ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti.[1])

Bedřich Pospíšil, Brno.

(Došlo dne 27. března 1937.)

Malá německá písmena jsou transfinitní mohutnosti; místo $2^{\mathfrak{m}}$ pišme exp $\mathfrak{m}$. Citát v závorce se vždy vztahuje k Čechovým „Topologickým prostorům".[2])

Definice: Množina H *leží hustě* v topologickém prostoru P, když uzávěr v P množiny H je roven P (1.1).

V tomto článku budeme studovat, jaká může být mohutnost prostoru, ve kterém *leží hustě* množina dané mohutnosti. Důkladnějšího studia bude třeba toliko v případě AHU-prostorů (6.1, 8.4, 7.1). Rozšíříme-li totiž úvahy už i jen na ABU-prostory (8.3), je odpověď triviální. K libovolnému danému $\mathfrak{r}$ sestrojme totiž prostor R takto: Mohutnost prostoru R bude $\mathfrak{r}$ a za uzávěry nekonečných částí prostoru prohlásíme prostor R; jinak bude uzávěr množiny roven té množině samotné. Zřejmě R je ABU-prostor mohutnosti $\mathfrak{r}$, v němž leží hustě každá nekonečná část. V případě AHU-prostorů je odpověď takováto:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina mohutnosti $\mathfrak{h}$, jest, aby byly splněny nerovnosti $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq exp\, exp\, \mathfrak{h}$.

Důkaz: Jest jasno, že musí být $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}$. Nechť tedy P je AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina H mohutnosti $\mathfrak{h}$. Každému bodu p prostoru P přiřaďme systém $\mathfrak{S}_p$ částí množiny H takový, že jest $S \in \mathfrak{S}_p$, když a jen když p leží v uzávěru množiny S. Buď $p \in P$, $q \in P$, $p \neq q$. Poněvadž P je H-prostor (8.4), existují disjunktní okolí O_p a O_q (2.1) bodů resp. p a q. Z toho, že množina H leží hustě v P, se snadno vidí (4.1.1), že uzávěr množiny HO_p resp. HO_q obsahuje p resp. q, tedy, že $HO_p \in \mathfrak{S}_p$, $HO_q \in \mathfrak{S}_q$. Zřejmě však HO_q nepatří do $\mathfrak{S}_p$ a HO_p nepatří do $\mathfrak{S}_q$ (4.1.1). Tedy $\mathfrak{S}_p \neq \mathfrak{S}_q$. Tedy různým bodům p a q jsou přiřazeny různé systémy $\mathfrak{S}_p$ a $\mathfrak{S}_q$.

[1]) Tento můj článek patří do serie článků řešících problémy položené panem profesorem Čechem v jeho topologickém semináři.

[2]) Časopis **66** (1937), str. D 225—264.

Ale $\mathfrak{S}_p$ jsou množiny, jejichž elementy jsou části množiny H. Částí množiny H je ale exp $\mathfrak{h}$ a tedy množin $\mathfrak{S}_p$ je nanejvýše exp exp $\mathfrak{h}$. Tedy i bodů v P je nanejvýš tolik, to jest $\mathfrak{p} \leqq$ exp exp $\mathfrak{h}$, c. b. d.

Zbývá ještě dokázat, že podmínka jest dostatečná. To ale plyne z tvrzení ostřejšího, které následuje a které se ukáže později užitečným. Pro důkaz dostatečnosti naší podmínky stačí totiž v tom, co následuje, klásti $\mathfrak{a} =$ exp $\mathfrak{h}$.

Jestliže $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{a} \leqq$ exp $\mathfrak{h}$, pak nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU-prostor mohutnosti $\mathfrak{p}$, ve kterém leží hustě množina mohutnosti $\mathfrak{h}$ a jehož všecky body mají charakter $\leqq \mathfrak{a}$, jest, aby byly splněny nerovnosti $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq$ exp $\mathfrak{a}$.

Zase musí být $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}$. Nechť P a H splňují podmínky jako v předešlém důkaze a mimo to ještě $\chi_P(p) \leqq \mathfrak{a}$ pro každý $p \in P$. Každému bodu $p \in P$ přiřaďme úplný systém $\mathfrak{U}_p$ okolí (4.2) bodu p mohutnosti $\chi_P(p)$. Buď $\mathfrak{B}_p$ množina všech HU, kde $U \in \mathfrak{U}_p$. Jako v předešlém důkaze se vidí, že $\mathfrak{B}_p \neq \mathfrak{B}_q$ pro $p \neq q$. Avšak $\mathfrak{B}_p$ jsou části množiny mohutnosti exp $\mathfrak{h}$, totiž množiny všech částí množiny H. Při tom ale $\mathfrak{B}_p$ má mohutnost $\leqq \mathfrak{a}$. Ale částí množiny mohutnosti exp $\mathfrak{h}$, které samy mají mohutnost $\leqq \mathfrak{a}$, je nanejvýš $\mathfrak{a}$-tá mocnost čísla exp $\mathfrak{h}$, to jest nanejvýš exp $(\mathfrak{h}\mathfrak{a}) =$ exp $\mathfrak{a}$. Bodů prostoru P je nanejvýš tolik co těch $\mathfrak{B}_p$ a tedy $\mathfrak{p} \leqq$ exp $\mathfrak{a}$, c. b. d.

Důkaz dostatečnosti:

1. Nechť X je AH-prostor, x_k konečně mnoho jeho bodů. Pak každému k lze přiřaditi okolí J_k bodu x_k tak, že J_k jsou po dvou disjunktní. Nechť totiž O_{ij} a O_{ji} pro $i \neq j$ jsou disjunktní okolí bodů resp. x_i a x_j. Pak stačí za J_k brát společnou část (průnik) všech O_{kj} s pevným k.

2. Pro pevnou množinu M mohutnosti $\mathfrak{h}$ nechť je Φ prostor všech funkcí, jichž argument probíhá M a které nabývají hodnot *1* a *2*. Při tom definující okolí (4.1.1) bodu φ v Φ budou odpovídat konečným částem množiny M. Okolí odpovídající konečné části K množiny M bude prostě množina všech $\psi \in \Phi$ takových, že $\psi(k) = \varphi(k)$ pro $k \in K$. Φ je AHU-prostor mohutnosti exp $\mathfrak{h}$, jak se lehko uváží (4.1 — (I°) a (II°), axiomy (III°) v 7.1, 6.3, 8.4). Vyberme tedy z Φ část X mohutnosti $\mathfrak{a} \leqq$ exp $\mathfrak{h}$.

3. X je AHU-prostor (1.5) mohutnosti $\mathfrak{a}$ a má otevřenou basi mohutnosti $\leqq \mathfrak{h}$ (6.4). Definující okolí v Φ a tedy i v X jsou otevřená. Stačí tedy ukázat, že definujících okolí v Φ je nanejvýš $\mathfrak{h}$. Zvolme na okamžik K pevně. Všech odpovídajících mu okolí všech možných bodů v Φ je zřejmě tolik, kolik je všech možných parciálních funkcí definovaných na K k funkcím z Φ. Je jich tedy exp k, kde k je mohutnost množiny K. Tedy pevnému K odpovídá konečně mnoho těch okolí, to jest méně než $\aleph_0$. Probíhá-li nyní K všecky možné konečné části množiny M, kterých je celkem $\mathfrak{h}$,

je těch okolí nanejvýš $\aleph_0 \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, c. b. d. Buď $\mathfrak{B}$ pevná otevřená base mohutnosti $\leqq \mathfrak{h}$ v prostoru X.

4. „Čtverečkem" budu nazývat vždy množinu všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in J_1$, $y \in J_2$, při čemž J_1 a J_2 jsou pevné — na čtverečku závislé — elementy base $\mathfrak{B}$. Ten čtvereček označme $J_1 \times J_2$; J_1 a J_2 jsou jím určeny.

5. Označme F množinu všech funkcí, jichž argument probíhá X a jichž hodnoty jsou v X. Pak F má mohutnost

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leqq (\exp \mathfrak{h})^{\mathfrak{a}} = \exp (\mathfrak{h}\mathfrak{a}) = \exp \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}},$$

to jest F má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$.

6. Buď D množina všech konečných skupin d čtverečků:

$$J_1 \times J'_1,\ J_2 \times J'_2, \ldots, J_n \times J'_n$$

— na pořádku nezáleží — takových, že množiny J_k jsou po dvou disjunktní. Při tom $J_k \times J'_k$ jsou t. zv. „souřadnice" elementu d.

7. Při pevné funkci $f \in F$ nechť K_f je množina všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in X$, $y \in X$, $y = f(x)$. K_f je „křivka o rovnici $y = f(x)$".

8. Označme $Q = F + D$ a zaveďme v Q topologii takto: Definujícím okolím bodu $d \in D$ bude množina obsahující jeden jediný bod d. Nechť z_k pro $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou prvky množiny K_f v konečném počtu. Každý element z_k zavřeme do čtverečku Z_k. Definujícím okolím bodu f patřícím k (neuspořádaným) skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ rozumíme každou množinu, která obsahuje f a všecky $d \in D$ — leda až na konečně mnoho — takové, že ke každému $k = 1, 2, \ldots, n$ existuje souřadnice bodu d (ta souřadnice je čtvereček) ležící v Z_k a obsahující z_k.

9. Q má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$. Q má mohutnost aspoň $\exp \mathfrak{a}$ podle 5. Base $\mathfrak{B}$ má podle 3 mohutnost nejvýš $\mathfrak{h}$. Tedy čtverečků je nanejvýše $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}$. Tedy konečných skupin čtverečků je rovněž nanejvýš $\mathfrak{h}$ a tedy D má mohutnost $\leqq \mathfrak{h}$. S 5 dohromady to dá, že Q má mohutnost nejvýš $\exp \mathfrak{a} + \mathfrak{h}$, t. j. $\exp \mathfrak{a}$, c. b. d.

10. Buď $f_1 \in F$, $f_2 \in F$, $f_1 \neq f_2$. Existuje tedy $x \in X$, pro něž $y_1 \neq y_2$, kde $y_l = f_l(x)$ pro $l = 1, 2$. Existují pak disjunktní množiny J'_1 a J'_2, prvky to base $\mathfrak{B}$, takové, že $y_l \in J'_l$. Buď $J \in \mathfrak{B}$ a nechť $x \in J$. Nechť $z_l = \{x, y_l\}$ a nechť $Z_l = J \times J'_l$. Je-li O_l nějaké okolí bodu f_l patřící ke skupinám (z_l) a (Z_l), pak okolí O_1 a O_2 jsou disjunktní. Pro jiné páry bodů z Q se axiom $(\mathrm{III}^\circ)_H$ v (6.3.9) verifikuje zcela triviálně. Rovněž i ostatní podmínky pro AHU-prostor — jsou citovány v 2. Tedy: Q je AHU-prostor.

11. Nechť definující okolí O_1 bodu $f \in F$ patří ke skupinám $(z, \ldots)$ a $(Z, \ldots)$; nechť def. okolí O_2 bodu f patří ke skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$; nechť $z \neq z_k$. Pak O_1 neobsahuje O_2 a tedy zvláště $O_1 \neq O_2$. Nechť $Z_k = J_k \times J'_k$.

Podle 1 a 3 lze každé konečné skupině $(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_N)$, kde $z_l = \{x_l, y_l\}$, $x_l \in X$, $y_l \in X$, $z_r \neq z$, nalézti taková okolí J_r^* pro $r = 1, \ldots, N$ bodů resp. x_r v X, že jsou po dvou disjunktní. Lze o nich zřejmě předpokládat, když jsme je eventuálně zmenšili, že jsou to prvky base $\mathfrak{B}$, že neobsahují x při označení $z = \{x, y\}$ a že $J_k^* \subset J_k$. Buď $J''_k = J'_k$ a jinak buď J'_r libovolné definující okolí bodu y_r. Nechť $Z_r^* = J_r^* \times J''_r$. Pak množina všech Z_r^* je bodem z D. Takových bodů je ale nekonečně mnoho, neboť ke každému přirozenému N takový existuje. Do O_2 jich ale nepatří nejvýš konečně mnoho. Tedy nějaký takový bod náleží do O_2 a zřejmě nenáleží do O_1, c. b. d. Skupinu $(z_1, \ldots, z_n)$, k níž patří O_2, označujme vždy O_2'.

12. Buď $f \in F$. Pak okolí bodu f patřící k pevným skupinám $(z_1, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, \ldots, Z_n)$ vzniknou všecka z jednoho z nich ubíráním konečných částí. Je jich tedy tolik co těch konečných částí, tedy nanejvýš tolik co konečných částí množiny D, to jest nejvýš $\mathfrak{h}$. Všech skupin $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ je ale $\mathfrak{a}$ a skupin $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ nejvýše $\mathfrak{h}$. Tedy všech těch okolí vůbec je nanejvýš $\mathfrak{h}^2\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Tedy $\chi_Q(f) \leqq \mathfrak{a}$.

13. Buď $\mathfrak{B}$ systém definujících okolí bodu $f \in F$ a nechť má mohutnost $< \mathfrak{a}$. Buď $\mathfrak{B}'$ součet všech O'_2 pro $O'_2 \in \mathfrak{B}$. Pak $\mathfrak{B}'$ má mohutnost $< \mathfrak{a}$. Poněvadž však K_f má mohutnost $\mathfrak{a}$, existuje v K_f prvek z, který do $\mathfrak{B}'$ nenáleží. Nechť okolí I bodu f patří ke skupinám (z) a (Z) s libovolným z. Podle 11 I neobsahuje žádné $O_2 \in \mathfrak{B}$ a tedy $\mathfrak{B}$ není úplný systém okolí bodu f. Ze systému definujících okolí nelze tedy vybrat úplný systém okolí bodu f, který by měl mohutnost $< \mathfrak{a}$. Tedy $\chi_Q(f) \geqq \mathfrak{a}$ (4.2.3). 12 a 13 dá tedy celkem $\chi_Q(f) = \mathfrak{a}$.

14. Podle 9 prostor Q má mohutnost $\exp \mathfrak{a}$ a obsahuje množinu D mohutnosti $\leqq \mathfrak{h} \leqq \exp \mathfrak{a}$. Existuje tedy v Q množina D' mohutnosti $\mathfrak{h}$ obsahující D. Množina D leží ale v Q hustě: Pro $d \in D$ je totiž d v uzávěru množiny D a priori (1.1 — (II^u)). Pro $f \in F$ z $\chi_Q(f) = \mathfrak{a} > 1$ plyne pro každé definující okolí O_f bodu f existence bodu $q \in Q$, $q \neq f$, $q \in O_f$. Z toho pak plyne $q \in D$ a tedy každé okolí bodu f protne D a tedy f náleží do uzávěru množiny D (4.1.1), c. b. d. Tím spíše leží D' v Q hustě (1.1 — (III^u)). Z nerovností $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p} \leqq \exp \mathfrak{a}$ vychází existence prostoru $Q' \supset D'$ vnořeného do Q (1.5), jehož mohutnost je $\mathfrak{p}$. Množina D' leží v Q' zřejmě hustě a jest učiněno zadost požadavkům naší věty.

Poznámka: Při důkazu první věty nechť si čtenář povšimne toho, že podmínka zůstane nutnou i při AH-prostorech. Stačí však už ke konstrukci AHU-prostoru.

Aplikace: Písmeno I (eventuálně s indexy) značí vždy AHU-prostor, jehož každý bod p — mimo jeden výjimečný, který vždy označujme symbolem ∞ (se stejnými indexy jako I) — má okolí obsahující jedině p. Okolí bodu ∞ mají vesměs mohutnost > 1.

Aby ukázal, že charakter bodu může převýšit mohutnost prostoru, sestrojil Urysohn[3]) spočetný prostor I', kde $\chi_{I'}(\infty') > \aleph_0$. Jinak však se o $\chi_{I'}(\infty')$ neví nic. Jako aplikace předchozí konstrukce uvádím ještě prostor I libovolné předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ (místo $\aleph_0$ u Urysohna) s charakterem bodu ∞ netoliko známým $\geqq \mathfrak{h}$, ale dokonce v přípustných mezích libovolně volitelným:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval prostor I mohutnosti $\mathfrak{h}$, kde ∞ má charakter $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{h}$, jest aby bylo $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$.

Počet okolí bodu a tedy ani charakter nemůže převýšit počet všech částí prostoru a tedy $\mathfrak{a} \leqq \exp \mathfrak{h}$. Tím je nutnost odůvodněna.

Prostor I vyhovující tvrzení věty se skládá z jednoho bodu $f \in F$, z celé množiny D a z jakési množiny mohutnosti $\mathfrak{h}$, jejíž prvky nejsou ani v F ani v D. Definující okolí bodu f budou stejná jako v prostoru Q v důkaze druhé věty. Podle **13** stačí klást $f = \infty$.

Novák zlepšil Urysohnův příklad v jiném směru. Sestrojil totiž spočetný dědičný N-prostor (8.6.5), jehož body mají vesměs nespočetné, jinak však neznámé, charaktery. V příštím čísle Časopisu podám konstrukci zahrnující Novákovo i moje nynější zlepšení Urysohnova prostoru. Bude to dědičný N-prostor předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ s charaktery bodů vesměs rovnými předem dané mohutnosti $\geqq \mathfrak{h}$ v přípustných mezích.

Poznámka: Říkáme, že prostor Θ je R_0-prostor, když pro každý bod $p \in \Theta$ a každé jeho okolí O v Θ existuje okolí Ω v Θ bodu p takové, že $\Omega = \overline{\Omega} = \Theta - \overline{\Theta - \Omega} \subset O$; při tom $\overline{\Gamma}$ je uzávěr v Θ množiny $\Gamma \subset \Theta$. Místo „AHU-prostor“ možno v předešlých větách psát „AHR_0U-prostor“. Stačí místo Q uvažovat prostor Θ takový, že zase $\Theta = F + D$ a (d) je okolím v Θ bodu $d \in D$; avšak okolím v Θ bodu $f \in F$ patřícím ke skupinám $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ — se stejnými podmínkami jako prve — bude každá množina $A - K + B$ s konečným K, kde A je množina těch $d \in D$, že pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ jakási souřadnice $J_k \times J'_k$ bodu d jest $\subset Z_k$ a $x_k \in J_k$ při $z_k = \{x_k, y_k\}$, $x_k \in X$, $y_k \in X$, a kde B je množina těch $g \in F$, že $\{x_k, g(x_k)\} \in Z_k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$. Θ je R_0-prostor, neboť definující okolí v Θ jsou uzavřená, poněvadž definující okolí v X jsou uzavřená. Ostatek se doslova opakuje.

*

[3]) Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen, Math. Annalen **94** (1925), 262—295.