Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti.

J. Novák, Brno.

(Došlo dne 10. dubna 1937.)

Je známo, že charakter bodu ve spočetném AHU-prostoru[1]) nemusí býti spočetný. P. Urysohn podává příklad toho v pojednání „Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen", Math. Ann. **94**, str. 288. Jeho prostor sestává z isolovaných přirozených čísel a z čísla 0, jehož charakter je nespočetný.

V topologickém semináři položil prof. Čech dne 27. října 1936 tento problém: Existuje spočetný ARU-prostor,[2]) jehož charakter je v každém bodě nespočetný?

Dne 3. listopadu 1936 jsem podal v topologickém semináři konstrukci dvou spočetných ARU-prostorů s uvedenou vlastností. Každá neprázdná podmnožina prvého prostoru, jež neobsahuje isolovaný bod, je rovněž řešením tohoto problému.

Nechť P je množina všech racionálních čísel. Do P zavedeme topologii u_1 tím, že budeme definovati okolí. Nechť ε je kladné reálné číslo. ε-ovým okolím $O_1(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ rozumíme množinu:

$$O_1(a, \varepsilon) = (a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n, a + \frac{1}{\pi^n} \right) . (a, a + \varepsilon),$$

kde ξ_n je iracionální číslo vyhovující vztahu $a + \frac{1}{\pi^{n+1}} \leqq \xi_n < < a + \frac{1}{\pi^n}$; jsou-li α, β reálná čísla, resp. $-\infty$ nebo $+\infty$, pak symbol (α, β) znamená množinu všech racionálních čísel mezi α a β.

Proběhne-li ε všecka kladná reálná čísla, dostaneme systém $\mathfrak{O}_1(a)$ částí množiny P té vlastnosti, že $\mathfrak{O}_1(a) \neq \emptyset$, $a \in O_1(a, \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$. $\mathfrak{O}_1(a)$ je systém definujících okolí bodu a.[3]) Systémy tyto zavádějí do P topologii u_1.

---

[1]) Č. odst. 6·1, 7·1, 8·4 (Č znamená: Čech, Topologické prostory, Časopis **66** (1937), str. 225 D — 264 D).

[2]) Č. odst. 8·5.

[3]) Č. odst. 4·1.

Definujme ε-ové okolí $O_2(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ takto:

$$O_2(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) + O_1(a, \varepsilon).$$

Dostaneme jiné definující systémy $\mathfrak{O}_2(x)$, $x \in P$ bodů x, jimiž je zavedena do P topologie u_2. Poněvadž pro každý $x \in P$ existuje ke každému okolí $O_2(x, \varepsilon)$ okolí $O_1(x, \varepsilon) \subset O_2(x, \varepsilon)$ a nikoliv naopak, jest topologie u_2 silnější než topologie u_1.[3])

Snadno se dá dokázati, že v prostoru (P, u_i) $(i = 1, 2)$ jsou splněny tyto axiomy:

$(\mathrm{III}^\circ)_U$: Když $b \in O_i(a, \varepsilon)$, pak existuje okolí $O_i(b, \eta) \subset O_i(a, \varepsilon)$.

$(\mathrm{III}^\circ)_A$: Když $O' \in \mathfrak{O}_i(a)$, $O'' \in \mathfrak{O}_i(a)$, existuje okolí $O \in \mathfrak{O}_i(a)$ takové, že $O \subset O' \,.\, O''$.

Prostor (P, u_i) je tudíž AU-prostorem.[4])

Je-li ε kladné iracionální číslo, pak okolí $O_i(a, \varepsilon)$ $(i = 1, 2)$ jest uzavřené. Vskutku komplementární množina $P - O_i(a, \varepsilon)$ jest otevřená, neboť je součtem otevřených intervalů racionálních čísel tvaru (α, β), jež jsou, jak se snadno přesvědčíme, v prostoru (P, u_i) otevřené. Je tedy splněn také axiom $(\mathrm{III}^\circ)_R$, takže prostory (P, u_1) a (P, u_2) jsou spočetné ARU-prostory.[2])

Abychom dokázali, že žádný bod prostoru (P, u_i) $(i = 1, 2)$ není bodem spočetnosti, dokážeme napřed lema. Pravíme, že posloupnost bodů topologického prostoru R konverguje k bodu $x \in R$, když v každém jeho okolí se nacházejí skoro všecky body té posloupnosti.[5])

Lema. Nechť $x \in R$ je A-bod, jehož charakter je spočetný. Nechť $M \subset R$, $x \in \overline{M}$. Pak existuje v M bodová posloupnost, jež konverguje k bodu x.

Důkaz. Poněvadž x je A-bodem a bodem spočetnosti, existuje monotonní posloupnost $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ okolí bodu x, jež je úplným systémem okolí toho bodu. Poněvadž $x \in \overline{M}$, jest $O_n \,.\, M \neq \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zvolme bod $x_n \in O_n \,.\, \overline{M}$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v M, jež konverguje k bodu x.

Nechť $a \in (P, u_i)$ $(i = 1, 2)$. Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že $\chi_{u_i}(a) = \aleph_0$. Bod a náleží do uzávěru $u_i\,(\underset{x \in P}{E}\,[a < x])$, neboť každé okolí $O_i(a, \varepsilon)$ má body společné s množinou $\underset{x \in P}{E}\,[a < x]$. Proto podle lematu existuje v $\underset{x \in P}{E}\,[a < x]$ bodová posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, jež konverguje k bodu a. Neobsahuje-li množina $\left(a + \frac{1}{\pi^{n+1}}, a + \frac{1}{\pi^n}\right)$

[4]) Č. odst. 7·2 a konec odst. 6·3.

[5]) Je-li bod x, k němuž konverguje bodová posloupnost, H-bodem, pak tato konverguje k jedinému bodu x; není-li H-bodem, pak může tato posloupnost konvergovati také k jiným bodům.