Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné.

Bedřich Pospíšil, Brno.

(Reçu le 29 avril 1937.)

Soit E un ensemble quelconque; soit $\exp E$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Soit $\operatorname{top} E$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $\exp E$ tout entier et dont les valeurs appartiennent à $\exp E$. Soit $\operatorname{prop} E$ l'ensemble de toutes les fonctions (propositionnelles) définies sur $\operatorname{top} E$ et qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. De plus, désignons par E_u „l'espace topologique général" dont les points parcourent précisément l'ensemble E et tel que la „fermeture" dans E_u d'un $M \subset E$ quelconque est égale à $u(M)$. Je désigne encore par ι_E la fonction bien déterminée par les deux conditions suivantes: a) $\iota_E \in \operatorname{prop} E$ et b) $u \in \operatorname{top} E$ entraîne $\iota_E(u) = 1$ si et seulement si E_u est un espace de Hausdorff non isolé ne contenant qu'un seul point qui ne soit pas isolé dans E_u. Soit $\varphi \in \operatorname{prop} E$; je désigne par E_φ l'ensemble de toutes les „topologies générales" $u \in \operatorname{top} E$ telles que $\varphi(u) = 1$.

Les petits types allemands désigneront toujours des puissances infinies, $\exp \mathfrak{x} = 2^{\mathfrak{x}}$. La relation $X \sim \mathfrak{x}$ veut dire que X est un ensemble de puissance $\mathfrak{x}$.

Soit $\mu_E \in \operatorname{prop} E$; soit $\mu_E(u) = 1$ si et seulement si (i) $u(0) = 0$ et (ii) $M_1 \subset M_2$ entraîne $u(M_1) \subset u(M_2)$. D'après M. Markoff,[1]) à chaque u avec $\mu_E(u) = 1$ et chaque $e \in E$ on peut faire correspondre un sous-ensemble O_e de $\exp E$ de telle façon que $e \in u(M)$ si et seulement si, pour tout $U \in O_e$, on ait $MU \neq 0$. Sous le nom de caractère dans l'espace E_u du point e, on entend[2]) la puissance la plus petite possible d'un tel système O_e. Lorsque $\mu_E \geqq \varphi \in \operatorname{prop} E$, je désigne par $E_\varphi(\mathfrak{a})$ l'ensemble de toutes les topologies générales u avec $\varphi(u) = 1$ telles que tous les caractères des points dans l'espace E_u sont $\leqq \mathfrak{a}$, mais non pas $< \mathfrak{a}$ pour tous les points.

1. *Soit* $E \sim \mathfrak{h}$, $\iota_E \leqq \varphi \in \operatorname{prop} E$; *alors, on a* $E_\varphi \sim \exp\exp \mathfrak{h}$.

En effet, $\operatorname{top} E \sim \exp\exp \mathfrak{h}$, alors $E_\varphi \sim \mathfrak{m}$ entraîne $\mathfrak{m} \leqq \exp$

[1]) Voir Alexandroff-Hopf, Topologie I, p. 42, Aufgabe, Grundlehren d. math. Wiss., Berlin 1935.

[2]) d'après MM. Alexandroff et Urysohn.

$\exp \mathfrak{h}$. La relation inverse $\mathfrak{m} \geqq \exp \exp \mathfrak{a}$ résulte, pour $\mathfrak{a} = \exp \mathfrak{h}$, du théorème suivant.

2. *Soit* $E \sim \mathfrak{h}$, $\varphi \in \operatorname{prop} E$, $\iota_E \leqq \varphi \leqq \mu_E$, $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$; *alors, on a* $E_\varphi(\mathfrak{a}) \sim \exp \mathfrak{a}$.

Avant de démontrer ce théorème, je vais en tirer trois corolaires qui suivent. Deux fonctions u et v appartenant à top E sont dites *homéomorphes*, s'il existe une transformation biunivoque f de E en E tout entier telle que $f\,u(M) = v\,f(M)$. L'ensemble E_φ ou $E_\varphi(\mathfrak{a})$ resp. est la somme des classes disjointes telles que les deux fonctions u et v appartiennent à la même classe, si et seulement si elles sont homéomorphes. Soit $|\,E_\varphi\,|$ ou $|\,E_\varphi(\mathfrak{a})\,|$ resp. l'ensemble de toutes les classes en question.

3. *Soit* $E \sim \varphi$, $\iota_E \leqq \varphi \in \operatorname{prop} E$; *alors, on a* $|\,E_\varphi\,| \sim \exp \exp \mathfrak{h}$.

En effet, la puissance d'une classe $\in |\,E_\varphi\,|$ est $\leqq \mathfrak{h}^\mathfrak{h} = \exp \mathfrak{h}$, c'est à dire $< \exp \exp \mathfrak{h}$. Si la puissance de $|\,E_\varphi\,|$ était $< \exp \exp \mathfrak{h}$, on aurait $E_\varphi \sim \mathfrak{m} < \exp \exp \mathfrak{h}$ ce qui contredit au théorème 1. La puissance de $|\,E_\varphi\,|$ ne peut pas surpasser celle de E_φ d'où l'on tire la thèse désirée.

De même, en se servant du théorème 2 (au lieu de 1), on prouve

4. *Soit* $E \sim \mathfrak{h}$, $\varphi \in \operatorname{prop} E$, $\iota_E \leqq \varphi \leqq \mu_E$, $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$, $\exp \mathfrak{h} < \exp \mathfrak{a}$; *alors, on a* $|\,E_\varphi(\mathfrak{a})\,| \sim \exp \mathfrak{a}$.

Car on a $\mathfrak{h}^\mathfrak{h} = \exp \mathfrak{h} < \exp \mathfrak{a}$ par hypothèse.

5. *Soit* $E \sim \aleph_0$; *l'ensemble* E *peut être métrisé précisément de* $\exp \aleph_0$ *manières différentes.*

En effet, il est évident qu'il n'y a guère plus de $\exp \aleph_0$ métriques sur E. Posons alors, dans le théorème 2, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} = \aleph_0$ et $\varphi(u)=1$ si et seulement si l'espace E_u est normal. Alors, notre théorème résulte immédiatement du fait bien connu que tout espace normal possédant une base ouverte dénombrable est métrisable.[3])

Il nous reste encore à prouver le théorème 2. On tire sans peine de la définition des caractères que $E_\varphi(\mathfrak{a}) \sim \mathfrak{m} \leqq \exp \mathfrak{a}$. Soit I l'espace du dernier théorème de mon article cité.[4]) Soit $i(M)$ la fermeture dans l'espace I de l'ensemble M; on a $\iota_E(i) = 1$, alors $\varphi(i) = 1$; de plus, tous les caractères des points dans I sont $\leqq \mathfrak{a}$. Dans les notations de l'article précité, ∞ est un élément $f = \infty$ de l'ensemble $F \sim \exp \mathfrak{a}$. Pour mettre en évidence que I dépend de f, soit I_f l'espace qui s'obtient de I en y remplaçant $f = \infty$ par un symbole * fixe qui ne dépend pas de f sans changer la topologie. Soit $f \in F$, $g \in F$, $f \neq g$. En vertu des propriétés de l'espace Q de l'article précité, il existe un entourage U_f et U_g resp. du point * dans I_f et I_g

[3]) C'est un théorème célèbre de M. Urysohn. Voir p. ex. Alexandroff-Hopf, l. c. p. 81 ou Kuratowski, Topologie I, p. 104, Monografje matematyczne, Warszawa-Lwów, 1933.

[4]) Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée, Časopis **67** (1937/38), 89—96.