

Werk

Label: Periodical issue

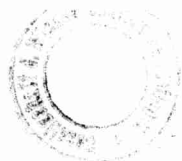
PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0067|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 67.



SEŠIT 2.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH.
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ.
V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER, K. RYCHLÍK.
J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, ST. TEPLÝ, FRANT.
VYČICHLO, AL. WANGLER, FR. ZÁVIŠKA.
AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1938

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fyziků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.

Abonnement pour un an 120 Kč.

Chèques postaux: Praha 13103.

Année 67

Fascicule 2

1987/88

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická — Travaux mathématiques

- Bedřich Pospíšil, Brno, Pražská 20: Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti — Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée 89
- Josef Novák, Brno, Kounicova 63: Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti — Sur deux espaces réguliers et dénombrables sans points de caractère dénombrable 97
- Bedřich Pospíšil, Brno, Pražská 20: Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné — O počtu topologií na dané množině ... 100
- Ernst Lammel, Praha I, Husova 5: Zum Interpolationsprobleme im Kreisinge regulärer Funktionen I. — K problému interpolace funkcí regulárních v mezikruží I 103
- Vojtěch Jarník, Praha II, U Karlova 3: Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes — Nový důkaz jedné Chinčinyovy věty 109
- Josef Klíma, Brno, Veveří 95: Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny — Sur une représentation linéaire spéciale de l'espace des droites par la variété des couples des points dans un plan 114

Část fyzikální — Travaux de physique

- Vladimír Guth, Ondřejov: Určení výšek a viditelné části dráhy meteoru grafickou metodou — Détermination des hauteurs et de la trajectoire réelle d'un météore par la méthode graphique 132
- Vincenc Nechvíle, Praha X, Čelakovského 515: Contribution à la théorie du télescope aplanétique Ritchey-Chrétien — Příspěvek k teorii Ritchey-Chrétienova aplanatického teleskopu 142
- Jaroslav Štěpánek, Ondřejov: Přehled fotografického sledování komety Finslerovy (1937 f.) na ondřejovské observatoři „Žalov“ Státní hvězdárny v Praze — Résultats des observations photographiques de la comète Finsler (1937 f.) à l'Observatoire „Žalov“ de l'Observatoire National de Prague 151
- Jaroslav Procházka, Praha XII, Slezská 5: Sur la stabilité d'une lunette méridienne — O stabilitě průchodního stroje 157
- J. M. Mohr, Praha XVI, Švédská 7: On the question of the possible rotation of the local cluster — K otázce možné rotace lokálního shluku hvězd v okolí Slunce 163
- Jindřich Svoboda, Praha II, Karlovo nám. 14: Experimentální stanovení osobní chyby u cirkumzenitálu — Détermination expérimentale de l'erreur personnelle dans les observations avec l'appareil circumzénithal Nušl-Frič 168
- M. Bačkovský - M. Nepřašová, Praha II, U Karlova 5: Results in the K β group of molybdenum obtained with a spectrograph containing a plastically deformed rocksalt crystal — O fokusačním spektrografu s plasticky deformovaným krystalem a výsledcích v K β skupině molybdenu 176

ČÁST MATEMATICKÁ

Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti.¹⁾

Bedřich Pospíšil, Brno.

(Došlo dne 27. března 1937.)

Malá německá písmena jsou transfiniteční mohutnosti; místo 2^m píšeme $\exp m$. Citát v závorce se vždy vztahuje k Čechovým „Topologickým prostorům“.²⁾

Definice: Množina H leží hustě v topologickém prostoru P , když uzávěr v P množiny H je roven P (1.1).

V tomto článku budeme studovat, jaká může být mohutnost prostoru, ve kterém leží hustě množina dané mohutnosti. Důkladnějšího studia bude třeba toliko v případě AHU -prostorů (6.1, 8.4, 7.1). Rozšíříme-li totiž úvahy už i jen na ABU -prostory (8.3), je odpověď triviální. K libovolnému danému τ sestrojme totiž prostor R takto: Mohutnost prostoru R bude τ a za uzávěry nekonečných částí prostoru prohlásíme prostor R ; jinak bude uzávěr množiny roven té množině samotné. Zřejmě R je ABU -prostor mohutnosti τ , v němž leží hustě každá nekonečná část. V případě AHU -prostorů je odpověď takováto:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU -prostor mohutnosti p , ve kterém leží hustě množina mohutnosti h , jest, aby byly splněny nerovnosti $h \leq p \leq \exp \exp h$.

Důkaz: Jest jasno, že musí být $h \leq p$. Nechť tedy P je AHU -prostor mohutnosti p , ve kterém leží hustě množina H mohutnosti h . Každému bodu p prostoru P přiřadíme systém $\mathfrak{S}_p$ částí množiny H takový, že jest $S \in \mathfrak{S}_p$, když a jen když p leží v uzávěru množiny S . Buď $p \in P$, $q \in P$, $p \neq q$. Poněvadž P je H -prostor (8.4), existují disjunktní okolí O_p a O_q (2.1) bodů resp. p a q . Z toho, že množina H leží hustě v P , se snadno vidí (4.1.1), že uzávěr množiny HO_p resp. HO_q obsahuje p resp. q , tedy, že $HO_p \in \mathfrak{S}_p$, $HO_q \in \mathfrak{S}_q$. Zřejmě však HO_q nepatří do $\mathfrak{S}_p$ a HO_p nepatří do $\mathfrak{S}_q$ (4.1.1). Tedy $\mathfrak{S}_p \neq \mathfrak{S}_q$. Tedy různým bodům p a q jsou přiřazeny různé systémy $\mathfrak{S}_p$ a $\mathfrak{S}_q$.

¹⁾ Tento můj článek patří do serie článků řešících problémy položené panem profesorem Čechem v jeho topologickém semináři.

²⁾ Časopis 66 (1937), str. D 225—264.

Ale $\mathfrak{S}_p$ jsou množiny, jejichž elementy jsou části množiny H . Částí množiny H je ale $\exp \mathfrak{h}$ a tedy množin $\mathfrak{S}_p$ je nanejvýše $\exp \exp \mathfrak{h}$. Tedy i bodů v P je nanejvýš tolik, to jest $p \leq \exp \exp \mathfrak{h}$, c. b. d.

Zbývá ještě dokázat, že podmínka jest dostatečná. To ale plyne z tvrzení ostřejšího, které následuje a které se ukáže později užitečným. Pro důkaz dostatečnosti naší podmínky stačí totiž v tom, co následuje, klásti $\alpha = \exp \mathfrak{h}$.

Jestliže $\mathfrak{h} \leq \alpha \leq \exp \mathfrak{h}$, pak nutná a dostatečná podmínka, aby existoval AHU -prostor mohutnosti p , ve kterém leží hustě množina mohutnosti $\mathfrak{h}$ a jehož všechny body mají charakter $\leq \alpha$, jest, aby byly splněny nerovnosti $\mathfrak{h} \leq p \leq \exp \alpha$.

Zase musí být $\mathfrak{h} \leq p$. Necht' P a H splňují podmínky jako v předešlém důkaze a mimo to ještě $\chi_P(p) \leq \alpha$ pro každý $p \in P$. Každému bodu $p \in P$ přiřadíme úplný systém $\mathfrak{U}_p$ okolí (4.2) bodu p mohutnosti $\chi_P(p)$. Buď $\mathfrak{B}_p$ množina všech HU , kde $U \in \mathfrak{U}_p$. Jako v předešlém důkaze se vidí, že $\mathfrak{B}_p \neq \mathfrak{B}_q$ pro $p \neq q$. Avšak $\mathfrak{B}_p$ jsou části množiny mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, totiž množiny všech částí množiny H . Při tom ale $\mathfrak{B}_p$ má mohutnost $\leq \alpha$. Ale částí množiny mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, které samy mají mohutnost $\leq \alpha$, je nanejvýš α -tá mocnost čísla $\exp \mathfrak{h}$, to jest nanejvýš $\exp(\mathfrak{h}\alpha) = \exp \alpha$. Bodů prostoru P je nanejvýš tolik co těch $\mathfrak{B}_p$ a tedy $p \leq \exp \alpha$, c. b. d.

Důkaz dostatečnosti:

1. Necht' X je AH -prostor, x_k konečně mnoho jeho bodů. Pak každému k lze přiřaditi okolí J_k bodu x_k tak, že J_k jsou po dvou disjunktní. Necht' totiž O_{ij} a O_{ji} pro $i \neq j$ jsou disjunktní okolí bodů resp. x_i a x_j . Pak stačí za J_k brát společnou část (průnik) všech O_{kj} s pevným k .

2. Pro pevnou množinu M mohutnosti $\mathfrak{h}$ necht' je Φ prostor všech funkcí, jichž argument probíhá M a které nabývají hodnot 1 a 2. Při tom definující okolí (4.1.1) bodu φ v Φ budou odpovídat konečným částem množiny M . Okolí odpovídající konečné části K množiny M bude prostě množina všech $\psi \in \Phi$ takových, že $\psi(k) = \varphi(k)$ pro $k \in K$. Φ je AHU -prostor mohutnosti $\exp \mathfrak{h}$, jak se lehko uváží (4.1 — (I°) a (II°), axiomy (III°) v 7.1, 6.3, 8.4). Vyberme tedy z Φ část X mohutnosti $\alpha \leq \exp \mathfrak{h}$.

3. X je AHU -prostor (1.5) mohutnosti α a má otevřenou basi mohutnosti $\leq \mathfrak{h}$ (6.4). Definující okolí v Φ a tedy i v X jsou otevřená. Stačí tedy ukázat, že definujících okolí v Φ je nanejvýš $\mathfrak{h}$. Zvolme na okamžik K pevně. Všechny odpovídající mu okolí všech možných bodů v Φ je zřejmě tolik, kolik je všech možných parciálních funkcí definovaných na K k funkcím z Φ . Je jich tedy $\exp k$, kde k je mohutnost množiny K . Tedy pevnému K odpovídá konečně mnoho těch okolí, to jest méně než $\aleph_0$. Probíhá-li nyní K všechny možné konečné části množiny M , kterých je celkem $\mathfrak{h}$,

je těch okolí nanejvýš $\aleph_0 \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, c. b. d. Buď $\mathfrak{B}$ pevná otevřená base mohutnosti $\leq \mathfrak{h}$ v prostoru X .

4. „Čtverečkem“ budu nazývat vždy množinu všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in J_1$, $y \in J_2$, při čemž J_1 a J_2 jsou pevné — na čtverečku závislé — elementy base $\mathfrak{B}$. Ten čtvereček označme $J_1 \times J_2$; J_1 a J_2 jsou jím určeny.

5. Označme F množinu všech funkcí, jichž argument probíhá X a jichž hodnoty jsou v X . Pak F má mohutnost

$$\alpha^a \leq (\exp \mathfrak{h})^a = \exp (\mathfrak{h}a) = \exp a \leq \alpha^a,$$

to jest F má mohutnost $\exp a$.

6. Buď D množina všech konečných skupin d čtverečků:

$$J_1 \times J'_1, J_2 \times J'_2, \dots, J_n \times J'_n$$

— na pořádku nezáleží — takových, že množiny J_k jsou po dvou disjunktní. Při tom $J_k \times J'_k$ jsou t. zv. „souřadnice“ elementu d .

7. Při pevné funkci $f \in F$ nechť K_f je množina všech uspořádaných párů $\{x, y\}$, kde $x \in X$, $y \in X$, $y = f(x)$. K_f je „křivka“ o rovnici $y = f(x)$.

8. Označme $Q = F + D$ a zaveďme v Q topologii takto: Definujícím okolím bodu $d \in D$ bude množina obsahující jeden jediný bod d . Nechť z_k pro $k = 1, 2, \dots, n$ jsou prvky množiny K_f v konečném počtu. Každý element z_k zavřeme do čtverečku Z_k . Definujícím okolím bodu f patřícím k (neuspořádaným) skupinám $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ rozumíme každou množinu, která obsahuje f a všechny $d \in D$ — leda až na konečně mnoho — takové, že ke každému $k = 1, 2, \dots, n$ existuje souřadnice bodu d (ta souřadnice je čtvereček) ležící v Z_k a obsahující z_k .

9. Q má mohutnost $\exp a$. Q má mohutnost aspoň $\exp a$ podle 5. Base $\mathfrak{B}$ má podle 3 mohutnost nejvýš $\mathfrak{h}$. Tedy čtverečků je nanejvýš $\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}$. Tedy konečných skupin čtverečků je rovněž nanejvýš $\mathfrak{h}$ a tedy D má mohutnost $\leq \mathfrak{h}$. S 5 dohromady to dá, že Q má mohutnost nejvýš $\exp a + \mathfrak{h}$, t. j. $\exp a$, c. b. d.

10. Buď $f_1 \in F$, $f_2 \in F$, $f_1 \neq f_2$. Existuje tedy $x \in X$, pro něž $y_1 \neq y_2$, kde $y_l = f_l(x)$ pro $l = 1, 2$. Existují pak disjunktní množiny J'_1 a J'_2 , prvky to base $\mathfrak{B}$, takové, že $y_l \in J'_l$. Buď $J \in \mathfrak{B}$ a nechť $x \in J$. Nechť $z_l = \{x, y_l\}$ a nechť $Z_l = J \times J'_l$. Je-li O_l nějaké okolí bodu f_l patřící ke skupinám (z_l) a (Z_l) , pak okolí O_1 a O_2 jsou disjunktní. Pro jiné páry bodů z z Q se axiom (III^o)_H v (6.3.9) verifikuje zcela triviálně. Rovněž i ostatní podmínky pro AHU -prostor — jsou citovány v 2. Tedy: Q je AHU -prostor.

11. Nechť definující okolí O_1 bodu $f \in F$ patří ke skupinám $(z, \dots)$ a $(Z, \dots)$; nechť def. okolí O_2 bodu f patří ke skupinám $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$; nechť $z \neq z_k$. Pak O_1 neobsahuje O_2 a tedy zvláště $O_1 \neq O_2$. Nechť $Z_k = J_k \times J'_k$.

Podle 1 a 3 lze každé konečné skupině $(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_N)$, kde $z_i = \{x_i, y_i\}$, $x_i \in X$, $y_i \in X$, $z_r \neq z$, naléztí taková okolí J_r^* pro $r = 1, \dots, N$ bodů resp. x_r v X , že jsou po dvou disjunktní. Lze o nich zřejmě předpokládat, když jsme je eventuálně zmenšili, že jsou to prvky base $\mathfrak{B}$, že neobsahují x při označení $z = \{x, y\}$ a že $J_k^* \subset J_k$. Buď $J_k^* = J'_k$ a jinak buď J'_r libovolné definující okolí bodu y_r . Necht' $Z_r^* = J_r^* \times J''_r$. Pak množina všech Z_r^* je bodem z D . Takových bodů je ale nekonečně mnoho, neboť ke každému přirozenému N takový existuje. Do O_2 jich ale nepatří nejvýš konečně mnoho. Tedy nějaký takový bod náleží do O_2 a zřejmě nenáleží do O_1 , c. b. d. Skupinu $(z_1, \dots, z_n)$, k níž patří O_2 , označujeme vždy O_2' .

12. Buď $f \in F$. Pak okolí bodu f patřící k pevným skupinám $(z_1, \dots, z_n)$ a $(Z_1, \dots, Z_n)$ vzniknou všechna z jednoho z nich ubíráním konečných částí. Je jich tedy tolik co těch konečných částí, tedy nanejvýš tolik co konečných částí množiny D , to jest nejvýš $\mathfrak{h}$. Všechn skupin $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ je ale α a skupin $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ nejvýše $\mathfrak{h}$. Tedy všech těch okolí vůbec je nanejvýš $\mathfrak{h}^2 \alpha = \alpha$. Tedy $\chi_Q(f) \leq \alpha$.

13. Buď $\mathfrak{B}$ systém definujících okolí bodu $f \in F$ a necht' má mohutnost $< \alpha$. Buď $\mathfrak{B}'$ součet všech O'_2 pro $O'_2 \in \mathfrak{B}$. Pak $\mathfrak{B}'$ má mohutnost $< \alpha$. Poněvadž však K_f má mohutnost α , existuje v K_f prvek z , který do $\mathfrak{B}'$ nenáleží. Necht' okolí I bodu f patří ke skupinám (z) a (Z) s libovolným z . Podle 11 I neobsahuje žádné $O_2 \in \mathfrak{B}$ a tedy $\mathfrak{B}$ není úplný systém okolí bodu f . Ze systému definujících okolí nelze tedy vybrat úplný systém okolí bodu f , který by měl mohutnost $< \alpha$. Tedy $\chi_Q(f) \geq \alpha$ (4.2.3). 12 a 13 dá tedy celkem $\chi_Q(f) = \alpha$.

14. Podle 9 prostor Q má mohutnost $\exp \alpha$ a obsahuje množinu D mohutnosti $\leq \mathfrak{h} \leq \exp \alpha$. Existuje tedy v Q množina D' mohutnosti $\mathfrak{h}$ obsahující D . Množina D leží ale v Q hustě: Pro $d \in D$ je totiž d v uzávěru množiny D a priori (1.1 — (II^u)). Pro $f \in F$ z $\chi_Q(f) = \alpha > 1$ plyne pro každé definující okolí O_f bodu f existence bodu $q \in Q$, $q \neq f$, $q \in O_f$. Z toho pak plyne $q \in D$ a tedy každé okolí bodu f protne D a tedy f náleží do uzávěru množiny D (4.1.1), c. b. d. Tím spíše leží D' v Q hustě (1.1 — (III^u)). Z nerovnosti $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{p} \leq \exp \alpha$ vychází existence prostoru $Q' \supset D'$ vnořeného do Q (1.5), jehož mohutnost je $\mathfrak{p}$. Množina D' leží v Q' zřejmě hustě a jest učiněno zadost požadavkům naší věty.

Poznámka: Při důkazu první věty necht' si čtenář povšimne toho, že podmínka zůstane nutnou i při AH -prostorech. Stačí však už ke konstrukci AHU -prostoru.

Aplikace: Písmeno I (eventuálně s indexy) značí vždy AHU -prostor, jehož každý bod p — mimo jeden výjimečný, který vždy

označujeme symbolem ∞ (se stejnými indexy jako I) — má okolí obsahující jediné p . Okolí bodu ∞ mají vesměs mohutnost > 1 .

Aby ukázal, že charakter bodu může převýšit mohutnost prostoru, sestrojil Urysohn³⁾ spočetný prostor I' , kde $\chi_{I'}(\infty') > \aleph_0$. Jinak však se o $\chi_{I'}(\infty')$ neví nic. Jako aplikace předchozí konstrukce uvádím ještě prostor I libovolné předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ (místo $\aleph_0$ u Urysohna) s charakterem bodu ∞ netoliko známým $\geq \mathfrak{h}$, ale dokonce v přípustných mezích libovolně volitelným:

Nutná a dostatečná podmínka, aby existoval prostor I mohutnosti $\mathfrak{h}$, kde ∞ má charakter $\alpha \geq \mathfrak{h}$, jest aby bylo $\alpha \leq \exp \mathfrak{h}$.

Počet okolí bodu a tedy ani charakter nemůže převýšit počet všech částí prostoru a tedy $\alpha \leq \exp \mathfrak{h}$. Tím je nutnost odůvodněna.

Prostor I vyhovující tvrzení věty se skládá z jednoho bodu $f \in F$, z celé množiny D a z jakési množiny mohutnosti $\mathfrak{h}$, jejíž prvky nejsou ani v F ani v D . Definující okolí bodu f budou stejná jako v prostoru Q v důkaze druhé věty. Podle 13 stačí klást $f = \infty$.

Novák zlepšil Urysohnův příklad v jiném směru. Sestrojil totiž spočetný dědičný N -prostor (8.6.5), jehož body mají vesměs nespočetné, jinak však neznámé, charakter. V příštím čísle Časopisu podám konstrukci zahrnující Novákovo i moje nynější zlepšení Urysohnova prostoru. Bude to dědičný N -prostor předem dané mohutnosti $\mathfrak{h}$ s charakterem bodů vesměs rovnými předem dané mohutnosti $\geq \mathfrak{h}$ v přípustných mezích.

Poznámka: Říkáme, že prostor Θ je R_0 -prostor, když pro každý bod $p \in \Theta$ a každé jeho okolí O v Θ existuje okolí Ω v Θ bodu p takové, že $\Omega = \overline{\Omega} = \Theta - \overline{\Theta - \Omega} \subset O$; při tom $\overline{}$ je uzávěr v Θ množiny $\Gamma \subset \Theta$. Místo „ AHU -prostor“ možno v předešlých větách psát „ AHR_0U -prostor“. Stačí místo Q uvažovat prostor Θ takový, že zase $\Theta = F + D$ a (d) je okolím v Θ bodu $d \in D$; avšak okolím v Θ bodu $f \in F$ patřícím ke skupinám $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ a $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ — se stejnými podmínkami jako prve — bude každá množina $A = K + B$ s konečným K , kde A je množina těch $d \in D$, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ jakási souřadnice $J_k \times J'_k$ bodu d jest $\subset Z_k$ a $x_k \in J_k$ při $z_k = \{x_k, y_k\}$, $x_k \in X$, $y_k \in X$, a kde B je množina těch $g \in F$, že $\{x_k, g(x_k)\} \in Z_k$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Θ je R_0 -prostor, neboť definující okolí v Θ jsou uzavřená, poněvadž definující okolí v X jsou uzavřená. Ostatek se doslova opakuje.

*

³⁾ Über die Mächtigkeit zusammenhängender Mengen, Math. Annalen 94 (1925), 262—295.

Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée.

(Extrait de l'article précédent.)

Les petits types allemands désigneront toujours des puissances infinies; je pose $\exp m = 2^m$. Sous le nom de caractère $\chi_E(p)$ du point p dans l'espace E , on entend⁴⁾ la plus petite puissance d'un système $\mathfrak{C}$ d'entourages de p dans E tel que, pour tout G ouvert dans E et contenant p , il existe un $U \in \mathfrak{C}$ avec $U \subset G$.

La réponse à la question proposée au titre étant triviale pour les espaces topologiques plus généraux, je me bornerai toujours à l'étude des espaces de Hausdorff, c'est à dire des espaces vérifiant les axiomes A, B, C, D des „Grundzüge der Mengenlehre“ de Hausdorff (p. 213) sans vérifier peut-être aucun des deux „Abzählbarkeitsaxiome“. Dans ce cas, on a le théorème suivant:

La condition $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{p} \leq \exp \exp \mathfrak{h}$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace de Hausdorff de puissance $\mathfrak{p}$ contenant une partie dense de puissance $\mathfrak{h}$.

La nécessité résulte immédiatement des axiomes B et D (sans faire intervenir les autres). La suffisance peut être tirée du théorème suivant dont nous ferons l'usage plus tard encore.

Soit $\mathfrak{h} \leq \alpha \leq \exp \mathfrak{h}$. Alors la condition $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{p} \leq \exp \alpha$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace de Hausdorff de puissance $\mathfrak{p}$ contenant une partie dense de puissance $\mathfrak{h}$ et où le caractère d'aucun point ne surpasse α .

Il est aisé d'en prouver la nécessité. Alors, soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{h}$. Soit Φ l'espace de toutes les fonctions dont l'argument parcourt M et dont les valeurs sont égales à 1 ou à 2. Les ensembles

$$\frac{E}{\mathfrak{P}} (\psi \in \Phi, \psi(k) = \varphi(k) \text{ pour } k \in K),$$

K parcourant les sous-ensembles finis de M , seront les entourages (définissants) de φ dans Φ . Soit X un sous-espace de puissance α de l'espace Φ . C'est un espace de Hausdorff ayant une base ouverte $\mathfrak{B}$ de puissance $\leq \mathfrak{h}$. Soit F la famille de toutes les fonctions qui transforment X en un sous-ensemble de X . Sous le nom de „carré“, j'entends tout produit cartésien $J_1 \times J_2$ où $J_1 \in \mathfrak{B}$, $J_2 \in \mathfrak{B}$. Soit D la famille de tous les systèmes d finis de carrés

$$J_1 \times J'_1, J_2 \times J'_2, \dots, J_n \times J'_n$$

⁴⁾ P. Alexandroff et P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandlgen der Kon. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1, 1929.

tels que les J_k sont disjoints deux à deux. Les carrés $J_k \times J'_k$ sont les „coordonnées“ de $\bar{d}$. Chaque point de D sera isolé dans l'espace $Q = F + D$, dont je vais construire la topologie. Soit $f \in F$, $z_k \in \epsilon E[y = f(x)]$, $k = 1, 2, \dots, n$, (n naturel). Soit Z_k un carré contenant z_k . Les entourages dans Q de f correspondant à $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ et $(Z_1, \dots, Z_n)$ seront tous les ensembles contenant f ainsi que tous les $d \in D$ — sauf un nombre fini tout au plus — tels que, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, il existe une coordonnée de d contenant z_k et contenue dans Z_k . O_f étant un tel entourage, soit O_f l'ensemble des z_k en question. Alors, Q est un espace de Hausdorff. Soit $f \in F$ et soit $\mathfrak{B}$ un système de puissance $< \alpha$ d'entourages (définissants) de f . Il existe alors un point $z \in \epsilon E[y = f(x)]$ qui n'est contenu dans aucun O_f pour $O_f \in \mathfrak{B}$. Les entourages de f correspondant à (z) et (Z) avec un Z quelconque ne contiennent aucun $O_f \in \mathfrak{B}$. Alors $\chi_Q(f) \geq \alpha$, d'où $\chi_Q(f) = \alpha$, car il n'existe pas plus de α entourages définissants de f . Or, f n'est pas isolé ce qui entraîne la densité de D dans Q . Soit $D \subset D' \subset Q' \subset Q$, D' et Q' ayant la puissance $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ resp. L'espace Q' et sa partie dense D' satisfont évidemment à la thèse du théorème.

Application: Le symbole I (muni d'indices éventuellement) désigne toujours un espace de Hausdorff dont tous les points sont isolés sauf un seul qui ne l'est pas et qui sera toujours désigné par ∞ (muni des mêmes indices que l'est I). Pour démontrer qu'un caractère peut surpasser la puissance de l'espace tout entier, Urysohn a construit³⁾ un espace I' dénombrable avec $\chi_{I'}(\infty')$ non dénombrable, mais inconnu. A titre d'application, je vais construire un exemple plus général:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace I de puissance $\mathfrak{h}$ avec $\chi_I(\infty) = \alpha \geq \mathfrak{h}$ est que l'on ait $\alpha \leq \exp \mathfrak{h}$.

La nécessité est évidente. L'espace I à construire se compose d'un seul $f \in F$ quelconque, de tous les points de D et de $\mathfrak{h}$ autres points. Soit $f = \infty$ et les entourages de f soient définis de la manière décrite pour l'espace Q .

M. Novák a construit un espace dénombrable complètement normal aux caractères $> \aleph_0$, mais inconnus. Dans le numéro suivant du Časopis, je vais construire un espace complètement normal de puissance $\mathfrak{h}$ quelconque et aux caractères $= \alpha \geq \mathfrak{h}$ pour tout α admissible a priori.

Remarque: Les termes „espace de Hausdorff“ peuvent être remplacés par „espace de Hausdorff de dimension 0“ dans les théorèmes précédents. On n'a qu'à considérer, au lieu de Q , l'espace $\Theta = F + D$, les $d \in D$ étant isolés dans Θ et les entourages dans Θ de $f \in F$ appartenant à $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ et $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ — sous les

mêmes conditions qu'auparavant — étant les ensembles $A = K + B$ avec K fini, A étant l'ensemble de tous les $d \in D$ tels que, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, il existe une coordonnée $J_k \times J'_k \subset Z_k$ de d avec $x_k \in J_k$ où $z_k = \{x_k, y_k\}$, $x_k \in X$, $y_k \in X$, et B étant l'ensemble des $g \in F$ avec $\{x_k, g(x_k)\} \in Z_k$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$. En effet, les entourages définissants dans Θ sont fermés; car il en est ainsi de X .

Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti.

J. Novák, Brno.

(Došlo dne 10. dubna 1937.)

Je známo, že charakter bodu ve spočetném AHU -prostoru¹⁾ nemusí býti spočetný. P. Urysohn podává příklad toho v pojednání „Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen“, Math. Ann. **94**, str. 288. Jeho prostor sestává z izolovaných přirozených čísel a z čísla 0, jehož charakter je nespočetný.

V topologickém semináři položil prof. Čech dne 27. října 1936 tento problém: Existuje spočetný ARU -prostor,²⁾ jehož charakter je v každém bodě nespočetný?

Dne 3. listopadu 1936 jsem podal v topologickém semináři konstrukci dvou spočetných ARU -prostorů s uvedenou vlastností. Každá neprázdná podmnožina prvního prostoru, jež neobsahuje izolovaný bod, je rovněž řešením tohoto problému.

Nechť P je množina všech racionálních čísel. Do P zavedeme topologii u_1 tím, že budeme definovati okolí. Nechť ε je kladné reálné číslo. ε -ovým okolím $O_1(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ rozumíme množinu:

$$O_1(a, \varepsilon) = (a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n, a + \frac{1}{\pi^n} \right) \cdot (a, a + \varepsilon),$$

kde ξ_n je iracionální číslo vyhovující vztahu $a + \frac{1}{\pi^{n+1}} \leq \xi_n < a + \frac{1}{\pi^n}$; jsou-li α, β reálná čísla, resp. $-\infty$ nebo $+\infty$, pak symbol (α, β) znamená množinu všech racionálních čísel mezi α a β .

Proběhne-li ε všechna kladná reálná čísla, dostaneme systém $\mathfrak{O}_1(a)$ částí množiny P té vlastnosti, že $\mathfrak{O}_1(a) \neq \emptyset$, $a \in O_1(a, \varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$. $\mathfrak{O}_1(a)$ je systém definujících okolí bodu a .³⁾ Systémy tyto zavádějí do P topologii u_1 .

¹⁾ Č. odst. 6·1, 7·1, 8·4 (Č znamená: Čech, Topologické prostory, Časopis **66** (1937), str. 225 D — 264 D).

²⁾ Č. odst. 8·5.

³⁾ Č. odst. 4·1.

Definujeme ε -ové okolí $O_2(a, \varepsilon)$ bodu $a \in P$ takto:

$$O_2(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a) + O_1(a, \varepsilon).$$

Dostaneme jiné definující systémy $\mathfrak{D}_2(x)$, $x \in P$ bodů x , jimiž je zavedena do P topologie u_2 . Poněvadž pro každý $x \in P$ existuje ke každému okolí $O_2(x, \varepsilon)$ okolí $O_1(x, \varepsilon) \subset O_2(x, \varepsilon)$ a nikoliv naopak, jest topologie u_2 silnější než topologie u_1 .³⁾

Snadno se dá dokázati, že v prostoru (P, u_i) ($i = 1, 2$) jsou splněny tyto axiomy:

(III)^o_U: Když $b \in O_i(a, \varepsilon)$, pak existuje okolí $O_i(b, \eta) \subset O_i(a, \varepsilon)$.

(III)^o_A: Když $O' \in \mathfrak{D}_i(a)$, $O'' \in \mathfrak{D}_i(a)$, existuje okolí $O \in \mathfrak{D}_i(a)$ takové, že $O \subset O' \cdot O''$.

Prostor (P, u_i) je tudíž AU -prostorem.⁴⁾

Je-li ε kladné iracionální číslo, pak okolí $O_i(a, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) jest uzavřené. Vskutku komplementární množina $P - O_i(a, \varepsilon)$ jest otevřená, neboť je součtem otevřených intervalů racionálních čísel tvaru (α, β) , jež jsou, jak se snadno přesvědčíme, v prostoru (P, u_i) otevřené. Je tedy splněn také axiom (III)^o_R, takže prostory (P, u_1) a (P, u_2) jsou spočetné ARU -prostory.²⁾

Abychom dokázali, že žádný bod prostoru (P, u_i) ($i = 1, 2$) není bodem spočetnosti, dokážeme napřed lema. Pravíme, že posloupnost bodů topologického prostoru R konverguje k bodu $x \in R$, když v každém jeho okolí se nacházejí skoro všechny body té posloupnosti.⁵⁾

Lema. Necht' $x \in R$ je A -bod, jehož charakter je spočetný. Necht' $M \subset R$, $x \in \overline{M}$. Pak existuje v M bodová posloupnost, jež konverguje k bodu x .

Důkaz. Poněvadž x je A -bodem a bodem spočetnosti, existuje monotonní posloupnost $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ okolí bodu x , jež je úplným systémem okolí toho bodu. Poněvadž $x \in \overline{M}$, jest $O_n \cdot M \neq \emptyset$ ($n = 1, 2, \dots$). Zvolme bod $x_n \in O_n \cdot M$. Pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bodová posloupnost v M , jež konverguje k bodu x .

Necht' $a \in (P, u_i)$ ($i = 1, 2$). Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že $\chi_{u_i}(a) = \aleph_0$. Bod a náleží do uzavěru $u_i(\overline{E}[a < x])$,
neboť každé okolí $O_i(a, \varepsilon)$ má body společné s množinou $\overline{E}[a < x]$.

Proto podle lematu existuje v $\overline{E}[a < x]$ bodová posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,
jež konverguje k bodu a . Neobsahuje-li množina $\left(a + \frac{1}{\pi^{n+1}}, a + \frac{1}{\pi^n}\right)$

⁴⁾ Č. odst. 7.2 a konec odst. 6.3.

⁵⁾ Je-li bod x , k němuž konverguje bodová posloupnost, H -bodem, pak tato konverguje k jedinému bodu x ; není-li H -bodem, pak může tato posloupnost konvergovati také k jiným bodům.

žádný bod z této posloupnosti, položíme $\eta_n = a + \frac{1}{\pi^{n+1}}$; v opačném případě obsahuje tento interval jenom konečný počet bodů posloupnosti. Existuje tudíž iracionální číslo $\eta_n \left(\eta_n < a + \frac{1}{\pi^n} \right)$ té vlastnosti, že interval racionálních čísel $\left(\eta_n, a + \frac{1}{\pi^n} \right)$ neobsahuje žádný bod z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okolí $O_1 \left(a, \frac{1}{\pi} \right) = \left(a \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta_n, a + \frac{1}{\pi^n} \right)$, $O_2 \left(a, \frac{1}{\pi} \right) = \left(a - \frac{1}{\pi}, a \right) + O_1 \left(a, \frac{1}{\pi} \right)$ se nenachází žádný bod z konvergentní posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, což je spor. Proto $\chi_{u_1}(a) > \aleph_0$, t. j. charakter každého bodu v prostorech (P, u_1) a (P, u_2) je nespočetný.

Dokázali jsme, že v množině $E[a < x]$ neexistuje bodová posloupnost konvergující k bodu a . Lehce se pozná, že při topologii u_1 taková posloupnost neexistuje ani v množině $E[a > x]$, tedy ani v množině $P - (a)$. Dokažme nyní, že každý bod libovolné neprázdné podmnožiny $Q \subset (P, u_1)$, jež neobsahuje izolovaný bod, má charakter nespočetný. Necht' $a \in Q$. Předpokládejme pro nepřímý důkaz, že v $Q - (a)$ existuje bodová posloupnost, konvergující k bodu a . Pak tato posloupnost konverguje k témuž bodu také v prostoru $(P, u_1) - (a)$, což je spor. Proto $\chi_Q(a) > \aleph_0$.

Naproti tomu prostor (P, u_2) nemá tuto vlastnost, jak ukazuje tento příklad: $Q = \left(a \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n} \right) \subset (P, u_2)$. Bod a má v prostoru Q charakter $\aleph_0$.

Brno, topologický seminář.

*

Sur deux espaces réguliers et dénombrables sans points de caractère dénombrable.

(Extrait de l'article précédent.)

P. Urysohn a construit un espace dénombrable ayant un point de caractère indénombrable. Dans cet article on donne la construction de deux espaces réguliers dénombrables dont chaque point possède un caractère indénombrable. Le premier de ces espaces contredit d'une façon héréditaire au premier axiome de dénombrabilité tandis que l'autre ne possède pas cette propriété.

Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné.

Bedřich Pospíšil, Brno.

(Reçu le 29 avril 1937.)

Soit E un ensemble quelconque; soit $\exp E$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de E . Soit $\text{top } E$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $\exp E$ tout entier et dont les valeurs appartiennent à $\exp E$. Soit $\text{prop } E$ l'ensemble de toutes les fonctions (propositionnelles) définies sur $\text{top } E$ et qui ne prennent que les valeurs 0 et 1. De plus, désignons par E_u „l'espace topologique général“ dont les points parcourent précisément l'ensemble E et tel que la „fermeture“ dans E_u d'un $M \subset E$ quelconque est égale à $u(M)$. Je désigne encore par ι_E la fonction bien déterminée par les deux conditions suivantes: a) $\iota_E \in \text{prop } E$ et b) $u \in \text{top } E$ entraîne $\iota_E(u) = 1$ si et seulement si E_u est un espace de Hausdorff non isolé ne contenant qu'un seul point qui ne soit pas isolé dans E_u . Soit $\varphi \in \text{prop } E$; je désigne par E_φ l'ensemble de toutes les „topologies générales“ $u \in \text{top } E$ telles que $\varphi(u) = 1$.

Les petits types allemands désigneront toujours des puissances infinies, $\exp \aleph = 2^\aleph$. La relation $X \sim \aleph$ veut dire que X est un ensemble de puissance $\aleph$.

Soit $\mu_E \in \text{prop } E$; soit $\mu_E(u) = 1$ si et seulement si (i) $u(0) = 0$ et (ii) $M_1 \subset M_2$ entraîne $u(M_1) \subset u(M_2)$. D'après M. Markoff,¹⁾ à chaque u avec $\mu_E(u) = 1$ et chaque $e \in E$ on peut faire correspondre un sous-ensemble O_e de $\exp E$ de telle façon que $e \in u(M)$ si et seulement si, pour tout $U \in O_e$, on ait $MU \neq 0$. Sous le nom de caractère dans l'espace E_u du point e , on entend²⁾ la puissance la plus petite possible d'un tel système O_e . Lorsque $\mu_E \geq \varphi \in \text{prop } E$, je désigne par $E_\varphi(\alpha)$ l'ensemble de toutes les topologies générales u avec $\varphi(u) = 1$ telles que tous les caractères des points dans l'espace E_u sont $\leq \alpha$, mais non pas $< \alpha$ pour tous les points.

1. Soit $E \sim \aleph$, $\iota_E \leq \varphi \in \text{prop } E$; alors, on a $E_\varphi \sim \exp \exp \aleph$.
En effet, $\text{top } E \sim \exp \exp \aleph$, alors $E_\varphi \sim m$ entraîne $m \leq \exp$

¹⁾ Voir Alexandroff-Hopf, Topologie I, p. 42, Aufgabe, Grundlehren d. math. Wiss., Berlin 1935.

²⁾ d'après MM. Alexandroff et Urysohn.

$\exp \mathfrak{h}$. La relation inverse $\mathfrak{m} \geq \exp \exp \alpha$ résulte, pour $\alpha = \exp \mathfrak{h}$, du théorème suivant.

2. Soit $E \sim \mathfrak{h}$, $\varphi \in \text{prop } E$, $\iota_E \leq \varphi \leq \mu_E$, $\mathfrak{h} \leq \alpha \leq \exp \mathfrak{h}$; alors, on a $E_\varphi(\alpha) \sim \exp \alpha$.

Avant de démontrer ce théorème, je vais en tirer trois corollaires qui suivent. Deux fonctions u et v appartenant à $\text{top } E$ sont dites *homéomorphes*, s'il existe une transformation biunivoque f de E en E tout entier telle que $f u(M) = v f(M)$. L'ensemble E_φ ou $E_\varphi(\alpha)$ resp. est la somme des classes disjointes telles que les deux fonctions u et v appartiennent à la même classe, si et seulement si elles sont homéomorphes. Soit $|E_\varphi|$ ou $|E_\varphi(\alpha)|$ resp. l'ensemble de toutes les classes en question.

3. Soit $E \sim \varphi$, $\iota_E \leq \varphi \in \text{prop } E$; alors, on a $|E_\varphi| \sim \exp \exp \mathfrak{h}$.

En effet, la puissance d'une classe $\epsilon \in |E_\varphi|$ est $\leq \mathfrak{h}^\mathfrak{h} = \exp \mathfrak{h}$, c'est à dire $< \exp \exp \mathfrak{h}$. Si la puissance de $|E_\varphi|$ était $< \exp \exp \mathfrak{h}$, on aurait $E_\varphi \sim \mathfrak{m} < \exp \exp \mathfrak{h}$ ce qui contredit au théorème 1. La puissance de $|E_\varphi|$ ne peut pas surpasser celle de E_φ d'où l'on tire la thèse désirée.

De même, en se servant du théorème 2 (au lieu de 1), on prouve

4. Soit $E \sim \mathfrak{h}$, $\varphi \in \text{prop } E$, $\iota_E \leq \varphi \leq \mu_E$, $\mathfrak{h} \leq \alpha \leq \exp \mathfrak{h}$, $\exp \mathfrak{h} < \exp \alpha$; alors, on a $|E_\varphi(\alpha)| \sim \exp \alpha$.

Car on a $\mathfrak{h}^\mathfrak{h} = \exp \mathfrak{h} < \exp \alpha$ par hypothèse.

5. Soit $E \sim \aleph_0$; l'ensemble E peut être métrisé précisément de $\exp \aleph_0$ manières différentes.

En effet, il est évident qu'il n'y a guère plus de $\exp \aleph_0$ métriques sur E . Posons alors, dans le théorème 2, $\mathfrak{h} = \alpha = \aleph_0$ et $\varphi(u) = 1$ si et seulement si l'espace E_u est normal. Alors, notre théorème résulte immédiatement du fait bien connu que tout espace normal possédant une base ouverte dénombrable est métrisable.³⁾

Il nous reste encore à prouver le théorème 2. On tire sans peine de la définition des caractères que $E_\varphi(\alpha) \sim \mathfrak{m} \leq \exp \alpha$. Soit I l'espace du dernier théorème de mon article cité.⁴⁾ Soit $i(M)$ la fermeture dans l'espace I de l'ensemble M ; on a $\iota_E(i) = 1$, alors $\varphi(i) = 1$; de plus, tous les caractères des points dans I sont $\leq \alpha$. Dans les notations de l'article précité, ∞ est un élément $f = \infty$ de l'ensemble $F \sim \exp \alpha$. Pour mettre en évidence que I dépend de f , soit I_f l'espace qui s'obtient de I en y remplaçant $f = \infty$ par un symbole $*$ fixe qui ne dépend pas de f sans changer la topologie. Soit $f \in F$, $g \in F$, $f \neq g$. En vertu des propriétés de l'espace Q de l'article précité, il existe un entourage U_f et U_g resp. du point $*$ dans I_f et I_g .

³⁾ C'est un théorème célèbre de M. Urysohn. Voir p. ex. Alexandroff-Hopf, l. c. p. 81 ou Kuratowski, Topologie I, p. 104, Monografie matematyczne, Warszawa-Lwów, 1933.

⁴⁾ Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée, Časopis 67 (1937/38), 89—96.

resp. avec $U_I U_g = (*)$. La fermeture dans I_I et I_g resp. de l'ensemble $U_I - (*)$ étant égale à U_I et $U_I - (*)$ resp., les topologies des espaces I_I et I_g sont différentes. Car on a $* \in U_I$, alors $U_I \neq U_I - (*)$. Nous avons ainsi acquis des topologies différentes du type voulu sur l'ensemble $E = D + (*) \sim \mathfrak{h}$ en nombre $\exp \alpha$ ce qui prouve le théorème 2.

Les théorèmes 1, 2, 3, 4 restent vrais, si l'on y change la définition de ι_E et celle de $E_\varphi(\alpha)$ comme il suit: 1. la relation $\iota_E(u) = 1$ veut dire que E_u est un espace complètement normal de dimension 0 et 2. $E_\varphi(\alpha)$ est l'ensemble de toutes les topologies générales de E avec $\varphi(u) = 1$ et telles que tous les caractères des points dans l'espace E_u sont $= \alpha$. On n'a qu'à se servir, au lieu de I , de l'espace N du théorème 1 de mon article cité ci-dessous.⁵⁾ De même, on obtient des théorèmes analogues, si l'on remplace I par l'espace I^1 ou N^1 du théorème qui vient d'être cité, supposé que $\mathfrak{z} \leq \mathfrak{h} \leq \leq \alpha \leq \exp \mathfrak{h}$.

Séminaire topologique, Brno.

*

O počtu topologií na dané množině.

(Obsah předešlého článku.)

V tomto článku mimo jiné řeším problém 2 na konci Čechových Topologických prostorů⁶⁾: Počet topologií každého typu, který se vyskytuje v citovaném článku pana prof. Čecha (mimo typ metrisovatelných prostorů), na nekonečné spočetné množině jest roven počtu všech částí množiny reálných čísel.

⁵⁾ Théorèmes d'existence pour les caractères des points, Časopis 67 (1937/38).

⁶⁾ Časopis 66 (1937), D 225—264.

Zum Interpolationsprobleme im Kreistringe regulärer Funktionen I.

Ernst Lamm, Prag.

(Eingegangen am 29. April 1937.)

$f(z)$ sei eine im Kreistringe $r < |z| < R$ reguläre Funktion. Die Folge $\{z_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) liege daselbst so, daß sie weder auf $|z| = R$ noch auf $|z| = r$ Häufungspunkte besitzt. Es ist also für jedes μ

$$r < \varrho \leq |z_\mu| \leq P < R. \quad (1)$$

Wir wollen zeigen, daß sich dann $f(z)$ in der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{1 - \frac{z_\mu z}{R^2}} + B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - z_\mu z} \quad (2)$$

darstellen läßt.

Jede im Kreistringe $r < |z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ läßt sich bekanntlich als Summe zweier Funktionen $f_R(z)$ und $f_r(z)$ darstellen, wobei $f_R(z)$ für $|z| < R$ und $f_r(z)$ für $|z| > r$ regulär ist. Man kann offenbar von $f_r(z)$ noch voraussetzen, daß $f_r(\infty) = 0$ ist.

§ 1. Reihenentwicklung für $f_R(z)$.

Da nach (1)

$$|z_\mu| \leq P < R; \mu = 1, 2, \dots$$

ist, so läßt sich $f_R(z)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{1 - \frac{z_\mu z}{R^2}}$$

entwickeln, welche für jeden Wert von z aus $|z| < R$ und gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < R$ gegen $f_R(z)$ als Grenzfunktion konvergiert. Für die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, \dots$) gelten die Integraldarstellungen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R_0} \frac{f_R(z)}{z - z_1} dz, \quad (|z_1| < R_0 < R),$$

$$A_1 = \frac{1 - \frac{z_1 z_2}{R^2}}{2\pi i} \oint_{|z|=R_1} \frac{f_R(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \quad (|z_\nu| < R_1 < R; \quad \nu = 1, 2)$$

und

$$A_n = \frac{1 - \frac{z_n z_{n+1}}{R^2}}{2\pi i} \oint_{|z|=R_n} \frac{f_R(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \frac{z_\nu z}{R^2}}} dz$$

$$(n \geq 2; |z_\nu| < R_n < R \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n+1)^{1)}$$

Nun gilt für die Funktion $f_r(z)$, welche für $|z| > r$ regulär ist, wegen $f_r(\infty) = 0$ die für jeden Wert von z aus $|z| > r$ konvergente Reihenentwicklung

$$f_r(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad (3)$$

welche auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| > r$ gleichmäßig konvergiert. Da für $k = 1, 2, \dots$

$$\oint_{|z|=R_0} \frac{dz}{z^k(z - z_1)} = 0, \quad \oint_{|z|=R_1} \frac{dz}{z^k(z - z_1)(z - z_2)} = 0$$

und

$$\oint_{|z|=R_n} \frac{dz}{z^k(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \frac{z_\nu z}{R^2}}} = 0 \quad (n \geq 2)$$

ist, so erhalten wir für die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, \dots$) schließlich die Integraldarstellungen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z - z_1} dz, \quad (|z_1| < R_0 < R),$$

$$A_1 = \frac{1 - \frac{z_1 z_2}{R^2}}{2\pi i} \oint_{|z|=R_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \quad (|z_\nu| < R_1 < R; \quad \nu = 1, 2) \quad (4)$$

¹⁾ Vgl. E. Lammell, Zum Interpolationsprobleme im Einheitskreise regulärer Funktionen. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **66** (1936), 57—61.

und

$$A_n = \frac{1 - \frac{\bar{z}_n z_{n+1}}{R^2}}{2\pi i} \oint_{|z|=R_n} \frac{f(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \frac{\bar{z}_\nu z}{R^2}}} dz$$

($n \geq 2$; $|z_\nu| < R_n < R$ für $\nu = 1, 2, \dots, n+1$).

§ 2. Reihenentwicklung für die Funktion $f_r(z)$.

Wir setzen zunächst voraus, daß $z_\kappa \neq z_\lambda$, sobald $\kappa \neq \lambda$ ist.

Der für $|z| > r$ regulären Funktion $f_r(z)$ läßt sich in eindeutiger Weise eine Reihe von der Form

$$B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \quad (5)$$

mit $|z_\mu| > r$; $\mu = 1, 2, \dots$ zuordnen. Die Koeffizienten $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, \dots$) sind nämlich durch die Funktionswerte von $f_r(z)$ an den Stellen z_μ ($\mu = 1, 2, \dots$) eindeutig bestimmt.

Um zu einer Integraldarstellung für die Entwicklungskoeffizienten $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) zu gelangen, beachte man Folgendes: Die $n+1$ Koeffizienten B_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$) sind durch die Funktionswerte von $f_r(z)$ an den $n+1$ Stellen z_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n+1$) eindeutig bestimmt. Es hat also jede andere in $|z| > r$ reguläre Funktion $g_r(z)$ dieselben $n+1$ Koeffizienten B_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$), wenn sie mit $f_r(z)$ an den $n+1$ Stellen z_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n+1$) im Funktionswerte übereinstimmt.

Eine solche Funktion $g_r(z)$ wird sicher durch

$$s_n(z) = B_0 + \sum_{\nu=1}^n B_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \quad (6)$$

gegeben, worin die B_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n$) durch die Funktionswerte $f_r(z_\mu)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n+1$) ausgedrückt zu denken sind.

Um B_n ($n \geq 2$) zu berechnen, dividieren wir (6) durch

$$-\frac{(z - z_n)(z - z_{n+1})}{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}} \prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}$$

und integrieren längs $|z| = r_n$, $r < r_n < |z_\mu|$; $\mu = 1, 2, \dots, n+1$. Wir erhalten, wenn wir $s_n(z)$ durch $f_r(z)$ ersetzen,

$$B_n = -\frac{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}}{2\pi i} \oint_{|z|=r_n} \frac{f_r(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}} dz. \quad (7a)$$

Um B_0 bzw. B_1 zu berechnen, dividieren wir (6) durch

$$-\frac{z(z - z_1)}{z_1} \text{ bzw. } -\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{r^2 - \bar{z}_1 z_2}$$

und integrieren längs $|z| = r_0$ ($r < r_0 < |z_1|$) bzw. $|z| = r_1$ ($r < r_1 < |z_\mu|$; $\mu = 1, 2$). Wir erhalten, wenn wir $s_n(z)$ durch $f_r(z)$ ersetzen,

$$B_0 = -\frac{z_1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{f_r(z)}{z(z - z_1)} dz \text{ bzw.} \quad (7b)$$

$$B_1 = -\frac{r^2 - \bar{z}_1 z_2}{2\pi i} \oint_{|z|=r_1} \frac{f_r(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz.$$

Nun ist

$$B_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - z_1} \right) f_r(z) dz,$$

also wegen (3)

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_1} \frac{f_r(z)}{z - z_1} dz. \quad (7c)$$

Tritt in der Folge $\{z_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) dieselbe Stelle l -mal auf, so muß man an solchen Stellen von $f_r(z)$ nicht nur den Funktionswert, sondern auch die Ableitungen bis zur $(l-1)$ -ten Ordnung heranziehen, damit $f_r(z)$ wieder in eindeutiger Weise eine Reihe (6) zugeordnet werden kann. Ihre Koeffizienten werden auch jetzt durch (7a, b, c) gegeben.

Da

$$\oint_{|z|=r_0} \frac{f_R(z)}{z - z_1} dz = 0, \quad \oint_{|z|=r_1} \frac{f_R(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = 0$$

und

$$\oint_{|z|=r_n} \frac{f_R(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}} dz = 0$$

ist, so erhalten wir für die Koeffizienten $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) von (6) schließlich die Integraldarstellungen

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{f(z)}{z-z_1} dz \quad (r < r_0 < |z_1|),$$

$$B_1 = -\frac{r^2 - \bar{z}_1 z_2}{2\pi i} \oint_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \quad (r < r_1 < |z_\mu|; \mu = 1, 2)$$

und

$$B_n = -\frac{r^2 - \bar{z}_n z_{n+1}}{2\pi i} \oint_{|z|=r_n} \frac{f(z)}{(z-z_n)(z-z_{n+1}) \prod_{\mu=1}^{n-1} \frac{z-z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z}} dz \quad (8)$$

$$(n \geq 2; r < r_n < |z_\mu| \text{ für } \mu = 1, 2, \dots, n+1).$$

Um zu zeigen, daß die formal gebildete Reihe (5) für jeden Wert von z aus $|z| > r$ konvergiert und zur Summe $f_r(z)$ besitzt, sobald

$$r < \varrho \leq |z_\mu|; \mu = 1, 2, \dots$$

ist, bilden wir von (5) die m -te Partialsumme $s_m(z)$ und subtrahieren sie von $f_r(z)$.

Beachtet man, daß

$$f_r(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=l} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (r < l < |z|)$$

ist und benützt man die Integraldarstellungen (7a, b, c), so erhält man für $m \geq 1$

$$\begin{aligned} R_{m+1}(z) &= f_r(z) - s_m(z) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=l_m} \frac{f_r(\zeta)}{\zeta-z} \frac{z-z_{m+1}}{\zeta-z_{m+1}} \prod_{\mu=1}^m \frac{z-z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} d\zeta, \end{aligned}$$

wobei $r < l_m < \text{Min}(|z|; |z_1|, |z_2|, \dots, |z_{m+1}|)$ ist.

Wegen (3) können wir $l_m = L$ so wählen, daß $r < L < \text{Min}(\varrho, |z|)$ ist.

Da für $|z| > r$ und $r < \varrho \leq |z_\mu|; \mu = 1, 2, \dots, m$

$$\left| \prod_{\mu=1}^m \frac{z-z_\mu}{r^2 - \bar{z}_\mu z} \right| \leq \prod_{\mu=1}^m \frac{|z| + |z_\mu|}{r^2 + |z_\mu| |z|} \leq \left(\frac{|z| + \varrho}{r^2 + \varrho |z|} \right)^m$$

und für $|\zeta| = L; r < L < \varrho$

$$\left| \prod_{\mu=1}^m \frac{\zeta - z_\mu}{r^2 - \overline{z_\mu} \zeta} \right| \geq \prod_{\mu=1}^m \frac{|z_\mu| - |\zeta|}{r^2 - |z_\mu| |\zeta|} \geq \left(\frac{\varrho - L}{\varrho L - r^2} \right)^m$$

wird, so erhalten wir

$$|R_{m+1}(z)| \leq \frac{LM(L)}{|z| - L} \frac{|z| + \varrho}{\varrho - L} \left(\frac{\frac{|z| + \varrho}{r^2 + \varrho|z|}}{\frac{\varrho - L}{\varrho L - r^2}} \right)^m,$$

wenn $M(L) = \max_{|\zeta|=L} |f_r(\zeta)|$ bedeutet.

Da $\frac{|z| + \varrho}{r^2 + \varrho|z|} < \frac{1}{r}$ und $\lim_{L \rightarrow r} \frac{\varrho - L}{\varrho L - r^2} = \frac{1}{r}$ ist, so wird $\frac{|z| + \varrho}{r^2 + \varrho|z|} : \frac{\varrho - L}{\varrho L - r^2} < 1$, sobald man nur $L > r$ hinreichend nahe an r wählt. Für ein solches L wird aber

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |R_{m+1}(z)| = 0,$$

w. z. b. w.

Man sieht sofort, daß $R_{m+1}(z)$ für $m \rightarrow \infty$ auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $|z| < r$ sogar gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Als Endergebnis erhalten wir mithin folgenden Satz:

Jede im Kreisringe $r < |z| < R$ reguläre Funktion $f(z)$ läßt sich in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{1 - \frac{\overline{z_\mu} z}{R^2}} + B_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - z_\mu}{r^2 - \overline{z_\mu} z}$$

entwickeln, wenn die Folge $\{z_\mu\}$, ($\mu = 1, 2, \dots$) aus $r < |z| < R$ weder auf $|z| = r$ noch auf $|z| = R$ einen Häufungspunkt besitzt.

Für die Koeffizienten $\{A_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) bzw. $\{B_\nu\}$, ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) gelten die Integraldarstellungen (4) bzw. (8).

*

K problému interpolace funkcí regulárních v mezikruží I.

(Obsah předešlého článku.)

Nechť $\mathfrak{M}$ je mezikruží $r < |z| < R$; necht' $\{z_\mu\}$ je posloupnost bodů z $\mathfrak{M}$, jež nemá hromadných bodů na kružnicích $|z| = r$, $|z| = R$. Potom lze každou funkci $f(z)$, regulární a jednoznačnou v $\mathfrak{M}$, rozvinouti v $\mathfrak{M}$ v řadu (2) s koeficienty (4), (8).

Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 28. November 1936.)

Griechische Buchstaben bedeuten reelle Zahlen; kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, eventuell auch Restklassen modulo einer natürlichen Zahl. Ein geordnetes System von n (gleichen oder ungleichen) Restklassen $a_1, \dots, a_n$ modulo q ($n > 0, q > 0$) heiße ein (n, q) -System; Bezeichnung: $\{a_1, \dots, a_n\}$. Man setze noch

$$h\{a_1, \dots, a_n\} + k\{b_1, \dots, b_n\} = \{ha_1 + kb_1, \dots, ha_n + kb_n\}$$

und analog für mehrere Summanden.

Hilfssatz 1. Zu jedem $\alpha > 0$ gibt es zwei ganze Zahlen $\beta_1 = \beta_1(\alpha) > 0, \beta_2 = \beta_2(\alpha) > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $q > 0$, sind $a_1, \dots, a_l$ paarweise inkongruent mod q und ist $l \geq \alpha q$, so gibt es ein b mit folgenden Eigenschaften:

1. $0 < b \leq \beta_2$;
2. zu jedem r gibt es ein System von höchstens β_1 Zahlen $\varepsilon_i a_{k_i}$ mit $\varepsilon_i = \pm 1, \sum_i \varepsilon_i = 0, 1 \leq k_i \leq l, \sum_i \varepsilon_i a_{k_i} \equiv br \pmod{q}$.

Beweis: bekannt.¹⁾

Hilfssatz 2. Zu jedem $\alpha > 0, n > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen $L_1 = L_1(\alpha, n), L_2 = L_2(\alpha, n)$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $q > 0, l \geq \alpha q^n$ und ist

$$\mathfrak{A}: A_1, A_2, \dots, A_l \quad (A_i = \{a_{1i}, \dots, a_{ni}\})$$

eine Menge von l verschiedenen (n, q) -Systemen, so gibt es zu jedem (n, q) -System B eine Summe von höchstens L_1 (n, q) -Systemen $\varepsilon_i A_{k_i}$ mit

¹⁾ Hilfssatz 1. ist mit dem Hilfssatz 2. der Note von P. Erdős u. V. Jarník, Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen (Acta arithmetica 2 (1938), S. 214—220) identisch; nur wurde dort nicht betont, daß $\sum \varepsilon_i = 0$ gefordert werden darf. Dies folgt aber daraus, daß der dortige Beweis nur mit den Differenzen $a_j - a_k$ arbeitet.

$$\varepsilon_i = \pm 1, \sum_i \varepsilon_i = 0, 1 \leq k_i \leq l, \sum_i \varepsilon_i A_{k_i} = L_2 B.$$

Beweis. Für $n = 1$ folgt Hfs. 2 aus Hfs. 1 mit $L_2 = \beta_2!$, $L_1 = \beta_1$. Es sei also $n > 1$ und Hfs. 2 sei bis $n - 1$ wahr. Für jedes a sei $\mathfrak{M}_a$ die Menge aller A_i mit $a_{ni} = a$; s_a sei die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{M}_a$; $\mathfrak{P}$ sei die Menge aller a mit $1 \leq a \leq q$, $s_a > 0$. Wegen $0 \leq s_a \leq q^{n-1}$, $s_1 + \dots + s_q = l \geq \alpha q^n$ gibt es erstens ein a' mit $s_{a'} \geq \alpha q^{n-1}$ und zweitens ist die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{P}$ mindestens gleich αq .

Es sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ein (n, q) -System. Nach Hfs. 2 mit $n = 1$ gibt es höchstens $L_1(\alpha, 1)$ Zahlen $\varepsilon_i c_i$ mit

$$\varepsilon_i = \pm 1, \sum_i \varepsilon_i = 0, c_i \in \mathfrak{P}, \sum_i \varepsilon_i c_i \equiv L_2(\alpha, 1) b_n \pmod{q}.$$

Für geeignete $A_{q_i} \in \mathfrak{A}$ und geeignete $d_1, \dots, d_{n-1}$ ist dann

$$\sum_i \varepsilon_i A_{q_i} = \{d_1, \dots, d_{n-1}, b_n \cdot L_2(\alpha, 1)\} = D.$$

Das n -te Element des (n, q) -Systems $E = L_2(\alpha, 1) \cdot B - D$ ist also gleich Null. Nach Hfs. 2 mit $n - 1$ statt n gibt es also höchstens $L_1(\alpha, n - 1)$ (n, q) -Systeme $\eta_j A_{h_j}$ mit

$$\eta_j = \pm 1, \sum_j \eta_j = 0, A_{h_j} \in \mathfrak{M}_{a'}, \sum_j \eta_j A_{h_j} = L_2(\alpha, n - 1) \cdot E$$

(das letzte Element des (n, q) -Systems $\sum_j \eta_j A_{h_j}$ ist nämlich gleich $a' \sum \eta_j = 0$). Dann ist aber

$$L_2(\alpha, n - 1) \sum_i \varepsilon_i A_{q_i} + \sum_j \eta_j A_{h_j} = L_2(\alpha, n - 1) L_2(\alpha, 1) \cdot B,$$

w. z. b. w.

Herr Khintchine hat folgenden schönen Satz bewiesen³⁾:

Hauptsatz. Zu jedem $n > 0$ und jedem $\gamma > 0$ gibt es ein $\Gamma = \Gamma(\gamma, n) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Es seien $\Theta_1, \dots, \Theta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ gegeben; die Ungleichungen

$$|q\Theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < q \leq \gamma t'^n \quad (1)$$

seien für kein $t' > 1$ lösbar (in ganzen Zahlen $q, p_1, \dots, p_n$); dann sind die Ungleichungen

$$|x\Theta_i - y_i - \alpha_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < x \leq \Gamma t^n \quad (2)$$

für jedes $t > 0$ lösbar (in ganzen Zahlen $x, y_1, \dots, y_n$).⁴⁾

²⁾ Lies: c_i ist ein Element der Menge $\mathfrak{P}$.

³⁾ A. Khintchine, Ein Satz über lineare diophantische Approximationen, Math. Annalen **118** (1936), S. 398—415.

⁴⁾ Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig und leicht zu beweisen; vgl. l. c.³⁾, S. 399—401.

Ich will für diesen Satz im Falle $n > 1^5)$ einen neuen, auf dem Hfs. 2 beruhenden Beweis geben (wobei aber mehrere Betrachtungen des Herrn Khintchine auch in meinem Beweis vorkommen).⁶⁾

Beweis. Man setze $M_1 = L_1(2^{-n}\gamma, n-1)$, $M_2 = L_2(2^{-n}\gamma, n-1)$, $M_3 = M_2\gamma^{-\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2}M_1\gamma^{\frac{1}{n}}$, $\Gamma = ((M_3+1)\gamma^{-\frac{1}{n}} + 2)^n$, sodaß M_1, M_2 natürliche Zahlen sind.

Es sei $t > 0$; dann setze man $t' = \left[(M_3+1)\gamma^{-\frac{1}{n}}t \right] + 1$. Mit $q, p_1, \dots, p_n$ bezeichne man dasjenige System mit *möglichst kleinem* $q > 0$, für welches die Ungleichungen

$$|q\theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n)$$

gelten; also ist $(q, p_1, \dots, p_n) = 1$, $\gamma t'^n < q \leq t'^n$, also $\gamma < 1$,

$1 \leq t < t' < \Gamma^{\frac{1}{n}}t$. Man setze $d_i = (q, p_i)$, $q = d_i q'_i$, $p_i = d_i p'_i$ und man bestimme noch b_i so, daß $p'_i b_i \equiv 1 \pmod{q'_i}$, $(b_i, d_i) = 1$ ($i = 1, \dots, n$). (Das geht: denn es sei $d_i = d'_i d''_i$, wo in d'_i nur die Primzahlen $p \mid q'_i$, in d''_i nur die Primzahlen $p \nmid q'_i$ aufgehen; dann kann man b_i mit $p'_i b_i \equiv 1 \pmod{q'_i}$, $b_i \equiv 1 \pmod{d''_i}$ finden, und es ist $(b_i, d'_i) = (b_i, d''_i) = 1$.)

Behauptung I. Betrachtet man alle Zahlensysteme $u_1, \dots, u_n$ mit

$$u_i = j_i q'_i + z_i, \quad 0 \leq j_i < d_i, \quad 0 \leq z_i \leq \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} \quad (i = 1, \dots, n)^7), \quad (3)$$

so sind die $(n-1, q)$ -Systeme

$$\{u_1 b_1 - u_2 b_2, \dots, u_1 b_1 - u_n b_n\} \quad (4)$$

paarweise verschieden (ihre Anzahl ist größer als $2^{-n}\gamma q^{n-1}$).

Beweis: Sonst könnte man durch Subtraktion zweier Systeme (3) ein System $v_1, \dots, v_n$ mit $v_1^2 + \dots + v_n^2 > 0$ und mit

$$v_1 b_1 - v_i b_i \equiv 0 \pmod{q}, \quad v_i = k_i q'_i + y_i, \quad |k_i| < d_i, \quad |y_i| \leq \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

⁵⁾ Der Fall $n = 1$ ist leicht und längst bekannt.

⁶⁾ (20. XII. 1936.) Herr L. J. Mordell hat zwar einen noch kürzeren Beweis dieses Satzes gefunden, welcher den Minkowskischen Linearformensatz benutzt. Ich publiziere trotzdem meinen Beweis, da er auf einer ganz anderen Grundlage beruht.

⁷⁾ Es ist $\frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{q}{d_i} \frac{n-1}{n} d_i^{-1} < q d_i^{-1} = q'_i$; also sind die betrachteten Systeme $u_1, \dots, u_n$ paarweise verschieden.

finden. Es gäbe also ein g mit

$$|g| \leq \frac{1}{2}q < q, \quad v_i b_i \equiv g \pmod{q} \quad (i = 1, \dots, n),$$

also wäre (mit geeigneten m_i)

$$gp'_i \equiv b_i p'_i (k_i q'_i + y_i) \equiv y_i \pmod{q'_i}, \quad gp'_i - m_i q'_i = y_i,$$

$$\left| g \frac{p_i}{q} - m_i \right| = \frac{d_i}{q} |gp'_i - m_i q'_i| \leq \frac{1}{2} \gamma^{\frac{1}{n}} q^{-\frac{1}{n}} < \frac{1}{2t'}.$$

$$|g\Theta_i - m_i| \leq |g| \left| \Theta_i - \frac{p_i}{q} \right| + \left| g \frac{p_i}{q} - m_i \right| < \frac{|g|}{qt'} + \frac{1}{2t'} \leq \frac{1}{t'},$$

also $g = 0$ (nach der Definition von q), also $v_i b_i \equiv 0 \pmod{q}$, $y_i b_i \equiv 0 \pmod{q'_i}$, $y_i \equiv 0 \pmod{q'_i}$, aber $|y_i| < q'_i$ (vgl. die Fußnote⁷), also $y_i = 0$, also $b_i k_i q'_i \equiv 0 \pmod{q}$, $b_i k_i \equiv 0 \pmod{d_i}$, $k_i \equiv 0 \pmod{d_i}$, aber $|k_i| < d_i$, also $k_i = 0$, also $v_i = 0$ — Widerspruch.

Behauptung II. $d_i \leq \gamma^{-\frac{n-1}{n}} q^{\frac{n-1}{n}}$ ($i = 1, \dots, n$).

Beweis⁸: Sonst wäre

$$t'^{n-1} < \gamma^{-\frac{n-1}{n}} q^{\frac{n-1}{n}} < d_i \quad (5)$$

für ein i ; man wähle (Schubfachschiuß) ein k und $n-1$ Zahlen m ($j \neq i$, $1 \leq j \leq n$) mit

$$1 \leq k \leq t'^{n-1}, \quad |kq'_i \Theta_j - m_j| < \frac{1}{t'} \quad (6)$$

(für $j \neq i$); nach (5) wäre aber mit $m_i = kp'_i$,

$$|kq'_i \Theta_i - m_i| = k |q'_i \Theta_i - p'_i| < \frac{k}{d_i t'} \leq \frac{t'^{n-2}}{d_i} < \frac{1}{t'},$$

also wäre (6) auch für $j = i$ wahr, was wegen $0 < kq'_i \leq t'^{n-1} q'_i < d_i q'_i = q$ der Definition von q widerspricht.

Schluss des Beweises (für $n > 1$). Man bestimme nacheinander s_i, r_i, h_i ($i = 1, \dots, n$), sodaß

$$|q'_i \alpha_i - M_2 s_i| < M_2, \quad p'_i r_i \equiv s_i \pmod{q'_i}, \quad M_2(r_i - r_1) = h_i$$

(also $h_1 = 0$). Wendet man nun Hfs. 2 (mit $n-1$ statt n und mit $\alpha = 2^{-n}\gamma$) an, wobei man für $\mathfrak{Q}$ die Menge der Systeme (4) nimmt, so ergibt sich die Existenz von $2n$ ganzen Zahlen X_i, Y_i mit

$$X_1 b_1 - X_i b_i \equiv h_i \pmod{q}, \quad X_i = j_i q'_i + Y_i, \quad |Y_i| \leq \frac{1}{2} M_1 \gamma^{\frac{1}{n}} q^{\frac{n-1}{n}} d_i^{-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Es gibt also ein x mit ($i = 1, \dots, n$)

⁸) Fast wörtlich nach Khintchine, l. c.³), Hilfssatz 5.

$0 < x \leq q$, $x \equiv X_i b_i + M_2 r_i \pmod{q}$,
 $x p'_i \equiv p'_i (X_i b_i + M_2 r_i) \equiv X_i + M_2 s_i \equiv Y_i + M_2 s_i \pmod{q'_i}$, also
 $|x p'_i - y_i q'_i - M_2 s_i| = |Y_i|$ mit geeigneten y_i , also (Behauptung II)

$$\begin{aligned} |x p_i - y_i q - \alpha_i q| &= d_i |x p'_i - y_i q'_i - \alpha_i q'_i| < \\ &< d_i \left(\frac{1}{2} M_1 \gamma^{\frac{1}{n}} q^{\frac{n-1}{n}} d_i^{-1} + M_2 \right) \leq M_3 q^{\frac{n-1}{n}} < M_3 q \gamma^{-\frac{1}{n}} t'^{-1}, \end{aligned}$$

also wegen $0 < x \leq q$)

$$\begin{aligned} |x \theta_i - y_i - \alpha_i| &\leq x \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| + \frac{1}{q} |x p_i - y_i q - \alpha_i q| < \\ &< \frac{q}{q t'} + M_3 \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{n}} t'} < (M_3 + 1) \gamma^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{t'} < \frac{1}{t}, \\ 0 < x &\leq q \leq t'^n < \Gamma t^n. ^9) \end{aligned}$$

*

Nový důkaz jedné Chinčínovy věty.

(Obsah předešlého článku.)

Jde o důkaz této věty: ke každému $\gamma > 0$ a každému celému $n > 0$ existuje číslo $\Gamma = \Gamma(\gamma, n) > 0$ s touto vlastností: Buďte $\theta_1, \dots, \theta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ reálná čísla; nerovnosti

$$|q \theta_i - p_i| < \frac{1}{t'} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < q \leq \gamma t'^n$$

necht' nemají pro *žádné* celé $t' > 1$ řešení (v celých číslech $q, p_1, \dots, p_n$). Potom nerovnosti

$$|x \theta_i - y_i - \alpha_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 < x \leq \Gamma t^n$$

mají pro *každé* celé $t > 0$ řešení (v celých číslech $x, y_1, \dots, y_n$).

⁹⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Der unter ⁶⁾ erwähnte Beweis von Mordell ist inzwischen erschienen; vgl. L. J. Mordell, A theorem of Khintchine on linear diophantine approximation, Journ. London Math. Soc. 12 (1937), 166—167.

Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny.

Josef Klíma, Brno.

(Došlo dne 23. prosince 1936.)

V pojednání „O jistém lineárním zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny“ ve Věstníku Královské české společnosti nauk, roč. 1936 v odstavci 31 poukázal jsem na nejzajímavější zvláštní případ tohoto zobrazení, o němž bude zde pojednáno. Pojednání toto v dalším označím vždy písmenou Z s číslem příslušného odstavce.

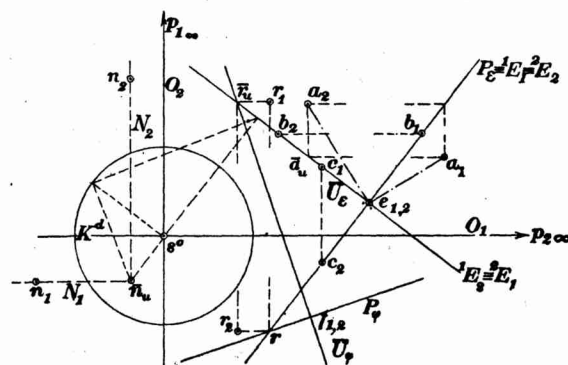
1. Za základní dva komplexy lineární zvolíme zde shodné komplexy Σ_1, Σ_2 , jichž osy O_1, O_2 leží v obrazně π a jsou vzájemně kolmé (obr. 1). Parametr obou komplexů budiž označen $+d$, t. j. jejich paprsky jsou normálami šroubovic pravotočivého šroubového pohybu o redukované výšce d . Levotočivé komplexy Σ_1, Σ_2 jsou v involuci a svazek jimi určený má za základní lineární kongruenci $T_{1,2}$ rotační kongruenci o hlavním paprsku $Z \perp \pi$ v průsečíku (O_1O_2) . V obraze 1 vyznačen kolmý průmět na obraznu $\pi \equiv (O_1O_2)$. Ježto nulové body p_1, p_2 roviny π jsou úběžnými body os O_2, O_1 , přechází zde charakteristická projektivita Π_X obecného případu v involuci na úběžné přímce X_∞ roviny π , o níž lze se snadno přesvědčiti, že má samodružné body v kruhových bodech $+i, -i$ roviny π . Řídící přímky ${}^1D, {}^2D$ kongruence $T_{1,2}$ jsou zde imaginární druhého druhu a sice jsou minimálními v rovinách vzdálených od π o délku $+i$, a $-i$, z nich pak prvá jde bodem $+i$ a druhá $-i$. Obrazy libovolné přímky jsou v stopnicích konjugovaných polár této přímky vzhledem k základním komplexům na π . Přímky roviny $\varrho \parallel \pi$, vedené ve vzdálenosti z od π , mají tytéž úběžné obrazy $r_{1\infty}, r_{2\infty}$ a sice v nulových bodech (pólech) roviny ϱ vzhledem k Σ_1 a Σ_2 .

Pól $r_{1\infty}$ je v úběžném bodě paprsků komplexu Σ_1 ležících v rovině ϱ , jež svírají s osou $+O_1$ úhel α , jehož $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{z}$. Zvolme středové promítání o středu s , ležícím na ose Z kongruence $T_{1,2}$.

Určeme obrazy a_1, a_2 libovolné přímky A , jež je dána v středovém promítání (s, π) stopníkem a a úběžníkem a^* . V rotační kongruenci $T_{1,2}$ je přímka rovnoběžná s A , jejíž stopník je v otočeném úběžníku $\bar{a}_u$, který vznikne z úběžníku a^* otočením o 90° ve smyslu $+$ kolem hlavního bodu s^0 . Stopník a přímky A má obrazy v přímkách $\underline{A}_1 \equiv ap_{1\infty}$ a $\underline{A}_2 \equiv ap_{2\infty}$ a úběžný její bod a_u v přímkách $\underline{A}_1^u \equiv \bar{a}_u p_{2\infty}$ a $\underline{A}_2^u \equiv \bar{a}_u p_{1\infty}$. V průsečících $(\underline{A}_1 \underline{A}_1^u), (\underline{A}_2 \underline{A}_2^u)$ jsou obrazy a_1, a_2 přímky A . Z konstrukce obrazů a_1, a_2 přímky je též patrné, jak obráceně od obrazů a_1, a_2 přejdeme k přímce A v prostoru. Zaměníme-li obrazy a_1, a_2 a označíme $a'_1 \equiv a_2$ a $a'_2 \equiv a_1$, tu příslušná přímka A' odpovídá přímce A v zborcené involuci o imag. řídících přímkách ${}^1D, {}^2D$. Splývá-li $a_1 \equiv a_2 \equiv \bar{a}_u \equiv a$ ná-

leží příslušná přímka A rotační síti $T_{1,2}$.¹⁾ Přímky komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v páry bodové, jichž spojnice jde bodem $p_{2\infty}(p_{1\infty})$. Tomuto zobrazení vymykají se přímky rovnoběžné s obraznou π . Tyto přímky určujeme vždy dvěma jejich body, jichž první a tudíž i druhé obrazy jsou spolu rovnoběžny. Přímky $B, \dots$, kolmé k přímkou A , musí mít otočený úběžník $\bar{b}_u$ na antipoláře $\bar{A}$ otočeného úběžníku $\bar{a}_u$ přímky A vzhledem k distanční kružnici K^d . V obraze 1 zvolena přímka B tak, aby se protínala s A v bodě q , takže spojnice $a_1b_1 \equiv Q_1, a_2b_2 \equiv Q_2$ co obrazy téhož bodu q jsou k sobě kolmé. Jak určily by se obrazy c_1, c_2 přímky, jdoucí bodem q kolmo k (AB) ponechává se čtenáři.

2. Rovina ε (obr. 2) zobrazuje se v podobnost (ε) dvou polí π_1, π_2 , jež jsou soumísné v π a jejichž odpovídající si přímky jsou



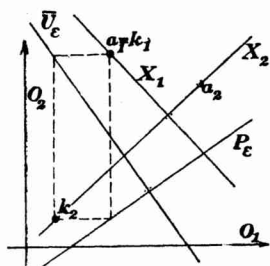
Obr. 2.

k sobě kolmé (Z, 4). Takovou podobnost (ε) možno určit na př. samodružným bodem $e_{1,2}$ a párem bodů a_1, a_2 za podmínky, že $e_{1,2}a_2 \perp e_{1,2}a_1$, ježto přímky E, A se protínají. Stopníky $a, e, \dots$ přímek $A, E, \dots$ roviny ε jsou na její stopě P_e a otočené úběžníky $\bar{a}_u; \bar{e}_u \equiv e_{1,2}, \dots$ na otočené úběžnici $\bar{U}_e \perp P_e$. Z obrazu patrné, jak k libovolně zvolenému obrazu $a_1(a_2)$ sestrojí se odpovídající $a_2(a_1)$, dáno-li $P_e, \bar{U}_e$. Lze tudíž rovinu ε určit zde též vzájemně kolmými přímkami $P_e, \bar{U}_e$. V obraze vyznačeny obrazy libovolné přímky $B(C)$ roviny ε , jež náleží komplexu $\Sigma_1(\Sigma_2)$, patrně $b_1b_2 \parallel O_1(c_1c_2 \parallel O_2)$. Průsečík $e_{1,2}$ je obrazem přímky E kongruence $T_{1,2}$, jež je v rovině ε . Přímky $P_e, \bar{U}_e$ jsou obrazy nulového bodu ${}^1e({}^2e)$ roviny ε vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$. Poměr podobnosti $k = e_2c_2 : e_1c_1 = e_2a_2 : e_1a_1 \dots$ pro (ε) je též pro všechny roviny, jež jdou týmž

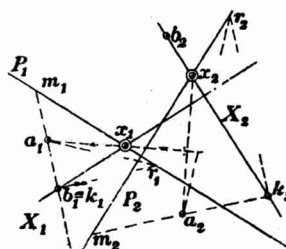
¹⁾ L. Eckhart: „Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene“ ve zprávách Vídeňské akademie, roč. 1918.

úběžným bodem v π na X_∞ a které mají stopy rovnoběžné. Přímký N kolmé k rovině ε mají týž otočený úběžník $\bar{n}_u$, který je antipólem otočené úběžnice $\bar{U}_s$ vzhledem k distanční kružnici K^d . Obrazy n_1, n_2 libovolné kolmice zvoleny na obrazech N_1, N_2 úběžného bodu n_∞ těchto kolmic libovolně.

Roviny jdoucí nulovým bodem $p_1(p_2)$ obrazny π vzhledem k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ zobrazují se v singulární podobnost prvního řádu, jejíž singulární bod v prvním poli π_1 (v druhém poli π_2) je nulový bod té roviny k $\Sigma_1(\Sigma_2)$ a singulární přímka v druhém (prvním) poli je úběžná přímka X_∞ . Roviny rovnoběžné s π zobrazují se v singulární podobnost druhého řádu, jejíž singulární body i přímky jsou úběžné.



Obr. 3.



Obr. 4.

V obr. 2 dána ještě rovina φ stopou P_φ a otočenou úběžnicí $\bar{U}_\varphi$ i lze snadno určit obrazy r_1, r_2 průsečnice $R \equiv (\varepsilon\varphi)$ znajíce její stopník $r \equiv (P_\varepsilon P_\varphi)$ a otočený úběžník $\bar{r}_u \equiv (\bar{U}_\varepsilon \bar{U}_\varphi)$. Dána-li by byla ještě třetí rovina ψ a určili bychom ještě obrazy průsečnic $(\varepsilon\psi), (\varphi\psi)$ tu musely by první obrazy všech tří průsečnic býti na přímce a druhé obrazy též na přímce kolmé k první, ježto tyto přímky byly by obrazy průsečíku $(\varepsilon\varphi\psi)$.

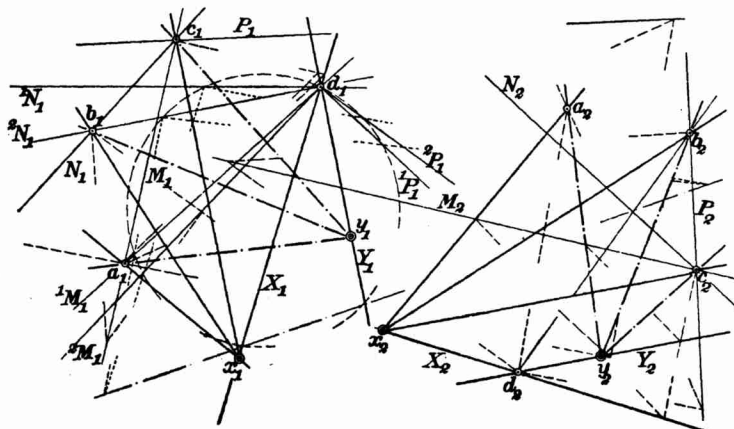
3. Řešme některé úlohy týkající se vzájemné polohy bodu, přímky a roviny.

a) V obr. 3 sestaven průsečík x roviny $\varepsilon(P_\varepsilon, \bar{U}_\varepsilon)$ s přímkou $A(a_1, a_2)$. V rovině ε myslíme si přímku K , jejíž $k_1 \equiv a_1$, řekněme první krycí přímku s A . Přímky K a A jsou různoběžné, ležící v téže nulové rovině komplexu Σ_1 a proto $k_2 a_2 \equiv X_2$ a $X_1 \perp \perp X_2$. Kdyby rovina ε byla rovnoběžná s π ve vzdálenosti z , znali bychom ihned směr obrazu X_1 podle obr. 1 ve spojnici $s'r'$.

b) V obr. 4 určeny obrazy příčky X , jdoucí bodem $p(P_1, P_2)$ k mimoběžkám $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$. Přímka A s bodem p určují rovinu ε , jež zobrazuje se v kolmou podobnost (ε) danou $(P_1, a_1) \sim \sim (P_2, a_2)$. V rovině ε zvolíme podle a) první krycí přímku K

s přímkou B ($k_1 \equiv b_1$) a určíme její druhý obraz k_2 jako odpovídající bod ke k_1 v (ε) . V obr. 4, je $a_2k_2 \perp a_1k_1$ a jsou-li průsečíky těchto kolmic s P_1 a P_2 body m_1, m_2 , tu musí $m_2a_2k_2 \sim m_1a_1k_1$. Nebo na P_1, P_2 zvoleny odpovídající si body r_1, r_2 ($a_2r_2 \perp a_1r_1$) a tu $r_2k_2 \perp r_1k_1$. Průsečík $x \equiv (\varepsilon B)$ má obrazy $X_2 \equiv b_2k_2$ a $X_1 \perp X_2$ bodem b_1 . Hledaná příčka je $X \equiv (xp)$, při čemž je kontrola $a_1x_1 \perp a_2x_2$. Kdyby příčka mimoběžek A, B měla býti rovnoběžná s přímkou C (c_1, c_2), tu bod p předchozího případu přešel by v úběžný bod přímky C , t. j. obraz P_1 šel by bodem c_1 rovnoběžně s O_1 atd.

c) Čtyři mimoběžky A, B, C, D mají obecně dvě příčky X, Y , nemají-li polohu hyperboloidickou. Zobrazíme-li tyto přímky družinami $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2, x_1x_2, y_1y_2$, tu promítají se body a_1, b_1, c_1, d_1 z x_1 (y_1) paprsky, jež jsou kolmy k spojnicím bodu x_2 (y_2) s odpovídajícími body a_2, b_2, c_2, d_2 , i řeší nám družiny x_1x_2, y_1y_2 zajímavou planimetrickou úlohu.



Obr. 5.

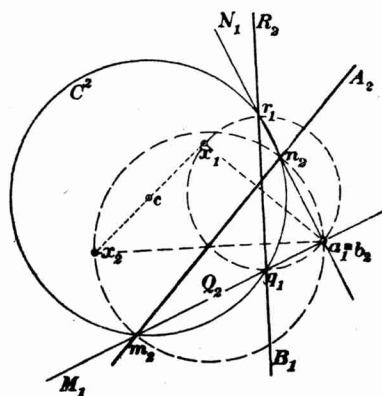
Příčky mimoběžek v našem zobrazení určíme obvyklým způsobem. Na přímce C zvolíme tři body m, n, p a promítneme je z mimoběžky A na přímku D do bodů $^1m, ^1n, ^1p$ a z B na tutéž přímku D do bodů $^2m, ^2n, ^2p$. Samodružné body x, y projektivních souměstných řad $^1m^1n^1p \overline{\wedge} ^2m^2n^2p$ náležejí hledaným příčkám.

V obr. 5 zvolen bod m tak, že rovina (mA) jde pólem obrazny π k Σ_1 , takže $M_1 \equiv c_1a_1$ a prvý obraz bodu 1m je $^1M_1 \equiv a_1d_1$, kdežto druhý obraz 1M_2 netřeba rýsovat. Obraz 2M_1 obdržíme podle b). Podobně vhodně zvoleno $N_1 \equiv b_1c_1$ a $P_2 \equiv b_2c_2$ a sestrojeny prvý obrazy $^1N_1, ^2N_1$ a $^1P_1, ^2P_1$. Samodružné paprsky X_1, Y_1 projektivních souměstných svazků $d_1(^1M_1^1N_1^1P_1) \overline{\wedge} d_1(^2M_1^2N_1^2P_1)$ jsou prvými

obrazy bodů x, y , druhé pak obrazy X_2, Y_2 jdou bodem d_2 kolmo k prvním obrazům. Sestrojením příček z bodů x, y k A, C tím, že určíme průsečíky rovin (xC) a (yC) s A dospíváme k obrazům x_1x_2, y_1y_2 jež řeší též vytknutou planimetrickou úlohu.

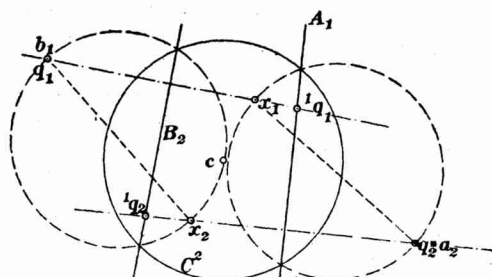
4. Lineární komplex Γ zobrazuje se v korelaci (Γ) jež obsahuje involuci, určující absolutní body na úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Pólová kuželosečka je zde kružnicí C^2 (Z, 18) (obr. 6) a její body jsou koincidenční s odpovídajícími přímkami v (Γ) . Prvý obraz x_1 sdružené poláry 1X k přímce X_∞ vzhledem ke Γ , odpovídá v (Γ) úběžné přímce X_∞ (Z, 14). Ježto spojnice bodu x_1 s kruhovými body dotýkají se polární kuželosečky Γ^2 je x_1 ohniskem kuželosečky Γ^2 . Stejně druhý obraz x_2 poláry 1X je ohniskem kuželosečky Γ^2 . Koincidenční kuželosečky v korelaci (Γ) dotýkají se dvojnásob a společný pól dotyčné tětivy k oběma těmto kuželosečkám má splývající odpovídající přímky v (Γ) a je tudíž na X_∞ , ježto přímka tato obsahuje involuci konjugovaných bodů v (Γ) . Prochází tudíž spojnice x_1x_2 středem c kružnice C^2 a průměr na této spojnici je hlavní osou kuželosečky Γ^2 . Kuželosečka Γ^2 je hyperbolou (elipsou), jestliže x_1 je vně (uvnitř) kružnice C^2 . Když x_1 a tudíž i x_2 je na C^2 je komplex Γ speciálním komplexem sestávajícím z příček přímky 1X . Dospíváme tak k zobrazení lineárního komplexu v prvek bod — kružnice podle Eckharta.¹⁾ Zvolíme-li první obraz a_1 paprsku A komplexu Γ , odpovídá mu v (Γ) ∞^1 druhých obrazů, jež jsou body odpovídající přímky A_2 , která je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad průměrem a_1x_2 . Tečny ke kuželosečce Γ^2 (v obr. 6 je to elipsa), jež má ohniska x_1, x_2 a C^2 za kružnici nad hlavní osou, počítáme-li k poli π_1 , a označíme je M_1, N_1 , mají odpovídající body v (Γ) v průsečících m_2, n_2 a sice musí $x_2m_2 \perp M_1$ a $x_2n_2 \perp N_1$. Jest totiž na př. x_2m_2 odpov. přímkou k úběžnému bodu přímky M_1 a musí jíti konjugovaným bodeš v Π_X . Jestliže bod a_1 označíme jakožto druhý obraz b_2 , jsou prvé obrazy na přímce B_1 , jež je chordálou kružnice C^2 s kružnicí opsanou nad b_2x_1 jakožto průměrem.

5. V obr. 7 ukázáno jak k přímce Q dané obrazy q_1, q_2 sestrojíme obrazy ${}^1q_1, {}^1q_2$ sdružené poláry 1Q vzhledem ke komplexu Γ , danému podle odstavce 4 kružnicí C^2 a obrazy x_1, x_2 .



Obr. 6.

Přímky komplexu Γ , jež protínají Q protínají též 1Q . Přímka B komplexu Γ , jejíž první obraz b_1 je v q_1 protíná Q a má druhý obraz v libovolném bodě odpovídající přímky $B_2 \perp b_1x_1$. Ježto všechny tyto přímky B musí protínati též 1Q , je 1q_1 na q_1x_1 a 1q_2 na B_2 . Stejně, označíme-li q_2 jakožto a_2 je první obraz a_1 přímky A komplexu Γ vázán na odpov. přímku $A_1 \perp x_2q_2$, a ze stejných důvodů musí 1q_2 býti na x_2q_2 a 1q_1 na A_1 . Tím jsou obrazy ${}^1q_1, {}^1q_2$ konjugované poláry 1Q určeny. Oba páry $X_\infty {}^1X, Q {}^1Q$ konjugovaných polár mají polohu hyperboloidickou a proto první obrazy $q_1, x_1, {}^1q_1$ jsou na přímce a stejně druhé obrazy a sice jest $q_1x_1{}^1q_1 \sim q_2x_2{}^1q_2$ (Z, 20).

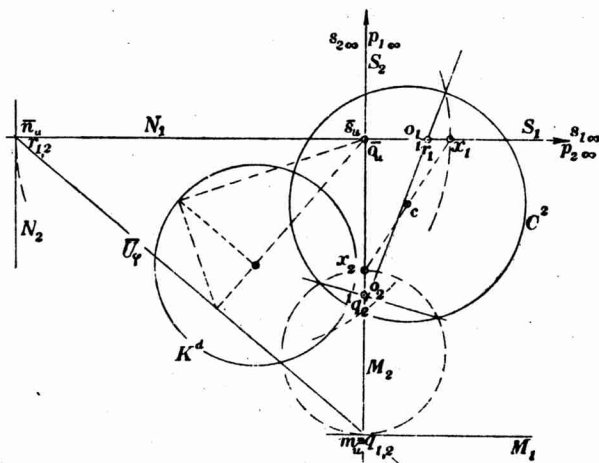


Obr. 7.

6. Kdybychom měli určití polární rovinu ε bodu e (E_1, E_2) vzhledem ke komplexu lineárnímu $\Gamma(C^2, x_1x_2)$, zvolíme v trsu o středu e libovolný paprsek Q , na př. ten, který náleží kongruenci $T_{1,2}$, jehož oba obrazy splývají v průsečíku $q_{1,2} \equiv (E_1E_2)$. Konjugovaná polára 1Q ku Q je v rovině ε a tudíž její obrazy ${}^1q_1, {}^1q_2$ sestrojené podle odst. 5 určují s E_1 případně E_2 podobnost (ε). Obdobně si počínáme při určení pólu f roviny φ ($P_\varphi, \overline{U}_\varphi$). V rovině φ zvolíme opět přímku Q na př. opět tu, jež náleží kongruenci $T_{1,2}$, stanovíme její konjugovanou poláru ku Γ a její průsečík s rovinou φ , určený podle odst. 3 a) je hledaným pólem f .

7. Budiž v obraze 8 sestrojiti obrazy o_1, o_2 osy O lineárního komplexu $\Gamma(C^2, x_1x_2)$. Úběžné přímky mají tytéž dva obrazy $s_{1\infty}, s_{2\infty}$, kde $s_1 \equiv p_2, s_2 \equiv p_1$. Konjugované k nim poláry mají též úběžný bod s , jehož obrazy jsou $S_1 \equiv x_1s_{1\infty}, S_2 \equiv x_2s_{2\infty}$. Průsečík $\overline{s_u} \equiv (S_1S_2)$ je otočeným úběžníkem všech průměrů komplexu a tedy též osy O . Osa O je konjugovanou polárou úběžné přímky roviny φ kolmé k směru průměrů. Otočená úběžnice $\overline{U}_\varphi$ roviny φ je tudíž antipolárou k $\overline{s_u}$ vzhledem k distanční kružnici K^e . Na úběžné přímce roviny φ zvolíme dva body m, n , jejichž nulové roviny μ, ν protínají se v hledané ose O . Výhodné je zvoliti obraz $M_2 \equiv S_2$ a $N_1 \equiv S_1$, ježto nulová rovina μ (ν) jde nulovým bodem

$p_2(p_1)$ roviny π k $\Sigma_2(\Sigma_1)$. Singulární body v konečnu podobnosti $(\mu), (\nu)$ jsou obrazy osy O . Bodem $m(n)$ zvolena přímka $Q(R)$ na př., která náleží $T_{1,2}$ a určen druhý (první) obraz ${}^1q_2({}^1r_1)$ konjugované poláry ${}^1Q({}^1R)$ a tu $o_1 \equiv {}^1r_1, o_2 \equiv {}^1q_2$.



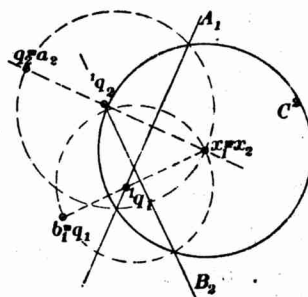
Obr. 8.

8. Jestliže polára 1X úběžné osy X_∞ roviny π vzhledem ke komplexu lineárnímu Γ náleží koincidenční kongruenci $T_{1,2}$, takže $x_1 \equiv x_2$ je v středu c kružnice C^2 , tu korelace (Γ) přejde v polaritu vzhledem k C^2 . Komplex Γ je invariantní vzhledem k zborcené involuci o imaginárních osách ${}^1D, {}^2D$, t. j. obsahuje tyto osy a komplex Γ je v involuci k oběma základním komplexům Σ_1, Σ_2 (Z, 28).

„Kružnice obrazny s jejich středy zobrazují nám lineární komplexy trojmocné soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku základních komplexů $(\Sigma_1 \Sigma_2)$.“

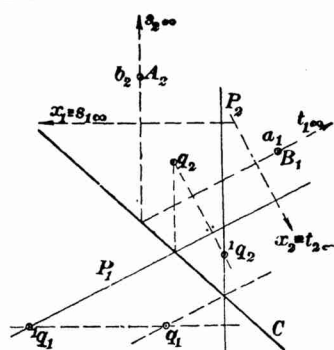
Obrazy ${}^1q_1, {}^1q_2$ konjugované poláry 1Q k libovolné přímce Q (obr. 9) určí se stejně jako v obraze 7; snadno z obrazce vyplývá že ${}^1q_1 {}^1q_2 \parallel q_1 q_2$. Náleží-li Q ke kongruenci $T_{1,2}$ z konstrukce ihned plyne, že i 1Q je v $T_{1,2}$ a proto komplex Γ obsahuje přímky ${}^1D, {}^2D$.

9. Obsahuje-li lineární komplex Γ osu X_∞ , ale nená-



Obr. 9.

leží svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$, přejde kružnice C^2 v přímku C (obr. 10) a body x_1, x_2 jsou úběžné a neodpovídají si v absolutní involuci Π_X (Z, 16). Body $t_{1\infty}, s_{2\infty}$ odpovídající v Π_X bodům $t_2 \equiv x_{2\infty}$ a $s_1 \equiv x_{1\infty}$ jsou singulárními body centrální korelace (Γ). Libovolnému bodu a_1 odpovídá přímka A_2 svazku $s_{2\infty}$, která se spojnicí $a_1 t_{1\infty}$ protíná se na přímce C a naopak bodu b_2 odpovídá paprsek B_1 procházející bodem $t_{1\infty}$ a protínající se se spojnicí $s_2 b_2$ na C . V obraze 10 vyznačena konstrukce obrazů ${}^1q_1, {}^1q_2$ poláry 1Q přímky Q o obrazech q_1, q_2 vzhledem k lineárnímu komplexu Γ , jež vyplývá z konstrukce



Obr. 10.

odst. 5. ∞^4 lineárních komplexů obsahujících osu X_∞ , zobrazuje se v ∞^4 centrálních korelacích, jejichž singulární body t_1, s_2 jsou na úběžné přímce a odpovídající singulární paprsky protínají se na přímce C v konečnu.

Jestliže $x_{1\infty}, x_{2\infty}$ odpovídá si v absolutní involuci Π_X , je příslušný lineární komplex speciální a sestává z příček přímky, jež protíná osu X_∞ a je v rovině rovnoběžné s obraznou π , jejíž nulový bod vzhledem k Σ_1 je v $x_{1\infty}$.

V případě pak kdy mimo to přímka C je kolma k směru $x_{1\infty}$ ($x_{2\infty}$), dostáváme dvojnásob singulární korelaci, jejíž singulární přímka v druhém (prvém) poli je C a v prvém (druhém) poli úběžná přímka; singulární body jsou v prvém poli úběžný bod na C ($x_{1\infty}$) a v druhém poli $x_{2\infty}$ (úběžný bod na C).

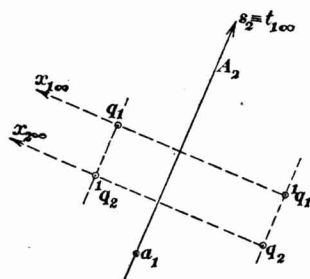
10. Necht v předchozím případě splynou body x_1, x_2 v témž úběžném bodě, komplex Γ obsahuje osu X_∞ a nenáleží-li svazku (Σ_1, Σ_2) má korelace (Γ) koincidenční přímku C , jež je kolma k směru $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$. Korelace (Γ) je centrální o společném středu v úběžném bodě $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ na přímce C a charakteristická projektivnost obou svazků je taká, že samodružné paprsky jsou v C a X_∞ . K určení obrazu takového komplexu stačí mimo přímky C znáti ještě obrazy a_1, a_2 jedné jeho přímky A , čímž projektivnost tato je dána. Patrně vzdálenosti bodu v prvém poli a odpovídající přímky v druhém poli od přímky C jsou v konstantním poměru k . Pro $k = -1$ dostáváme obraz lineárního komplexu, který je v involuci k svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ (odst. 8) a (Γ) je centrální involutorní reciprocitou.

Pro $k = 0$ je (Γ) dvojnásob singulární o singulární přímce C v prvém poli a X_∞ v druhém poli.

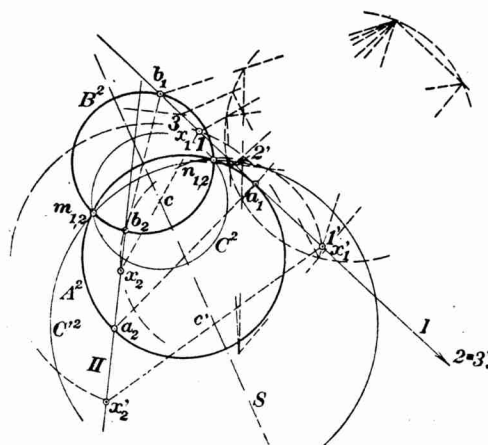
Náleží-li lineární komplex Γ předchozího případu

svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$, tu $t_{1\infty} \equiv s_{2\infty}$ (Z, 17) a tedy též $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ a oba svazky singulárních paprsků splývají. V obr. 11 vyznačen tento případ, jakož i konstrukce obrazů ${}^1q_1, {}^1q_2$ poláry 1Q k libovolné přímce Q . Pro základní komplex Σ_1 je $t_1 \equiv s_2 \equiv p_{2\infty}$ a pro Σ_2 pak $t_1 \equiv s_2 \equiv p_1$ (odst. 1).

Čtyřmocnou soustavu lineárních komplexů obsahujících osu X_∞ označme pro další Σ^4 a trojmocnou soustavu z těchto, pro něž $x_{1\infty} \equiv x_{2\infty}$ označme Σ^3 .



Obr. 11.



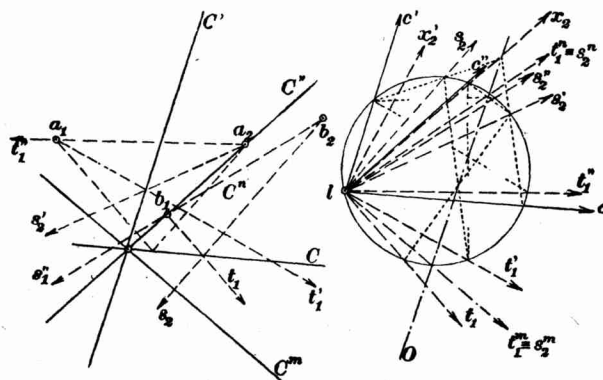
Obr. 12.

11. Uvažujme o dvou lineárních komplexech Γ, Γ' určených v obraze prvky C, x_1x_2 a $C', x'_1x'_2$ (obr. 12). Komplexy ty určují svazek lineárních komplexů, jež obsahují jejich společnou lineární kongruenci $(\Gamma\Gamma')$, která má s kongruencí $T_{1,2}$ společné přímky M, N , jejichž obrazy jsou v průsečících $m_{1,2}, n_{1,2}$ kružnic C^2, C'^2 . Další komplexy $\Gamma^\times$ svazku mají za pólovou kružnici $C^{\times 2}$ kružnici svazku $(C^2C'^2)$ a obraz $x_1^\times$ je na přímce $I \equiv x_1x'_1$ a $x_2^\times$ na přímce $II \equiv x_2x'_2$ a sice řada $x_1x'_1x_1^\times \dots$ na I je podobnou s řadou $x_2x'_2x_2^\times \dots$ na II . Úběžné body přímek I, II přísluší totiž ke komplexu svazku, který obsahuje úběžnou přímku X_∞ a jehož koincidenční kružnice přechází v přímku $m_{1,2}n_{1,2}$ svazku $(C^2C'^2)$ (odst. 9). Středů $c, c', c^\times, \dots$ kružnic $C^2, C'^2, C^{\times 2}, \dots$ tvoří řadu $S (c, c', c^\times, \dots)$ podobnou s řadou $I (x_1, x'_1, x_1^\times, \dots)$. Spojnice $x_1x_2, x'_1x'_2, x_1^\times x_2^\times, \dots$ obalují parabolu dotýkající se přímek I, S, II . Svazek lineárních komplexů obsahuje dva speciální komplexy sestávající z příček přímky A , případně B . Určeme obrazy a_1a_2, b_1b_2 přímek A, B ! K tomu užijeme toho, že přímky A, B jsou konjugovanými polárami k oběma komplexům Γ, Γ' . Body a_1, b_1 jsou na I a a_2, b_2 na II . K libovlnému bodu $x_1^\times$ na I náleží určitý bod $x_2^\times$ na II a body ty jsou obrazy konjugované polá-

ry ${}^1X^\times$ osy $X_\infty^\times$ vzhledem ke $\Gamma^\times$. Konjugované poláry k přímce ${}^1X^\times$ vzhledem ke Γ a Γ' splývají jen tehdy, když ${}^1X^\times$ splyne s A nebo B . Mění-li se komplex $\Gamma^\times$ ve svazku $(\Gamma\Gamma')$ budou prvé obrazy konjugovaných polár k příslušným přímkám ${}^1X^\times$ vzhledem ku Γ a Γ' tvořiti na přímce I dvě projektivní řady, jichž samodružné body jsou v obrazech a_1, b_1 řídících přímek kongruence $(\Gamma\Gamma')$. Druhé obrazy a_2, b_2 lze obdobně dostat anebo na základě toho, že úsečky a_1a_2, b_1b_2 jsou půleny přímkou S . Zvolme nejprve $x_1^\times, x_2^\times$ v úběžných bodech přímek I, II , tu dostaneme na I družinu bodovou $I \equiv x_1, I' \equiv x'_1$. Dále zvolme $x_1^\times, x_2^\times$ v x_1, x_2 a dostaneme na I družinu $2_\infty, 2'$, kde $2'$ je na chordále kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2x'_1$ co průměrem. Stejně pro splynutí $x_1^\times, x_2^\times$ s x'_1, x'_2 dostaneme obdobně určenou třetí družinu $3, 3'_\infty$. Ze tří družin $II', 22', 33'$ projektivnosti na přímce I určíme samodružné body a_1, b_1 a k nim body a_2, b_2 na II . Kružnice A^2, B^2 opsané nad a_1a_2, b_1b_2 co průměry náležejí k svazku $(C^2C'^2)$ a jsou obrazy speciálních lineárních komplexů svazku $(\Gamma\Gamma')$ sestávajících z příček přímek A, B . V obraze přímky A, B jsou reálné a kongruence $(\Gamma\Gamma')$ je hyperbolicou o řídících přímkách A, B .

V případě, kdy $x_1x'_1 \perp x_2x'_2$, t. j. poláry ${}^1X, {}^1X'$ se protínají, známe předem jednu řídící přímku na př. B , ježto protíná osu X_∞ a má úběžné obrazy $b_{1\infty}, b_{2\infty}$ a speciální komplex (B) má obraz v chordále kružnic C^2, C'^2 .

12. Libovolný svazek lineárních komplexů v soustavě $\mathcal{E}^4$ (odst. 10) obsahuje dva komplexy soustavy $\mathcal{E}^3$, ježto projektivní

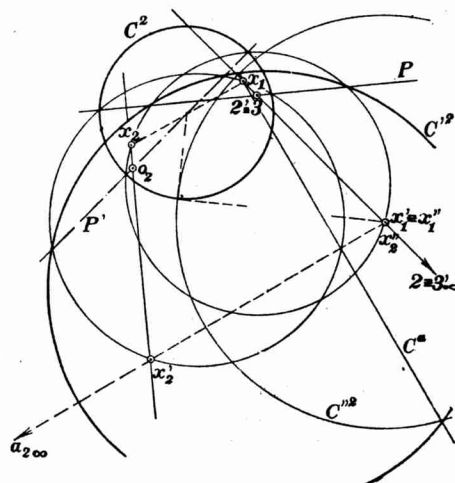


Obr. 13.

řady bodové $x_1 \dots \bar{\wedge} x_2 \dots$ na X_∞ mají dva samodružné body. Mějme v obr. 13 dány dva lineární komplexy Γ, Γ' náležející k $\mathcal{E}^4$ a sice koincidenčními přímkami C, C' a úběžnými středy t_1, s_2, t'_1, s'_2

singulárních svazků. Další komplex I'' svazku (II') má koincidenční přímku C'' jdoucí průsečíkem (CC') . Příslušné úběžné body t''_1, s''_2 lze stanoviti dvojím způsobem. Libovolný bod $a_2 (b_1)$ na C'' je druhým (prvním) obrazem jisté přímky A kongruence (II') , k němuž najdeme první (druhý) obraz $a_1 (b_2)$ na základě toho, že přímka ta je v obou komplexech I, I' . Udává pak spojnice $a_2 a_1 (b_1 b_2)$ bod $t''_{1\infty} (s''_{2\infty})$. Jinak lze užiti projektivnost $t_1 t'_1 t''_1 \dots \bar{\wedge} s_2 s'_2 s''_2 \bar{\wedge} \bar{\wedge} CC'C'' \dots$. Sestrojíme tedy libovolným bodem l rovnoběžky se směry určujícími tyto úběžné body, případně s koincidenčními přímkami. Samodružnými body $t_1^m \equiv s_2^m$ a $t_1^n \equiv s_2^n$ procházejí též koincidenční přímky C^m, C^n , ježto příslušné k nim komplexy náležejí soustavě $\mathcal{E}^3$ (odst. 10). Mají proto tři tyto vzájemně projektivní svazky o středu l tytéž dva samodružné paprsky z dvou známých odpovídajících si jejich trojin $(t_1 s_2 c, t'_1 s'_2 c')$ lze proto určití společnou direkční osu O a pomocí ní lze obrazy komplexů svazku (II') doplňovati. Pro speciální lineární komplexy svazku musí směry $t_{1\infty}^a, t_{1\infty}^b$ státi kolmo k směřům $s_{2\infty}^a, s_{2\infty}^b$ a proto směry $s_{2\infty}^a, s_{2\infty}^b$ jsou samodružnými paprsky projektivních svazků $l (s_2, s'_2, \dots) \bar{\wedge} \bar{\wedge} l (x_2, x'_2, \dots)$ (v obraze 13 neseštrojováno).

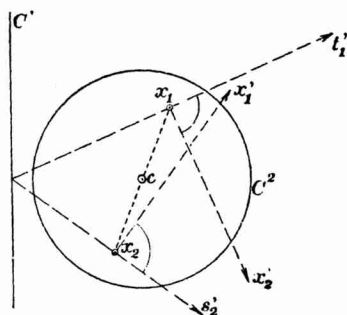
13. Mají-li lineární komplexy I, I' býti v involuci, musí v obr. 12 obrazy x_1, x'_1 býti harmonicky sdruženy k a_1, b_1



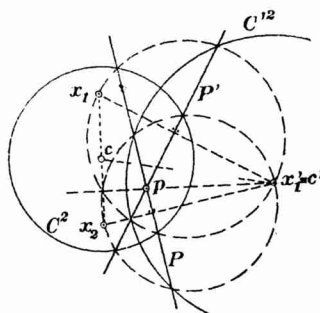
Obr. 14.

a tudíž též $(x_2 x'_2 a_2 b_2) = -1$, t. j. projektivita určující body $a_1, b_1 (a_2, b_2)$ na přímce $I (II)$ je involucí. K tomu postačí, aby $2' \equiv 3$ a tedy chordála P kružnice C'^2 s kružnicí opsanou nad $x_2 x'_1$ co průměrem, byla totožna s chordálou kružnice

C^2 s kružnicí mající $x_2x'_2$ za průměr (obr. 14). Ovšem platí též současně, že chordála P' kružnice C^2 s kružnicí o průměru $x_2x'_1$ splývá s chordálou kružnice C'^2 s kružnicí průměru $x_1x'_2$. Dán-li lineární komplex Γ útvary C^2, x_1x_2 obrazny, lze pro lineární komplex Γ' , který je s ním v involuci, zvoliti body x'_1, x'_2 libovolně, ale kružnice C'^2 sestojí se již snadno z předchozí podmínky. Z této podmínky pro involutornost komplexů Γ a Γ' vyplývá ihned, že speciální komplex sestávající ze sečen přímky A je v involuci s Γ , jestli přímka A je obsažena v komplexu Γ . Jestliže komplex Γ' obsahuje úběžnou osu X_∞ obrazny π , tu aby byl v involuci s obecným komplexem $\Gamma(C^2, x_1x_2)$ (obr. 15), musí podle hořejší podmínky přímka C' procházeti průsečíkem kolmic sestrojených v x_1 a x_2 k směrům $x'_{2\infty}, x'_{1\infty}$.



Obr. 15.



Obr. 16.

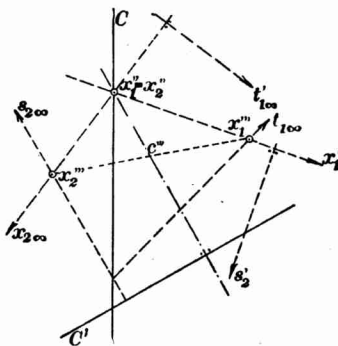
Eckhart v uvedeném pojednání¹⁾ ve větě 6 uvádí jinou podmínku pro involutornost komplexů Γ, Γ' . Abychom tuto podmínku odvodili, povšimněme si v obr. 16 případě, kdy Γ' je v involuci se základními komplexy Σ_1, Σ_2 (odst. 8), t. j. $x'_1 \equiv x'_2 \equiv c'$. Zvolíme-li podle předchozího obecného případu lineární komplex Γ' v involuci s Γ , jdou chordály všech vytknutých kružnic týmž bodem p , který je k středu c' kružnice C'^2 involutorně sdružen v korelaci (Γ), v níž se zobrazuje komplex Γ . Jest patrně $x'_1p \perp x_1x_2$. Body $x'_1 \equiv c'$ a p jsou harmonicky sdruženy vzhledem ke koincidenční kružnici C^2 a proto kružnice C'^2 protíná kolmo kružnici C^2 .

Všechny komplexy lineární, jež jsou v involuci k lineárnímu komplexu Γ , tvoří čtyřmocnou soustavu a ta má s trojmocnou soustavou komplexů Γ' , jež jsou v involuci k Σ_1 a Σ_2 , společnou dvojmocnou soustavu lineárních komplexů, jichž koincidenční kružnice protínají kolmo kružnici C^2 .

Mysleme si nyní v obr. 14 ještě lineární komplex Γ'' , který je v involuci ku Γ a jehož $x''_1 \equiv x''_2 \equiv x'_1$ a tudíž příslušná kružnice C''^2 protíná kolmo C^2 . Komplexy Γ' , Γ'' jsou v involuci ke Γ , určují svazek $(\Gamma'\Gamma'')$, jehož všechny komplexy jsou ke Γ v involuci. V tomto svazku $(\Gamma'\Gamma'')$ je též komplex obsahující osu X_∞ , který je tu speciálním komplexem, jehož přímky sečou přímkou A jdoucí pólem p_1 obrazny π vzhledem k základnímu lineárnímu komplexu Σ_1 . Koincidenční útvar korelace (A) je v konečnu chordála C^a kružnic C'^2 , C''^2 . Aby tento speciální komplex byl v involuci s Γ , musí podle hořejší podmínky chordála C^a procházeti bodem x_1 . Tento vztah je Eckhartovou podmínkou involutornosti komplexů Γ , Γ' .

Dva lineární komplexy $\Gamma(C^2, x_1x_2)$, $\Gamma'(C'^2, x'_1x'_2)$ jsou v involuci, jestliže chordála kružnice C'^2 s kružnicí o středu x'_1 a protínající kolmo kružnici C^2 , jde bodem x_1 .

Z odvození patrné, že v této podmínce lze zaměnit C^2 , C'^2 , při současně záměně x'_1 a x_1 , anebo zaměnit x_1 , x'_1 za x_2 , x'_2 .



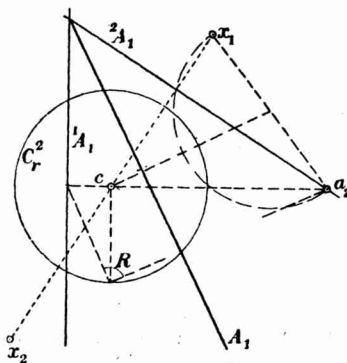
Obr. 17.

14. Určeme podmínku involuce dvou lineárních komplexů Γ , Γ' soustavy $\mathcal{E}^4$ (odst. 10)! Budiž jeden tento komplex Γ dán koincidenční přímkou C a úběžnými body t_1 , s_2 , kdežto pro druhý komplex Γ' zvolme úběžné body t'_1 , s'_2 (obr 17)! Vyhovuje zde ∞^1 komplexů Γ' a jich koincidenční přímky C' jsou spolu rovnoběžné. Abychom určili směr těchto přímek, zvolme dva lineární komplexy Γ'' , Γ''' , jež jsou v involuci s Γ podle obr. 16, a jichž svazek $(\Gamma''\Gamma''')$ obsahuje jeden z komplexů Γ' . Zvolíme $x''_1 \equiv x''_2$ kdekoli na přímce C a jím vedeme přímky směřující k úběžným bodům x'_1 a x'_2 , na nichž třeba zvoliti x'''_1 a x'''_2 tak, aby jimi jdoucí přímky směrů $t_{1\infty}$, $s_{2\infty}$ protínaly se na přímce C . Libovolné kružnice C''^2 , C'''^2 opsané kolem středů x''_1 a půlícím bodem c''' úsečky $x'''_1x'''_2$, jsou

koincidenčními kružnicemi takových dvou komplexů Γ'' , Γ''' . Chordála kružnic C''^2 , C'''^2 udává směr koincidenční přímky C' , který je též kolmý k spojnici $x''_1 c'''$.

15. Svazek lineárních komplexů (Γ'') , jehož $C^2 \equiv C'^2$, má všechny koincidenční kružnice totožné a obsahuje komplex svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$, jehož obraz má všechny body průmětny za samodružné a totožné singulární svazky obrazu mají střed v úběžném bodě kolmic k spojnici $x_1 x'_1$ (odst. 10). Jestliže shodné řady $x_1, x'_1, \dots, x_2, x'_2, \dots$ jsou na téže přímce jdoucí středem kružnice $C^2 \equiv C'^2$, tu svazek (Γ'') obsahuje jeden komplex Γ^0 trojmocné soustavy lineárních komplexů involutorní k svazku $(\Sigma_1 \Sigma_2)$, jehož $x_1^0 \equiv x_2^0$. Průsečíky spojnice $x_1 x_2$ s C^2 v posledním případě jsou póly x_1^a, x_2^a nebo $x_1^b \equiv x_2^a, x_2^b \equiv x_1^a$ dvou speciálních lineárních komplexů tohoto svazku, jichž parametr $= 0$. Komplex lineární Γ^0 je pravotočivý ježto je v involuci k základnímu komplexu Σ_1 , který je levotočivý a svazek $(\Gamma^0 \Sigma_1)$ má reálné speciální komplexy. Jest proto lineární komplex Γ , jehož x_1 a tudíž i x_2 leží uvnitř koincidenční kružnice C^2 pravotočivým a leží-li vně levotočivým.

16. Lineární komplexy Γ, Γ' , v jejichž obrazech $x'_1 \equiv x_1$ a $x'_2 \equiv x_2$ určují svazek, jejichž koincidenční kružnice



Obr. 18.

jsou soustředné a příslušné obrazy konjugované poláry 1X splývají. Svazek (Γ'') obsahuje lineární kongruenci o řídících přímkách $^1X, X_\infty$. Speciální komplexy Γ^a, Γ^b svazku tohoto mají koincidenční kružnice $\bar{C}^a, \bar{C}^b$, z nichž prvá má průměr $x_1 x_2$ a druhá nekonečně veliký. Svazek obsahuje též komplexy, jichž kružnice koincidenční jsou imaginární a které jsou levotočivé a jich společné přímky s kongruencí $T_{1,2}$ tvoříce imaginární plochu 2° , jež je společná třem stejně vinutým lineárním komplexům. Zvolíme-li reálného

zástupce imaginární kružnice C^2 kružnici C_r^2 (obr. 18), tu korelace (I') určuje se obdobně jako při reálné koincidenční kružnici. Na př. bodu a_2 odpovídá přímka A_1 , která je chordálou kružnice C^2 a kružnice opsané nad a_2x_1 jakožto průměrem. Chordálu A_1 možno obdržeti též uvažováním o svazku lineárních komplexů o společné kružnici koincidenční C^2 , při němž probíhá bod x_1 průměr cx_1 . Přímky A_1 odpovídající bodu a_2 v obrazech těchto lineárních komplexů opisují svazek. Splyne-li x_1 se středem c , tu odpovídající přímka 1A_1 je antipolární k a_2 vzhledem C_r^2 , a je-li x_1 úběžným bodem, odpovídající přímka 2A_1 jde bodem a_2 kolmo k cx_1 . Odpovídající přímka A_1 v (I') bodu a_2 jde průsečíkem ($^1A^2A$) kolmo k centrále kružnice C^2 a kružnice opsané nad průměrem a_2x_1 . Z konstrukce ihned patrné, jak se tato zjednoduší, kdyby kružnice C^2 měla poloměr $= 0$ a přešla v minimální přímky bodu c .

17. Tři lineární komplexy I, I', I'' nenáležející témuž svazku určují dvojmocnou soustavu lineárních komplexů zvanou též sítí komplexů lineárních. Lineární komplexy, jež jsou v involuci s těmito třemi základními komplexy I, I', I'' a tudíž s celou sítí, tvoří opět sít' lineárních lineárních komplexů A, A', A'' , která obsahuje komplex A^0 trojmocné lineární soustavy lineárních komplexů, jež jsou v involuci k svazku $(\Sigma_1\Sigma_2)$. I musí koincidenční kružnice $C^2, C'^2, C''^2, \dots$ sítě $[II'I'']$ kolmo protínati koincidenční kružnici $L^{2,0}$ komplexu A^0 . Podle toho lze snadno sestrojiti koincidenční kružnice komplexů sítě $[II'I'']$. Jsou-li $c, c', c'', \dots$ středy kružnic $C^2, C'^2, C''^2, \dots$, tu musí pole bodové $c, c', c'', \dots$ býti afinní se souměstným polem $x_1, x'_1, x''_1, \dots$, ježto odpovídající si řady bodové, přináležející témuž svazku lineárních komplexů obsaženému v síti, jsou podobné. Afinita těchto dvou souměstných polí má jeden samodružný bod $c'^0 \equiv x_1^0$ v konečnu, k němuž patří komplex I^0 je v involuci se svazkem $(\Sigma_1\Sigma_2)$ a jeho kružnice koincidenční $C^{2,0}$ protíná kolmo kružnice koincidenční sítě $[AA'A'']$.

18. Čtyři lineární komplexy I, I', I'', I''' , které nejsou v téže síti, určují lineární trojmocnou soustavu lineárních komplexů, jež je v involuci k lineárnímu svazku lineárních komplexů $A, A', \dots$. Koincidenční kružnice $L^2, L'^2, \dots$ protínají kolmo kružnici $C^{2,0}$ patřící k síti $[II'I'']$ a kružnici $^1C^{2,0}$ patřící k síti $[I'I''I''']$ a proto řada $l, l', \dots$ středů koincidenčních kružnic je na chordále obou těchto kružnic a je podobná s řadou $x_1^l, x_1^{l'}, \dots$ bodů patřících k $A, A', \dots$. Dva páry odpovídajících si bodů obou řad lze snadno určit. Kdyby komplexy I, I', I'', I''' byly speciální, dostali bychom určení svazku lineárních komplexů čtyřmi paprsky společné kongruence lineární.

19. Mějme konečně pět lineárních komplexů $I, \dots, I^{IV}$, které nejsou v téže lineární trojmocné soustavě, tu určují jeden

lineární komplex Λ , k terý je k nim v involuci! Koincidenční kružnice L^2 komplexu Λ protíná kolmo všechny kružnice $C^{2,0}$ náležející k třem komplexům z daných pěti, jichž je $\binom{5}{3} = 10$. Ke konstrukci této kružnice L^2 třeba určit jen tři z těchto kružnic, na př. v sítích $[II'II'']$, $[II'II''']$, $[II'II^{IV}]$. Příslušný bod x_1^I určí se na základě toho, že komplex Λ je v involuci s dvěma komplexy z lineární soustavy $[I, \dots, I^{IV}]$. Jsou-li komplexy $I, \dots, I^{IV}$ speciální, dostáváme určení lineárního komplexu Λ pěti jeho paprsky a současně sestrojení korelace (Λ) obsahující absolutní involuci a pět daných párů sdružených bodů.

Komplex lineární obsahující osu X_∞ je určen čtyřmi svými paprsky a při určení jeho koincidenční přímky L setkáváme se s úlohou, jež je řešena při jiné příležitosti.²⁾

*

Sur une représentation linéaire spéciale de l'espace des droites par la variété des couples de points dans un plan.

(Résumé de l'article précédent.)

Cette représentation est un cas spécial remarquable de celle que l'auteur a considérée dans son traité „Sur une représentation linéaire de l'espace des droites par la variété des couples de points dans un plan“, Mémoires de la société royale des sciences de Bohême 1936, numéro 1. Dans ce travail la droite était représentée par la couple de traces de ses droites conjuguées par rapport à deux complexes linéaires fondamentaux Σ_1, Σ_2 sur un plan π . Ici on choisit pour Σ_1, Σ_2 deux complexes linéaires à gauche ayant le même paramètre d et dont les axes perpendiculaires O_1, O_2 sont dans le plan π . La homographie remarquable Π_X est ici une involution sur la droite à l'infini X_∞ du plan π déterminant les points cycliques du plan π . La figure de coïncidences c'est à dire la congruence linéaire $T_{1,2} \equiv (\Sigma_1, \Sigma_2)$ est ici de révolution; son axe $Z \perp \pi$ passe par le point $s^0 \equiv (O_1, O_2)$.

Les images des figures fondamentales sont les lieux des images des droites incidentes avec les figures. Par exemple un point est représenté par deux droites normales, un plan par une similitude, dont les droites correspondantes sont perpendiculaires. On a résolu les problèmes fondamentaux d'incidence, concernant a) le point d'intersection d'un plan et d'une droite, b) la transversale par un point de deux droites et c) les transversales communes de quatre droites. Le résultat concernant ce dernier cas résout aussi un problème de la géométrie plane (fig. 5) à savoir la

²⁾ Klíma: „O problému projektivnosti při orientované poloze dvou obrazů“. Věstník Král. české společnosti nauk, roč. 1929.

construction de la couple de points x_1, x_2 (y_1, y_2) tels que les droites joignant ces points avec les points correspondants de quatre couples des points $a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2$ sont perpendiculaires.

Un complexe linéaire Γ est représenté par une corrélation (Γ) qui contient l'involution Π_X . Les coniques de coïncidences de la corrélation (Γ) sont un cercle C^2 et une conique. Les foyers de cette conique se trouvent aux images x_1, x_2 de la droite conjuguée à l'axe X_∞ par rapport au complexe Γ et le grand axe de la conique en question coïncide avec un diamètre du cercle C^2 . Dans son traité¹⁾ M. Eckhardt en appliquant la congruence de révolution est arrivé aussi à la représentation d'un complexe linéaire par l'élément point-cercle $x_1 - C^2$. Il considère seulement les droites du complexe Γ qui sont en même temps des droites de la congruence $T_{1,2}$ tandis qu'ici on considère les images de toutes les droites du complexe. Dans la fig. 7 on a construit les images $^1q_1, ^1q_2$ de la droite conjuguée à la droite Q , dont les images sont q_1, q_2 , par rapport au complexe Γ . Ensuite on donne la construction du plan polaire d'un point donné et du problème réciproque. La fig. 8 montre la construction des images o_1, o_2 de l'axe O du complexe $\Gamma (C^2, x_1)$; on y applique la projection centrale à la distance d , qui est égale au paramètre des complexes Σ_1, Σ_2 ; s^0 est le point principal de la projection. Dans les articles 8, 9, 10 on considère les images des complexes linéaires ayant des positions particulières c'est à dire qui sont en involution avec Σ_1 et Σ_2 ou bien qui contiennent l'axe X_∞ et se trouvent ou non dans le faisceau (Σ_1, Σ_2) . Ensuite on considère le faisceau de complexes linéaires déterminé par deux complexes Γ, Γ' et on trouve la condition pour les images de deux complexes linéaires qui sont en involution. On arrive à une condition différente de celle que M. Eckhardt a établie mais on déduit aussi celle-ci sans aucune espèce de difficultés. Dans le cas où les deux complexes Γ, Γ' contiennent la droite X_∞ la condition de l'involution se trouve établie dans l'article 14. Dans les nos 15 et 16 on explique comment on trouve des images quand le complexe linéaire est à gauche ou à droite. Dans les derniers articles enfin, on considère les images d'un réseau et de systèmes de complexes linéaires déterminés par trois, quatre ou cinq complexes ainsi que les images des complexes linéaires qui sont en involution avec eux.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Určení výšek a viditelné části dráhy meteoru grafickou metodou.

Vladimír Guth, Ondřejov.

(Došlo 22. září 1937.)

Věnováno panu profesorovi dr. Františku Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den 3. prosince 1937.

Autor popisuje jednoduchou metodu určení výšek a dráhy meteoru. K řešení užívá centrální projekce sféry a příslušné rovnice $\alpha - f$ řeší nomograficky.

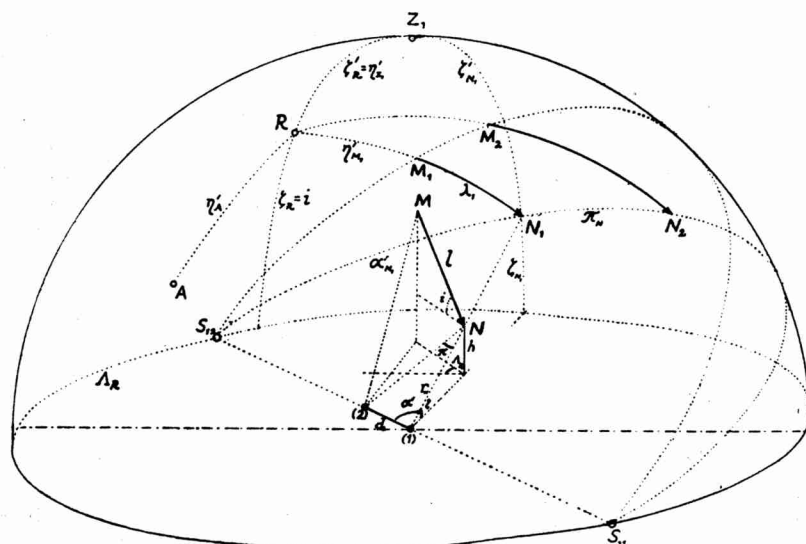
Účelem těchto řádek jest rozvinouti jednoduchou metodu, která by s přesností odpovídající pozorováním, řešila tuto úlohu: určití výšky a viditelnou část dráhy meteoru, z pozorování vykonaných na dvou místech. Početní řešení zpravidla užívaná, přesahují ve většině případů daná pozorování svou přesností a proto se hodí jen pro dokonalá pozorování jako jsou na př. snímky meteoru zachycené z obou pozorovacích míst. Níže uvedené vývody lze ovšem aplikovati i na jiné podobné problémy, jako jsou: určení vzdáleností a výšek polárních září, výšek mraků, určení výšek a drah pilotovacích balonků a pod. Některé z pouček lze s výhodou užít i v navigačních a avigačních problémech, které vyžadují rychlá přibližná řešení.

Označování: Body označujeme velkými, úsečky malými písmeny; body promítnuté na sféru mají index podle toho pozorovacího místa, odkud byly promítnuty. Úhly označujeme řeckými písmeny: jsou bez čárky, jde-li o úhlové vzdálenosti od roviny; úhlové vzdálenosti od pólů, doplňky předešlých, se čárkují: platí tedy na př. $\alpha' + \alpha = 90^\circ$.

Úloha (obr. 1): Meteor, jehož přímá dráha světelná počala v bodě M a skončila v bodě N je pozorován ze dvou míst: 1 a 2, jichž polohy a vzájemnou vzdálenost d známe; určití jest vzdálenost, výšku a polohu bodu M i N , délku, sklon a směr dráhy l .

Meteor $MN \equiv l$ se promítá z pozorovacího místa 1 na sféru jako část největší kružnice M_1N_1 ($\equiv \lambda_1$ délka zdánlivé dráhy);

z místa 2 jako $M_2N_2 \equiv \lambda_2$.¹⁾ Úběžný bod dráhy t. zv. zdánlivý radiant R leží v zpětném průseku obou těchto největších kružnic. Úhlové distance od R označme η' . Pozorovací místo 2 promítnuté na sféru z 1 se promítá do bodu S_{12} , naopak 1 promítnuté z 2 je v S_{21} . Pólové vzdálenosti od bodu S_{12} označme α' . Pro průměty téhož bodu dráhy meteoru platí podmínka Besselova: body sobě



Obr. 1.

odpovídající (na př. M_1M_2 nebo N_1N_2) leží na největší kružnici, která prochází průmětem druhého (S_{12}) resp. prvního (S_{21}) pozorovacího místa promítnutého na sféru z 1. resp. 2. stanoviště. Podmínka vyplývá z toho, že jde o průměty rovin procházejících středem promítání: rovina $(1, 2, M) \equiv \text{rov. } (MM_1M_2)$ a rovina $(1, 2, N) \equiv \text{rov. } (NN_1N_2)$. Úhlovou vzdálenost sobě odpovídajících průmětů, tedy $\widehat{M_1M_2}$ resp. $\widehat{N_1N_2}$, nazýváme paralaxou a značíme π ; jinak definováno: paralaxa jest zorný úhel, pod kterým se nám z uvažovaného bodu dráhy meteoru jeví základna d obou pozorovacích stanovišť. Z_1 budiž zenit místa 1 a příslušné zenitové distance označíme ζ' , bude tedy ζ výška nad obzorem. Azimut měřený od bodu severního označme A . Je-li A apexem — směrem, ke kterému míří naše Země — bude η'_A vzdálenost apexu od zdánlivého radiantu. Vzdálenosti od bodu 1 resp. 2 označíme r s pří-

¹⁾ Poloměr sféry můžeme předpokládati velmi veliký, takže při promítání na sféru body 1, 2, M , N , splynou se středem promítání 1.

slušným indexem. Pro základnu 1—2, tedy r_{12} zachovejme označení d . Lineární výšky značíme h .

Pozorování: Pozorování zaznamenává se tak, že se stopy meteoru zakreslí na 1. i 2. stanovišti buď

1. na hvězdný globus (způsob, který užívají hlavně angličtí pozorovatelé),²⁾

2. nebo do hvězdné mapy. Užívá se map kreslených

a) v centrální projekci, kam zařazujeme i fotografii,

b) v stereografické projekci,³⁾

c) s ekvidistantní sítí.

3. Souřadnice (zpravidla obzorníkové) se odečítají přímo přístroji zvanými meteoroskopy.

Pro praxi se nejlépe osvědčil způsob 2a), na který můžeme po př. ostatní převést. Pro určení dlouhých drah, jaké mívají velké meteory, se hodí pro redukci lépe mapy stereografické. V dalším se omezíme na projekci centrální.

Centrální projekce sféry: Jedině v této projekci platí, že všechny největší kružnice se promítají jako přímky, tedy i zdánlivé dráhy meteoru M_1N_1 resp. M_2N_2 objeví se jako přímky. Pro jiné projekce platí promítání v přímku jen pro případ, že radiant je totožný se středem projekce.

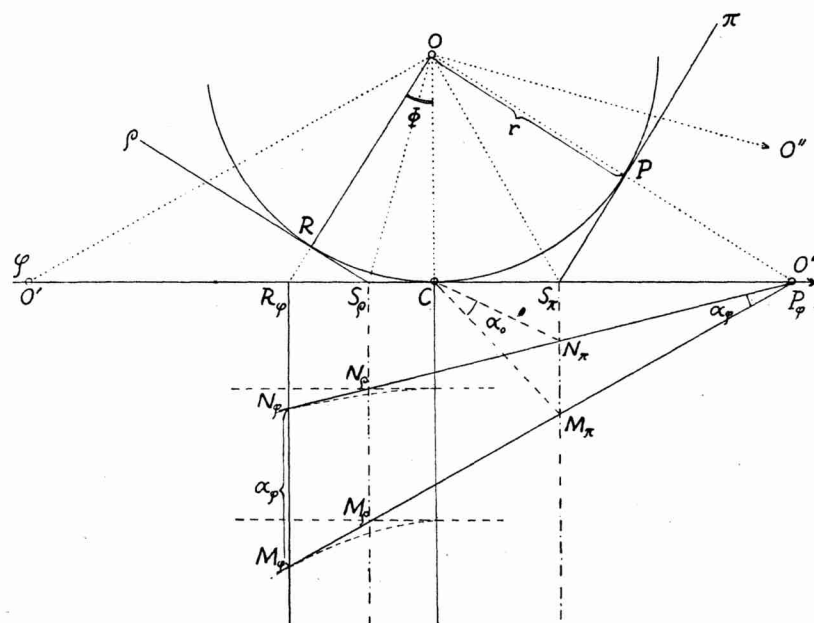
Měření úhlů a distancí v centrální projekci: Nejjednodušší případ této projekce je průmět polární, kde meridiány se paprskovitě rozbíhají z centra promítání, a rovnoběžky se zobrazují jako kružnice o poloměrech úměrných tangentám polárních distancí. Vhodný je i průmět aequatoreální, kde meridiány jsou rovnoběžné přímky, jichž vzdálenosti jsou úměrné tangentám úhlových vzdáleností od středu; rovnoběžky se objeví jako hyperboly. Každou obecnou polohu středu promítání můžeme převést na tyto dva případy, neboť souvisí spolu perspektivní kollineací.

V obraze 2 buď O střed sféry o poloměru r , P pól, R rovník. Zvolíme-li střed projekce tak, aby padl do bodu C (šířka Φ), promítne se pól do bodu P_φ a rovník do R_φ v rovině φ . Polární projekci bychom dostali, kdybychom v bodě P vedli tečnou rovinu π a do ní sféru promítli. Rovina π protíná rovinu φ v přímce S_π : poněvadž pak $PS_\pi = S_\pi C$, splyne při sklopení roviny π do φ pól s centrem C . Vzájemný vztah je pak definován osou koll. S_π , středem O' a párem sdružených bodů P_φ, C . Chceme-li tedy určit pravou velikost úhlu α , stačí, spojíme-li průsečky jeho ramen (meridiány $P_\varphi N$ a $P_\varphi M$) s osou S_π tedy body N_π a M_π s centrem C , kde se nám objeví jako nezkreslený úhel α_0 meridiánů $\widehat{M_\pi C N_\pi}$. Opačně postupujeme, máme-li v bodě P_φ vynést úhel α

²⁾ Redukce pozorování viz Proc. of the Nat. Acad. of Sc. U. S. A., 19 (1933), 209.

³⁾ Na př. G. van Biesbroeck, Bull. de la Soc. belge d'Astr. 1908.

k danému směru. Podobně si počínáme, chceme-li navázati rovinu φ na ekvatoreální průmět ϱ (tečná rovina k rovníku R). Osou kolli-neace bude S_ϱ , střed O'' , pár sdružených bodů $P_\varphi, P_\varrho = \infty$. Úhel α projeví se jako vzdálenost obou meridiánů N_ϱ a $M_\varrho =$ roz-dílu tang. jejich úhlové vzdálenosti od centra. Tento rozdíl snadno zjistíme měřítkem se stupnicí $r \operatorname{tg} \alpha$. Úhel α_φ objeví se konečně



Obr. 2.

jako část největší kružnice, t. j. na rovníku R mezi body N_φ a M_φ ; s výhodou tu opět použijeme ekvatoreální projekce. Představíme si totiž R jako meridián (nejv. kružnice), φ jako rovník; pak α_φ je úhlová vzdálenost rovnoběžek procházejících body M_φ a N_φ . Prakticky: máme-li narýsovanu na průsvitném papíru ekvatoreální centrální síť o stejném poloměru jako má projekce sítě námi užívané, stačí stočiti ji (kolem středu C) tak, aby meridiány byly rovnoběžné se spojnicí bodů, jichž vzdálenost chceme určovati; jejich vzdálenost pak mezi rovnoběžkami snadno odečteme.⁴⁾ Uvedeného způsobu měření vzdáleností pomocí rovníkové sítě dá se užítí i u jiných projekcí. Konečně bych rád poukázal

⁴⁾ Tento způsob se dá aplikovati na měření distance dvou míst, viz na př. Immler: Flugnavigation 1928, kde autor omezil se však jen na měření distancí v projekci polární.

na užití těchto sítí při transformaci souřadnic sférických (tedy na př. při přechodu z azimutálních na ekvatoreální, z těchto na ekliptikální a pod.). Na průsvitný papír položený na ekv. síť vyznačíme polohu bodu (na př. azimut a výšku), jehož transformaci souřadnic chceme provést, předpokládajíc, že máme před sebou síť prvního systému (tedy azimutální) a střed projekce že je oběma systémům společnou osou, která se transformací nemění. Pak stačí stočiti průsvitný papír kolem středu sítě (t. j. společné osy) o tolik stupňů (v našem případě o $90^\circ - \Phi$, kde Φ je zeměp. šířka), o kolik je stočen druhý systém vůči prvnímu; nyní nám představuje síť druhý systém (v našem př. ekvatoreální) a my můžeme snadno odečísti transformované souřadnice.⁵⁾

Redukce pozorování:

a) Výpočet základny. První pozorovací místo (1) je dáno zeměpisnými souřadnicemi: $\lambda_1 \varphi_1 h_1$. Druhé pozorovací místo (2) je dáno zeměpisnými souřadnicemi: $\lambda_2 \varphi_2 h_2$.

Distanci d a azimuty μ, ν stanic vypočteme nejlépe z Napierových analogií řešením trojúhelníka 1, 2, pól:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu + \nu}{2} = \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cotg \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \operatorname{cosec} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu - \nu}{2} = \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cotg \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \sec \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$\sin \varepsilon = \cos \varphi \sin \Delta \lambda \cos \nu = \cos \varphi' \sin \Delta \lambda \operatorname{cosec} \mu$$

$$d \doteq 2 \left(R + \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \sin \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(h_2 - h_1)^2}{4R \sin \frac{1}{2} \varepsilon},$$

kde R je poloměr Země. Jde-li jen o určení velikosti základny, a není-li rozdíl zeměpisných šířek příliš malý, můžeme užití přibližného vzorce:

$$d \doteq R\varepsilon = R(\varphi_2 - \varphi_1) \left[1 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ekvatoreální souřadnice (AR, δ) bodu S_{12} dostaneme výše uvedenou grafickou transformací souřadnic, nebo ze vzorců:

$$\sin \delta = -\sin \varphi, \sin i + \cos \varphi_1 \cos i \cos \beta \quad i \doteq \frac{\varepsilon}{2}$$

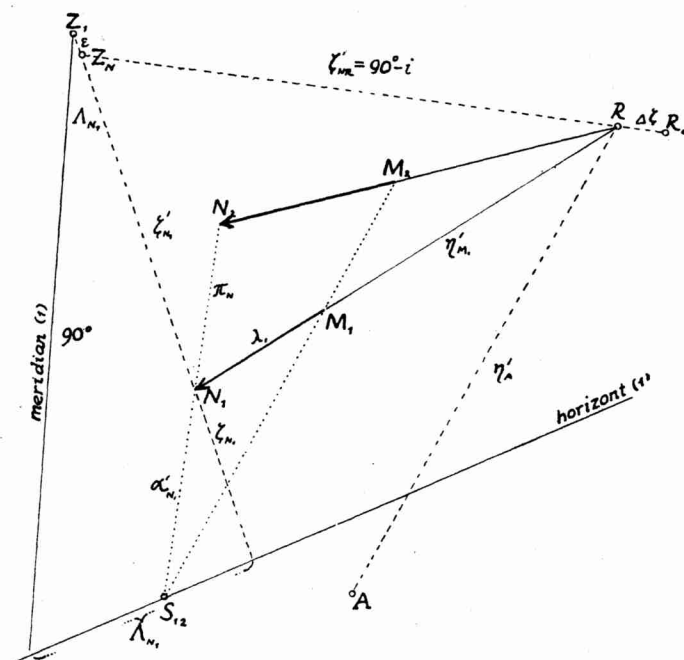
$$\sin t = \frac{\sin \beta}{\cos \delta} \cdot \cos i \quad AR = \Theta - t$$

kde Θ je místní hvězdný čas přeletu meteoru.

⁵⁾ Na stejném principu jest založen mechanický transformátor souřadnic, který užívá však dvou sítí, kol sebe otočných. Event. nestejnost obou sítí a nedokonalost mech. otáčení jsou zdrojem nepřesností.

b) Vyčíslení úhlů: (omezíme se opět na centrální projekci, viz obr. 3).

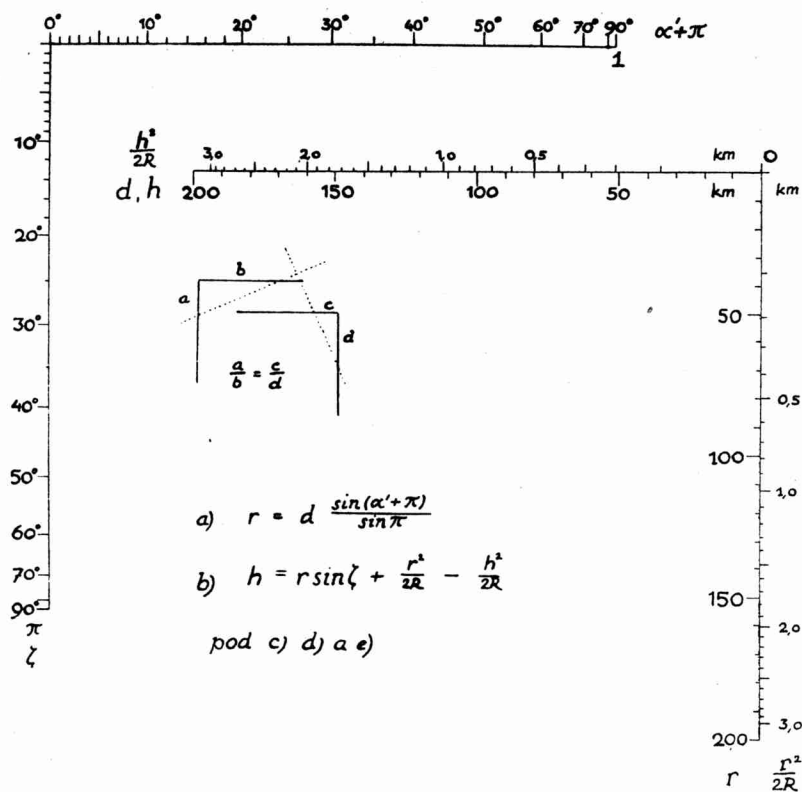
Do mapy, do které byly zakresleny stopy meteorů tak, jak byly pozorovány z obou míst: M_1N_1 a M_2N_2 vyznačíme ještě polohu S_{12} , polohu zenitu $Z_1(AR_{z_1} = \Theta_1, \delta_{z_1} = \varphi_1)$ a polohu apexu A (jeho souřadnice jsou uvedeny v Hvězdářské ročence).



Obr. 3.

Radiant R dostaneme zpětným prodloužením obou stop N_1M_1 a N_2M_2 . Kontrolou správnosti pozorování je Besselova podmínka t. j. aby $S_{12}N_1N_2$ i $S_{12}M_1M_2$ ležely v jedné přímce. Eventuelní nesrovnalosti buď poopravíme (nejsou-li veliké) nebo počítáme výšky zvlášť pro N_1 tím, že korespondující bod (N_2) získáme jako průsečík $S_{12}N_1$ s RM_2 (t. j. předpokládáme, že směr byl správně pozorován), a zvlášť pro bod N_2 tak, že (N_1) je průsečíkem $S_{12}N_2$ s RM_1 . Podle hořejší metody pak určíme tyto veličiny:

 α'_N, π_N (příp. α'_M, π_M pro pozdější kontrolu) Λ_N, ζ'_N (příp. $\Lambda_M \zeta_M$) $\lambda, \eta', \eta'_A.$



Obr. 4.

Jestliže je některý z bodů Z_1, S_{12}, R nepřístupný, pak měříme doplňkové úhly, t. j. vzdálenosti od příslušných rovin, jimž uvedené body tvoří póly: tedy úhel α místo α' , ζ místo ζ' , η místo η' .

Výpočet.

a) Vzdálenost r_{1N} (stejně počítáme i r_{2N} resp. r_{1M} a pod.) plyne z $\triangle I, 2, N$ (viz obr. 1):

$$r_{1N} = d \frac{\sin(\alpha'_N + \pi_N)}{\sin \pi_N}. \quad (a)$$

b) Výška h se vypočte z $\triangle I, N$, střed Země, (ζ' je zent. distance r):

$$h = r \sin \zeta + \frac{r^2}{2R} - \frac{h^2}{2R} \quad (b)$$

poněvadž h i $r \ll R$, jsou poslední dva členy druhého řádu a lze je případně zanedbat.

c) Určení délky dráhy l plyne ze vzorce:

$$l = r \frac{\sin \lambda}{\sin \eta'} \quad (c)$$

d) Polohu místa, které mělo N v zenitu, vypočteme ze vztahů:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{r}{R+h} \sin \zeta' \\ \sin \Delta \lambda &= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi} \sin A \\ \sin \Delta \varphi &= \sin \varepsilon \cos A - \sin 2\varphi \sin^2 \frac{\Delta \lambda}{2} \\ \lambda_N &= \lambda_1 + \Delta \lambda \\ \varphi_N &= \varphi_1 + \Delta \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon &\doteq \text{konst. } r \sin \zeta' \\ \Delta \lambda &\doteq \varepsilon \sin A \sec \varphi \\ \Delta \varphi &\doteq \varepsilon \cos A. \end{aligned} \quad (d)$$

Naneseme-li vzdálenost ε na zenitovou distanci $Z_1 N_1$ směrem od bodu Z_1 (obr. 3) k N_1 , dostaneme tak polohu zenitu Z_N místa N . Zenitová distance radiantu, měřená od tohoto bodu, je doplňkem sklonu dráhy i a směr určuje azimut dráhy.

e) Výpočet výšky bodu M provedeme buď z rovnice (a), nebo ze vztahu

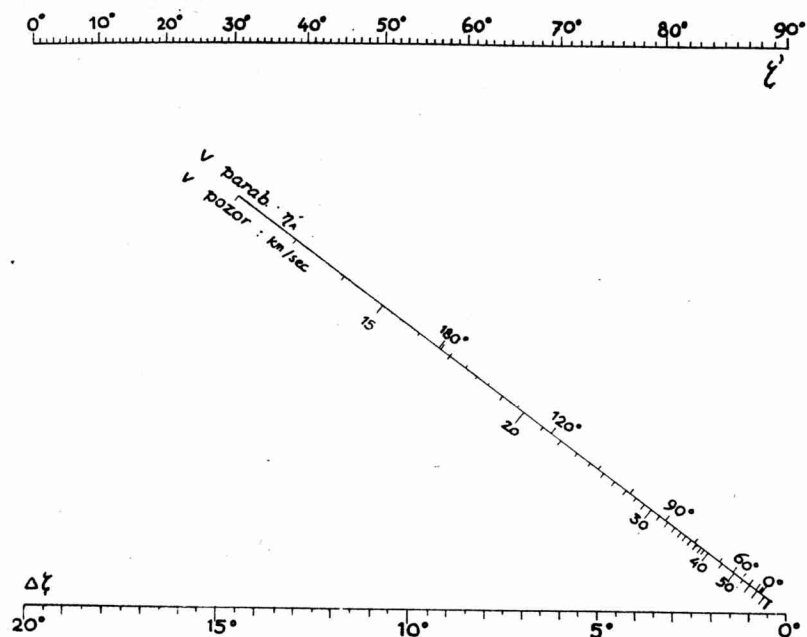
$$\begin{aligned} \Delta h &= l \sin i + \frac{l^2}{2(R+h)} - \frac{\Delta h^2}{2(R+h)} \\ h_M &= h_N + \Delta h \end{aligned} \quad (e)$$

f) Oprava polohy radiantu o zenitovou atrakci se vypočte ze vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \zeta'}{2} = \frac{v - v'}{v + v'} \operatorname{tg} \frac{\zeta'}{2}, \quad (f)$$

kde v je rychlost pozorovaná a $v' = \sqrt{v - 125,18}$ je rychlost opravená o tíži zemskou. Tím je daná úloha řešena.

Hořejší výpočet lze snadno řešiti konstruktivně, ale příslušné rovnice jsou upraveny tak, že se dají dobře řešiti i nomograficky. Jak je patrné, jde vesměs o vyjádření vztahů větou sinovou, takže se dají v podstatě řešiti jedním typem nomografu. Volíme typ, který užil prof. Láska ve své sférické astronomii (viz obr. 4). Rovnice (b) je upravena tak, že korekční členy: $r^2/2R$ resp. $h^2/2R$ jsou jen funkcemi r , resp. h (R je konst.) a můžeme je tudíž přímo přiřaditi stupnicím pro r , resp. h , takže jediným nastavením odečteme nejen hledanou přibližnou veličinu h , ale i její korekce na zakřivení Země na stupnicích pro r a h . Podobný tvar má i rovnice (e), kde sice v jmenovateli kor. členů vystupuje ještě h , ale toto můžeme buď vůči R zanedbati, poněvadž h je $\ll R$, nebo



$$f) \quad \operatorname{tg} \frac{\Delta \xi}{2} = \frac{v - v'}{v + v'} \operatorname{tg} \frac{\xi'}{2} \quad v' = \sqrt{v^2 - 125,16} \quad \text{pro parabol. } v' = 29,6(\cos \eta' \pm \sqrt{\cos^2 \eta' + 1})$$

Obr. 5.

klademe za h konst. průměr. hodnotu 100 km. Rovnice (f) dá se řešit Z -nomogramem (obr. 5).

Hodnoty opraveného radiantu jsou východiskem pro výpočet dráhy v sluneční soustavě; také zde při různých transformacích nám s úspěchem může být nápomocna uvedená metoda centrální projekce. Vlastní určení prostorové dráhy můžeme provést pomocí hodografu, jak naznačil J. Svoboda.⁶⁾

*

Détermination des hauteurs et de la trajectoire réelle d'un météor par la méthode graphique.

(Extrait de l'article précédent.)

Le problème à résoudre est de déterminer, par un procédé le plus simple, les hauteurs h , les positions λ, φ , la longueur l , l'inclinaison i et la direction A d'un météor MN (voir fig. 1) observé de deux stations (1) et (2). La distance d et les projections mutuelles

⁶⁾ Rozpr. Čes. Akad., 24 (1915), čís. 7.

S_{12} et S_{21} de ces deux points d'observation sur la sphère sont connues. D'après les observations nous pouvons déterminer les éléments suivants (voir fig. 1 et 3): α' c'est à dire la distance angulaire d'un point quelconque N_1 de la trajectoire au point S_{12} , la parallaxe π , l'azimut A et la distance zénithale ζ' de ce point N_1 , λ_1 la longueur angulaire de la trajectoire, η'_M la distance angulaire du radiant R , η'_A celle de l'apex A . Nous pouvons facilement obtenir ces éléments à l'aide d'une carte céleste dessinée en projection centrale (voir fig. 3), qui contient les deux trajectoires correspondantes M_1N_1 , M_2N_2 , observées de la station (1) et (2) et les projections du zénith Z_1 , de l'apex A et de S_{12} or S_{21} . Nous pouvons très facilement déterminer l'angle et la distance angulaire dans la projection centrale générale (la latitude du centre de projection est Φ , voir fig. 2) en transformant cette projection (plan φ), soit en projection polaire (plan π), soit en projection équatoriale (plan ϱ) à l'aide des relations homographiques (le pôle O' ou bien O'' , l'axe S_π ou bien S_ϱ , la paire des points correspondants $P_\varphi C$ ou $P_\varphi P_\varrho (P_\varrho = \infty)$). Les distances angulaires peuvent être mesurées directement à l'aide d'une feuille de papier calque sur laquelle est tracé le réseau équatorial. Le problème envisagé est résolu par les équations a)–f), qui peuvent être représentées sous la forme des nomogrammes (voir les fig. 4 et 5).

Contribution à la théorie du télescope aplanétique Ritchey-Chrétien.

Vincenc Nechvíle, Praha.

(Reçu le 23 septembre 1937.)

Dédié à Monsieur le professeur František
Nušl à l'occasion de son soixante-dixième
anniversaire le 3 décembre 1937.

L'application des théorèmes de l'optique géométrique moderne a permis de découvrir successivement plusieurs nouveaux systèmes de télescopes corrigés pour certaines aberrations du troisième ordre, tel que le télescope aplanétique, le télescope anastigmatique à champ plan et celui anastigmatique à astigmatisme nul.

L'auteur développe, pour le système aplanétique de Ritchey-Chrétien, l'aberration longitudinale d'un rayon issu du centre de courbure du sommet du premier miroir et réfléchi sur lui seulement. L'expression pour cette aberration, importante pour certaines recherches, est obtenue comme série des puissances de la hauteur d'incidence de ce rayon sur le premier miroir et sans aucune variable auxiliaire.

1. Le miroir parabolique est, comme on le sait, un instrument parfait en ce qui concerne le stigmatisme dans l'axe pour toutes les ouvertures, sans parler de l'achromatisme naturellement aussi parfait. Mais dès qu'on s'éloigne de l'axe et les rayons deviennent inclinés à l'axe du paraboloïde, les aberrations extraaxiales deviennent rapidement très fortes. Pour les faibles inclinaisons du rayon incident c'est d'abord la coma qui apparaît et puis, pour les inclinaisons plus fortes, c'est l'astigmatisme et la courbure du champ qui interviennent et rendent les images extraaxiales inutilisables pour les observations.

C'est grâce aux recherches récentes qu'on connaît aujourd'hui trois systèmes de télescopes nouveaux, découverts par l'application des théorèmes de l'optique géométrique moderne: le télescope aplanétique de Ritchey-Chrétien, le télescope anastigmat à champ plan de K. Schwarzschild et le télescope anastigmat à astigmatisme nul de A. Couder, une belle modification du système précédent. Un quatrième système, celui du télescope sphérique de Schmidt, corrigé sphériquement et avec un diaphragme antérieur, basé sur tout un autre principe, vient de s'ajouter aux découvertes précédentes.

Tous les trois premiers systèmes ont comme base un grand miroir dont la forme est peu différente de celle d'un paraboloïde de révolution, complété par un miroir secondaire, peu différent de forme hyperbolique ou elliptique: l'annulation de la coma, ou de l'astigmatisme, et la planéité du champ anastigmatique ont pu être obtenues seulement par l'abandon des formes classiques, par la déformation des surfaces dont les sections deviennent des courbes à équations transcendantes.

Dans ce qui suit, je vais m'occuper du télescope Ritchey-Chrétien. C'est le système, où on a obtenu à satisfaire, par la défor-

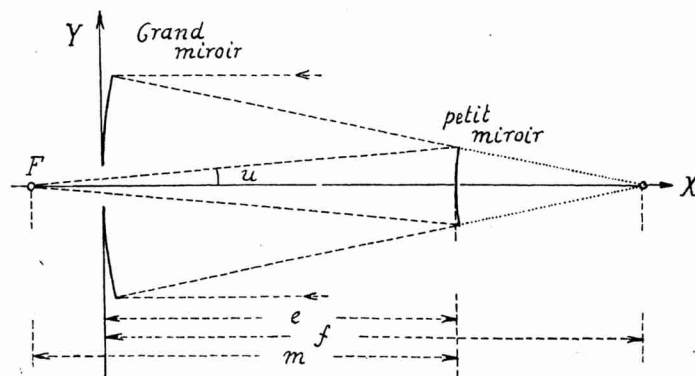


Fig. 1. Télescope aplanétique Ritchey-Chrétien, marche des rayons et constantes instrumentales.

mation des surfaces, naturellement aussi de révolution, à la condition de sinus. Les images extraaxiales, formées par les rayons parallèles inclinés à l'axe, sont libérées de la coma. Sans être tout à fait stigmatiques, elles sont symétriques pour les distances assez grandes de l'axe. Les équations qui définissent les sections méridiennes des deux miroirs sont transcendantes, mais, pour le calcul, on peut se servir avec avantage des développements en séries des puissances, dès qu'il ne s'agit pas d'un système de luminosité excessive.

Le but du travail présent est de développer la question suivante: de suivre l'aberration axiale longitudinale d'un rayon issu du centre de courbure du sommet du premier miroir et réfléchi sur ce miroir seulement; la valeur de cette aberration longitudinale peut être exprimée sous la forme d'un développement en série des puissances de la hauteur d'incidence de ce rayon, sans aucune variable auxiliaire.

2. Désignons, en nous reportant à la section méridienne du télescope Ritchey-Chrétien sur la figure 1, par f la distance focale

du premier miroir, par F la distance focale du système complet, par e et m la distance entre les sommets des deux miroirs et celle du plan focal résultant (ou foyer image) au sommet du second miroir. Ce sont les valeurs données par les rayons paraxiaux, ou celles données par le système correspondant de Cassegrain avec un miroir parabolique et l'autre hyperbolique.

Si l'on prend l'axe du miroir principal et la perpendiculaire à lui comme axes des x et y , si l'on désigne par u l'angle avec l'axe des x d'un rayon arrivant parallèlement à l'axe et réfléchi vers le foyer image, on a pour la section méridienne du miroir principal l'équation paramétrique¹⁾

$$x = e - \frac{t(1-t)}{e} - me^{-\frac{1-2e}{1-e}} \cdot (e-t)^{-\frac{1-2e}{1-e}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{1-e}},$$

$$y = \sin u$$

où on a introduit la variable auxiliaire

$$t = \sin^2 \frac{u}{2}.$$

Pour l'équation de la section méridienne du second miroir on a, en designant par ρ le rayon vecteur ayant le foyer image comme origine,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{e} + \frac{1}{m} \left(1 - \frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{1-e}} (1-t)^{-\frac{1}{1-e}}$$

t étant la même variable auxiliaire comme dans l'équation du premier miroir.

Il est utile de mettre les deux équations sous la forme des développements en séries; en supprimant les termes constants, c'est à dire en rapportant les deux courbes des sections méridiennes aux origines différents, placés aux sommets respectifs, on a

$$x = \frac{1-m}{4e} y^2 - \frac{1}{8} \frac{m}{4e} y^4 - \frac{1}{96} \frac{1+4e}{e} \frac{m}{4e} y^6 -$$

$$- \frac{1}{1536} \frac{2+11e+30e^2}{e^2} \frac{m}{4e} y^8 - \dots \quad (1)$$

$$x = \left(\frac{1-m}{e} - 1\right) \frac{y^2}{4m} + \left\{ \frac{1}{4e} - \frac{1-m}{2e} + 2 \frac{(1-m)^2}{4e^2} \right\} \frac{y}{8m^2} + \dots \quad (2)$$

ou les variables x , y et les longueurs e , m sont exprimées en unités de la longueur focale résultante $F = 1$.

3. Imaginons un rayon issu du centre de courbure du sommet du premier miroir C , qui coïncide avec le centre de courbure du

¹⁾ Voir H. Chrétien: Le télescope de Newton et le télescope aplanétique, Revue d'Optique théorique et instrumentale, 1922 vol 1, pp. 13, 49.

miroir parabolique non déformé, et tombant sur le miroir au point I , aux coordonnées (x, y) , donc appartenant à la zone d'ouverture y du miroir principal, ou à la hauteur d'incidence y des rayons parallèles à l'axe des x .

La droite IN (figure 2) étant la normale à la courbe méridienne au point I , le rayon se réfléchit et coupe l'axe des x au point C' , déterminé par l'égalité des angles $\angle CIN = \angle C'IN = i$. Si l'on écrit l'équation (I) du premier miroir sous la forme simplifiée

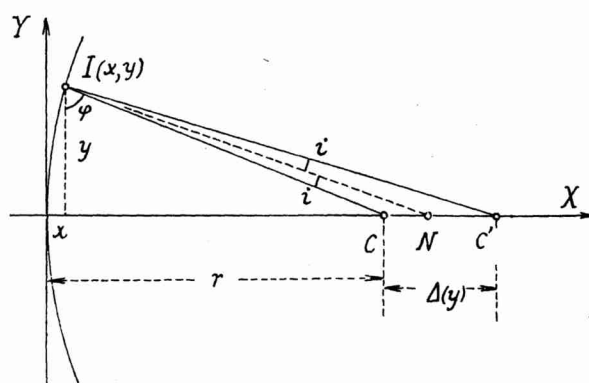


Fig. 2. La marche d'un rayon issu du centre de courbure du miroir principal.

$$\begin{aligned} x = f(y^2) &= \alpha_2 y^2 - \alpha_4 y^4 - \alpha_6 y^6 - \alpha_8 y^8 - \dots \\ &= \alpha_2 y^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{2n} y^{2n} \end{aligned} \quad (3)$$

on obtient les relations

$$\begin{aligned} \frac{1}{y'} &= 2\alpha_2 y - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\alpha_{2n} y^{2n-1} \\ \frac{dy}{dx} &= 1 : \left[2\alpha_2 y - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\alpha_{2n} y^{2n-1} \right]. \end{aligned}$$

En désignant par φ l'angle CIP , on a

$$XC = y \operatorname{tg} \varphi, \quad XN = y \operatorname{tg} (\varphi + i)$$

et pour la distance CC' , mesurant l'aberration cherchée,

$$CC' = \Delta(y) = y \operatorname{tg} (\varphi + 2i) - y \operatorname{tg} \varphi. \quad (4)$$

Au moyen de

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\varphi + 2i) &= [\operatorname{tg} (\varphi + i) + \operatorname{tg} i] : [1 - \operatorname{tg} (\varphi + i) \operatorname{tg} i] \\ \operatorname{tg} i &= [\operatorname{tg} (\varphi + i) - \operatorname{tg} \varphi] : [1 + \operatorname{tg} (\varphi + i) \operatorname{tg} \varphi] \end{aligned}$$

et après quelques transformations simples on trouve

$$\operatorname{tg}(\varphi + 2i) - \operatorname{tg} \varphi = 2 \frac{\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} \varphi\right) \left(1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} \varphi\right)}{1 + 2 \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} \varphi - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

et

$$\Delta(y) = 2y \frac{\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} \varphi\right) - \left(\frac{dx}{dy} - \operatorname{cotg} \varphi\right)}{2 + \left(\frac{dx}{dy} - \frac{dy}{dx}\right) \operatorname{cotg} \varphi} \quad (5)$$

4. Dans la dernière expression (5) on a maintenant seulement les valeurs de

$$\operatorname{tg} \varphi, \operatorname{cotg} \varphi, \frac{dx}{dy}, \frac{dy}{dx};$$

pour ces quatre fonctions on a, en utilisant l'équation (1) et en se rappelant que le rayon de courbure r au sommet du miroir équivaut au demi-paramètre de la parabole osculatrice à la courbe (1) et donnée par le premier terme du second membre de (1),

$$r = \frac{2e}{1-m},$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \operatorname{cotg}(\varphi + i) = \frac{1-m}{2e} y - \frac{m}{8e} y^3 - \frac{1}{16} \frac{1+4e}{e} \frac{m}{4e} y^5 - \\ &\quad - \frac{1}{192} \frac{2+11e+30e^2}{e^2} \frac{m}{4e} y^7 - \dots \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{r-x}{y} = \frac{r}{y} - \frac{1-m}{4e} y + \frac{1}{8} \frac{m}{4e} y^3 + \frac{1}{96} \frac{1+4e}{e} \frac{m}{4e} y^5 - \\ &\quad - \frac{1}{192} \frac{2+11e+30e^2}{e^2} \frac{m}{4e} y^7 - \dots = \\ &= \frac{2e}{1-m} \frac{1}{y} - \frac{1-m}{4e} y + \frac{1}{8} \frac{m}{4e} y^3 + \frac{1}{96} \frac{1+4e}{e} \frac{m}{4e} y^5 - \\ &\quad - \frac{1}{192} \frac{2+11e+30e^2}{e^2} \frac{m}{4e} y^7 - \dots \end{aligned}$$

Toutes les valeurs nécessaires pour le calcul de la position du point C' sont connues comme des séries des puissances de y dont les coefficients sont les fonctions des constantes du système optique seulement.

Toutefois on peut poursuivre le développement en séries et établir la fonction $\Delta(y)$ sans le calcul des fonctions trigonométriques. Cela a son importance quand on a besoin de déterminer la valeur de $\Delta(y)$ pour toute une série des valeurs de y . Pour ce but écrivons, conformément à l'équation (1),

$$\begin{aligned}\cotg(\varphi + i) &= \frac{dx}{dy} = 2\alpha_2 y - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\alpha_{2n} y^{2n-1} \\ \tg(\varphi + i) &= \frac{dy}{dx} = 1 : \left[2\alpha_2 y - \sum_{n=2}^{\infty} 2n\alpha_{2n} y^{2n-1} \right] \\ \tg \varphi &= \frac{r-x}{y} = \frac{1}{2\alpha_2 y} - \alpha_2 y + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{2n} y^{2n-1} \\ \cotg \varphi &= 1 : \left[\frac{1}{2\alpha_2 y} - \alpha_2 y + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{2n} y^{2n-1} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

L'inversion des séries pour $\tg(\varphi + i)$ et $\cotg \varphi$ donne

$$\begin{aligned}\tg(\varphi + i) &= \frac{1}{2\alpha_2 y} + \beta_2 y + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{2n} y^{2n-1} \\ \cotg \varphi &= 2\alpha_2 y + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} y^{2n-1}\end{aligned}\quad (7)$$

avec les nouveaux coefficients

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{1}{\alpha_2^2} \cdot \alpha_4 \\ \beta_4 &= \frac{1}{2\alpha_2} \left(4\alpha_4 \beta_2 + \frac{3\alpha_6}{\alpha_2} \right) \\ \beta_6 &= \frac{1}{2\alpha_2} \left(4\alpha_4 \beta_4 + 6\alpha_6 \beta_2 + \frac{4\alpha_8}{\alpha_2} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{2n} &= \frac{1}{2\alpha_2} \left(4\alpha_4 \beta_{2n-2} + 6\alpha_6 \beta_{2n-4} + \dots + 2n\alpha_{2n} \beta_2 + \frac{(n+1)}{\alpha_2} \alpha_{2n+2} \right), \quad n \geq 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_4 &= 4\alpha_2^3 \\ \gamma_6 &= 2\alpha_2(\alpha_2 \gamma_4 - 2\alpha_2 \alpha_4) \\ \gamma_8 &= 2\alpha_2(\alpha_2 \gamma_6 - \alpha_4 \gamma_4 - 2\alpha_2 \alpha_6) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\gamma_{2n} = 2\alpha_2(\alpha_2 \gamma_{2n-2} - \alpha_4 \gamma_{2n-4} - \dots - \alpha_{2n-4} \gamma_4 - 2\alpha_2 \alpha_{2n-2}), \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Au moyen de ces quatre développements on obtient ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} \varphi &= (\alpha_2 + \beta_2) y + \sum_{n=2}^{\infty} (\beta_{2n} - \alpha_{2n}) y^{2n-1} \\
\frac{dx}{dy} - \operatorname{cotg} \varphi &= - \sum_{n=2}^{\infty} (2n\alpha_{2n} + \gamma_{2n}) y^{2n-1} \\
\frac{dx}{dy} - \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\alpha_2 y} + (\beta_2 - 2\alpha_2) y + \sum_{n=2}^{\infty} (2n\alpha_{2n} + \beta_{2n}) y^{2n-1} \quad (8) \\
\operatorname{cotg} \varphi \left[\frac{dx}{dy} - \frac{dy}{dx} \right] &= \left[2\alpha_2 y + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{2n} y^{2n-1} \right] \times \\
&\times \left[\frac{1}{2\alpha_2 y} + (\beta_2 - 2\alpha_2) y + \sum_{n=2}^{\infty} (2n\alpha_{2n} + \beta_{2n}) y^{2n-1} \right] = \\
&= 1 + \delta_2 y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \delta_{2n} y^{2n}
\end{aligned}$$

avec les nouveaux coefficients

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \frac{\gamma_4}{2\alpha_2} + 2\alpha_2(\beta_2 - 2\alpha_2) \\
\delta_4 &= \frac{\gamma_6}{2\alpha_2} + \gamma_4(\beta_2 - 2\alpha_2) + 2\alpha_2(4\alpha_4 + \beta_4) \\
\delta_6 &= \frac{\gamma_8}{2\alpha_2} + \gamma_6(\beta_2 - 2\alpha_2) + \gamma_4(4\alpha_4 + \beta_4) + 2\alpha_2(6\alpha_6 + \beta_6) \\
&\dots\dots\dots \\
\delta_{2n} &= \frac{\gamma_{2n+2}}{2\alpha_2} + \gamma_{2n}(\beta_2 - 2\alpha_2) + \gamma_{2n-2}(4\alpha_4 + \beta_4) \dots + \\
&+ \gamma_4[(2n-2)\alpha_{2n-2} + \beta_{2n-2}] + 2\alpha_2(2n\alpha_{2n} + \beta_{2n}), \text{ pour } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Avec les quatre développements (8) on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\varphi + 2i) - \operatorname{tg} \varphi &= \\
&= 2 \left[(\alpha_2 + \beta_2) y + \sum_{n=2}^{\infty} ((2n-1)\alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}) y^{2n-1} \right] : \\
&\quad : \left[1 - \delta_2 y^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \delta_{2n} y^{2n} \right] = \\
&= 2 \left[(\alpha_2 + \beta_2) y + \sum_{n=2}^{\infty} ((2n-1)\alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}) y^{2n-1} \right] \times \\
&\quad \times \left[1 + \varepsilon_2 y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_{2n} y^{2n} \right],
\end{aligned}$$

avec les nouveaux coefficients

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \delta_2 \\ \varepsilon_4 &= \delta_2 \varepsilon_2 + \delta_4 \\ \varepsilon_6 &= \delta_2 \varepsilon_4 + \delta_4 \varepsilon_2 + \delta_6 \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{2n} = \delta_2 \varepsilon_{2n-2} + \delta_4 \varepsilon_{2n-4} + \dots \delta_{2n-2} \varepsilon_2 + \delta_{2n}, \text{ pour } n \geq 2.$$

5. Si l'on effectue la dernière multiplication formellement, on obtient pour la fonction $\Delta(y)$ cherchée la série des puissances paires

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(y) &= (\alpha_2 + \beta_2) y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n-1) \alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}] y^{2n} \quad (9) \\ &+ \varepsilon_2 (\alpha_2 + \beta_2) y^4 + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n-1) \alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}] \varepsilon_2 y^{2n+2} \\ &+ \varepsilon_4 (\alpha_2 + \beta_2) y_6 + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n-1) \alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}] \varepsilon_4 y^{2n+4}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

ou sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(y) &= (\alpha_2 + \beta_2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{2k} y^{2k+2} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{2k} \sum_{n=2}^{\infty} [(2n-1) \alpha_{2n} + \beta_{2n} + \gamma_{2n}] y^{2n+2k}, \\ &\text{avec } \varepsilon_0 = 1.\end{aligned}$$

Pour les premiers termes on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(y) &= (\alpha_2 + \beta_2) y^2 \\ &+ [(\alpha_2 + \beta_2) \varepsilon_2 + (3\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4)] y^4 \\ &+ [(\alpha_2 + \beta_2) \varepsilon_4 + (3\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4) \varepsilon_2 + (5\alpha_6 + \beta_6 + \\ &\quad + \gamma_6)] y^6 \\ &+ [(\alpha_2 + \beta_2) \varepsilon_6 + (3\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4) \varepsilon_4 + (5\alpha_6 + \beta_6 + \\ &\quad + \gamma_6) \varepsilon_2 + (7\alpha_8 + \beta_8 + \gamma_8)] y^8 \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Les coefficients de cette série dépendent uniquement des constantes du système optique Ritchey-Chrétien sans aucune variable auxiliaire.

On pourrait chercher, par la voie indiquée, l'expression de toutes les aberrations du système et cela avec la précision telle que l'on voudrait, à condition de trouver les points d'incidence des rayons par la solution des équations transcendantes, par approximations successives.

Si nous avons poussé les développements jusqu'à la 8ème puissance de y , c'est évidemment pour montrer la marche simple des transformations et la formation successive des coefficients facile à contrôler.

Observatoire National de Prague.

Příspěvek k teorii Ritchey-Chrétienova aplanatického teleskopu.

(Obsah předešlého článku.)

Užití teorémů geometrické optiky na systém dvou reflektujících ploch umožnilo objevení aplanatického teleskopu Ritchey-Chrétienova, anastigmatického teleskopu Schwarzschildova o rovinném poli a anastigmatu Couderova o nulovém astigmatismu; k nim dluží se nejnověji i sféricky korigovaný kulový teleskop Schmidtův o velikém poli.

U prvních tří systémů bylo dosaženo aplanasie neb anastigmatické korekce opuštěním parabolických a hyperbolických ploch a nahrazením jich velmi málo odchylnými plochami transcendentními.

Autor se zabývá teorií aplanatického teleskopu Ritchey-Chrétienova. Odvozuje výraz pro longitudinální aberraci paprsku vycházejícího ze středu křivosti vrcholu velikého zrcadla a odražejícího se k ose. Výraz pro tuto aberraci dá se vyjádřit jako potenční řada v y , dopadové výšky paprsku, jejíž koeficienty jsou racionální funkce koeficientů řady definující transcendentní plochu zrcadla. Výpočet longitudinální aberrace lze provésti obecně i numericky s libovolnou přesností a bez zavedení jakékoliv pomocné proměnné.

Státní hvězdárna v Praze.

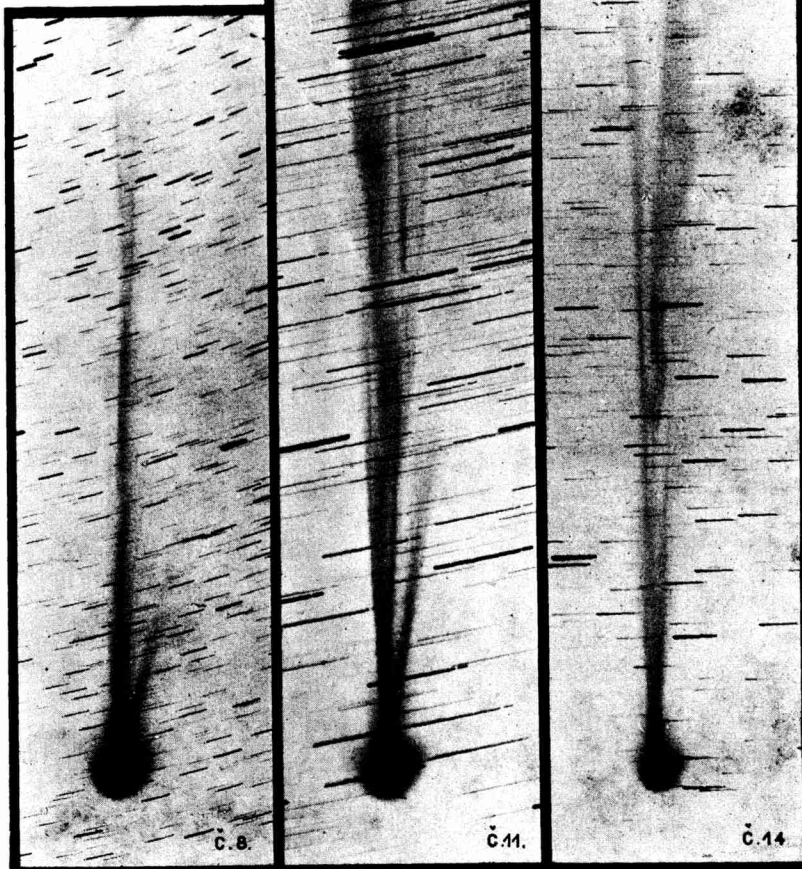
Kometa 1937 f.
(Finsler)

Deska č. 8. Exp. 61,8^m

Deska č. 11. Exp. 200^m

Deska č. 14. Exp. 45^m

Fotografováno v Ondřejově
na observatoři *Žalov*
Státní hvězdárny v Praze.



1937 — VIII — 4/5.

1937 — VIII — 8/9.

1937 — VIII — 14/15.

K článku Jar. Štěpánka, str. 151.

Přehled fotografického sledování komety Finslerovy (1937 f.) na ondřejovské observatoři „Žalov“ Státní hvězdárny v Praze.

Jaroslav Štěpánek, Ondřejov.

(Došlo 4. října 1937.)

Věnováno panu profesorovi dr. Františku Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den 3. prosince 1937.

Objevení komety Finslerovy (1937 f.) umožnilo mi získati velikým dvojitým astrografem ondřejovské hvězdárny řadu krásných snímků tohoto zjevu. Vývoj dlouhého ohonu, který na deskách 13×18 cm přesahoval délku 15 cm, byl příčinou, že bylo prvně použito systému dvou zrcadel umístěných před vedoucím dalekohledem a umožňujících vedení stroje podle hvězdy, ležící až 20° od osy pointačního dalekohledu, kteréžto zařízení na konci práce stručně popíši. Druhou výhodou stroje byla nová úprava kasety, konstruovaná panem továrníkem dr. J. J. Fričem podle přání kolegy Schüllera, která dovoluje natočení fotografické desky do libovolného posíčního úhlu. Jen díky těmto dvěma zařízením bylo mi možno vyfotografovati pokud možno celou kometu na jedné desce.

Po letošních zkušenostech z doby, kdy kometa procházela poměrně blízko pólu a tím se rychle měnil posíční úhel směru jejího ohonu, ukázalo se nutným počítati v budoucnu s novou úpravou kasetové části stroje, která by dovolovala paralelní posuv desky ve směru vlastního pohybu tělesa. Tak by se zamezilo rozmazávání koncových partií ohonu vznikající tím, že se sledování komety provádí opravami v rektascensi a deklinaci.

V této práci uvádím přehled provedených fotografií, jednak co možno dlouhodobých, podávajících pokud lze nejlépe strukturu komety, jednak krátkodobých, vhodných pro určení přesné polohy komety. U dlouhodobých snímků bylo někdy nutno expozice na chvíli přerušiti buď proto, že tvořící se mraky bránily v pointování, nebo, že pozorovatel potřeboval dáti na chvíli odpočinouti očím od poměrně namáhavého pointování na hlavu komety, které vyža-

duje stálých, po několika málo vteřinách se opakujících korekcí v rektascensi i v deklinaci.

Objektiv, kterým byly snímky získány, jest výborný triplet Cookovy konstrukce o průměru objektivu 8" (20 cm) a ohniskové délce 90 cm. Objektivu téže konstrukce bylo užito při získávání fotografických map Franklin-Adamsových.

Negativní materiál, kterého bylo užito k fotografování, byly skoro vesměs čerstvé desky Superguil-ortho-antihalo, jen v případech 1 a 3 bylo užito desek téže značky, ale z loňské zásoby a v případě 6 desky Hauff Ultrarapid. Vyvoláváno bylo vždy 30 min. Rodinalem zředěným vodou v poměru 1 : 10, k čemuž na 100 cm³ vývojky přidány 2 cm³ 20% bromidu draselného. Ustalovalo bylo obyčejným kyselým ustalovačem. Desky byly prány v miskách s často měněnou vodou po dobu 2 až 4 hodin.

Popis snímků komety 1937 f.

Při popisu snímků komety mám tyto před sebou tak položené, že hlava leží u mne, směrem nazad, t. j. ode mne, míří ohon a kometa se pohybuje mezi hvězdami od prava do leva.

Deska č. 1. Pro oblačnost expozice jednou přerušena. Hlava komety kulová, průměr 2'; ohon rovný a úzký, dlouhý 2°.

Deska č. 2. Silná oblačnost. Kulová hlava průměru 1'; ohon není patrný.

Deska č. 3. Obloha celkem velmi dobrá, s počátku ruší Měsíc, ku konci svítání. Exposice rozdělena na 5 částí. Deska pro silný závoj částečně zeslabena červenou krevní solí. Jádru hlavy průměru 3'; zřetelná koma s malým výběžkem (1) směrem vpravo vzad.

Deska č. 4. Zkoušky expozic pro snímky určené pro přesné stanovení polohy komety. Exposice 1 min. vykreslí dosti malé jádro komety a zároveň zaznamená i slabší srovnávací hvězdy.

Deska č. 5. Obloha jasná, obrazy klidné, ku konci slabě ruší Měsíc. Jádru obklopeno komou s výběžkem (1) délky 0,1°. Hlavní ohon je těsně za hlavou zúžen a štěpí se v jednotlivé proudy až 3,8° dlouhé.

Deska č. 6. Obloha velmi dobrá. Snímek pro přesný výpočet polohy komety.

Deska č. 7. Obloha velmi dobrá, ku konci slabě ruší Měsíc. Jádru průměru 0,1° je obklopeno komou se dvěma výběžky; výběžek (1) je dlouhý 0,2° a druhý (2), s prvním symetrický podle osy ohonu, je sotva patrný. Hlavní ohon, delší 4°, je obklopen různě dlouhými paprsky, mířícími od hlavy, z nichž pravé jsou mírně prohnuty ve směru od ohonu.

Deska č. 8. Obloha velmi dobrá. Výběžek (1) komy je asi 0,2° dlouhý. Ohon komety se úží a prodlužuje aspoň do vzdálenosti 5,5° (končí u kraje desky), paprsky tvořící ohon se proplétají, hlavní z nich se ve vzdálenosti 3° od hlavy dělí ve dva. Těsně u pravé strany hlavního ohonu objevuje se druhý ohon dlouhý 0,8°. (Viz obr.)

Deska č. 9. Obloha velmi dobrá. Prvně užito mimoosového pointování. Předčasně ukončeno pro poruchu v osvětlení vláknového kříže vedoucího dalekohledu.

Deska č. 10. Velmi dobrá obloha. Koma intenzivní, výběžek (1) asi 1/4° dlouhý. Hlavní ohon 7° dlouhý končí u kraje desky, je dosti úzký a jeví

Přehled
snímků komety 1937 f. získaných 8" astrografem v Ondřejově.

Deska č.	Datum	Exposice (světový čas)				Souřadnice středů desky (1937,0)		Přibliž. souř. hlavy komety (1937,0)		Hl. ohon. komety		Poznámky
		Zač.	Konec	Celkové trvání		AR	δ	AR	δ	Délka	Posiř. úh.	
1	1937 VII 13/14	h m s 22 55 0 20	h m s 23 25 0 22	32	m	h m	o	h m	o	o	o	{Superg. ortho z r. 1936. Ohon se nevyexpo- noval.
2	14/15	22 30 30	22 45 00	14,5		3 17	+45,6	3 17	+45,6	1	270	
3	19/20	22 13 56	22 43 54			3 19	+46,6	3 19	+46,6	—	—	
4	21/22	22 55 51	23 25 26	131,5		3 30	+53,1	3 30	+53,1	3,1	275	Superg. ortho z r. 1936. {Pokusy s expozicí komety. Hauff Ultra-Rapid. Přeruš. pro poruchu osvětlení vláken.
5	30/31	23 35 29	0 05 08			—	—	—	—	—	—	
6	31/32	0 20 31	0 50 31	—		5 06	+72,4	5 07	+72,3	3,8	300	
7	31/32 VIII	0 59 24	1 11 43	43		5 27	+74,5	5 39	+74,4	4	300	Přeruš. pro poruchu osvětlení vláken.
8	4/5	21 16	21 59	100,5		9 35	+77,3	9 48	+77,3	5,5	5	
9	7/8	20 55,2	21 12,7	61,8		12 25	+72,7	12 08	+69,1	—	—	
10	7/8	21 28,0	22 41,7	73,7		12 25	+72,7	12 09	+69,0	7	50	
11	8/9	21 06 06	0 06 06	200		12 55	+69,3	12 36	+64,7	9	55	
12	8/9	0 11 06	0 31 06	1		12 36	+64,6	12 36	+64,6	—	—	
13	12/13	21 09 00	22 05 00	112,5		13 51	+50,9	13 23	+49,1	11	70	
14	14/15	23 05 00	23 12 00	45		13 56	+42,0	13 36	+41,7	10	70	

uzliny proplétajících se proudů. Druhý ohon podoby vějíře má na pravé straně do vzdálenosti 2° od hlavy ostré ohraničení.

Deska č. 11. Obloha velmi dobrá. Koma roste, výběžek (1) je asi $1\frac{1}{2}^\circ$ dlouhý. Hlavní ohon delší než 9° (končí na kraji desky), při kořeni úzký a dosti ostře ohraničený, jeví uzliny různě se proplétajících proudů, z nichž některé se odštěpují směrem vpravo. Vějíř druhého ohonu se úží a prodlužuje. (Viz obr.)

Deska č. 12. Obloha velmi dobrá. Snímek pro přesný výpočet police komety.

Deska č. 13. Exposice pro oblačnost několikrát přerušena. Koma menší než předešle, výběžek (1) je $0,2^\circ$ dlouhý, výběžek (2) je teprve nyní dobře patrný. Hlavní ohon se úží a prodlužuje do vzdálenosti asi 11° (končí u kraje desky), jednotlivé proudy jsou skoro neznatelné a bez význačnějších uzlů, ostré ohraničení u kořene je méně nápadné. Na levé straně se objevil úzký rovný paprsek sahající dále než 1° od hlavy. Vějíř druhého ohonu se zkrátil na délku $0,6^\circ$.

Deska č. 14. S počátku obloha dobrá, jen Měsíc slabě ruší. Exposice ukončena, když kometa zmizela v závoji přízemní oblačnosti u obzoru nad Prahou. Jádro má průměr asi $5'$, pravý výběžek komy (1) je skoro $0,2^\circ$ dlouhý, levý (2) je též dobře patrný. Hlavní ohon je úzký, klikatě pokroucený a je delší než 10° . Druhý ohon délky asi 2° jest užší než předešle. Rovný paprsek objevený se na předešlém snímku se prodloužil na 5° a po jeho boku vznikl nový rovný paprsek dlouhý asi $1\frac{1}{2}^\circ$. Oba tyto paprsky s hlavním i s druhým ohonem se sbíhají směrem k hlavě komety v úzký krk ohraničený po obou stranách do vzdálenosti 1° jasnými konturami. (Viz obr.)

Další fotografické sledování komety nebylo možné, neboť kometa klesala stále více do neprůhledných vrstev u obzoru, které nadto byly ještě osvětlovány Měsícem dorůstajícím do úplňku.

Krom těchto výše zmíněných snímků byly současně pořízeny panem ředitelem prof. Fr. Nušlem ještě následující 3 snímky menšími, ale velice světelnými objektivy o velikém zorném poli. Jedním z objektivů byl „Ernostar“ světelnosti $1 : 1,8$ a ohniskové délky 125 mm , druhým pak objektiv Petzvalův průměru $3''$ a ohniskové délky 244 mm .

Na snímku z noci ze 4. na 5. srpna, který byl exponován po dobu 1 hod. Petzvalovým objektivem na desku „Superguil-ortho-antihalo“ rozměrů $9 \times 12\text{ cm}$, jeví kometa ohon dlouhý asi 6° . (Deska A.)

V noci ze 7. na 8. srpna byla exponována kometa Petzvalovým objektivem po dobu 4 hod. na desku „Superguil-ortho-antihalo“, kde vykreslila ohon dlouhý asi 11° . (Deska B.)

Současně s deskou B bylo exponováno po 4 hod. Ernstarem na desku „Agfa Astro“ rozměrů $9 \times 9\text{ cm}$, kde kometa jeví délku asi $13\frac{1}{4}^\circ$. (Deska C.)

Ku konci se ještě zmíním o zajímavém zařízení, které dovoluje pointovati na hvězdu ležící mimo osu dalekohledu. Před objektivem dalekohledu jest umístěno rovinné zrcadlo Z_1 skloněné pod úhlem 45° k ose dalekohledu tak, že odráží do osy dalekohledu paprsky přicházející od zrcadla Z_2 . Toto druhé zrcadlo spočívá na

nosiči sestávajícím ze dvou 5°-ých kovových klínů, které se mohou jednak po sobě stáčetí kolem osy kolmé k jejich dotykovým plochám a tak měniti klínovitost od 0° (klíny stojí proti sobě) do 10° (klíny jsou souhlasně orientovány), a jednak je natáčetí kolem osy kolmé k spodní stěně dolního klínu. Tato osa jest tak umístěna, aby v případě, kdy celková klínovitost je rovna 0°, byla obě zrcadla rovnoběžná. V případě, že výsledná klínovitost je různá od nuly, bude osový paprsek vstupující do dalekohledu po odraze od obou zrcadel svírat s paprskem dopadajícím na první zrcadlo, úhel rovný dvojnásobné klínovitosti. Dovoluje tedy toto zařízení pointovati podle hvězdy ležící až 20° od osy dalekohledu. Pro potřebu při pointování komety 1937 f nebylo dosti času na zjišťování konstant tohoto zařízení, ale zato byla empiricky pomocí velmi vzdáleného terestrického předmětu vykreslena na matnici síť křivočarých souřadnic, z níž lze snadno určit čtení na stupnicích udávajících vzájemné postavení klínů a jejich natočení, aby předmět, který vidíme na vláknovém kříži vedoucího dalekohledu, byl na zvoleném místě fotografické desky.

Ku konci považuji za svoji milou povinnost poděkovati panu řediteli Státní hvězdárny dr. Fr. Nušlovi za jeho laskavou péči o moji práci a namontování výše zmíněného zařízení a za zasvěcení do práce s ním. Dále děkuji kolegovi dr. V. Guthovi a p. Karlu Mišoňovi z Kladna za pomoc v kopuli a za obstarávání přesného času exposic. Nemenšími díky jsem zavázán panu J. Klepešovi, který ze snímků mnou zhotovených připravil zvětšené fotografie a diapositivy vhodné k reprodukci, z nichž některé zde otiskuji.

*

Résultats des observations photographiques de la comète Finsler (1937 f.) à l'Observatoire „Žalov“ de l'Observatoire National de Prague.

(Extrait de l'article précédent.)

A l'Observatoire „Žalov“, à Ondřejov, l'auteur a photographié la comète Finsler (1937 f.) depuis le 13 juillet au 15 août 1937. Il a obtenu en somme 14 plaques au moyen de l'astrographe double, muni d'un excellent objectif de Cooke de 8 pouces (20 cm) de diamètre et de 90 cm de distance focale. On a fait ou des poses longues (de 32 à 200 minutes) pour obtenir au mieux les phénomènes lumineux de la queue, ou des poses courtes pour le calcul des positions de la comète. Les plaques utilisées, de dimensions 13×18 cm, étaient les „Supergul-Ortho-Antihalo“ et les „Hauff Ultrarapid“.

Sur les photographies de longue pose, on peut très bien suivre le développement des différentes parties de la tête et de la queue de la comète. Sur la queue principale, il est intéressant de suivre les développements et les variations des différents courants et rayons lumineux.

En exécutant les photographies, on a pris le soin d'obtenir toute la comète sur la plaque. On a utilisé donc, à partir du 7 août, un dispositif spécial de Nušl-Frič, placé devant l'objectif de la lunette guide et qui permet, au moyen des deux miroirs plans réglables, de guider sur la tête de la comète et de placer celle-ci, simultanément, excentriquement sur la plaque photographique. Ce dispositif, qui a rendu de grands services, aurait encore besoin d'être complété par un autre, qui permettrait de donner à la plaque photographique le mouvement identique à celui de la comète parmi les astres. On éviterait ainsi l'effacement de la queue quand celle-ci change rapidement son angle de position, comme c'est le cas de cette comète Finsler qui a passée très près du Pôle Nord.

Il est à remarquer que, malgré tous les avantages du dispositif décrit et que l'auteur a pu pleinement apprécier, la fin de queue finissait, au moins au mois d'août, au bord de la plaque et on peut supposer quelle était plus longue encore que les 10° ou 11° enregistrés. Cela se voit sur les photographies prises le 4/5 et 7/8 août par M. le Directeur dr. F. Nušl, au moyen des objectifs ultra-lumineux (le Ernostar 1 : 1,8, $F = 125$ mm, le Portrait-objectif de Petzval 1 : 3,5, $F = 244$ mm) et des poses de 4 heures, qui donnent une queue de $13\frac{1}{4}^\circ$ de longueur.

Sur la stabilité d'une lunette meridienne.

Jaroslav Procházka, Praha.

(Reçu le 6 octobre 1937.)

Dédié à Monsieur le professeur dr. František Nušl à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire le 3 décembre 1937.

L'auteur a travaillé à l'Observatoire de Paris avec la lunette meridienne Bouty; il a étudié la stabilité de cette lunette au moyen de deux lunettes auxiliaires munies de micromètres à deux fils mobiles orientés dans deux directions rectangulaires: horizontale et verticale. Ces vis micrométriques ont servi pour les pointés des taches repères fixées aux extrémités des tourillons de l'instrument méridien. Les résultats obtenus ont confirmé une stabilité excellente de la lunette Bouty, la stabilité des lunettes auxiliaires ayant été assurée et contrôlée soigneusement. Néanmoins on a constaté certains écarts tantôt brusques tantôt lents dans l'ensemble de plus de 10.000 pointés.

Au cours de ces dernières années la détermination de l'heure a atteint une précision considérable grâce aux études étendues effectuées dans les domaines en ce qui concerne les méthodes d'observation et de réduction, les instruments avec tous leurs accessoires (chronographes, collimateurs, mires etc.), et finalement les méthodes pour la détermination des équations personnelles qui interviennent dans lesdites observations.

Si nous admettons que la méthode classique d'observation utilisant l'instrument de passage est parfaite, il reste alors deux composantes principales qui certainement ne sont pas du tout parfaites: ce sont les instruments et les observateurs. En effet ces deux composantes fonctionnent pour la plupart mêlées et de plus, il est assez souvent difficile de les séparer avec la certitude suffisante.

Pendant nos études à l'Observatoire de Paris nous nous sommes intéressés surtout aux qualités mécaniques de l'instrument de passage et de leurs fluctuations. M. Ernest Esclançon a publié dans les Annales de l'Observatoire de Strassbourg (tome I, pg. 373, Paris 1926) une de ses études étendues sur la précision des obser-

vations méridiennes, dont les conclusions ont une éminente importance. Dans ce mémoire, M. Esclangon divise des petites fluctuations instrumentales en fluctuations mécaniques ou indépendantes du temps et fluctuations progressives. Ce sont ces fluctuations progressives qui ont attiré surtout notre attention; elles proviennent de déformations ou déplacements se produisant progressivement sur la lunette, sur ses axes, sur ses tourillons etc. En outre nous avons aussi étudié les fluctuations mécaniques non progressives.

Pour faire ces études, nous avons employé un dispositif spécial qui avait été ajouté comme accessoire à la lunette Bouty de l'Observatoire de Paris conformément aux instructions de M. Esclangon.¹⁾ Ce dispositif consiste en deux microscopes qui sont fixés sur les piliers Est et Ouest; chacun d'eux est muni de deux micromètres (horizontal et vertical) qui permettent de viser les extrémités de l'axe de rotation de la lunette méridienne. Ces extrémités portent de petites marques circulaires qui ont été successivement pointées par les micromètres.

Au moyen de ces microscopes nous avons étudié les irrégularités des tourillons. Les résultats de ces mesures seront publiés ultérieurement dans un autre mémoire.

Ce qui est intéressant pour la stabilité de la lunette méridienne ce sont les changements tantôt brusques tantôt lents qui se sont produits pendant ces observations, changements qui font l'objet de cette présente communication. Nous avons mesuré de cette façon: en déplaçant la lunette méridienne de cinq en cinq degrés nous avons pointé les taches repères circulaires des tourillons avec un micromètre. Le tour complet de 360 degrés représente une série d'observation qui dure environ deux heures et demie; en somme, nous avons fait 24 séries d'observation. Pour chaque position de la lunette méridienne de cinq en cinq degrés, nous avons exécuté 5 pointés de repères pour diminuer l'erreur d'observation.

Pour les mesures de ce genre deux principales questions se posent: 1° si les lectures au commencement et à la fin de la série sont — dans les limites des erreurs d'observations — identiques, 2° si les cinq lectures successives pour chaque position de la lunette méridienne représentent des perturbations remarquables (p. ex. une allure systématique, des sauts brusques) ou non.

Avant de donner les résultats il faut dire quelques mots sur la stabilité des microscopes. Il est évident que cette stabilité est avant tout désirable et qu'on ne pourrait réussir que si cette condition était rigoureusement satisfaite. En effet, nous avons constaté que les microscopes sont très stables.

¹⁾ Bulletin Astronomique, tome VI, fasc. VI, pg. 229, Paris 1930.

Les valeurs initiales et finales d'une série d'observations ne diffèrent que de quelques millièmes de seconde du temps et atteignent seulement pendant une série la valeur de 0,012^s (une seconde de temps correspond à 15" d'arc). Une autre série montrant un gros déplacement (0,025^s) a dû, par conséquent, être rejetée. Ce cas exceptionnel est dû sans aucune doute au changement lent de la lunette, changement ayant pour cause la plus vraisemblable une augmentation de température au cours de la mesure.

Les lectures de cinq en cinq degrés sont de beaucoup plus intéressantes. L'étude totale comporte 1728 groupes de cinq pointés, en somme 8640 lectures. Les valeurs d'un tour des microscopes (en désignant par O resp. E le microscope Ouest resp. Est; par h resp. v le micromètre horizontal resp. vertical) sont:

O_h	O_v	E_h	E_v
0,893 ^s	0,898 ^s	0,883 ^s	0,889 ^s

Si l'on regarde les pointés dans les groupes on voit qu'il y en a assez, à peu près un dixième, qui représente une certaine — même faible — allure systématique, 13 groupes seulement montrent des perturbations remarquables. Dans tous les cas il s'agit de vrais changements, parce que nous avons soigneusement contrôlé tous les écarts. Dans certains groupes où l'allure systématique était très forte et pas du tout négligeable nous avons continué les lectures jusqu'à l'arrivée de l'état sans changement.

Dans les exemples ci-dessous on voit clairement d'une part l'allure systématique, d'autre part les sauts brusques des pointés.

Voici ces 13 groupes: ζ_s signifie la distance zénithale vers le Sud, ζ_n la même vers le Nord, les valeurs de mesures étant exprimées en secondes:

3 Mars, E_h	5 Mars, E_h	6 Mars, E_h	
$\zeta_s = 5^\circ$	$\zeta_n = 50^\circ$	$\zeta_n = 70^\circ$	$\zeta_n = 150^\circ$
0,135 ^s	0,118 ^s	0,094 ^s	0,105 ^s
145	115	099	104
143	116	103	115
111	119	120	140
111	123	120	140
112	130	110	135
110	132	110	140
	130	109	138

12 Mars, O_v $\zeta_s = 10^\circ$	19 Mars, O_h $\zeta_s = 60^\circ$ $\zeta_n = 165^\circ$		18 Mars, O_h $\zeta_n = 80^\circ$ $\zeta_n = 85^\circ$ $\zeta_n = 155^\circ$		
0,404 ^s	0,340 ^s	0,128 ^s	0,023 ^s	0,029 ^s	0,135 ^s
400	330	127	020	022	132
405	325	132	029	029	125
420	320	145	052	031	120
420	318	149	050	040	120
422	320	135	042	042	110
420	321	150	042	048	104
419	341	150	050	048	113
	321	140	049	045	103
	323	155	051	040	110
	340			035	103
	330			037	
	330			032	
	317			035	
	305			035	
	315				
	315				
	320				
	340				
	333				
21 Mars, O_v $\zeta_s = 135^\circ$	22 Mars, O_v $\zeta_s = 140^\circ$ $\zeta_n = 75^\circ$		23 Mars, E_h $\zeta_s = 80^\circ$		
0,232 ^s	0,194 ^s	0,450 ^s	0,330 ^s		
225	192	451	332		
224	180	450	340		
230	187	447	341		
231	188	447	353		
238	160	420	352		
252	173	425	365		
252		420	361		
250		423	357		
249		430	354		
			357		
			358		
			353		

Il est assez intéressant à noter que les micromètres horizontaux présentent des écarts plus souvent que les micromètres verticaux.

Nous avons aussi étudié l'influence du contrepois sur la position de la lunette méridienne; celle-ci dépend essentiellement du

soulèvement du contrepoids, bien que les différences ne soient pas très grandes; mais elles peuvent atteindre dans les cas exceptionnels même quelques centièmes de seconde.

Comme exemple j'ajoute les valeurs de deux microscopes verticaux après soulèvement du contrepoids. Voici les lectures des microscopes montrant les effets analogues à l'élasticité ($\zeta=0$):

0,416 ^s	0,438 ^s
416	444
420	444
422	464
423	465
429	465
435	462
430	463
428	
432	
438	
438	
432	

Nous avons constaté le même phénomène après le retournement de la lunette.

Après tout la question importante est encore à discuter. Nous avons constaté quelques écarts dans les lectures que nous avons attribués seulement aux fluctuations mécaniques de la lunette méridienne, mais on pourrait s'opposer à cette hypothèse en disant qu'il est tout-à-fait possible d'expliquer ces perturbations par le changement de position des microscopes. Mais c'est absolument invraisemblable quant à nos recherches; nous avons fait des études soignées de la stabilité des microscopes qui permettent de soutenir notre opinion. De plus, ce qui est beaucoup plus important, nous avons contrôlé les lectures précédentes dans tous les cas où nous avons constaté les perturbations. Enfin, la fin de chaque série représente aussi un contrôle au moins pour le changement lent des microscopes.

L'étude que nous avons faite avec la lunette méridienne Bouty de l'Observatoire de Paris montre une stabilité considérable de cet instrument.

Il est à remarquer que nous n'avons pas pu étudier l'influence de la fixation du calage dont les erreurs atteignent selon M. Esclan-gon une valeur assez considérable — 0,03^s — parce que la lunette méridienne Bouty n'est pas munie de vis de calage.

Les 13 exemples cités parmi 1728 montrent 1° que les fluctuations sont très variables dans leurs valeurs, mais extrêmement petites; 2° qu'on doit toujours attendre au moins quelques dizaines

de secondes après les opérations exécutées (p. ex. le retournement de la lunette méridienne etc.) avant de faire une observation, étant donné que toutes ces conclusions ont été déduites de la discussion de plus de 10.000 pointés.

L'Institut Astronomique de la Haute Ecole Polytechnique, Praha.

*

O stabilitě průchodního stroje.

(Obsah předchozího článku.)

Autor konal na observatoři v Paříži jistá speciální měření s průchodním strojem firmy Bouty. Mimo jiné zkoumal též jeho stabilitu uživ k měření dvou pomocných dalekohledů s okulárovými mikrometry, jimiž stanovil přesnou polohu značek na obou koncích rotační osy průchodního stroje. Měření, jichž bylo přes 10.000, ukázala, že průchodní stroj Bouty má velikou stabilitu. Nicméně bylo v měření několik řad, které projevíly buď náhlé skoky ve čtení nebo systematický jejich chod.

Astronomický ústav Českého vysokého učení technického v Praze.

On the question of the possible rotation of the local cluster.

J. M. Mohr, Praha.

(Received October 8, 1937.)

Dedicated to Professor František Nušl
on the occasion of his seventieth anniversary
December 3, 1937.

On the base of the study of the space velocities of 910 stars of *B* type the author shows that the supplementary rotation of the so-called local cluster about a centre situated at $l = 237^\circ$ in the constellation of Carina in a distance of some hundred parsecs only does not exist.

In my previous work¹⁾ I gave new observational evidence of the galactic rotation. But H. Mineur showed²⁾ that my demonstration did not settle the question of the possible sub-rotation about the second centre, i. e. the centre of the local cluster, which must be placed some hundred parsecs only from the Sun in the direction of gal. longitude $l = 237^\circ$. I have shown in a comment on a paper by Edmondson,³⁾ that this question may be solved by studying the motions of stars, which are placed in belts of space oriented towards gal. longitudes $l = 147^\circ$ and $l = 327^\circ$. I also mentioned, that I would return to this subject.

Consider a system of coordinates X, Y in the galactic plane, the origin being the Sun. The axes X, Y are oriented in the usual sense. Let $V_\odot$ denote the instantaneous rotational velocity of the Sun, V_* the mean rotational motion of the stars in the solar vicinity, and V_r the velocity of these stars relative to the Sun. If we take a new system of coordinates X', Y' in which Y' is in the direction of V_* , then X' is directed to the galactic centre, i. e. approximately to $l = 327^\circ$. By this supposition we obtain the following relations:

$$\begin{aligned} V_\odot \cos \alpha_\odot &= V_* + V_r \cos \beta \\ V_r \sin \beta &= x'; \quad V_r \cos \beta = y' \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ J. M. Mohr, M. N. **92** (1932), 583.

²⁾ H. Mineur, Bull. astron., **7** (1934), 397.

³⁾ Edmondson, Astr. Journal, **44** (1935), No 1016, 16.

where β is the angular distance between the Apex and the point towards which the mean rotational motion of the stars is directed, and $\alpha_{\odot}$ is the angle between the direction of the rotational motion of the Sun and the direction of the mean rotational motion of the stars. It is also easy to see that following relations must exist:

$$\left. \begin{aligned} V_r^2 &= x^2 + y^2, \\ x' &= x \cos \alpha' - y \sin \alpha', \\ y' &= x \sin \alpha' + y \cos \alpha', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where

$$\alpha' = 360^\circ - 327^\circ = 33^\circ.$$

From my previous discussion of *B* stars,⁴⁾ which I use also in this paper, it resulted that

$$V_r = 19,12 \text{ kmsec}^{-1}.$$

If we accept the value $V_{\odot} = 300 \text{ kmsec}^{-1}$, towards $l_{\odot} = 55^\circ$ then $V_s = 284,88 \text{ kmsec}^{-1}$, towards $l_s = 56^\circ 54' 24,7''$.

If as H. Mineur supposes, a secondary rotation does exist (i. e. if there does exist a second centre of rotation in the direction $l = 237^\circ$ distant only a few hundred parsecs from the Sun), then for stars, whose coordinates of positions Y' are less than zero, this rotation must be seen in the x' (components of their space velocities). Besides the vector V_1 of the fundamental rotation, there must be present also the vector V_2 of the second rotation, so that the resultant of both vectors in different positions of space must be different in magnitude and in the direction.

Let V_1 denote the vectors of the fundamental rotation. The centre of this rotation is placed in the direction $l = 327^\circ$. V_2 are the vectors of the possible supplementary rotation about $l = 237^\circ$ for the group of stars with $Y' < 0$. The resultant motion of stars in the group I. of stars is V_s' , in the group II. V_s'' and in the group III. V_s''' . The angle between the vectors V_1 and V_s' is α'_1 , between the vectors V_1 and V_s'' is α'_2 , etc. Denote moreover by $V_{\odot}$ the instantaneous velocity of the Sun, which is compounded also from the vector of the fundamental rotation and the vector of sub-rotation for $Y' = 0$. (This latter vector is sensibly smaller than in the space where $Y' < 0$).

For $Y' = 0$, i. e. in the vicinity of the Sun, we get

$$V_{\odot} \sin \alpha_{\odot} + V_s \sin \alpha_2 = x',$$

where α_2 is the angle between the vectors V_1 and V_s .

But for $Y' < 0$ we get similarly

$$V_{\odot} \sin \alpha_{\odot} + V_s'' \sin \alpha'_2 = x'_2$$

⁴⁾ Publ. de l'Institut Astron. de l'Université Charles de Prague, No. 19, 1936.

and

$$V_{\odot} \sin \alpha_{\odot} + V'_s \sin \alpha'_1 = x'_1; \quad V_{\odot} \sin \alpha_{\odot} + V'''_s \sin \alpha'_3 = x'_3,$$

where

$$\alpha'_1 \leq \alpha'_2 \leq \alpha'_3$$

and

$$V'_s \leq V''_s \leq V'''_s,$$

either if the group I. is one of groups of stars situated in positive X' and the group III. in negative X' , or vice versa. But if the groups I. and III. of stars are at the same distance from the axis Y' , so that

$$|X'_1| = |X'_3|,$$

then the ratio of the change of α'_1 compared with α'_3 and of V'_s to V'''_s is given by the relation

$$\frac{V'_s}{V'''_s} = \frac{\sin \alpha'_3}{\sin \alpha'_1},$$

so that

$$x'_1 = x'_3 > x'_2, \quad (3)$$

because the components x'_1, x'_2, x'_3 are negative.

If we suppose for simplicity that the vector of the fundamental rotations is independent of X' (this supposition may be made owing to the great distance of the centre of rotation), then considering groups of stars placed in $Y' < 0$, the component x' of the space velocity for $X' = 0$ must reach a maximum negative value. For values $X' \geq 0$ this component x' must gradually reach lower negative values.

The values x'_1, x'_2, x'_3 are easily obtainable if we know the components x, y, z of space velocities of the stars as shown by formulas (1) and (2).

But how is realised the inequality (3) by the computation? If we divide the space round the Sun in three parts so, that the first part contain all stars, which $Y' > +150$ parsecs, the second part contain all stars, which $Y' = \pm 150$ parsecs, the third part contain all stars, which $Y' < -150$ parsecs, then the computed values of x' for different X' are given in Table I.

Table I.
 $Y' > +150$ parsecs.

X' (parsec)	-502,66	-147,81	- 49,59	+ 50,48	+189,00	+419,16
Y' (parsec)	+379,03	+344,31	+302,27	+284,98	+364,84	+393,96
x' (kmsec ⁻¹)	+ 2,31	+ 5,39	+ 3,41	+ 3,48	+ 3,03	+ 17,08
Number of stars	17	39	32	37	27	51

$Y' = \pm 150$ parsecs.

X' (parsec)	—427,71	—168,90	—47,98	+50,56	+155,00	+362,48
Y' (parsec)	— 7,64	— 19,12	— 5,14	—36,30	— 21,06	— 75,20
x' (kmsec ⁻¹)	— 13,70	— 11,12	—12,12	— 8,55	— 9,53	— 14,08
Number of stars	24	122	167	204	103	81

$Y' < -150$ parsecs.

X' (parsec)	—491,00	—178,45	— 36,08	+ 45,34	+175,67	+337,30
Y' (parsec)	—265,05	—225,64	—208,80	—199,87	—250,61	—530,43
x' (kmsec ⁻¹)	— 28,00	— 15,51	— 11,80	— 11,67	— 50,00	— 44,63
Number of stars	16	28	46	25	7	3

The Table I. shows, that x' remains nearly constant in the groups where $Y' > +150$ parsecs and $Y' = \pm 150$ parsecs. The dependence of the x' on X' in the group $Y' < -150$ parsecs does not show in the supplementary rotation about the centre $l = 237^\circ$. Although there are a smaller number of stars in this group, especially for large positive X' , it can be seen, from the values x' between $X' = -491,00$ parsecs and $X' = +45,34$, where we find a homogeneous number of stars, that the behaviour of the values x' is just in the opposite sense to that which would be, if the supplementary rotation did exist.

This ascertained distribution of the components x' in various parts of space has of course a great significance for, for instance, the K term. Because the distribution of the components x' in the parts of space, the Y' of which is $Y' > +150$ and $Y' = \pm 150$ parsecs, is regular, it is clear that we should have from this material of stars the possibility to obtain a value of the K term not affected by the perturbing influence of the star-streaming. In the space where $Y' < -150$ parsecs the observed dependence of x' on X' is probably caused not only by the rotation of the Galaxy but probably by the star-streaming. By this star-streaming the velocity-ellipsoids in those parts of space are deformed.

Therefore if we would find the real value of the K term we must separate all deformations from the observed velocity-ellipsoids. I myself⁵⁾ tried a case unreally, but for the time being important for the knowledge of the real velocity-ellipsoids in different parts of space in order to find in the future what is the real form of

⁵⁾ J. M. Mohr, Publ. de l'Institut Astron. de l'Université Charles de Prague, No. 19. 1936.

the undeformed velocity-ellipsoid in different galactic longitudes and distances from the Sun.

At the end, I will not affirm that the material here used is sufficient enough. The want of known space velocities of B stars in the vicinity of $l = 237^\circ$ is compensated however by the knowledge of a larger number of the proper motions of stars which we are able to analyze in a similar way — as it was shown in this paper. I hope therefore, that in a time as far as may be seen it would be possible to give a new proof about the unexistence of the supplementary rotation by the proper motions of stars placed in the vicinity of the supposed centre, which $l = 237^\circ$, $b = 0$ approximately.

*Charles University of Prague.
Astronomical Institute.*

*

K otázce možné rotace lokálního shluku hvězd v okolí Slunce.

(Obsah předešlého článku.)

Vyšetřováním prostorových rychlostí 910 hvězd spektrálního typu B způsobem autorem naznačeným se ukazuje, že nemůže existovati rotace místního shluku hvězd, jehož střed by se podle některých autorů měl nalézati přibližně v rovině Mléčné dráhy a v okolí galaktické délky $l = 237^\circ$ ve vzdálenosti jen několika set parseků.

Experimentální stanovení osobní chyby u cirkumzenitálu.

Jindřich Svoboda, Praha.

(Došlo 4. listopadu 1937.)

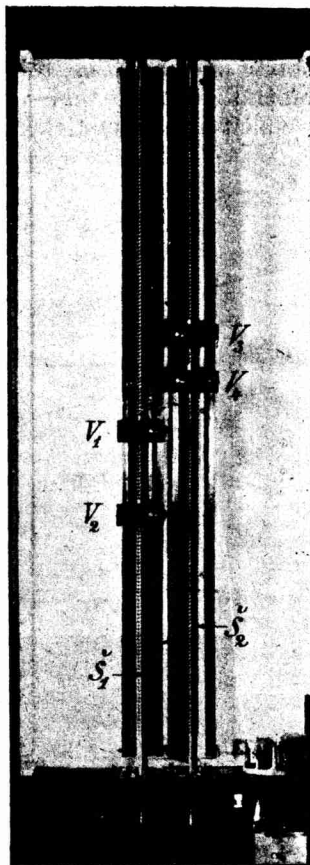
Věnováno panu profesorovi dr. Františku Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den 3. prosince 1937.

Pro stanovení osobní chyby, vyskytující se při pozorováních různými stroji sloužícími k astronomickému určování času a zeměpisné délky, sestrojil jsem v dílně ústavu přístroj, jehož lze užítí také pro stanovení osobní chyby u cirkumzenitálu Nušl-Fričova.

Abych zmírnil vliv nedokonalosti mechanického zpracování, volil jsem přístroj (obr. 1) poměrně značných rozměrů. Vozíčky V_1, V_2, V_3, V_4 nesoucí umělé obrazy hvězd jsou nasazeny jako matky na dva paralelní šrouby $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ délky 1100 mm. Šrouby jsou zasazeny svými čepy do kuličkových ložisek pevné konstrukce přístroje, takže při otáčení šroubů vozíčky se posunují. Na prodloužených osách šroubů nasazena jsou stejně velká ozubená kola do sebe zapadající, aby šrouby se otáčely v opačném smyslu a vozíčky postupovaly po obou šroubech stejnou rychlostí v protivných směrech. Pomocí vhodně voleného soukolí lze měnit smysl otáčení šroubů a tím zároveň i směr pohybu vozíčků. K pohonu použito jest elektrického motoru a rychlost pohybu je měnitelná vřazeným regulátorem. Na každém šroubu posunuje se pár vozíčků odpovídající páru obrazů hvězdných. Obraz hvězdy vytvořen jest malým kruhovým otvorem ve stínítku kryjícím svítící žárovku. Volbou průměru otvoru ve stínítku je možno měnit jasnost obrazů hvězd v rozsahu šesti velikostních tříd. Vozíčky mají na bočních stěnách, jimiž jsou k sobě obráceny, kontakty, které zapínají proud elektromagnetu ovládajícího pero chronografu, takže okamžik setkání se (koincidence) obrazů zaznamenává se automaticky na chronografu. Obrazové páry, podobně jako u cirkumzenitálu, mají nestejnou vzdálenost (145 mm a 80 mm), takže při jednom „průchodu“ lze pohodlně odpozorovati čtyři koincidence (obr. 2). Pozorovatel sle-

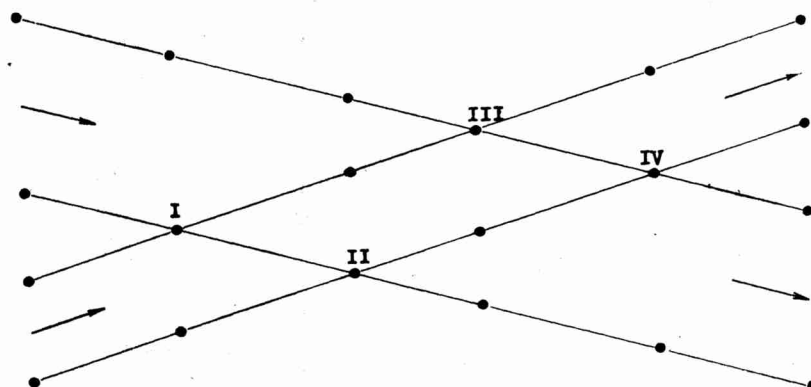
duje pohyb obrazů hvězdných a okamžiky koincidencí zaznamenává tasterem, který zapíná proud druhého pera chronografu. Při našich pokusech bylo užito válcového chronografu Nušl-Fričova opatřeného dvěma oscilografy Abrahamovými od fy G. Boulitte v Paříži. Do svorek jednoho oscilografu zapojen je paralelně okruh proudovodu od hodin, takže pero, které zapisuje automaticky časy koincidencí, píše také sekundy. Poněvadž sekundy jsou registrovány proudem přerušovaným a okamžiky koincidencí zapnutím paralelního proudovodu, lze oboje výchylky pera zapsané na chronografu (obr. 3) zcela zřetelně rozlišovat a přesně odečíst. Délka sekundy na chronografu byla upravena na 20 mm, takže jedné setině sekundy odpovídá dílek 0,2 mm. Proto rozdíly mezi automatickým a pozorovaným zápisem jsou přepočítávány (z délkového intervalu) na tisíceiny sekundy.

Přístrojem lze pokusně stanovit závislost osobní chyby na rychlosti i směru průchodu, jakož i na velikosti a barvě „hvězd“. Jako ukázkou připojuji výsledek prvních pokusů o stanovení závislosti osobní chyby na rychlosti a směru průchodů. Pozorováno bylo při 8 rychlostech, vždy 10 průchodů oběma směry, takže bylo zaznamenáno celkem 640 koincidencí. Největší relativní rychlost obrazů jest 26,8 mm/sek; nejmenší (osmá) rychlost při těchto pokusech byla 11 mm/sek. Přisoudíme-li maximální rychlost obrazům hvězd pozorovaných v prvním vertikálu, zahrnují naše pokusy průchody hvězd v azimutech 24° — 156° a 204° — 336° . Pozorováno bylo ze vzdálenosti 3 m obráceným dalekohledem asi 5krát zmenšujícím, čili jako by přímo ze vzdálenosti asi 15 m. Ježto hvězda procházející prvním vertikálem má rychlost $\pm 9,64''/\text{sek}$, odpovídají naše výsledky stroji s dalekohledem asi 20krát zvětšujícím. Abychom tedy obdrželi osobní chybu pro stroj se zvětšením 150, stačilo by pozorovati koincidence na našem přístroji pouhým okem ze vzdálenosti asi dvou metrů.

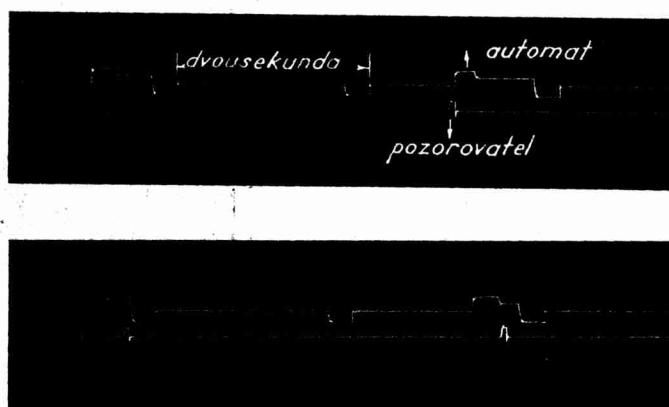


Obr. 1.

Výsledky našich prvních pokusů sestaveny jsou v tab. I podle rychlosti průchodu do 8 serií. V serii bylo odpozorováno 10 průchodů oběma směry, tedy 40 koincidencí pro každý směr. Aby bylo možno sledovati také vliv konfigurace obrazů, jsou v každé serii vypočítány aritmetické průměry osobních chyb pro každou konfi-



Obr. 2.



Obr. 3.

guraci v obou směrech a označeny $e_K^{\rightarrow}$ resp. $e_K^{\leftarrow}$ ($K = I, II, III, IV$). K nim jsou připojeny příslušné střední chyby jednoho pozorování m_K a střední chyby aritmetického průměru M_K . Ze čtyř osobních chyb každého průchodu vypočítány byly aritmetickým průměrem hodnoty osobních chyb jednotlivých průchodů. Aritmetický průměr těchto hodnot jakožto osobní chybu celé serie označujeme

$\rightarrow$ resp. $\leftarrow$
 e_s resp. e_s ($s = 1, 2, 3, \dots, 8$) a udáváme vedle ní střední chybu osobní chyby jednoho průchodu m_s jakož i střední chybu aritmetického průměru M_s . Hodnoty osobních chyb jsou udány v tisících sekundy. Znaménko + nebo - značí, zda koincidence byla pozorována dříve nebo později. Směr $\rightarrow$ značí, že širší pár postupuje dolů. Při našich pokusech byl širší pár posunut poněkud vpravo.

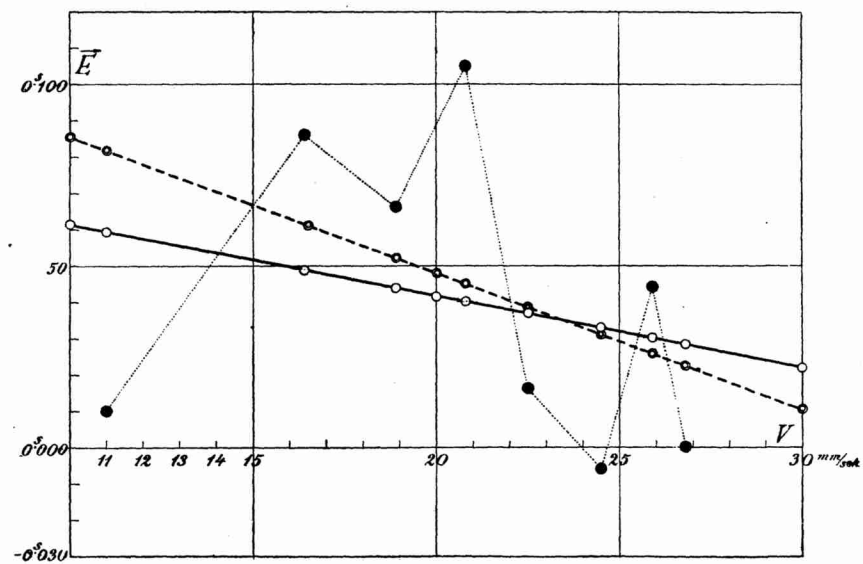
Tab. I.

Serie	Rychlost mm/sek	$\uparrow$ e_I	m_I	M_I	$\uparrow$ e_{II}	m_{II}	M_{II}	$\uparrow$ e_{III}	m_{III}	M_{III}	$\uparrow$ e_{IV}	m_{IV}	M_{IV}	$\uparrow$ e_s	m	M
1	26,8	- 23	$\pm$ 32	$\pm$ 10	+ 40	$\pm$ 90	$\pm$ 28	- 26	$\pm$ 167	$\pm$ 53	+ 11	$\pm$ 103	$\pm$ 33		$\pm$ 72	$\pm$ 23
2	25,9	+ 134	199	63	+ 9	184	58	+ 33	169	54	+ 1	107	34	+ 44	109	35
3	24,5	- 20	105	33	+ 19	141	45	- 16	128	40	- 5	85	27	- 6	71	23
4	22,5	+ 126	141	44	+ 20	76	24	- 50	130	41	- 32	180	57	+ 16	62	19
5	20,8	+ 207	174	55	+ 114	222	70	+ 20	133	42	+ 78	122	39	+ 105	114	36
6	18,9	+ 74	164	52	+ 113	153	48	+ 71	214	68	+ 8	185	58	+ 66	126	40
7	16,4	+ 92	191	60	+ 82	137	43	+ 71	98	31	+ 98	169	53	+ 86	68	22
8	11,0	- 28	368	116	+ 48	220	70	- 16	364	115	+ 37	377	119	+ 10	154	49
		$\downarrow$ e_I			$\downarrow$ e_{II}			$\downarrow$ e_{III}			$\downarrow$ e_{IV}			$\downarrow$ e_s		
1	26,8	+ 249	161	51	+ 259	127	40	+ 358	180	57	+ 332	147	47	+ 299	78	25
2	25,9	+ 249	161	51	+ 384	121	38	+ 225	192	61	+ 390	193	61	+ 312	128	40
3	24,5	+ 212	113	36	+ 216	125	40	+ 216	115	36	+ 466	272	86	+ 277	91	29
4	22,5	+ 201	177	56	+ 310	189	60	+ 247	160	51	+ 321	56	18	+ 270	97	31
5	20,8	+ 279	150	48	+ 332	130	41	+ 327	99	31	+ 317	170	54	+ 314	68	22
6	18,9	+ 283	158	50	+ 372	193	61	+ 396	196	62	+ 404	106	34	+ 364	76	24
7	16,4	+ 179	156	49	+ 394	233	74	+ 326	248	78	+ 428	219	69	+ 332	120	38
8	11,0	+ 329	272	86	+ 485	185	59	+ 359	213	67	+ 304	178	56	+ 369	69	22

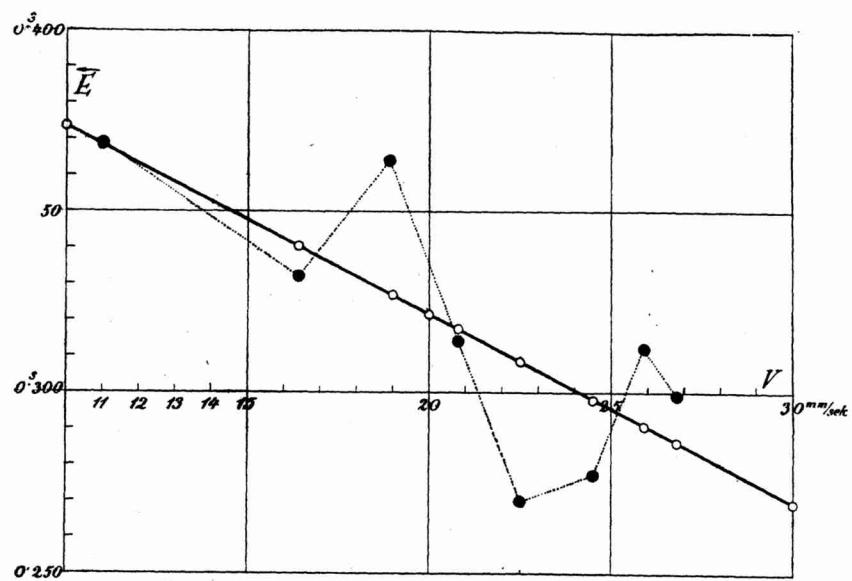
Tab. II.

Směr	e_I	m_I	M_I	e_{II}	m_{II}	M_{II}	e_{III}	m_{III}	M_{III}	e_{IV}	m_{IV}	M_{IV}	e	m	M
$\rightarrow$	+ 70	$\pm$ 87	$\pm$ 31	+ 55	$\pm$ 42	$\pm$ 15	+ 11	$\pm$ 45	$\pm$ 16	+ 24	$\pm$ 44	$\pm$ 16	+ 40	$\pm$ 42	$\pm$ 15
$\leftarrow$	+ 248	49	18	+ 344	84	30	+ 307	68	24	+ 370	$\pm$ 60	$\pm$ 21	+ 317	37	13

V tabulce II jsou uvedeny aritmetické průměry hodnot osobních chyb ze sloupců tabulky I s příslušnými středními chybami. Vidíme, že vliv konfigurace obrazů při koincidenci není valný, na-



Obr. 4.



Obr. 5.

proti tomu vliv směru je značný. Pro první směr vychází z pokusů osobní chyba $+0,040 \text{ sek} \pm 0,015 \text{ sek}$, kdežto pro druhý směr $+0,317 \text{ sek} \pm 0,013 \text{ sek}$.

Vliv rychlosti průchodu na osobní chybu lze sledovati ve sloupci hodnot e_s tabulky I. Značíme-li rychlost v a provedeme-li vyrovnání přímkou, obdržíme z hodnot prvního směru vztah

$$\overrightarrow{e} = 0,0811 - 0,00197v.$$

Přisoudíme-li hodnotám 8. serie vzhledem k poměrně velkým středním chybám poloviční váhu, vyjde nám rovnice

$$\overrightarrow{e'} = 0,1228 - 0,00375v.$$

Z hodnot osobních chyb druhého směru vychází vyrovnáním vztah

$$\overleftarrow{e} = 0,4254 - 0,00519v.$$

Výsledky vyrovnání ukazuje nám obr. 4 pro směr první a obr. 5 pro druhý směr. Rozdíly mezi napozorovanými a vyrovnanými hodnotami $e_s - e$ jsou uvedeny v tabulce III.

Tab. III.

v	11,0	16,4	18,9	20,8	22,5	24,5	25,9	26,8	mm/sek
$\overrightarrow{e_s}$	+0,040	+0,086	+0,066	+0,105	+0,016	-0,006	+0,044	0,000	sek
$\overrightarrow{e}$	+0,059	+0,049	+0,044	+0,040	+0,037	+0,033	+0,030	+0,028	sek
$\overrightarrow{e_s} - \overrightarrow{e}$	-0,049	+0,037	+0,022	+0,065	-0,021	-0,039	+0,014	-0,028	sek
$\overrightarrow{e'}$	+0,082	+0,061	+0,052	+0,045	+0,038	+0,031	+0,026	+0,022	sek
$\overrightarrow{e_s} - \overrightarrow{e'}$	-0,072	+0,025	+0,014	+0,060	-0,022	-0,037	+0,018	-0,022	sek
$\overleftarrow{e_s}$	+0,369	+0,332	+0,364	+0,314	+0,270	+0,277	+0,312	+0,299	sek
$\overleftarrow{e}$	+0,368	+0,340	+0,327	+0,317	+0,308	+0,298	+0,291	+0,286	sek
$\overleftarrow{e_s} - \overleftarrow{e}$	+0,001	-0,008	+0,037	-0,003	-0,038	-0,021	+0,021	+0,013	sek

Je patrno, že osobní chyba s rostoucí rychlostí průchodu klesá.

Úkolem dalších našich pokusů bude studovati tuto závislost v širších mezích, s ohledem na značnější zvětšení dalekohledu cirkumzenitálu. Bude také zajímavé zjistiti vliv změny stran dvojic obrazů. Dále budeme sledovati závislost osobní chyby na jasnosti (velikosti) obrazů hvězdných jakož i na jejich barvě.

*

Détermination expérimentale de l'erreur personnelle dans les observations avec l'appareil circumzénithal Nušl-Frič.

(Extrait de l'article précédent.)

Pour les recherches expérimentales sur l'erreur personnelle dans les observations de passage j'ai fait installer un appareil qui me permet en outre aussi de déterminer l'erreur personnelle dans les observations faites avec l'appareil circumzénithal Nušl-Frič.

Notre appareil consiste essentiellement en deux vis parallèles 1100 mm de longueur. Sur chacune d'elles se trouvent comme femelles deux chariots qui portent les images artificielles de l'étoile. Les tourillons de vis sont posés dans la construction de l'appareil de telle sorte que les chariots sont en mouvement quand les vis tournent. Au moyen des roues dentées mûes par un petit moteur électrique on obtient les rotations de deux vis dans les sens contraires; par conséquent les couples d'images de l'étoile artificielle sont entraînés l'un contre l'autre. Les images de chaque couple ont la distance inégale respectivement de 80 mm et de 145 mm. C'est exactement le même phénomène que voit l'observateur dans le champ de l'oculaire de circumzénithal. On peut changer le sens de la rotation des vis de telle sorte qu'on peut observer les passages des images dans toutes les deux directions. Le moteur électrique est muni d'un régulateur à force centrifuge assurant une grande régularité de vitesse. Les temps de quatre coïncidences d'images dans chaque passage sont enregistrés automatiquement au chronographe par les contacts des chariots. L'autre plume du chronographe est manoeuvrée par l'observateur qui ferme le circuit selon son impression de coïncidence. La différence des deux marques faites au chronographe par les oscillographes Abraham de Boulitte, donne l'erreur personnelle.

Notre communication contient les résultats des premiers essais tentés sur l'erreur personnelle en fonction de la vitesse et de la direction de passage.

La dépendance de l'erreur personnelle de la direction de passage est frappante ($\overrightarrow{e} = 0,040$ sec, $\overleftarrow{e} = 0,317$ sec) tandis que celle de la configuration des images au moment d'une coïncidence n'est pas si forte (tab. II). Il se manifeste aussi une dépendance de la vitesse de passage (voir fig. 4, 5 et tab. III).

Results in the $K\beta$ group of molybdenum obtained with a spectrograph containing a plastically deformed rocksalt crystal.

M. Bačkovský and M. Neprašová, Praha.

(Received November 30, 1937.)

A method for a uniform plastic deformation of rocksalt crystals is elaborated. The bending of the crystal is carried out by a steel spring acting as a bearer stretching uniformly the texture of the cross-section; the steel spring was of steel „Poldi A. K. V. N.“ the elasticity of which increases with temperature in the region of plasticity of rocksalt (at 300°C). Rocksalt crystals thus cylindrically deformed were used in Kunzl's focusing method for the study of the lines of the β group of K series in molybdenum. These lines are suitable for the comparison of results obtained with the present authors' method and those of Johann and Cauchois, since both methods reveal — by means of deformed crystals — new forbidden Mo lines (quadrupole lines) and non-diagram lines. The present authors obtained all such lines already described, except the line β_{4x} . Besides these, some other hitherto non-classified lines were found.

The results show that crystals plastically deformed in the present authors' manner give the largest attainable resolving power with an extreme luminosity.

Hitherto plastically deformed crystals did not bring any advantage in X-ray spectrography. An attempt was made by Hámos,¹⁾ who used rocksalt crystal in Gouy's²⁾ focusing arrangement. Hámos was thus able to show that the theoretically suggested Gouy's arrangement really leads to lines, the intensity of which depends on the height of the crystal used. Hámos¹⁾ results, however, do not show any advantage over the use of the ordinary plain crystal.

Our first studies of the X-ray reflexion on plastically deformed crystals showed that such crystals may be used only in weak exposures, since during long exposures defects become more prominent, brought in by the plastic deformation of the crystal.

The $\text{Cu } K\alpha$ lines are well defined at a weak exposure; however when this exposure is prolonged, besides these lines their traces appear irregularly shifted owing to irregularities in the deformation

in various places of the crystal. Such defaults exclude, of course, any application of plastically deformed crystal in X-ray spectroscopy. Endeed as long as we tried the usual way of deformation we did not succeed to obtain faultless products. This is perhaps the reason why Hámos has not succeeded with his spectrograph to obtain new results. We have, therefore, tried to work out a method of a uniform plastic deformation of the crystal into a rotational cylindrical surface. For this aim we have applied a steel spring bearer adapted so as to stretch uniformly the texture of the cross-section.³⁾ Under this bearer the rocksalt crystal was placed for bending. The whole arrangement was kept in an oil bath at a temperature at which plastic deformation is possible (see fig. 1). For

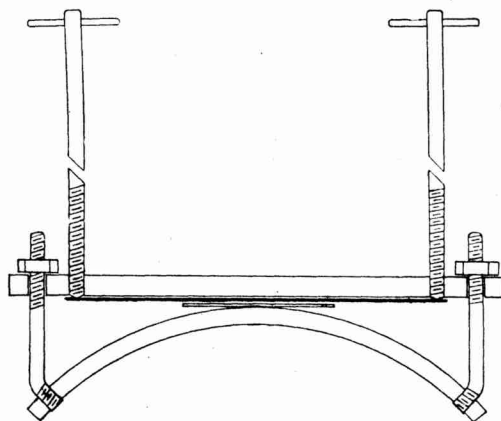


Fig. 1.

this 300° C is a suitable temperature. At these conditions the steel spring was bent by tying up screws and hereby the crystal was pressed on to an iron cylindrical support, which had the required curvature. To avoid decrease of elasticity of the spring, special steel „Poldi A. K. V. N.“ was applied, the elasticity of which increases with temperature.

The results show that crystals deformed in this manner are curved much more uniformly than when bent in the usual way, which consists of pressing an elastic crystal between two rigid surfaces correspondingly curved beforehand.

The principal lines of Cu and Mo reflected on crystals deformed in our manner are sharp and exhibit a great resolving power, so that the proper width of the lines may be estimated. We intend to show here advantages of using crystals deformed plastically in

our manner, as they present themselves in the exposure of very faint X-ray lines. The β -group of the Mo K -series was chosen for our particular study. This element has been measured with modern focusing methods by several authors who revealed there several new lines (like the quadrupollines and the non-diagram lines).

The present authors used Bragg's spectrographic arrangement with Kunzl's⁴⁾ focustion. The radius of curvature of the bent crystal was 8 cm, its dimensions $3,5 \times 2,5$ cm², its thickness 1 mm. Correspondingly to the curvature of the crystal the radius of the spectrograph was 37 cms. The lines were recorded in the first order.

Photographic methods with plane crystals reveal only the lines $\beta_{1,3}$ and β_2 except in few light elements, where Beuthe⁵⁾ found and Leide⁶⁾ a new line in Mo, which was subsequently found in other elements and termed β_4 . Bloch and Ross⁷⁾ have examined the range of Mo lines with a double crystal spectrometer by means of an ionization record; they found lines of wave lengths 627,691 X. U., 627,019 X. U. and 625,646 X. U.; the latter two lines are now termed β_6 and β_5 . The authors point out that the condition of obtaining such lines is a perfect crystal; they used calcite which has been etched.

Other lines of very faint intensity in the Mo β group were found photographically only by the introduction of focusing methods.⁸⁾ In this way the spectrographic luminosity is considerably increased, so that the time of exposure can be shortened and thus the photographic blackening due to diffuse radiation lessened. But even then the new lines are shown only very indistinctly on the background of continuous radiation. Cauchois and Ingelstam⁹⁾ tried to remove this continuous radiation, due to reflexions of higher orders, by suitable absorption filters. In their work they used Montmatre gypsum and cut plates of quartz and topaz, elastically deformed into rotational cylindrical surfaces. Such focusing methods depend, however, on a number of geometrical conditions for perfect image, which require very difficult technical adjustment. Moreover, the crystals must be perfect and as elastic as possible. Otherwise the bending of the crystal into the cylindrical surface, as Cauchois supposes, does not deform the elementary crystals but only changes their orientation, keeping the angles between the atomic planes of the mosaic crystal and the plane perpendicular to the plane which passes through the centre of the mosaic crystal, unchanged.

The crystals used by the above mentioned authors were deformed elastically. The possibility of using a plastically deformed rocksalt crystal was first pointed out — as mentioned above — by

Hámos. Rocksalt crystals are usually regarded as imperfect. According to Ewald and Renninger¹⁰⁾ only small rocksalt crystals give a reflexion of an ideal structure, whereas larger surfaces show a mosaic structure. However, it is interesting that e. g. Beuthe found the line β_5 in light elements with rocksalt, which proves that its reflexion was faultless.

As pointed out above, the present authors used the plastically deformed rocksalt crystal bent by their own method and investigated its properties in Bragg's spectrograph modified by Kunzl.¹¹⁾ In this arrangement a bunch of rays emerging from the slit impinges on the cylindrically bent crystal so that the axis of the cylinder is perpendicular to the axis of the spectrograph; the radius of curvature of the crystal is given as $\varrho = R \sin \varphi$, where R denotes the spectrograph radius and φ the glancing angle. Through this arrangement the image on the film is brought to the slit („stigmatic image“). The divergent rays are thus focussed vertically similarly as in Gouy's method, and differ in this from the methods of Johann and Cauchois, which focus the horizontal rays³⁾.

With our arrangement we were able to obtain in the $K\beta$ group of Mo all lines hitherto ascertained except the line β_{4x} as given in Table 1.

Table 1.

	λ X. U.	ν/R mes.	ν/R calc.
β_4	618,65	1473,19	1473,0
β_2	(619,70)		
β_3	{ 621,79	1465,56	
	{ 622,25	1464,47	—
β_9	624,31	1459,63	—
β_5	625,72	1456,34	1456,3
β_6	627,35	1452,56	—
	627,99	1451,08	—
β_7	628,96	1448,85	—
β_1	(630,978)		
β_3	(631,562)		
β_0	634,8	1435,5	1435,9
η	{ 636,4		—
	{ 639,2		—

The wave lengths of the lines are referred to the lines $\beta_{1,3}$ and β_2 the value of which are given in brackets. In Table 2 the comparison of values found by Bloch and Ross, Carlsson and Ingelstam, Cauchois and Hulubei are compared to ours.

The comparison reveals a fair agreement; only the accuracy given by Bloch and Ross seems overestimated, since other values differ even in tenths of X. U.

Table 2.

	Carlson (Ingelstam)	Hulubei- Cauchois	Bloch-Ross	Ingelstam	Bačkovský- Nepřašová
β_4	618,73 X. U.	618,64 X. U.	618,8 X. U. †)	618,68 X. U.	618,6 X. U.
β_{4x}				618,94	
β_2				[619,70]	[619,70]
β_8		622,25		622,20	{ 621,79 622,25
β_9		624,34		624*)	624,31
β_5	625,75	625,67	625,646	625,74	625,72
β_6	627,21	627,54	627,019	627,17	627,35
			627,691	628,05*)	627,99
β_7	629,15	628,99		628,91	628,9
β_1				[630,978]	[630,978]
β_3				[631,562]	[631,562]
β_0		635,62			634,8
				637,4*)	{ 636,4 639,2
η				638,4*)	
				639,3*)	

*) Only photometrically.

†) A. Leide 1925.

The lines are well defined, as evident from the enlarged photograph of the group in the first order (fig. 2). One can well see the lines β_5 , β_6 ; even the lines $\beta_{8,9}$ are faintly indicated. The line β_7 as well as β_4 coalesce at overexposure practically with the strong lines $\beta_{1,3}$; β_2 so that only their edges are measurable. We were unable to measure β_5 separately — as given by Ingelstam — probably since it is covered in overexposure by β_2 which is quite close to β_4 .

Besides these, we have measured one line at 628,3 X. U.; the classification of which will be possible when it will be observed in other elements. The range of η lines on the long wavelength side of the $\beta_{1,3}$ — lines — measured only by Ingelstam — is evident

on the spectrogram (fig. 3). The latter author measured these lines only photometrically. In our spectrograms we may measure their group quite well visually. The figures in Table 2 show that this group extends from 636,4 X. U. to 639,2 X. U. This agrees with Ingelstam values, who derived from the photometric curve three separate values in this group. Our spectrograms show a certain structure in these group, yet single lines are not well distinguished. Besides these Cauchois found a line 635,62 X. U. X and termed

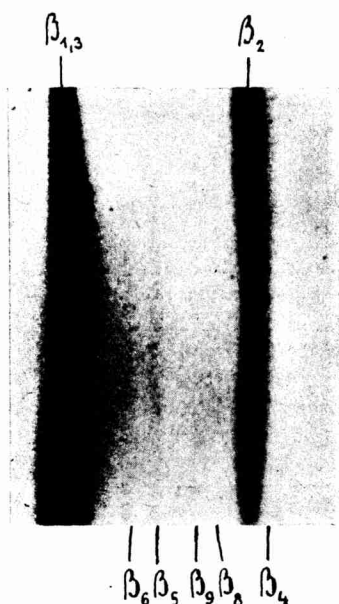


Fig. 2.

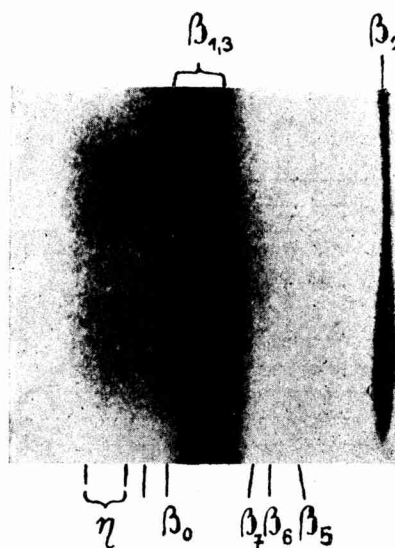


Fig. 3.

it β_0 which Ingelstam, however, has not confirmed. In that place we have measured a line of wave length X 634,8 X. U., which corresponds to $\nu/R = 1436,80$. This value agrees well with that calculated from the Bohr-Coster scheme for the forbidden transition MK, at which the quantum number l does not change. The calculated value $\nu/R = 1435,9$, so that $\lambda = 634,63$ X. U. The existence of this line and occasional analogous lines $L_I \rightarrow K$, $N_I \rightarrow K$ would indicate that besides the transitions $M_{IV,V} \rightarrow K$, $N_{IV,V} \rightarrow K$, which were explained as quadrupol — lines, there are in reality also transitions $\Delta l = 0$, which would contradict the rules of selection. The transition $N_I \rightarrow K$, whose value $\nu/R =$

$= 1468,5 \times \lambda = 620,6 \times \text{U.}$, is, however difficult to be found, as it comes too close to the intense line β_2 which would cover it in overexposure.

Although β_5 was found in several spectrograms in various intensities, its widening towards longer wave-lengths has not been observed although Bloch and Ross give its widening as $0,4 \times \text{U.}$ and explain it as the Auger — effect accompanying the quadrupol-line. — Ingelstam's results also seem to indicate that such a widening does not take place.

The level scheme of our lines is given in the fig. 4.

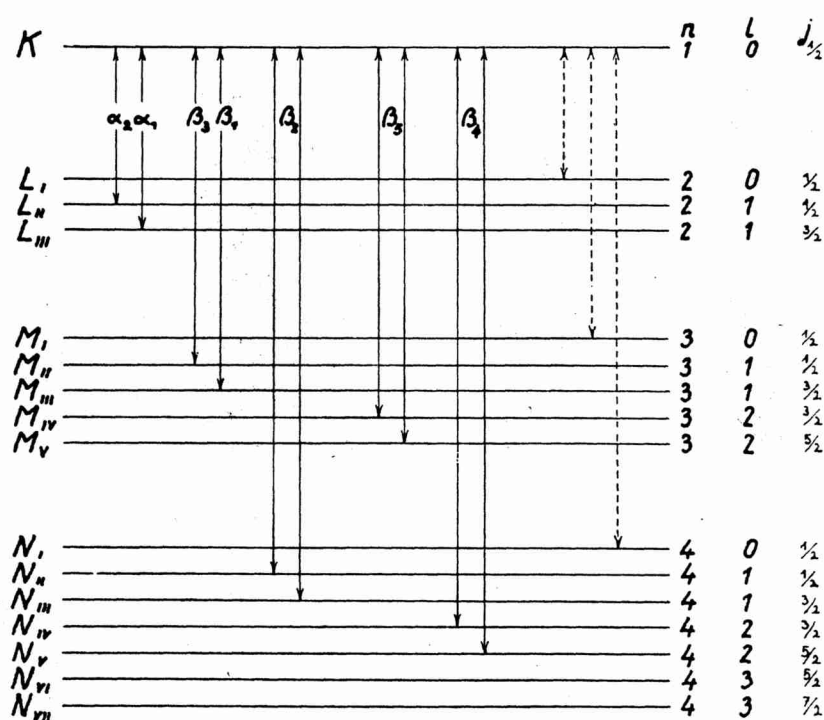


Fig. 4.

The greatly overexposed and coalescing lines $\beta_{1,3}$ and β_2 shown on some spectrograms, exhibit in their middle part a small widening towards longer wave-lengths. This effect is explained by the widening of the bunch of rays owing to its reflexion on the mosaic crystal in Bragg's arrangement of the spectrograph.

The present authors express their best thanks to profesor V. Dolejšek for his interest and help richly spent to them in this investigation.

1. L. v. Hámos, Ann. d. Phys., **17** (1933), 716; **19** (1934), 252. — 2. M. Gouy, Ann. d. Phys., **5** (1916), 241. — 3. V. Dolejšek - M. Tayerle, C. R., Dezember, 1937. — 4. V. Kunzl, C. R., **201** (1935), 656. — 5. H. Beuthe, Zs. f. Phys., **60** (1930), 603. — 6. A. Leide, C. R., **180** (1925), 1203. — 7. F. Bloch - P. A. Ross, Phys. Rev., **47** (1935), 884. — 8. H. Johann, Zs. f. Phys., **69** (1931), 185; Y. Cauchois, Journ. de Phys. et le Radium, (7), **3** (1932), 320; (7), **4** (1933), 61; Ann. de Phys., (11), **1** (1934), 215. — 9. E. Ingelstam, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Sec. IV., **10** (1937), No 5. — 10. P. P. Ewald - M. Renninger, Int. Conf. on Phys. London 1934, given after E. Ingelstam, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups., Sec. IV., **10** (1937), No 5, 12. — 11. V. Kunzl, l. c.

*

O fokusačním spektrografu s plasticky deformovaným krystalem a výsledcích v $K\beta$ skupině molybdenu.

(Obsah předešlého článku.)

Autoři podávají metodu k plastické deformaci krystalů. Touto metodou se docílí rovnoměrného zakřivení do rotační válcové plochy, jak se užívá u krystalů, které lze ohýbat elasticky v metodách fokusačních pro paprsky X. Současně podávají autoři výklad, proč nemohlo býti dosud použito plasticky deformovaných krystalů pro reflexi paprsků X.

Používají ocelových pružin řešených jako nosník s rovnoměrně namáhanými vlákny průřezu (podle způsobu Dolejšek-Tayerle). Pružiny jsou z ocele Poldi AKVN, jejíž pružnost v teplotním oboru kolem 300° stoupá.

Takto válcově deformovaných krystalů NaCl bylo použito ve fokusační metodě Kunzlově s Braggovým uspořádáním ke studiu skupiny β serie K molybdenu. Na tomto prvku lze nejlépe porovnatí reflektční mohutnost užitého krystalu a světelnost užitých metody, neboť v poslední době byly nalezeny u něho fokusačními metodami (typu Cauchois) s užitím elasticky deformovaných krystalů nové zakázané čáry β_4, β_5 (quadrupollinie) a čáry nediagramové $\beta_{4x}, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9$. Mimo to na dlouhovlnné straně nalezen obor několika čar, nazvaných Ingelstamem analogicky k lehčím prvkům obor η .

Všechny tyto čáry, nalezené Cauchois a Ingelstamem byly autory potvrzeny až na čáru β_{4x} ; mimo to nalezeny některé čáry další, jejichž klasifikace bude podána později po studiu u sousedních prvků.

Quadrupol linie β_4, β_5 byly měřeny také Blochem a Rossem pomocí doublecrystalspectrometru s ionisačním záznamem. Tito autoři pozorovali u nich rozšíření na stranu delších vlnových délek, které vysvětlují zjevem Augerovým při vzniku quadrupollinií. Toto rozšíření však nebylo v této práci potvrzeno.

Podle výsledků získaných krystaly deformovanými popsaným způsobem je viděti, že byla získána při krajní rozlišovací mohutnosti značná světelnost, která se úplně vyrovná světelnosti moderních metod s elasticky ohnutými krystaly.

**SBORNÍK
JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ**

Číslo XX

PhDr. VÁCLAV HLAVATÝ,
profesor Karlovy university

Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet.

80 445 str. 31 obr.

1937

V plátně váz. Kč 154,—

Pro tuto knihu jako učebnici jest originelní a charakteristické, že autor nepočíná tensorovým počtem, ani jej neklade na konec, nýbrž slučuje jej s diferenciálněgeometrickou látkou tak, že čtenář domnívající se, že studuje „názornou“ geometrii v dvoj- nebo trojrozměrném euklidovském prostoru, najednou zpozoruje, že si mimochodem osvojil i tensorový počet a naopak.

Odborníka upoutá zase podmaňující systematika knihy. Zejména jest upozorniti na pronikavé užití kovariantní derivace, zvláště k odvození míry křivosti, na pojednání o obecném problému rozvinutí ploch, na deduktivní krásy oddílu o druhé základní formě ploch a na teorii přímkových ploch v oddílu o speciálních plochách.

Lze dostati u každého knihkupce nebo přímo u nakladatele

Jednota československých matematiků a fysiků,

Praha II, Žitná 25.

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

**přesně vyrobené
spolehlivě fungující
odborně vyzkoušené**

**v y r á b í a d o d á v á,
všechny přístroje a pomůcky kterékoliv výroby
pečlivě a odborně opravuje**

FYSMA,

společnost s ručením omezeným,

založená Jednotou československých matematiků a fysiků



přesídlila



PRAHA II, Žitná 25.

Telefon 23714, 29308.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8½—12½ a od 14—18 hod. kromě soboty odpoč., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihotiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohledací úřad Praha 25.