfrac{z - z_\nu}{1 - \dfrac{\bar{z}_\nu z}{R^2}}} = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

ist, so erhalten wir für die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$ schließlich die Integraldarstellungen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz, \qquad (| z_1 | < R_0 < R),$$

$$A_1 = \frac{1 - \dfrac{\bar{z}_1 z_2}{R^2}}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\, dz \; (| z_\nu | < R_1 < R; \; \nu = 1, 2) \tag{4}$$

[1]) Vgl. E. Lammel, Zum Interpolationsprobleme im Einheitskreise regulärer Funktionen. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **66** (1936), 57—61.

und

$$A_n = \frac{1 - \frac{\bar{z}_n z_{n+1}}{R^2}}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R_n} \frac{f(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \frac{\bar{z}_\nu z}{R^2}}} dz$$

($n \geqq 2$; $|z_\nu| < R_n < R$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n + 1$).

§ 2. Reihenentwicklung für die Funktion $f_r(z)$.

Wir setzen zunächst voraus, daß $z_\varkappa \neq z_\lambda$, sobald $\varkappa \neq \lambda$ ist. Der für $|z| > r$ regulären Funktion $f_r(z)$ läßt sich in eindeutiger Weise eine Reihe von der Form

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \tag{5}$$

mit $|z_\mu| > r$; $\mu = 1, 2, \ldots$ zuordnen. Die Koeffizienten $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, \ldots$) sind nämlich durch die Funktionswerte von $f_r(z)$ an den Stellen $z_\mu (\mu = 1, 2, \ldots)$ eindeutig bestimmt.

Um zu einer Integraldarstellung für die Entwicklungskoeffizienten $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) zu gelangen, beachte man Folgendes: Die $n + 1$ Koeffizienten B_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$) sind durch die Funktionswerte von $f_r(z)$ an den $n + 1$ Stellen z_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, n + 1$) eindeutig bestimmt. Es hat also jede andere in $|z| > r$ reguläre Funktion $g_r(z)$ dieselben $n + 1$ Koeffizienten B_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$), wenn sie mit $f_r(z)$ an den $n + 1$ Stellen z_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, n + 1$) im Funktionswerte übereinstimmt.

Eine solche Funktion $g_r(z)$ wird sicher durch

$$s_n(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \tag{6}$$

gegeben, worin die B_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) durch die Funktionswerte $f_r(z_\mu)$ ($\mu = 1, 2, \ldots, n + 1$) ausgedrückt zu denken sind.

Um B_n ($n \geqq 2$) zu berechnen, dividieren wir (6) durch

$$\frac{(z - z_n)(z - z_{n+1})}{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}} \prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}$$

und integrieren längs $|z| = r_n$, $r < r_n < |z_\mu|$; $\mu = 1, 2, \ldots, n + 1$. Wir erhalten, wenn wir $s_n(z)$ durch $f_r(z)$ ersetzen,

$$B_n = -\frac{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r_n} \frac{f_r(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}} \, \mathrm{d}z. \quad (7a)$$

Um B_0 bzw. B_1 zu berechnen, dividieren wir (6) durch

$$-\frac{z(z - z_1)}{z_1} \text{ bzw. } -\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{r^2 - \bar{z}_1 z_2}$$

und integrieren längs $|z| = r_0$ $(r < r_0 < |z_1|)$ bzw. $|z| = r_1$ $(r < r_1 < |z_\mu|;\ \mu = 1, 2)$. Wir erhalten, wenn wir $s_n(z)$ durch $f_r(z)$ ersetzen,

$$B_0 = -\frac{z_1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r_0} \frac{f_r(z)}{z(z - z_1)} \, \mathrm{d}z \text{ bzw.} \quad (7b)$$

$$B_1 = -\frac{r^2 - \bar{z}_1 z_2}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r_1} \frac{f_r(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} \, \mathrm{d}z.$$

Nun ist

$$B_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - z_1} \right) f_r(z) \, \mathrm{d}z,$$

also wegen (3)

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r_1} \frac{f_r(z)}{z - z_1} \, \mathrm{d}z. \quad (7c)$$

Tritt in der Folge $\{z_\mu\}$, $(\mu = 1, 2, \ldots)$ dieselbe Stelle l-mal auf, so muß man an solchen Stellen von $f_r(z)$ nicht nur den Funktionswert, sondern auch die Ableitungen bis zur $(l - 1)$-ten Ordnung heranziehen, damit $f_r(z)$ wieder in eindeutiger Weise eine Reihe (6) zugeordnet werden kann. Ihre Koeffizienten werden auch jetzt durch (7a, b, c) gegeben.

Da

$$\oint\limits_{|z|=r_0} \frac{f_R(z)}{z - z_1} \, \mathrm{d}z = 0, \quad \oint \frac{f_R(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} \, \mathrm{d}z = 0$$

und

$$\oint\limits_{|z|=r_n} \frac{f_R(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}} \, \mathrm{d}z = 0$$

ist, so erhalten wir für die Koeffizienten $\{B_\nu\}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ von (6) schließlich die Integraldarstellungen

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r_0} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz \quad (r < r_0 < |z_1|),$$

$$B_1 = -\frac{r^2 - \bar{z}_1 z_2}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)}\,dz \quad (r < r_1 < |z_\mu|;\ \mu = 1, 2)$$

und

$$B_n = -\frac{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r_n} \frac{f(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1})\prod\limits_{\mu=1}^{n-1}\dfrac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}}\,dz \tag{8}$$

$$(n \geqq 2;\ r < r_n < |z_\mu| \text{ für } \mu = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Um zu zeigen, daß die formal gebildete Reihe (5) für jeden Wert von z aus $|z| > r$ konvergiert und zur Summe $f_r(z)$ besitzt, sobald

$$r < \varrho \leqq |z_\mu|;\ \mu = 1, 2, \ldots$$

ist, bilden wir von (5) die m-te Partialsumme $s_m(z)$ und subtrahieren sie von $f_r(z)$.

Beachtet man, daß

$$f_r(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=l} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (r < l < |z|)$$

ist und benützt man die Integraldarstellungen (7a, b, c), so erhält man für $m \geqq 1$

$$R_{m+1}(z) = f_r(z) - s_m(z) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta|=l_m} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{z - z_{m+1}}{\zeta - z_{m+1}}\prod_{\mu=1}^{m}\frac{\dfrac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}}{\dfrac{\zeta - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu \zeta}}\,d\zeta,$$

wobei $r < l_m < \operatorname{Min}(|z|;\ |z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{m+1}|)$ ist.

Wegen (3) können wir $l_m = L$ so wählen, daß $r < L < \operatorname{Min}(\varrho, |z|)$ ist.

Da für $|z| > r$ und $r < \varrho \leqq |z_\mu|;\ \mu = 1, 2, \ldots, m$

$$\left|\prod_{\mu=1}^{m}\frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}\right| \leqq \prod_{\mu=1}^{m}\frac{|z| + |z_\mu|}{r^2 + |z_\mu|\,|z|} \leqq \left(\frac{|z| + \varrho}{r^2 + \varrho\,|z|}\right)^m$$

und für $|\zeta| = L;\ r < L < \varrho$