

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0067|log2

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 67.



SEŠIT 1.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Redakční rada:

O. BORŮVKA, BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ,
V. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER, K. RYCHLÍK,
J. SAHÁNEK, V. ŠTECH, FRANT. VYČICHLO,
AL. WANGLER, FR. ZÁVIŠKA, AUG. ŽÁČEK

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty



PRAHA 1937

Ročně 4 sešity

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.
Abonnement pour un an 120 Kč. Chèques postaux: Praha 13103.

Année 67

Fascicule 1

1937/38

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ

Část matematická — Travaux mathématiques

- M. H. Stone, Cambridge, Mass., USA: Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics — Topologická interpretace distributivních mříží a brouwerovské logiky 1
- František Vyčichlo, Praha XII, Rumunská 14: Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe — Invarianty tensorového pole v projektivním prostoru 26

Část fyzikální — Travaux de physique

- František Link, Praha VIII, Královská 178: L'influence de la saison et du climat sur les réfractions astronomiques — Vliv ročních období a podnebí na astronomickou refrakci 62
- Zdeněk Kopal, Praha XVI, U Pernikářky 1423: The Orbits about an Oblate Spheroid — O drahách kolem rotačního sferoidu 67
- Bohumil Šternberk, Stará Ďala: Fotometrický průřez hlavy komety Finlerovy v blízkosti perihelu — Le profil photométrique de la tête de la comète Finler au voisinage du périhélie 76
- Bohumila Nováková, Stará Ďala: Změna výšky chromosféry — Changement des hauteurs des différentes couches dans la chromosphère solaire 82

ČASOPIS
PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY A FYSIKY
ČÁST VĚDECKÁ

Hlavní redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Členové redakční rady:

**OTAKAR BORŮVKA, BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, EDUARD ČECH,
VÁCLAV HLAVATÝ, VLADIMÍR KOŘÍNEK, MILOŠ KÖSSLER
a KAREL RYCHLÍK pro část matematikou,
VÁCLAV DOLEJŠEK, BOHUSLAV HOSTINSKÝ, JOSEF SAHÁNEK,
FRANTIŠEK ZÁVIŠKA a AUGUST ŽÁČEK pro část fyzikální.**

Vydává

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty.

ROČNÍK 67

1987-88



V PRAZE 1938

Nákladem Jednoty československých matematiků a fyziků v Praze
Knih tiskárna „Prometheus“, Praha VIII, Rokoska 94

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota československých matematiků a fyziků, Praha

Année 67

1937—38

Obsah — Sommaire

T. G. Masaryk †	
Adresse à M. K. Petr	233
Le 75ième anniversaire de la „Jednota československých matematiků a fyziků“	234
Část matematická — Travaux mathématiques	
Felix Behrend, Praha: On sequences of integers containing no arithmetic progression — O posloupnostech celých čísel, neobsahujících aritmetické posloupnosti	235
A. Erdélyi, Brno: Asymptotische Darstellung der Whittakerschen Funktionen für große reelle Werte des Argumentes und der Parameter — Asymptotické vyjádření Whittakerových funkcí pro velké reálné hodnoty proměnné a parametrů	240
Vojtěch Jarník, Praha: Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes — Nový důkaz jedné Chinčínovy věty	109
Josef Klíma, Brno: Zvláštní lineární zobrazení přímkového prostoru v množství bodových párů roviny — Sur une représentation linéaire spéciale de l'espace des droites par la variété des couples des points dans un plan	114
Vladimír Kořínek, Praha: Correction concernant l'article: „Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes“, publié dans ce Journal t. 66, p. 261—286 — Oprava k článku „Sur...“, otištěnému v tomto časopise, roč. 66, str. 261—286	209
Ernst Lamm, Praha: Zum Interpolationsprobleme im Kreisringe regulärer Funktionen I. — K problému interpolace funkcí regulárních v mezikružích I	103
K. Mack, Praha: Eine mit dem vollständigen Vierseit zusammenhängende Schließungsaufgabe — O konfiguraci rovnoběžníků při úplném čtyřstranu	199
Druckfehlerberichtigung zu diesem Aufsatz — Oprava tiskové chyby	239
Josef Novák, Brno: Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti — Sur deux espaces réguliers et dénombrables sans points de caractère dénombrable	97
Bedřich Pospíšil, Brno: Mohutnost prostoru s hustou částí dané mohutnosti — Sur la puissance d'un espace contenant une partie dense de puissance donnée	89
Bedřich Pospíšil, Brno: Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné — O počtu topologií na dané množině	100
Bedřich Pospíšil, Brno: Théorèmes d'existence pour les caractères des points — Existenční teoremy pro charaktery bodů	249

Universitätsbibliothek
Göttingen

Z40.5984

Peter Scherk, Praha: Über einen Satz von Khintchine — O jedné Chinčinové větě	263
Jan Srb, Olomouc: Několik konstrukcí kvadratické nadplochy čtyř- rozměrného prostoru ze 14 bodů — Quelques constructions de l'hyperquadrique dans l'espace à quatre dimensions, déterminée par quatorze points	203
Jan Srb, Olomouc: O rozkladu některých kolineací prostoru $2n$ -roz- měrného v produkt harmonických homologií — Sur la décompo- sition de certaines homographies de l'espace à $2n$ dimensions en un produit d'homologies harmoniques	256
M. H. Stone, Cambridge, Mass.: Topological Representations of Distributive Lattices and Brouwerian Logics — Topologická interpretace distributivních mříží a brouwerovské logiky	1
František Vyčichlo, Praha: Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe — Invarianty tensorového pole v pro- jektivním prostoru	26
R. L. Wilder, Ann Arbor, Mich.: Sets which satisfy certain avoida- bility conditions — Množiny, na nichž se lze vyhnouti danému bodu	185
Část fyzikální — Travaux de physique	
J. Bačkovský - V. Dolejšek, Praha: O rozlišovací mohutnosti paprsků X na plasticky deformovaných krystalech a o emisní době při vzniku $K\alpha$ mědi a molybdenu — The resolving power on the plastically deformed rocksalt crystals and the time of emission of the lines $Cu K\alpha$ and $Mo K\alpha$	211
M. Bačkovský - M. Neprašová, Praha: Results in the K_{β} group of molybdenum obtained with a spectrograph containing a plasti- cally deformed rocksalt crystal — O fokusačním spektrografu s plasticky deformovaným krystalem a výsledcích v K_{β} skupině molybdenu	176
Filip Bock, Brno: Kyvadlo s oscilujícím závěsem — La pendule au point de suspension oscillant	270
Arnošt Dittrich, Třeboň: Délka dne v babylonských tabulkách měsíčních — La longueur du jour dans les tables lunaires des Babyloniens	216
Vladimír Guth, Ondřejov: Určení výšek a viditelné části dráhy meteoru grafickou metodou — Détermination des hauteurs et de la trajectoire réelle d'un météor par la méthode graphique	132
Zdeněk Horák, Praha: Určení radiantu roje z pozorovaných stop meteorů — Sur la détermination du radiant d'un courant météori- que observé	222
Zdeněk Kopal, Praha: The Orbits about an Oblate Spheroid — O drahách kolem rotačního sferoidu	67
František Link, Praha: L'influence de la saison et du climat sur les réfractions astronomiques — Vliv ročních období a podnebí na astronomickou refrakci	62
J. M. Mohr, Praha: On the question of the possible rotation of the local cluster — K otázce možné rotace lokálního shluku hvězd v okolí Slunce	163
Vincenc Nechvíle, Praha: Contribution à la théorie du télescope aplanétique Ritchey-Chrétien — Příspěvek k teorii Ritchey- Chrétienova aplanatického teleskopu	142

A. Němejcová-Kochanovská, Praha: Vliv nedokonalé štěpnosti na přesnost měření ve spektroskopii paprsků X — The influence of imperfect cleavability of crystals on the accuracy of measurements in the X-rays spectroscopy	288
Bohumila Nováková, Stará Ďala: Změna výšky chromosféry — Changement des hauteurs des différentes couches dans la chromosphère solaire	82
Jaroslav Procházka, Praha: Sur la stabilité d'une lunette meridiennne — O stabilitě průchodního stroje	157
Zdeněk Sekera, Praha: Über die Vergleichsmöglichkeit der visuellen und lichtelektrischen Messung der Himmelpolarisation — O možnosti srovnání fotoelektrického a vizuálního měření polarisace	278
Jindřich Svoboda, Praha: Experimentální stanovení osobní chyby u cirkumzenitálu — Détermination expérimentale de l'erreur personnelle dans des observations avec l'appareil circumzénithal Nušl-Frič	168
Jaroslav Štěpánek, Ondřejov: Přehled fotografického sledování komety Finslerovy (1937 f.) na ondřejovské observatoři „Žalov“ Státní hvězdárny v Praze — Résultats des observations photographiques de la comète Finsler (1937 f.) à l'Observatoire „Žalov“ de l'Observatoire National de Prague	151
Bohumil Šternberk, Stará Ďala: Fotometrický průřez hlavy komety Finslerovy v blízkosti perihelu — Le profil photométrique de la tête de la comète Finsler au voisinage du perihélie	76

ČÁST MATEMATICKÁ

**Topological Representations of Distributive
Lattices and Brouwerian Logics.**

M. H. Stone (Cambridge, Mass., U. S. A.).

(Received December 9, 1936.)

In a series of papers, the writer has developed a theory of Boolean algebras dealing with their algebraic structure, their representation by algebras of classes, and their relations to general topology.¹⁾ It is the object of the present paper to outline an extension of the main features of this theory to the more general systems known variously as distributive lattices, *C*-lattices, or arithmetic structures.²⁾

From certain points of view, the theory of distributive lattices is of secondary interest compared with that of Boolean algebras. Thus the theorem of Mac Neille,³⁾ which states that every distributive lattice can be imbedded by a purely algebraic construction in a Boolean algebra, shows that distributive lattices are not significantly more general than Boolean algebras. In addition, the theory of distributive lattices gains in generality only at the sacrifice of a certain simplicity and symmetry, as we shall see below. Finally, certain parts of the theory do not have even the merit of novelty, the theorem that every distributive lattice can be isomorphically

¹⁾ Stone, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 20 (1934), pp. 197—202; *ibid.*, 21 (1935), pp. 103—105; American Journal of Mathematics, 57 (1935), pp. 703—732; Transactions of the American Mathematical Society, 40 (1936), pp. 37—111; and an unpublished paper, „Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology“, which has been submitted to the editors of the Transactions of the American Mathematical Society.

²⁾ The term „distributive lattice“, which we shall use here, was introduced by Mac Neille, Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 22 (1936), pp. 45—50; „*C*-lattice“ by Garrett Birkhoff, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 29 (1933), pp. 441—464; „arithmetic structure“ by Ore, Annals of Mathematics, (2) 36 (1935), pp. 406—437.

³⁾ Mac Neille, Harvard doctoral dissertation, The Theory of Partially Ordered Sets, 1935, a summary of which appeared in Proceedings of the National Academy of Sciences, U. S. A., 22 (1936), pp. 44—50.

represented by an algebra of classes having been discovered and published by Garrett Birkhoff.⁴⁾

In spite of these considerations, the actual development of the present theory serves a useful purpose in providing a mathematical background against which the theory of Boolean algebras can be more fully appreciated. It also offers a somewhat deeper algebraic analysis of the theorems already known.

The connections between Boolean algebras and classical logic, in the symbolic statement of Russell and Whitehead, are well known. We may describe them, without too scrupulous a regard for detail, by saying that every logical system of propositions can be represented by a Boolean algebra. Familiar evidence in support of this statement is found in the use of Leibnitz's diagrams to represent the logical relations between propositions. Turning to Brouwerian logic, we are naturally led to seek a similar representation. In the second part of the present paper, to which the theory of distributive lattices is a necessary preliminary, we shall construct such a representation for a Brouwerian system of propositions, relying upon the symbolic statement of Heyting.⁵⁾ The most noteworthy feature of this representation is its topological character: whereas the Leibnitz diagrams for classical logic employ classes and the usual combinatorial operations upon them, the corresponding diagrams for Brouwerian logic employ also certain topological operations upon classes.

Part I. Distributive Lattices.

§ 1. Definition and Algebraic Properties. A distributive lattice (or *C*-lattice) has been defined⁶⁾ as a system with double composition (we shall indicate the results of performing the two compositions by $a \vee b$ and $a \cdot b$ or ab respectively) in which the following rules of operation are valid:

- (1) $a \vee a = a$, $aa = a$;
- (2) $a \vee b = b \vee a$, $ab = ba$;
- (3) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a(bc) = (ab)c$;
- (4) $ab = a$ implies and is implied by $a \vee b = b$;
- (5) $a(b \vee c) = ab \vee ac$, $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$.

Since these rules of operation bear symmetrically on the two compositions, every distributive lattice has the following property of

⁴⁾ Garrett Birkhoff, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29 (1933), pp. 441—464, Theorem 25.2.

⁵⁾ Heyting, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse*, 1930, pp. 42—56.

⁶⁾ Garrett, Birkhoff, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29 (1933), pp. 441—464; especially pp. 442, 453.

duality: any rule of operation remains valid under interchange of the two fundamental operations.

To indicate that the elements a and b satisfy the equivalent relations (4), we shall write $a < b$ or $b > a$. The relations $<$ and $>$ have a number of simple properties which we recall without proof: $a < a$; $a < b$ and $b < c$ imply $a < c$; $a < b$ and $b < a$ imply $a = b$; $ab < a$; $a < a \vee b$; $a < c$ and $b < d$ imply $ab < cd$ and $a \vee b < c \vee d$.

If a distributive lattice contains an element a such that $a < x$ for every element x in the lattice, then this element is uniquely determined and will be called the zero-element or zero. We shall use the symbol 0 for a zero-element. Similarly, if a distributive lattice contains an element a such that $x < a$ for every element x in the lattice, then this element is uniquely determined and will be called the unit-element or unit. We shall use the symbol e for a unit-element. It is easily seen that a distributive lattice with only a finite number of elements a_1, \dots, a_n has both a zero and a unit: for the elements $a_1 \dots a_n$ and $a_1 \vee \dots \vee a_n$ respectively are such. In general, however, a distributive lattice has neither a zero nor a unit; but it is possible to adjoin a zero 0 by defining $0 \vee a = a \vee 0 = a$, $a0 = 0a = 0$, $0 \vee 0 = 0$, $00 = 0$, or to adjoin a unit e by defining $e \vee a = a \vee e = e$, $ae = ea = a$, $e \vee e = e$, $ee = e$.

The systems called generalized Boolean algebras⁷⁾ are characterized among all distributive lattices by the existence of „relative complements“: if $a < b$, then there exists an element c such that $a \vee c = b$, $ac < x$ for every element x in the lattice. Similarly, Boolean algebras are characterized by the existence of „complements“: if a is an arbitrary element, then there exists an element a' such that $a \vee a' = e$, $aa' < x$ for every element x in the lattice.

From the preceding remarks, we see that a two-element distributive lattice consists of a zero and a unit alone. The two-element distributive lattices are therefore mutually isomorphic Boolean algebras, the typical example being the system consisting of two elements 0 and e with the rules $0 = 0$, $e = e$, $0 \neq e$, $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee e = e \vee 0 = e \vee e = e$, $0 \cdot 0 = 0e = e0 = 0$, $ee = e$, $0 < 0$, $0 < e$, $e < e$, $0' = e$, $e' = 0$.

§ 2. Ideals. It is convenient to distinguish the following types of subsystem in a distributive lattice:

Definition 1. A non-void subclass α of a distributive lattice A is said to be a multiplicative ideal or μ -ideal if

- (1) $a \in \alpha$ and $b \in \alpha$ imply $a \vee b \in \alpha$;
- (2) $a \in \alpha$ and $b \in A$ imply $ab \in \alpha$.

⁷⁾ Stone, American Journal of Mathematics, 57 (1935), pp. 703—732.

Dually, a non-void subclass α is said to be an additive ideal or α -ideal if

- (1) $a \in \alpha$ and $b \in A$ imply $a \vee b \in \alpha$;
- (2) $a \in \alpha$ and $b \in \alpha$ imply $ab \in \alpha$.

It is easily seen that the only class α which is both a μ -ideal and an α -ideal is the class e consisting of all elements of A : for $a \in \alpha$ and $b \in A$ imply $a \vee b \in \alpha$; and $a \vee b \in \alpha$ and $b \in A$ then imply $b = (a \vee b) b \in \alpha$.

If \mathfrak{s} is any non-void subclass of a distributive lattice A , the class $\alpha_\mu(\mathfrak{s})$ of all elements c such that $c < a_1 \vee \dots \vee a_n$ for some elements a_1, \dots, a_n in \mathfrak{s} is easily seen to be the least μ -ideal containing \mathfrak{s} : it is a μ -ideal, it contains \mathfrak{s} , and it is contained in every μ -ideal which contains \mathfrak{s} . We call $\alpha_\mu(\mathfrak{s})$ the μ -ideal generated by \mathfrak{s} . Dually, the class $\alpha_\alpha(\mathfrak{s})$ of all elements c such that $c > a_1 \dots a_n$ for some elements a_1, \dots, a_n in \mathfrak{s} is the least α -ideal containing \mathfrak{s} . We call $\alpha_\alpha(\mathfrak{s})$ the α -ideal generated by \mathfrak{s} . When \mathfrak{s} consists of a single element c , we write $\alpha_\mu(c)$, $\alpha_\alpha(c)$ for $\alpha_\mu(\mathfrak{s})$, $\alpha_\alpha(\mathfrak{s})$ respectively; and call these ideals the principal μ -ideal and principal α -ideal, respectively generated by c . Moreover, if \mathfrak{s} is the union of a class \mathfrak{A} of μ -ideals α , we see that $\alpha_\mu(\mathfrak{s})$ is the class of all elements c such that $c = a_1 \vee \dots \vee a_n$ for some elements $a_1 \in \alpha_1 \in \mathfrak{A}, \dots, a_n \in \alpha_n \in \mathfrak{A}$. Dually, if \mathfrak{s} is the union of a class \mathfrak{A} of α -ideals α , we see that $\alpha_\alpha(\mathfrak{s})$ is the class of all elements c such that $c = a_1 \dots a_n$ for some elements $a_1 \in \alpha_1 \in \mathfrak{A}, \dots, a_n \in \alpha_n \in \mathfrak{A}$.

If \mathfrak{A} is any non-void class of μ -ideals α , their sum $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \alpha$ is the least μ -ideal containing every α in \mathfrak{A} ; and their product $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \alpha$ is the greatest μ -ideal contained in every α in \mathfrak{A} , if such exist. It is evident that $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \alpha$ is the μ -ideal generated by the union of the classes α in \mathfrak{A} or, alternatively, the product of all μ -ideals containing every α in \mathfrak{A} . Similarly, it is evident that $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \alpha$ must coincide with the intersection of the classes α in \mathfrak{A} ; in particular, the product exists if and only if the μ -ideals α have a common element. In case the distributive lattice A has a zero-element 0 , then 0 belongs to every μ -ideal α in A : for $a \in \alpha$ and $0 \in A$ imply $0 = a \cdot 0 \in \alpha$. It follows that in this case the product of μ -ideals is defined without restriction. In any case, the product of a finite number of μ -ideals $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ is defined: for $a_1 \in \alpha_1, \dots, a_n \in \alpha_n$ imply $a_1 \dots a_n \in \alpha_1, \dots, a_1 \dots a_n \in \alpha_n$. Indeed, the product consists of all elements c such that $c = a_1 \dots a_n$ where $a_1 \in \alpha_1, \dots, a_n \in \alpha_n$. If α and β are μ -ideals, it is convenient to denote their sum and product by $\alpha \vee \beta$

and $a\mathfrak{b}$ respectively. Dually, we may define the sum and product of α -ideals: we have only to repeat the preceding statements replacing the term „ μ -ideal“ by the term „ α -ideal“, the element 0 by the unit-element e , the combination ab by the combination $a \vee b$. For the sum and product of two α -ideals \mathfrak{a} and \mathfrak{b} we shall write $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$ and $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ respectively.

Concerning the operations upon ideals, we now have the following result:

Theorem 1. *The relations*

- (1) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;
- (2) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$;
- (3) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ if and only if $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ or, equivalently, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$;
- (4) $\mathfrak{a} \vee (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) \vee \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$;
- (5) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c})$;
- (6) if \mathfrak{B} is a non-void class of non-void classes \mathfrak{B} of ideals \mathfrak{a} and if $\mathfrak{C} = \sum_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{B}$, then

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}} (\mathfrak{S}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = \mathfrak{S}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{P}_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}} (\mathfrak{P}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = \mathfrak{P}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{C}} \mathfrak{a},$$

both members of the second equation existing if either does;
 (7) if \mathfrak{b} is an ideal and \mathfrak{B} a non-void class of ideals, then

$$\mathfrak{b} \mathfrak{S}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}\mathfrak{b};$$

hold in the class \mathfrak{S}_μ of all μ -ideals in a distributive lattice and also in the class \mathfrak{S}_α of all α -ideals in a distributive lattice. Under the formation of finite sums and products \mathfrak{S}_μ and \mathfrak{S}_α are distributive lattices.

The proof of the relations (1)–(7) in \mathfrak{S}_μ can be taken almost word for word from the proofs of Theorems 15 and 18 of our paper „The Theory of Representations for Boolean Algebras“, Transactions of the American Mathematical Society, 40 (1936), pp. 37–111. The proof of the corresponding relations in \mathfrak{S}_α can then be obtained by appropriate dualization. Hence there is no need for us to go into detail.

We have also the following result:

Theorem 2. *The class \mathfrak{P}_μ of all principal μ -ideals in a distributive lattice A is isomorphic to A in accordance with the relations*

- (1) $\mathfrak{a}_\mu(b) = \mathfrak{a}_\mu(c)$ if and only if $b = c$;
- (2) $\mathfrak{a}_\mu(b \vee c) = \mathfrak{a}_\mu(b) \vee \mathfrak{a}_\mu(c)$, $\mathfrak{a}_\mu(bc) = \mathfrak{a}_\mu(b) \mathfrak{a}_\mu(c)$.

Similarly, the class \mathfrak{P}_α of all principal α -ideals is dually-isomorphic to A in accordance with the relations

- (1) $\mathfrak{a}_\alpha(b) = \mathfrak{a}_\alpha(c)$ if and only if $b = c$;
- (2) $\mathfrak{a}_\alpha(b \vee c) = \mathfrak{a}_\alpha(b) \mathfrak{a}_\alpha(c)$, $\mathfrak{a}_\alpha(bc) = \mathfrak{a}_\alpha(b) \vee \mathfrak{a}_\alpha(c)$.

It is evident that $\mathfrak{a}_\mu(b)$ is the class of all elements x such that $x < b$. Hence $\mathfrak{a}_\mu(b) = \mathfrak{a}_\mu(c)$ if only if $c < b$, $b < c$; that is, if and only if $b = c$. Since $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \vee \mathfrak{a}_\mu(c)$ if and only if $x < x_1 \vee x_2$ where $x_1 < b$ and $x_2 < c$, we see that $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \vee \mathfrak{a}_\mu(c)$ implies $x < b \vee c$, $x \in \mathfrak{a}_\mu(b \vee c)$, while $x \in \mathfrak{a}_\mu(b \vee c)$ implies $x = (b \vee c)x = (bx) \vee (cx)$, $bx < b$, $cx < c$ and hence $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \vee \mathfrak{a}_\mu(c)$. Hence $\mathfrak{a}_\mu(b \vee c) = \mathfrak{a}_\mu(b) \vee \mathfrak{a}_\mu(c)$. Since $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \mathfrak{a}_\mu(c)$ if and only if $x = x_1 x_2$ where $x_1 < b$ and $x_2 < c$, we see that $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \mathfrak{a}_\mu(c)$ implies $x < bc$, $x \in \mathfrak{a}_\mu(bc)$ while $x \in \mathfrak{a}_\mu(bc)$ implies $x = xx < bc$, $x < b$, $x < c$ and hence $x \in \mathfrak{a}_\mu(b) \mathfrak{a}_\mu(c)$. Hence $\mathfrak{a}_\mu(bc) = \mathfrak{a}_\mu(b) \mathfrak{a}_\mu(c)$. Thus \mathfrak{P}_α is isomorphic to A . The discussion of \mathfrak{P}_α is now obtained by appropriate dualization.

§ 3. Prime and Divisorless Ideals. We shall now consider special types of μ -ideal and of α -ideal, introduced in two definitions.

Definition 2. A μ -ideal \mathfrak{p} is said to be prime if it is a proper subclass of the distributive lattice A and if $ab \in \mathfrak{p}$ implies $a \in \mathfrak{p}$ or $b \in \mathfrak{p}$. Similarly, an α -ideal \mathfrak{q} is said to be prime if it is a proper subclass of A and if $a \vee b \in \mathfrak{q}$ implies $a \in \mathfrak{q}$ or $b \in \mathfrak{q}$.

Definition 3. A μ -ideal \mathfrak{p} is said to be divisorless if it is a proper subclass of A and if, whenever \mathfrak{a} is a μ -ideal, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}$ implies $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ or $\mathfrak{a} = e = A$. Similarly an α -ideal \mathfrak{q} is said to be divisorless if it is a proper subclass of A and if, whenever \mathfrak{a} is an α -ideal, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{q}$ implies $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ or $\mathfrak{a} = e = A$.

The relations between these types of ideal are discussed in the following theorems.

Theorem 3. Every divisorless ideal is prime.

Let \mathfrak{p} be a divisorless μ -ideal and let a and b be elements such that $ab \in \mathfrak{p}$. If a is not in \mathfrak{p} , then the μ -ideal $\mathfrak{a}_\mu(a) \vee \mathfrak{p}$ contains a and \mathfrak{p} so that $\mathfrak{a}_\mu(a) \vee \mathfrak{p} = e$, $b \in \mathfrak{a}_\mu(a) \vee \mathfrak{p}$. From the latter relation we have $b < a \vee x$ where $x \in \mathfrak{p}$. Hence we see that $b = bb < ab \vee bx$, $ab \in \mathfrak{p}$, $bx \in \mathfrak{p}$. We conclude that $b \in \mathfrak{p}$. Thus the ideal \mathfrak{p} is prime. The case where \mathfrak{q} is a divisorless α -ideal is treated dually.

Theorem 4. If A is partitioned into disjoint subclasses \mathfrak{p} and \mathfrak{q} then

- (1) \mathfrak{p} is a μ -ideal and \mathfrak{q} an α -ideal only if both are prime;
- (2) \mathfrak{p} is a prime μ -ideal if and only if \mathfrak{q} is a prime α -ideal.

If \mathfrak{p} is a μ -ideal and \mathfrak{q} an α -ideal, we show that \mathfrak{p} is prime in the following manner: if $ab \in \mathfrak{p}$, $a \in \mathfrak{q}$, $b \in \mathfrak{q}$, then $ab \in \mathfrak{q}$ by the ideal property of \mathfrak{q} ; and we have a contradiction to our assumption that \mathfrak{p} and \mathfrak{q} are disjoint. Similarly, we show by a dual proof that \mathfrak{q} is prime. If \mathfrak{p} is a prime μ -ideal, then the class \mathfrak{q} of elements which

do not belong to \mathfrak{p} is non-void. If $a \in \mathfrak{q}$ and $b \in A$, then the relation $a \vee b \in \mathfrak{p}$ would lead by the ideal property of \mathfrak{p} to the contradiction $a = a(a \vee b) \in \mathfrak{p}$; hence \mathfrak{q} contains $a \vee b$ whenever it contains a . The fact that \mathfrak{p} is prime shows that $a \in \mathfrak{q}$, $b \in \mathfrak{q}$ imply $ab \in \mathfrak{p}$ and hence $ab \in \mathfrak{q}$. Thus \mathfrak{q} is an α -ideal; and, by (1), \mathfrak{q} must be prime. Dually, when \mathfrak{q} is a prime α -ideal, the class \mathfrak{p} of all elements which do not belong to \mathfrak{q} is a prime μ -ideal.

Theorem 5. *If f is a single-valued function defined over a distributive lattice A with values in a two-element distributive lattice consisting of the elements 0 and e , then the correspondence $a \rightarrow f(a)$ is a homomorphism if and only if the classes \mathfrak{p} and \mathfrak{q} specified by the respective equations $f(a) = 0$ and $f(a) = e$ are respectively a prime μ -ideal and a prime α -ideal.*

First, let f define a homomorphism. Then \mathfrak{p} and \mathfrak{q} are non-void — in other words, f assumes both the values 0 and e . Now $a \in \mathfrak{p}$ and $b \in \mathfrak{p}$ imply $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0 \vee 0 = 0$ and hence $a \vee b \in \mathfrak{p}$; and $a \in \mathfrak{p}$ and $b \in A$ imply $f(ab) = f(a) f(b) = 0 f(b) = 0$ and hence $ab \in \mathfrak{p}$. Also $ab \in \mathfrak{p}$ implies $f(a) f(b) = f(ab) = 0$, hence $f(a) = 0$ or $f(b) = 0$, and hence $a \in \mathfrak{p}$ or $b \in \mathfrak{p}$. Thus \mathfrak{p} is a prime μ -ideal. Theorem 4 now shows that \mathfrak{q} is a prime α -ideal.

Next, let \mathfrak{p} and \mathfrak{q} be prime ideals, multiplicative and additive respectively. Since the associated function f assumes both values 0 and e , we show that it defines a homomorphism if we show that $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(ab) = f(a) f(b)$. Since $f(a \vee b) = e$ if and only if $a \vee b \in \mathfrak{q}$; since $a \vee b \in \mathfrak{q}$ if and only if one of the relations $a \in \mathfrak{q}$, $b \in \mathfrak{q}$ is valid; since $a \in \mathfrak{q}$ is equivalent to $f(a) = e$, $b \in \mathfrak{q}$ to $f(b) = e$; and since, finally, $f(a) \vee f(b) = e$ if and only if one of the relations $f(a) = e$, $f(b) = e$ is valid — we see that $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ in all cases. Since $f(ab) = 0$ if and only if $ab \in \mathfrak{p}$; since $ab \in \mathfrak{p}$ if and only if one of the relations $a \in \mathfrak{p}$, $b \in \mathfrak{p}$ is valid; since $a \in \mathfrak{p}$ is equivalent to $f(a) = 0$, $b \in \mathfrak{p}$ to $f(b) = 0$; and since, finally, $f(a) f(b) = 0$ if and only if one of the relations $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ is valid — we see that $f(ab) = f(a) f(b)$ in all cases.

The most important aspect of the theory of prime ideals is the proof of their existence in an arbitrary distributive lattice with two or more elements. We shall now state a suitable existence theorem and give for it two proofs of somewhat different character.

Theorem 6. *If the distributive lattice A contains a μ -ideal \mathfrak{a} and an α -ideal \mathfrak{b} which are disjoint, then there exists a partition of A into a prime μ -ideal \mathfrak{p} and a prime α -ideal \mathfrak{q} such that $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q}$.*

Our first proof is essentially due to Garrett Birkhoff⁸): we merely rephrase the original demonstration in the language of

⁸) Garrett Birkhoff, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 29 (1933), pp. 441—464, Theorem 21.1.

ideals. The essential step in the proof of the theorem is this: if \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are given as stated and if they do not together exhaust A , we show that there exist a μ -ideal \mathfrak{a}^* and an α -ideal \mathfrak{b}^* where $\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^* \supset \mathfrak{b}$, and $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{a}$ or $\mathfrak{b}^* \neq \mathfrak{b}$. Once we have justified this step, an obvious transfinite induction enables us to form a partition of A into a μ -ideal \mathfrak{p} and an α -ideal \mathfrak{q} such that $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{q}$; and Theorem 3 shows that both \mathfrak{p} and \mathfrak{q} are prime. It is unnecessary for us to describe the inductive construction in detail. If \mathfrak{a} and \mathfrak{b} together exhaust A , we take $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}$.

If \mathfrak{a} and \mathfrak{b} do not exhaust A , we find the indicated ideals \mathfrak{a}^* and \mathfrak{b}^* in the following way. We select an arbitrary element c in A which belongs neither to \mathfrak{a} nor to \mathfrak{b} . Then there exists no pair of elements a, b such that $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $c \vee a \in \mathfrak{b}$, and $cb \in \mathfrak{a}$: for otherwise the element $bc \vee ba = b(c \vee a)$ would belong both to \mathfrak{a} and to \mathfrak{b} . Hence $c \vee a$ belongs to \mathfrak{b} for no a in \mathfrak{a} or cb belongs to \mathfrak{a} for no b in \mathfrak{b} . If $c \vee a$ belongs to \mathfrak{b} for no a in \mathfrak{a} , we put $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_\mu(c) \vee \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{b}$. Since $\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^* \supset \mathfrak{b}$, we have only to prove that \mathfrak{a}^* and \mathfrak{b}^* are disjoint. Now an element b in $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^*$ belongs to \mathfrak{a}^* if and only if $b < c \vee a$ for some element a in \mathfrak{a} ; but the relations $b \in \mathfrak{b}$, $b < c \vee a$ imply $c \vee a \in \mathfrak{b}$, contrary to hypothesis. Our discussion is thus complete. On the other hand if cb belongs to \mathfrak{a} for no b in \mathfrak{b} , we put $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}_\alpha(c) \vee \mathfrak{b}$. Since $\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^* \supset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}^* \neq \mathfrak{b}$, we have only to show that \mathfrak{a}^* and \mathfrak{b}^* are disjoint. Now an element a in $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^*$ belongs to \mathfrak{b}^* if and only if $a > cb$ for some b in \mathfrak{b} ; but then $cb \in \mathfrak{a}$, contrary to hypothesis. With this our first proof is complete.

Our second proof is based upon Theorem 5: we construct a function f defined over A with the properties

- (1) $f(a \bar{\vee} b) = f(a) \vee f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$;
- (2) $f(a) = 0$ in \mathfrak{a} , $f(a) = e$ in \mathfrak{b} .

We can then take \mathfrak{p} as the class specified by the equation $f(a) = 0$, \mathfrak{q} as the class specified by the equation $f(a) = e$. The construction is based upon transfinite induction and is similar to one (for Boolean algebras) already in the literature.⁹⁾ We shall suppress the obvious details of the inductive process. For present purposes, it is convenient for us to replace (1) by the equivalent property

$$(1') \quad a_1 \dots a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \text{ implies } f(a_1) \dots f(a_m) < f(b_1) \vee \dots \vee f(b_n) \text{ for } m \geq 1, n \geq 1.$$

As to the equivalence of (1) and (1') we make the following remarks. First, if (1) holds, then $a_1 \dots a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n$ implies $(a_1 \dots a_m)(b_1 \vee \dots \vee b_n) = a_1 \dots a_m$, hence $(f(a_1) \dots f(a_m))(f(b_1) \vee \dots \vee f(b_n)) = f(a_1) \dots f(a_m)$.

⁹⁾ von Neumann and Stone, *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), pp. 353—378, Theorem 14.

$\vee \dots \vee f(b_n) = f(a_1) \dots f(a_m)$, and hence $f(a_1) \dots f(a_m) < f(b_1) \vee \vee \dots \vee f(b_n)$; in other words, (1) implies (1'). On the other hand, if (1') holds, then the relations

$$\begin{aligned} ab < a, \quad ab < b, \quad ab < ab, \quad a < a \vee b, \\ b < a \vee b, \quad a \vee b < a \vee b \end{aligned}$$

imply the respectively corresponding relations

$$\begin{aligned} f(ab) < f(a), \quad f(ab) < f(b), \quad f(a)f(b) < f(ab), \\ f(a) < f(a \vee b), \quad f(b) < f(a \vee b), \quad f(a \vee b) < f(a) \vee f(b), \end{aligned}$$

from which we infer the relations (1).

The basis of the inductive construction is the following result: if in any well-ordering of A , the function f has been defined for all predecessors of a given element x in such a way that (1') holds whenever the elements involved are predecessors of x , then the value $f(x)$ can be so determined that (1') holds for x and all its predecessors. In proving this result, we have only to examine the limitations imposed upon our choice of $f(x)$. On eliminating all those conditions which are satisfied by hypothesis or by virtue of algebraic identities, we find that the only conditions which are not automatically met are

- (3) $a_1 \dots a_m x < b_1 \vee \dots \vee b_n$ implies $f(a_1) \dots f(a_m) f(x) < f(b_1) \vee \dots \vee f(b_n)$ for $m \geq 0, n \geq 1$;
(4) $c_1 \dots c_p < x \vee d_1 \vee \dots \vee d_q$ implies $f(c_1) \dots f(c_p) < f(x) \vee f(d_1) \vee \dots \vee f(d_q)$ for $p \geq 1, q \geq 0$;

-- where the letters a, b, c, d denote predecessors of x . Now (3) restricts our choice of $f(x)$ only if we can find predecessors $a_1^*, \dots, a_m^*, b_1^*, \dots, b_n^*$ of x such that $a_1^* \dots a_m^* x < b_1^* \vee \dots \vee b_n^*$, $f(a_1^*) = \dots = f(a_m^*) = e$, $f(b_1^*) = \dots = f(b_n^*) = 0$. In this case we can satisfy (3) by putting $f(x) = 0$ and in no other way. At the same time, this choice for $f(x)$ leads to the satisfaction of (4). In fact, $c_1 \dots c_p < x \vee d_1 \vee \dots \vee d_q$ implies

$$a_1^* \dots a_m^* c_1 \dots c_p < b_1^* \vee \dots \vee b_n^* \vee d_1 \vee \dots \vee d_q.$$

By hypothesis we therefore have $f(a_1^*) \dots f(a_m^*) f(c_1) \dots f(c_p) < f(b_1^*) \vee \dots \vee f(b_n^*) \vee f(d_1) \vee \dots \vee f(d_q)$. Remembering that $f(a_1^*) = \dots = f(a_m^*) = e$, $f(b_1^*) = \dots = f(b_n^*) = f(x) = 0$, we conclude that $f(c_1) \dots f(c_p) < f(x) \vee f(d_1) \vee \dots \vee f(d_q)$. Similarly (4) restricts our choice of $f(x)$ only if we can find predecessors $c_1^*, \dots, c_p^*, d_1^*, \dots, d_q^*$ of x such that $c_1^* \dots c_p^* < x \vee d_1^* \vee \dots \vee d_q^*$, $f(c_1^*) = \dots = f(c_p^*) = e$, $f(d_1^*) = \dots = f(d_q^*) = 0$. In this case we can satisfy (4) by putting $f(x) = e$ and in no other way. At the same time, this choice for $f(x)$ leads to the satisfaction of (3). In fact, $a_1 \dots a_m x < b_1 \vee \dots \vee b_n$ implies

$$a_1 \dots a_m c_1^* \dots c_p^* < b_1 \vee \dots \vee b_n \vee d_1^* \vee \dots \vee d_q^*.$$

By hypothesis, we therefore have

$$f(a_1) \dots f(a_m) f(c_1^*) \dots f(c_p^*) < f(b_1) \vee \dots \vee f(b_n) \vee f(d_1^*) \vee \dots \vee f(d_q^*).$$

We can then conclude that $f(a_1) \dots f(a_m) f(x) < f(b_1) \vee \dots \vee f(b_n)$.

We now suppose that A is well-ordered in such a manner that the first element following those of \mathfrak{a} and \mathfrak{b} is the first element belonging neither to \mathfrak{a} nor to \mathfrak{b} — in other words, in such a manner that the class obtained by uniting \mathfrak{a} and \mathfrak{b} is an initial segment of the well-ordering. If each of the elements $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ belongs to \mathfrak{a} or to \mathfrak{b} , then the relation $a_1 \dots a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n$ implies that some one of a_1, \dots, a_m belongs to \mathfrak{a} or some one of b_1, \dots, b_n to \mathfrak{b} . Thus if we put $f = 0$ in \mathfrak{a} and $f = e$ in \mathfrak{b} , the condition (1') is satisfied for all elements belonging to \mathfrak{a} or \mathfrak{b} . Proceeding inductively we can define f for all elements in A , beginning with the first element following those of \mathfrak{a} and \mathfrak{b} , in such a manner that (1') is satisfied. The function f so obtained has the properties (1) and (2), so that our proof is complete.

From our existence theorem we can immediately deduce a number of important consequences. First we have

Theorem 7. *Every distributive lattice A containing two or more elements can be partitioned into a prime μ -ideal \mathfrak{p} and a prime α -ideal \mathfrak{q} .*

If A has two or more elements, it contains elements a and b such that the relation $a > b$ is false. If we put $\mathfrak{a} = \alpha_\mu(a)$ and $\mathfrak{b} = \alpha_\alpha(b)$, then \mathfrak{a} and \mathfrak{b} have no common element: for $c \in \mathfrak{a}, c \in \mathfrak{b}$ would imply $c < a, b < c$ and hence $a < b$, contrary to hypothesis. Applying Theorem 6 to the ideals \mathfrak{a} and \mathfrak{b} , we obtain the desired partition of A .

We have further

Theorem 8. *If \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are distinct μ -ideals, then there exists a prime μ -ideal \mathfrak{p} which contains one but not both of \mathfrak{a} and \mathfrak{b} . Dually, if \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are distinct α -ideals, then there exists a prime α -ideal \mathfrak{q} which contains one but not both of \mathfrak{a} and \mathfrak{b} .*

When \mathfrak{a} and \mathfrak{b} are distinct μ -ideals, we may suppose the notation so chosen that \mathfrak{b} contains an element b not in \mathfrak{a} . The principal α -ideal $\alpha_\alpha(b)$ then has no element in common with \mathfrak{a} : for $a \in \mathfrak{a}$ and $a \in \alpha_\alpha(b)$ would imply $b < a, b \in \mathfrak{a}$, contrary to hypothesis. We can thus apply Theorem 6 to the ideals \mathfrak{a} and $\alpha_\alpha(b)$, obtaining a prime μ -ideal which contains \mathfrak{a} but not $\alpha_\alpha(b), b$, or \mathfrak{b} . The first statement is thereby proved. The second, dual statement may be left to the reader.

From Theorem 8 we now draw the following consequence:

Theorem 9. *If the μ -ideal α is distinct from $e = A$, then α is the product of the prime μ -ideals which contain it. Dually, if the α -ideal α is distinct from $e = A$, then α is the product of the prime α -ideals which contain it.*

Since the μ -ideal α is contained in, but distinct from, the μ -ideal e , there exists a prime μ -ideal which contains α (but not e). The product of the prime μ -ideals which contain α is therefore defined. It is a μ -ideal \mathfrak{b} containing α . If $\alpha \neq \mathfrak{b}$, there exists a prime μ -ideal containing α but not \mathfrak{b} . Since this is impossible, we have $\alpha = \mathfrak{b}$, as we wished to prove. The second, dual part of the theorem may be left to the reader.

A fundamental theorem about prime ideals is the following:

Theorem 10. *If a prime μ -ideal \mathfrak{p} is connected with the μ -ideals α and \mathfrak{b} by the relation $\mathfrak{p} \supset \alpha\mathfrak{b}$, then $\mathfrak{p} \supset \alpha$ or $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$. Dually, if a prime α -ideal \mathfrak{q} is connected with the α -ideals α and \mathfrak{b} by the relation $\mathfrak{q} \supset \alpha\mathfrak{b}$, then $\mathfrak{q} \supset \alpha$ or $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{b}$.*

If $\mathfrak{p} \supset \alpha\mathfrak{b}$ and both relations $\mathfrak{p} \supset \alpha$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$ are false, we reach a contradiction as follows: the elements not in \mathfrak{p} constitute a prime α -ideal \mathfrak{q} in accordance with Theorem 4; by hypothesis there exist elements a and b such that $a \in \alpha$, $b \in \mathfrak{b}$, $a \in \mathfrak{q}$, $b \in \mathfrak{q}$; and hence the element ab belongs both to $\alpha\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ and to \mathfrak{q} . The first part of the theorem is thus established. The second, dual part may be left to the reader.

§ 4. Adjunction of Zero and Unit Elements. In § 1 we have observed that it is always possible to adjoin a zero (or, dually, a unit) to a distributive lattice. In the next section we shall find it convenient to have precise information concerning the effect of such an adjunction upon the ideal structure of a distributive lattice. We therefore state the following result:

Theorem 11. *The adjunction of a zero-element 0 to a distributive lattice A in the manner described in § 1 alters the ideal structure of A only by the adjunction of a prime μ -ideal contained in every μ -ideal and the adjunction of a prime α -ideal containing all α -ideals other than the maximal one. More precisely, the ideal structure of the distributive lattice A^* obtained from A by the indicated adjunction is characterized as follows: every μ -ideal α in A becomes through the adjunction of 0 a μ -ideal α^* in A^* , α^* being prime (principal) if and only if α is prime (principal); every α -ideal α in A is an α -ideal α^* in A^* , α^* being prime (principal) in A^* if and only if $\alpha = A$ or α is prime in A (if and only if α is principal in A); and the only ideals in A^* not so obtained are the prime principal μ -ideal generated by 0 and the principal α -ideal coinciding with A^* .*

If α is a μ -ideal in A , the adjunction of 0 results in a non-void subset α^* of A^* ; and it is readily verified that α^* has the algebraic

properties of a μ -ideal in A^* . Similarly, if α is an α -ideal in A , it is a non-void subset α^* of A^* which has the algebraic properties of an α -ideal in A^* . If A is partitioned into a μ -ideal \mathfrak{p} and an α -ideal \mathfrak{q} , both necessarily prime by Theorem 4, then the corresponding classes \mathfrak{p}^* and \mathfrak{q}^* constitute a partition of A^* into a μ -ideal and an α -ideal; thus \mathfrak{p}^* and \mathfrak{q}^* are both prime. We may therefore state that the ideal α^* obtained from α in the indicated manner is prime whenever α is, in accordance with Theorem 4. It is easily seen that α^* is principal whenever α is. The principal μ -ideal generated in A^* by the element 0 consists of the element 0 alone; moreover, since it is evident that $ab = 0$ if and only if $a = 0$ or $b = 0$, this ideal is prime. It follows that the elements of A constitute a prime α -ideal in A^* , in accordance with Theorem 4. The elements of A^* constitute an α -ideal in A^* , which is maximal in the sense that it contains every other α -ideal in A^* ; it is the principal α -ideal generated by 0.

If α^* is a μ -ideal in A^* which contains some element other than 0, which necessarily belongs to A , the suppression of 0 results in a non-void subset α of A ; and it is readily verified that α has the algebraic properties of a μ -ideal in A . Similarly, if α^* is an α -ideal in A^* which does not contain the element 0, it is a non-void subset α of A which has the algebraic properties of an α -ideal. If A^* is partitioned into a μ -ideal \mathfrak{p}^* containing some element other than 0 and a μ -ideal \mathfrak{q}^* , both necessarily prime by Theorem 4, then the corresponding classes \mathfrak{p} and \mathfrak{q} constitute a partition of A into a μ -ideal and an α -ideal; thus \mathfrak{p} and \mathfrak{q} are both prime in accordance with Theorem 4. We may therefore state that the ideal α obtained from α^* in the indicated manner is prime whenever α^* is, in accordance with Theorem 4. It is easily seen that α is principal whenever α^* is.

The two preceding paragraphs show that the ideal structure of A^* is characterized in terms of that of A in the manner stated in the theorem. Thus, if we regard the ideal structure of A abstractly, we find that the only alterations brought about by the adjunction of the zero-element are: first, the introduction of the prime μ -ideal corresponding to the μ -ideal generated in A^* by 0; second, the introduction of the prime α -ideal corresponding to the α -ideal A in A^* . The first of these ideals is contained in every μ -ideal, the second contains every α -ideal other than the maximal one, corresponding to A^* .

§ 5. Representations of Distributive Lattices. We shall now turn to the construction of isomorphic representations of distributive lattices by algebras of classes. We have

Theorem 12. *The system \mathfrak{S}_μ of all μ -ideals in a distributive lattice A is represented isomorphically by an algebra of subclasses*

of the class \mathfrak{C} of all prime μ -ideals in A , in accordance with the following relations: if $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ is the class of all prime μ -ideals \mathfrak{p} which do not contain the μ -ideal \mathfrak{a} , then

- (1) $\mathfrak{C} \left(\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} \right) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{C}(\mathfrak{a})$;
- (2) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{a}) \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$;
- (3) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ if and only if $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

In case A has only one element, \mathfrak{C} is void; but the representation described is evidently valid even in this case.

Property (1) is an obvious consequence of the fact that a prime μ -ideal \mathfrak{p} contains $\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}$ if and only if it contains every \mathfrak{a} in \mathfrak{A} .

Property (2) is a restatement of Theorem 10. Property (3) is similarly a restatement of Theorem 8.

Theorem 13. *If $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ is the class $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}_\mu(\mathfrak{a}))$, then the correspondence $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ defines an isomorphic representation of the distributive lattice A in accordance with the relations*

- (1) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{a}) \cup \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$;
- (2) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{a}) \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$;
- (3) $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ if and only if $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Furthermore, if \mathfrak{a} is any μ -ideal, then

$$(4) \mathfrak{C}(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{C}(\mathfrak{a}).$$

Properties (1), (2), (3) follow from the corresponding properties of Theorem 12 with the help of Theorem 2. Property (4) is an immediate consequence of Theorem 12 (1) and the obvious relation $\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}_\mu(\mathfrak{a})$.

From Theorem 11, we can immediately read off the effect of the adjunction of a zero-element upon the representation described in Theorems 12 and 13. We have:

Theorem 14. *If the distributive lattice A^* is obtained from A by the adjunction of a zero-element, then its class-representation can be obtained from that of A by adjoining a single point to \mathfrak{C} and each of the classes $\mathfrak{C}(\mathfrak{a})$ and including the void class with the classes so obtained.*

In view of the simple relations disclosed in Theorems 11 and 14, we may henceforth confine our attention to distributive lattices with zeros: we are able to adjoin a zero to any distributive lattice which has no zero; and we do not thereby make any complicated alterations in the ideal structure or its class-representation. On the other hand, if we attempt to consider the general case, the theorems

which follow become needlessly complicated through the intrusion of slight but unavoidable exceptions. For these reasons we make the restriction to the indicated special case.

We now proceed to the introduction of topological concepts.

Theorem 15. *If A has a zero, the class \mathbf{E} of all sets $\mathfrak{C}(a)$ described in Theorem 12 may be taken as the class of all open sets in a certain uniquely determined topology for \mathfrak{C} . In this topology \mathfrak{C} is a T_0 -space in which the sets $\mathfrak{C}(a)$ constitute a basis. The sets $\mathfrak{C}(a)$ are characterized topologically as the relatively bicomact¹⁰⁾ open sets in \mathfrak{C} . The space \mathfrak{C} has the following topological properties: if \mathbf{B} is the class of all relatively bicomact open sets in \mathfrak{C} , then*

- (1) \mathbf{B} is a basis for \mathfrak{C} ;
- (2) \mathbf{B} is a multiplicative class — that is, contains the intersection of any two of its members;
- (3) if \mathfrak{F} is any closed set and if \mathbf{C} is any subclass of \mathbf{B} such that $\mathfrak{C}_1 \in \mathbf{C}, \dots, \mathfrak{C}_n \in \mathbf{C}$ imply $\mathfrak{F}\mathfrak{C}_1 \dots \mathfrak{C}_n \neq \mathfrak{D}$, then $\mathfrak{F}\prod_{\mathfrak{C} \in \mathbf{C}} \mathfrak{C} \neq \mathfrak{D}$.

Since \mathbf{E} contains the void set $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}(0)$, the set $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(A)$, the union of any subclass of its sets (by Theorem 12 (1)), and the intersection of any finite subclass of its sets (by Theorem 12 (2)), there exists a topology in \mathfrak{C} such that \mathbf{E} is the class of all open sets; and in this topology \mathfrak{C} is a T -space.¹¹⁾ We can show that \mathfrak{C} is in fact a T_0 -space: if p_1 and p_2 are distinct points in \mathfrak{C} , we consider them as prime μ -ideals in A and note that at least one of them does not contain the other; we thus infer that $\mathfrak{C}(p_1)$ does not contain p_1 , $\mathfrak{C}(p_2)$ does not contain p_2 , but that $\mathfrak{C}(p_1)$ contains p_2 or $\mathfrak{C}(p_2)$ contains p_1 ; and we therefore conclude that one of the two points p_1 and p_2 is contained in an open set which does not contain the other. Theorem 13 (4) shows that the sets $\mathfrak{C}(a)$ constitute a basis for \mathfrak{C} . To prove that every set $\mathfrak{C}(a)$ is relatively bicomact as well as open, we proceed as follows: if a family of open sets $\mathfrak{C}(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, covers $\mathfrak{C}(a)$, $\mathfrak{C}(a) \subset \sum_{a \in \mathfrak{A}} \mathfrak{C}(a)$, then Theorem 12 (1) shows that $a \in \sum_{a \in \mathfrak{A}} a$; hence, as we have seen in § 2, the relations $a = a_1 \vee \dots \vee a_n$, $a_1 \in a_1 \in \mathfrak{A}, \dots, a_n \in a_n \in \mathfrak{A}$ can be satisfied; and it follows from Theorem 13 that

$$\mathfrak{C}(a) = \mathfrak{C}(a_1) \cup \dots \cup \mathfrak{C}(a_n) \subset \mathfrak{C}(a_1) \cup \dots \cup \mathfrak{C}(a_n),$$

¹⁰⁾ We shall say that a subset of a topological space is relatively bicomact if, whenever it is covered by a family of open sets, it is also covered by some finite subfamily.

¹¹⁾ Alexandroff and Hopf, *Topologie I* (Berlin, 1935), Kap. I, § 2, Satz X, p. 44.

as we wished to prove. On the other hand, if the open set $\mathfrak{C}(\alpha)$ is relatively bicomact, the relation (4) of Theorem 13 becomes $\mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{C}(a_1) \cup \dots \cup \mathfrak{C}(a_n)$ for suitable elements a_1, \dots, a_n in α ; and thus $\mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{C}(a_1 \vee \dots \vee a_n)$ in accordance with Theorem 13 (1). From what we have already proved, we see that the class \mathbf{B} of all relatively bicomact open sets in \mathfrak{C} has the properties (1) and (2) asserted in the present theorem. To establish property (3) we proceed as follows. Let \mathfrak{F} and \mathfrak{C} be as described there. Then \mathfrak{F} is certainly a non-void closed set. Its open complement we denote by $\mathfrak{C}(\alpha)$. By hypothesis, the relations $\mathfrak{C}_1 \varepsilon \mathfrak{C}, \dots, \mathfrak{C}_n \varepsilon \mathfrak{C}, \mathfrak{C}_1 \dots \mathfrak{C}_n \subset \mathfrak{C}(\alpha)$ are incompatible; in other words, if \mathfrak{c} is the class of all elements c in A such that $\mathfrak{C}(c) = \mathfrak{C} \varepsilon \mathfrak{C}$, the relations $c_1 \varepsilon \mathfrak{c}, \dots, c_n \varepsilon \mathfrak{c}, c_1 \dots c_n \varepsilon \alpha$ are incompatible, by virtue of Theorem 13 (2). If \mathfrak{b} is the α -ideal generated by \mathfrak{c} — namely, the class of all elements b such that $c_1 \dots c_n < b$ for c_1, \dots, c_n in \mathfrak{c} — then \mathfrak{b} has no element in common with α . According to Theorem 6, there exists a prime μ -ideal \mathfrak{p} which contains α but is disjoint from \mathfrak{b} (and hence also from \mathfrak{c}). It follows that \mathfrak{p} belongs to $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}'(\alpha)$ and to $\mathfrak{C}(c), c \varepsilon \mathfrak{c}$. Hence \mathfrak{p} belongs to $\mathfrak{F} \prod_{\mathfrak{C} \varepsilon \mathfrak{c}} \mathfrak{C}$, as we wished to prove.

We shall now invert the results obtained in Theorems 12, 13 and 15 — that is to say, we shall show that the topological properties set forth in Theorem 15 characterize the representations of distributive lattices obtained in Theorems 12 and 13.

Theorem 16. *Let \mathfrak{S} be a T_0 -space in which the class \mathbf{B} of relatively bicomact open sets has the properties (1)—(3) of the preceding theorem. Then the sets in \mathbf{B} constitute a distributive lattice A under the operations of forming finite unions and intersections. The algebra of all open sets in \mathfrak{S} is isomorphic to that of the μ -ideals in A under the correspondence $\alpha \rightarrow \mathfrak{S}(\alpha) = \sum_{a \varepsilon \alpha} a$. If \mathfrak{p} is any prime μ -ideal, there exists a unique point \mathfrak{s} in \mathfrak{S} such that $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{s}\}'$; and the resulting correspondence $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{s}$ defines a topological equivalence between the given space \mathfrak{S} and the space \mathfrak{C} constructed from A in the manner described in Theorems 12 and 15.*

If \mathfrak{B}_1 and \mathfrak{B}_2 are relatively bicomact open sets, then so is their union: if a family of open sets covers $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$, then there exist finite subfamilies which cover \mathfrak{B}_1 and \mathfrak{B}_2 separating, so that the union of these two subfamilies is a subfamily covering $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$; hence $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$, which is known to be open, is relatively bicomact as well. The intersection of relatively bicomact open sets \mathfrak{B}_1 and \mathfrak{B}_2 is, of course, open and is here relatively bicomact by assumption. Thus the sets in \mathbf{B} constitute a distributive lattice A , as stated in the theorem. For convenience in comparing the

present analysis with previous results we shall denote the elements of this lattice by the letters a, b, c, \dots

If now α is any μ -ideal in A , we may associate with it the open set $\mathfrak{S}(\alpha) = \sum_{a \in \alpha} a$ in \mathfrak{S} . We can show at once that $\mathfrak{S}(\alpha) \subset \mathfrak{S}(\beta)$ implies $\alpha \subset \beta$: if a is any element in α , we have $a = \mathfrak{S}(\alpha_\mu(a)) \subset \mathfrak{S}(\alpha) \subset \mathfrak{S}(\beta) = \sum_{b \in \beta} b$; hence there exist elements b_1, \dots, b_n in β such that $a < b_1 \vee \dots \vee b_n$ in accordance with the relative bicompleteness of a ; and we thus see that $a \in \alpha$ implies $a \in \beta$. It follows that $\mathfrak{S}(\alpha) = \mathfrak{S}(\beta)$ if and only if $\alpha = \beta$. If \mathfrak{G} is an arbitrary open set in \mathfrak{S} , the class of all sets in \mathbf{B} which are contained in \mathfrak{G} is obviously a μ -ideal α in A such that $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}(\alpha)$ in accordance with our assumption that \mathbf{B} is a basis for \mathfrak{S} .

We can now investigate the nature of the set $\mathfrak{S}(\mathfrak{p})$ when \mathfrak{p} is a prime μ -ideal. The class q of all elements in A which do not belong to \mathfrak{p} is a prime α -ideal in accordance with Theorem 4. Thus the closed set $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}'(\mathfrak{p})$ and the subclass q of A and \mathbf{B} have the property that $a_1 \in q, \dots, a_n \in q$ imply $\mathfrak{F}a_1 \dots a_n \neq \mathfrak{D}$: for $a_1 \dots a_n \subset \mathfrak{F}' = \mathfrak{S}(\mathfrak{p})$ would imply $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{p}$ in contradiction to the known relation $a_1 \dots a_n \in q$. By hypothesis, we can therefore conclude that \mathfrak{F} contains a point \mathfrak{s} common to all the members of q . We thus see that the partition of \mathbf{B} into the ideals \mathfrak{p} and q coincides with the partition of \mathbf{B} into the class of all its members which do not contain \mathfrak{s} and the class of all its members which do contain \mathfrak{s} . Since \mathbf{B} is a basis for \mathfrak{S} , we infer that $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{s}\}'$. On the other hand, if \mathfrak{s} is an arbitrary point in \mathfrak{S} , we can form a partition of \mathbf{B} into the class \mathfrak{p} of all its members which do not contain \mathfrak{s} and the class q of all its members which do contain \mathfrak{s} . Since \mathbf{B} is a basis for the T_0 -space \mathfrak{S} , neither class is void; and it is easily verified that \mathfrak{p} is a μ -ideal, q an α -ideal. Theorem 4 shows that both \mathfrak{p} and q are prime. It is evident that $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{s}\}'$. If \mathfrak{p}_1 and \mathfrak{p}_2 are prime μ -ideals and if $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}_1) = \{\mathfrak{s}_1\}'$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}_2) = \{\mathfrak{s}_2\}'$, then the relations $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ and $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$ are equivalent: for the relations $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{S}(\mathfrak{p}_2)$, $\{\mathfrak{s}_1\}' = \{\mathfrak{s}_2\}'$ are equivalent; and in the T_0 -space \mathfrak{S} , the third relation here is equivalent to $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2$. Thus the correspondence $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{s}$ resulting from the relation $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{s}\}'$ is a biunivocal correspondence between \mathfrak{E} and \mathfrak{S} . Furthermore, if $\mathfrak{p} \in \mathfrak{E}(a)$ in this correspondence, we see that $\mathfrak{p} \in \mathfrak{E}(a)$ if and only if $\mathfrak{s} \in a$: for $\mathfrak{p} \in \mathfrak{E}(a)$ is equivalent to $a \text{ non } \in \mathfrak{p}$; and the latter relation is equivalent to $\mathfrak{s} \in a$ by virtue of the preceding analysis of the relation $\mathfrak{S}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{s}\}'$. Thus the correspondence between \mathfrak{E} and \mathfrak{S} carries the basis of all sets $\mathfrak{E}(a)$ into the basis B of all sets a . It is therefore a topological equivalence between \mathfrak{E} and \mathfrak{S} .

It is now evident that this correspondence carries the open sets $\mathfrak{C}(\alpha)$ and $\mathfrak{S}(\alpha)$, associated with a μ -ideal α in A , into one another. The remaining statements of the present theorem then follow from the properties of the sets $\mathfrak{C}(\alpha)$ established in Theorem 12.

We may remark in closing that the void class \mathfrak{D} belongs to \mathbf{B} and is the zero-element of the distributive lattice A .

The reader who wishes to investigate what occurs in Theorems 15 and 16 if the condition of the existence of a zero-element be relaxed should now have no difficulty in doing so. The study of a distributive lattice without zero is carried out most simply by adjoining a zero-element as previously described and later removing the appropriate point from the representative space constructed for the enlarged lattice, as we have already suggested in Theorem 14.

It is interesting to consider certain specializations of the results of Theorem 15. We first have

Theorem 17. *The space \mathfrak{C} of Theorem 15 is a T -space if and only if every prime μ -ideal in the distributive lattice A is divisorless.*

From Theorems 15 and 16 it is evident that $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}'$ whenever \mathfrak{p} is a prime μ -ideal. In order that \mathfrak{C} be a T_1 -space it is necessary and sufficient that $\{\mathfrak{p}\}' = \{\mathfrak{p}\}$ for every point \mathfrak{p} in \mathfrak{C} . Thus, if \mathfrak{C} is a T_1 -space, we have $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}'$ for every prime μ -ideal \mathfrak{p} . Consequently a μ -ideal α which contains \mathfrak{p} must have the property that $\mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ or $\mathfrak{C}(\alpha) = \mathfrak{C}$. Hence $\alpha \supset \mathfrak{p}$ implies $\alpha = \mathfrak{p}$ or $\alpha = \mathfrak{e} = A$. Consequently, every prime μ -ideal in A is divisorless. On the other hand, if \mathfrak{C} is not a T_1 -space, we can find prime μ -ideals $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ such that $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1 \in \{\mathfrak{p}_2\}'$. It follows that $\{\mathfrak{p}_1\}' \subset \{\mathfrak{p}_2\}'$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{p}_1) \supset \mathfrak{C}(\mathfrak{p}_2)$, $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2$. Thus the prime μ -ideal \mathfrak{p}_2 is not divisorless. The theorem is thereby established. We recall that it was proved in Theorem 3 that every divisorless ideal is prime.

A more interesting result is the following:

Theorem 18. *The space \mathfrak{C} of Theorem 15 is an H -space if and only if the distributive lattice A is a generalized Boolean algebra.*

In an H -space every relatively bicomact subset is closed.¹²⁾ Thus if \mathfrak{C} is an H -space and if $a < b$, the sets $\mathfrak{C}(a)$ and $\mathfrak{C}'(a) \mathfrak{C}(b)$, contained in $\mathfrak{C}(b)$, are open and closed in \mathfrak{C} and hence open and closed relative to $\mathfrak{C}(b)$. Since $\mathfrak{C}'(a) \mathfrak{C}(b)$ is closed relative to the relatively bicomact set $\mathfrak{C}(b)$, it is also relatively bicomact. Consequently, $\mathfrak{C}'(a) \mathfrak{C}(b) = \mathfrak{C}(c)$ where $c \in A$. We have thus proved that, whenever $a < b$, the system of equations $x \vee a = b, xa = 0$ has

¹²⁾ Alexandroff and Hopf, *Topologie I* (Berlin, 1935), Kap. II, § 1, Satz XI, p. 91.

a solution in A , namely, the element c just constructed. Thus A is a generalized Boolean algebra. On the other hand, if A is a generalized Boolean algebra and \mathfrak{p}_1 and \mathfrak{p}_2 are distinct prime μ -ideals in A , we may suppose, since \mathfrak{C} is a T_0 -space, that there exist elements a_1 and b_2 in A such that $\mathfrak{p}_1 \varepsilon \mathfrak{C}(a_1)$, $\mathfrak{p}_2 \varepsilon \mathfrak{C}(b_2)$ and $\mathfrak{p}_1 \text{ non } \varepsilon \mathfrak{C}(b_2)$ or $\mathfrak{p}_2 \text{ non } \varepsilon \mathfrak{C}(a_1)$. By proper choice of notation, we may arrange that $\mathfrak{p}_2 \text{ non } \varepsilon \mathfrak{C}(a_1)$. Then, if a_2 is a solution of the system of equations $x \vee a_1 b_2 = b_2$, $x(a_1 b_2) = 0$ where $a_1 b_2 < b_2$, we see that $\mathfrak{p}_1 \varepsilon \mathfrak{C}(a_1)$, $\mathfrak{p}_2 \text{ non } \varepsilon \mathfrak{C}(a_2)$, $\mathfrak{C}(a_1) \mathfrak{C}(a_2) = \mathfrak{O}$. Hence \mathfrak{C} is an H -space.

We may remark that, when \mathfrak{C} is an H -space, the conditions (2) and (3) of Theorem 15 are redundant.¹³⁾ In other words, the representative topological spaces for generalized Boolean algebras are characterized as those H -spaces in which \mathbf{B} is a basis.

Theorem 18 shows how greatly simplified the theory of distributive lattices becomes in the case of generalized Boolean algebras and emphasizes the special importance of the latter from a topological point of view.

§ 6. Applications to General Topology. In concluding our discussion of distributive lattices, we may make a few remarks on the application of the representation theory to the study of general topological spaces.

If \mathbf{B} is any basis in a T_0 -space \mathfrak{S} , we can form the class \mathbf{A} of all sets obtained from those of \mathbf{B} by the application of the operations of forming finite unions and intersections. Then \mathbf{A} is a basis for \mathfrak{S} and is also a distributive lattice. The construction of the representative space \mathfrak{C} of Theorems 12 and 15 for this lattice therefore provides us with a representation of \mathfrak{S} in \mathfrak{C} . The precise sense in which \mathfrak{S} is represented in \mathfrak{C} will not be considered here. We may observe, however, that such a representation is most interesting in the cases where \mathfrak{C} is of sharply defined topological nature. Now to require that \mathfrak{C} be an H -space is to require also that \mathbf{A} be a generalized Boolean algebra. In general, the latter requirement is impossible of fulfillment — unless, in constructing \mathbf{A} , we admit the formation of complements and relinquish the condition that \mathbf{A} be a basis. In our unpublished work on the applications of Boolean algebras to topology, we have elaborated the program thus suggested. The alternative program of keeping \mathbf{A} a basis allowing and \mathfrak{C} to be other than an H -space seems to be of less immediate interest although it is technically similar and can hardly present peculiar difficulties.

¹³⁾ Alexandroff and Hopf, *Topologie I* (Berlin, 1935), Kap. II, § 1, Satz XI, p. 91; Alexandroff and Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, *Verhandelingen der Koninklijke Akademie der Wetenschappen te Amsterdam*, Deel XIV, No. 1 (1929), p. 12 and preceding discussion.

Part II. Brouwerian Logics.

§ 1. Descriptive Introduction. In order to describe our general approach to the analysis of logical systems, we must attempt a brief characterization of the construction of such systems. The customary procedure in setting up a formal or symbolic logic of propositions may be summarized not too inaccurately as follows: (1) propositions are regarded as abstract entities which can be affected or combined by the application of certain postulated operations; (2) propositions are to be grouped into „asserted“ and „unasserted“ propositions, the grouping to be subject to subsequently stated conditions; (3) certain combinations of propositions are required postulationally to be „asserted“ in all groupings; (4) certain assignments of certain sets of propositions as respectively „asserted“ or „unasserted“ are postulated (or, alternatively, excluded) in all groupings. In (3) are provided the „formal“ rules of the logical system, in (4) the „informal“. The admissible groupings under (2), (3), and (4) may be called „evaluations“ of the system of propositions in the given logic. In studying such a logic of propositions from a mathematical point of view, we confine our attention to a class of propositions which has the property that it contains all the propositions obtained from any of its members by application of the operations postulated in (1). Associated with this class, we consider the class of all possible „evaluations“ under (2), (3), (4). It is then natural to represent any proposition in the chosen class by the class of all those „evaluations“ in which it is „asserted“. In this manner, propositions, operations upon them, and even the construction of „evaluations“ are represented in terms of abstract classes. As we have already suggested in the introduction to this paper, this kind of mathematical representation is illustrated by the familiar Leibnitz diagrams.

We propose to consider the Brouwerian logic of propositions from the point of view set forth in the preceding paragraph. A symbolic statement of this logic has been given by Heyting,¹⁴⁾ with the significant warning, „In principle, it is impossible to set up a formal system which would be equivalent to intuitionist mathematics . . .“. We shall follow Heyting's statement, with a few modifications which will be mainly notational in character.

We begin therefore with a class A of objects, a, b, c, \dots , called propositions, and four operations upon them which can be applied within A — three binary operations which we indicate by $a \vee b$, ab , and $a \rightarrow b$ (to be read as the propositions „ a or b “, „ a and b “, and „ a implies b “, respectively); and a unary operation which we

¹⁴⁾ Heyting, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse, 1930, pp. 42—56.

indicate by a^* (to be read as the proposition „not a “). Heyting writes $a \wedge b$ for ab , $a \supset b$ for $a \rightarrow b$, and $\neg a$ for a^* . We consider the class \mathfrak{E} of all partitions \mathfrak{p} of A into disjoint nonvoid classes \mathfrak{a} and \mathfrak{u} (called, respectively, the class of „asserted“ propositions and the class of „unasserted“ propositions) subject to „formal“ and „informal“ rules given below. The admissible partitions \mathfrak{p} will be called „evaluations“ of A . If a is any proposition we denote by $\mathfrak{E}(a)$ the class of all evaluations \mathfrak{p} such that a is „asserted“. If $\mathfrak{E}(a) = \mathfrak{E}$, we write $\vdash a$; if $\mathfrak{E}(a) = \mathfrak{E}$ is assumed as a postulate we write $\vdash\vdash a$. The „formal“ rules as given by Heyting then take the form

- (2.1) $\vdash\vdash a \rightarrow aa$,
- (2.11) $\vdash\vdash ab \rightarrow ba$,
- (2.12) $\vdash\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow (ac \rightarrow bc)$,
- (2.13) $\vdash\vdash (a \rightarrow b) (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$,
- (2.14) $\vdash\vdash b \rightarrow (a \rightarrow b)$,
- (2.15) $\vdash\vdash a(a \rightarrow b) \rightarrow b$,
- (3.1) $\vdash\vdash a \rightarrow a \vee b$,
- (3.11) $\vdash\vdash a \vee b \rightarrow b \vee a$,
- (3.12) $\vdash\vdash (a \rightarrow c) (b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c)$,
- (4.1) $\vdash\vdash a^* \rightarrow (a \rightarrow b)$,
- (4.11) $\vdash\vdash (a \rightarrow b) (a \rightarrow b^*) \rightarrow a^*$.

We have followed Heyting's numbering for convenience in referring to his paper. The „informal“ rules which we shall postulate go beyond those of Heyting. They can be stated as follows:

- (1.2) $\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(b) \subset \mathfrak{E}(ab)$;
- (1.3) $\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b) \subset \mathfrak{E}(b)$;
- (1.7) $\mathfrak{E}(a \vee b) \subset \mathfrak{E}(a) \cup \mathfrak{E}(b)$;
- (1.8) if $\mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$, then $\mathfrak{E}(a \rightarrow b) = \mathfrak{E}$.

It is clear that (1.2) „if a is asserted and b is asserted, then ab is asserted“ and (1.3) „if a is asserted and „ a implies b “ is asserted, then b is asserted“ correspond to the like-numbered „informal“ rules of Heyting. On the other hand, (1.7) „if „ a or b “ is asserted, then a is asserted or b is asserted“ and (1.8) „if b is asserted whenever a is asserted, then „ a implies b “ is asserted in all evaluations“ are „informal“ rules which have no application in working out consequences of the „formal“ rules by finite procedures: (1.7) merely presents an alternative and (1.8) requires the construction of all evaluations before it can be used. We may regard (1.7) and (1.8) as bringing the postulated operations \vee and \rightarrow closer to their colloquial meanings. It is clear that (1.8) is also a postulate of „completeness“ in that it describes the possibility of inferring b from a under all evaluations by the statement that „ a implies b “ is asserted in all evaluations.

From Heyting's paper we may now collect certain consequences of (1.2), (1.3), (2.1) — (4.11) which we shall use below. With his numbering and our notation they are

$$\begin{aligned} (2.2) \quad & \vdash ab \rightarrow a, \\ (2.282) \quad & \vdash a(ab \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow c), \\ (4.4) \quad & \vdash a^*a \rightarrow b, \\ (4.5) \quad & \vdash (ba \rightarrow a^*) \rightarrow (b \rightarrow a^*). \end{aligned}$$

§ 2. Representations. We turn now to the analysis of the representation of the system A by means of the classes $\mathfrak{E}(a)$. We have

Theorem 1. $\mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$ if and only if $\mathfrak{E}(a \rightarrow b) = \mathfrak{E}$ — that is, if and only if $\vdash a \rightarrow b$.

This result follows immediately from (1.3) and (1.8).

Theorem 2. $\mathfrak{E}(ab) = \mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(b)$.

From (2.2) and Theorem 1, we have $\mathfrak{E}(ab) \subset \mathfrak{E}(a)$, $\mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$. From (2.11) and Theorem 1, we have $\mathfrak{E}(ab) \subset \mathfrak{E}(ba)$. Hence $\mathfrak{E}(ab) \subset \mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(b)$. Combining this result with (1.2), we obtain the theorem.

Theorem 3. $\mathfrak{E}(a \vee b) = \mathfrak{E}(a) \cup \mathfrak{E}(b)$.

The proof, similar to that of Theorem 2, depends in an obvious way upon (1.7), (3.1), (3.11), and Theorem 1.

Theorem 4. If \mathfrak{D} is the void class, then

- (1) $\mathfrak{E}(a^*) \mathfrak{E}(a) = \mathfrak{D}$;
- (2) $\mathfrak{E}(b) \mathfrak{E}(a) = \mathfrak{D}$ implies $\mathfrak{E}(b) \subset \mathfrak{E}(a^*)$.

Theorems 1 and 2 show that (4.4) is equivalent to $\mathfrak{E}(a^*) \mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$. By hypothesis every evaluation \mathfrak{p} assigns some proposition b to the class of unasserted propositions. Hence a^* and a cannot both be asserted propositions, whatever the evaluation \mathfrak{p} . In other words, the class $\mathfrak{E}(a^*) \mathfrak{E}(a)$ is void. On the other hand, $\mathfrak{E}(b) \mathfrak{E}(a) = \mathfrak{D}$ implies $\mathfrak{E}(b) \mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(a^*)$. Applying Theorems 1 and 2 to the latter relation, we obtain $\mathfrak{E}(ba \rightarrow a^*) = \mathfrak{E}$. Applying Theorem 1 to (4.5), we likewise obtain $\mathfrak{E}(ba \rightarrow a^*) \subset \mathfrak{E}(b \rightarrow a^*)$. It follows that $\mathfrak{E}(b \rightarrow a^*) = \mathfrak{E}$. Another application of Theorem 1 now yields the desired relation $\mathfrak{E}(b) \subset \mathfrak{E}(a^*)$.

Theorem 5. The class $\mathfrak{E}(a \rightarrow b)$ has the following properties:

- (1) $\mathfrak{E}(a \rightarrow b) \subset \mathfrak{E}'(a) \cup \mathfrak{E}(b)$;
- (2) $\mathfrak{E}(c) \subset \mathfrak{E}'(a) \cup \mathfrak{E}(b)$ implies $\mathfrak{E}(c) \subset \mathfrak{E}(a \rightarrow b)$.

By (2.15) and Theorem 1, we have $\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b) \subset \mathfrak{E}(b)$. Hence we have $\mathfrak{E}(a \rightarrow b) = \mathfrak{E}'(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b) \cup \mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b) \subset \mathfrak{E}'(a) \cup \mathfrak{E}(b)$. On the other hand, $\mathfrak{E}(c) \subset \mathfrak{E}'(a) \cup \mathfrak{E}(b)$ implies $\mathfrak{E}(c) \mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$; and by Theorems 1 and 2 the latter relation implies $\mathfrak{E}(ca \rightarrow b) = \mathfrak{E}$. Applying Theorems 1 and 2 to (2.282)

(with a, b, c replaced by c, a, b respectively), we have $\mathfrak{C}(c) \mathfrak{C}(ca \rightarrow b) \subset \mathfrak{C}(a \rightarrow b)$. Hence the desired relation $\mathfrak{C}(c) \subset \mathfrak{C}(a \rightarrow b)$ must be valid.

We now introduce topological considerations, as suggested by the results reached in Theorems 4 and 5.

Theorem 6. *If each class $\mathfrak{C}(a)$, $a \in A$, in \mathfrak{C} is assigned as a neighborhood of every point \mathfrak{p} which it contains, then \mathfrak{C} becomes a T_0 -space. The totality of classes $\mathfrak{C}(a)$ is a basis \mathbf{A} which is also a distributive lattice under the operations of forming finite unions and intersections. $\mathfrak{C}(a^*)$ is the interior of the class $\mathfrak{C}'(a)$, $\mathfrak{C}(a \rightarrow b)$ the interior of the class $\mathfrak{C}'(a) \cup \mathfrak{C}'(b)$. In terms of the closure operation for \mathfrak{C} , the relations $\mathfrak{C}(a^*) = \mathfrak{C}'(a)$, $\mathfrak{C}(a \rightarrow b) = [\mathfrak{C}'(a) \mathfrak{C}'(b)]^{-'}$ are therefore valid.*

If \mathfrak{p} is any evaluation of A , then there is at least one proposition a which is „asserted“ under \mathfrak{p} — for instance, all the propositions listed under (2.1) — (4.11) are such. Thus every point \mathfrak{p} in \mathfrak{C} has at least one neighborhood $\mathfrak{C}(a)$. If $\mathfrak{C}(a)$ and $\mathfrak{C}(b)$ are neighborhoods of \mathfrak{p} , then $\mathfrak{C}(ab) = \mathfrak{C}(a) \mathfrak{C}(b)$ is also a neighborhood of \mathfrak{p} contained in both. If \mathfrak{q} is any point belonging to a neighborhood $\mathfrak{C}(a)$ of \mathfrak{p} , then $\mathfrak{C}(a)$ is a neighborhood of \mathfrak{q} contained in $\mathfrak{C}(a)$. Finally, if \mathfrak{p} and \mathfrak{q} are distinct evaluations of A , there is some proposition a which is asserted under one and not under the other. Hence $\mathfrak{C}(a)$ is a neighborhood of one of the two points \mathfrak{p} and \mathfrak{q} which does not contain the other. These properties of the indicated neighborhood-system show that its imposition upon \mathfrak{C} converts \mathfrak{C} into a T_0 -space.¹⁵ From Theorems 2 and 3 it is obvious that \mathbf{A} is a distributive lattice as stated. From Theorems 4 and 5 the characterizations of the classes $\mathfrak{C}(a^*)$ and $\mathfrak{C}(a \rightarrow b)$ are also obvious.

We can now show that the properties of T_0 -spaces lead to no contradiction between Theorem 6 and the „formal rules“ with which we started. We have

Theorem 7. *Let \mathfrak{S} be a T_0 -space; and let A be any class of open sets a, b, c, \dots in \mathfrak{S} such that A contains $a \vee b = a \cup b$, $ab, a \rightarrow b = (ab')^{-'}$, and $a^* = a^{-'}$ together with a and b . Then the following combinations of arbitrary sets in A coincide with \mathfrak{S} : $a \rightarrow aa, ab \rightarrow ba, (a \rightarrow b) \rightarrow (ac \rightarrow bc), (a \rightarrow b) (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c), b \rightarrow (a \rightarrow b), a(a \rightarrow b) \rightarrow b, a \rightarrow a \vee b, a \vee b \rightarrow b \vee a, (a \rightarrow c) (b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c), a^* \rightarrow (a \rightarrow b), (a \rightarrow b) (a \rightarrow b^*) \rightarrow a^*$. Furthermore, the inclusion relation $a(a \rightarrow b) \subset b$ is valid; and the inclusion relation $a \subset b$ implies $a \rightarrow b = \mathfrak{S}$. Consequently, if \mathfrak{s} is any point in \mathfrak{S} , the partition of A into the class \mathfrak{a} of all sets a containing \mathfrak{s} and the class \mathfrak{u} of all sets a not containing \mathfrak{s} , has all the formal properties demanded of an evaluation of a Brouwerian system of propositions.*

¹⁵ Alexandroff and Hopf, *Topologie I* (Berlin, 1935), Kap. I, § 4, pp. 58—59.

We begin by proving that $a \subset b$ if and only if $a \rightarrow b = \mathfrak{S}$: we know that $a \subset b$ is equivalent to $ab' = \mathfrak{D}$; since \mathfrak{S} is a T_5 -space, $ab' = \mathfrak{D}$ is equivalent to $(ab')^- = \mathfrak{D}$; and the latter relation is equivalent to $a \rightarrow b = (ab')^- = \mathfrak{S}$. It is then immediately evident that the sets $a \rightarrow aa$, $ab \rightarrow ba$, $a \rightarrow a \vee b$, and $a \vee b \rightarrow b \vee a$ coincide with \mathfrak{S} . To prove that $(a \rightarrow b) \rightarrow (ac \rightarrow bc) = \mathfrak{S}$, we start from the relation $(ac)(bc)' = ab'c \subset ab'$. We then see that $[(ac)(bc)]^- \subset (ab')^-$, $(ab')^- \subset [(ac)(bc)]'^-$, and $(a \rightarrow b) \subset (ac \rightarrow bc)$. The desired relation follows at once. To prove that $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c) = \mathfrak{S}$, we start from the relations $ac' = a(b' \vee b)c' \subset ab' \vee bc'$. We then have $(ab')^- (bc')^- = (ab' \vee bc')^- \subset (ac')^-$ and hence $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \subset (a \rightarrow c)$. The desired relation follows immediately. In showing that $b \rightarrow (a \rightarrow b) = \mathfrak{S}$, we first recall that b is an open set, $b^- = b'$. We therefore have $b' = b'^- \supset (ab')^-$, $b \subset (ab')'^- = (a \rightarrow b)$, and hence $b \rightarrow (a \rightarrow b) = \mathfrak{S}$. To prove that $a(a \rightarrow b) \rightarrow b = \mathfrak{S}$, we begin with the relation $ab' \subset (ab')^-$. We then have $a(ab')'^- \subset a(ab')' = ab \subset b$ or $a(a \rightarrow b) \subset b$. The desired relation results at once. To prove that $(a \rightarrow c)(b \rightarrow c) \rightarrow (a \vee b \rightarrow c) = \mathfrak{S}$, we have only to use the relations $a \vee b \rightarrow c = [(a \vee b)c']^- = (ac')^- (bc')^- = (a \rightarrow c)(b \rightarrow c)$ and thus infer the desired relation directly. To prove that $a^* \rightarrow (a \rightarrow b) = \mathfrak{S}$, we start from the relation $a \supset (ab')$. We then have $a^* = a'^- \subset (ab')'^-$ or $a^* \subset (a \rightarrow b)$. The desired relation follows directly. Finally to prove that $(a \rightarrow b)(a \rightarrow b^*) \rightarrow a^* = \mathfrak{S}$, we need merely observe the relations $a^* = a'^- = [a(b' \vee b^-)]'^- = (ab')'^- (ab^-)^- = (a \rightarrow b)(a \rightarrow b^*)$. In the course of the discussion we have already seen that the relations $a(a \rightarrow b) \subset b$ and $a(a \rightarrow b) \rightarrow b = \mathfrak{S}$ are equivalent and both true.

The remaining statements of the theorem are evident.

We are now in a position to obtain further information about the representation of Brouwerian logics described in Theorem 6. We have

Theorem 8. *The space \mathfrak{E} of Theorem 6 is abstractly identical with the representation-space of the distributive lattice \mathbf{A} as described in Part I, Theorems 12, 13, and 15.*

We shall show that the evaluations \mathfrak{p} of A correspond biunivocally to the prime μ -ideals \mathbf{P} in \mathbf{A} in such a manner that $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{E}(a)$ if and only if $\mathfrak{E}(a) \text{ non } \varepsilon \mathbf{P}$. The theorem is then evident.

If \mathfrak{p} is an evaluation of A , the distributive lattice \mathbf{A} can be partitioned into the class \mathbf{P} of all its members which do not contain \mathfrak{p} and the class \mathbf{Q} of all its members which do contain \mathfrak{p} . It is readily verified that \mathbf{P} and \mathbf{Q} are disjoint μ -ideal and α -ideal respectively. Hence both are prime by Part I, Theorem 4. Obviously $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{E}(a)$ if and only if $\mathfrak{E}(a) \varepsilon \mathbf{Q}$ — that is, if and only if $\mathfrak{E}(a) \text{ non } \varepsilon \mathbf{P}$.

If \mathbf{P} is a prime μ -ideal in \mathbf{A} , the members of \mathbf{A} which do not belong to \mathbf{P} constitute a prime α -ideal \mathbf{Q} , in accordance with Part I, Theorem 4. A partition \mathfrak{p} of A into disjoint non-void subclasses \mathfrak{a} and \mathfrak{u} can now be defined by putting $a \varepsilon \mathfrak{a}$ or $a \varepsilon \mathfrak{u}$ according as $\mathfrak{E}(a) \varepsilon \mathbf{Q}$ or $\mathfrak{E}(a) \varepsilon \mathbf{P}$. By application of Theorem 7 we can now verify that the partition \mathfrak{p} is an evaluation of A . First, let d be any of the composite propositions occurring in the „formal“ rules (2.1)–(4.11). By Theorems 6 and 7 we have $\mathfrak{E}(d) = \mathfrak{E} \varepsilon \mathbf{Q}$, $d \varepsilon \mathfrak{a}$. The reasoning may be sufficiently illustrated by the consideration of one of the rules, say (2.13). By Theorem 6 we have

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}(d) &= \mathfrak{E}((a \rightarrow b) (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)) \\ &= [\mathfrak{E}((a \rightarrow b) (b \rightarrow c)) \mathfrak{E}'(a \rightarrow c)]^{-'} \\ &= [\mathfrak{E}(a \rightarrow b) \mathfrak{E}(b \rightarrow c) \mathfrak{E}'(a \rightarrow c)]^{-'} \\ &= \{[\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}'(b)]^{-'} [\mathfrak{E}(b) \mathfrak{E}'(c)]^{-'} [\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}'(c)]^{-'}\}^{-'}.\end{aligned}$$

In the notation of Theorem 7, this relation becomes

$$\mathfrak{E}(d) = [\mathfrak{E}(a) \rightarrow \mathfrak{E}(b)] [\mathfrak{E}(b) \rightarrow \mathfrak{E}(c)] \rightarrow [\mathfrak{E}(a) \rightarrow \mathfrak{E}(c)].$$

Theorem 7 then asserts that $\mathfrak{E}(d) = \mathfrak{E}$. Next, we may show that the „informal“ rules are satisfied. In the case of (1.2), for instance we have the following reasoning: if $a \varepsilon \mathfrak{a}$ and $b \varepsilon \mathfrak{a}$ then $\mathfrak{E}(a)$ and $\mathfrak{E}(b)$ are in \mathbf{Q} ; hence $\mathfrak{E}(ab) = \mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(b) \varepsilon \mathbf{Q}$; and it follows that $ab \varepsilon \mathfrak{a}$. Similarly, for (1.7), we see that, if $a \vee b \varepsilon \mathfrak{a}$, then $a \varepsilon \mathfrak{a}$ or $b \varepsilon \mathfrak{a}$. The verification of (1.3) is obtained as follows: if $a \varepsilon \mathfrak{a}$ and $a \rightarrow b \varepsilon \mathfrak{a}$, then $\mathfrak{E}(a)$ and $\mathfrak{E}(a \rightarrow b) = [\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}'(b)]^{-'}$ belong to \mathbf{Q} ; hence $\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b)$ belongs to \mathbf{Q} ; since $\mathfrak{E}(a) \mathfrak{E}(a \rightarrow b) \subset \mathfrak{E}(b)$ in accordance with Theorem 7, $\mathfrak{E}(b)$ also belongs to \mathbf{Q} ; and hence $b \varepsilon \mathfrak{a}$. The „informal“ rule (1.8) does not impose any condition upon a single evaluation. By definition, the evaluation \mathfrak{p} and the prime μ -ideal \mathbf{P} are so related that $\mathfrak{p} \varepsilon \mathfrak{E}(a)$ if and only if $\mathfrak{E}(a) \text{ non } \varepsilon \mathbf{P}$.

The proof of the theorem is thereby completed.

We may close with a few remarks on the construction of evaluations of a Brouwerian system of propositions. If A is such a system, we begin by introducing a relation of equivalence \equiv defined by putting $a \equiv b$ if and only if $\vdash (a \rightarrow b) (b \rightarrow a)$. It is evident that $a \equiv b$ if and only if $\mathfrak{E}(a) = \mathfrak{E}(b)$ in the representation of Theorem 6. Consequently we see directly (and can prove in detail, if we wish) that, after the introduction of this equivalence, A becomes a distributive lattice with zero and unit in terms of the operations $a \vee b$ and ab , every proposition appearing in the „formal“ rules being equivalent to the unit. The evaluations of A can then be obtained by partitioning A into a prime μ -ideal and a prime α -ideal: for the distributive lattice A is isomorphic to the lattice \mathbf{A} of Theorem 6; and the proof of Theorem 8 reveals that the evaluat-

ions of A are to be obtained by such partitions of \mathbf{A} . The construction of such partitions has been described in Part I, Theorems 6 und. 7

*

Topologická interpretace distributivních mříží a brouwerovské logiky.

(Obsah předešlého článku.)

Distributivní mříž je systém, ve kterém jsou definovány dvě binární operace $a \vee b, ab$ vyhovující všem axiomům Booleovy algebry až na to, že se nepředpokládá existence komplementu. Hlavní výsledek je, že každá distributivní mříž se dá realizovati systémem všech otevřených bikompaktních podmnožin topologického prostoru podrobeného jednoduchým podmínkám. Ve druhé části je nastíněno znázornění brouwerovské logiky distributivní mříží, které odpovídá znázornění klasické logiky Booleovou algebrou; podstatný rozdíl je v tom, že při znázornění brouwerovské logiky jsou třídy vedle kombinatorických operací podrobeny ještě operacím topologickým.

Invariants d'un champ tensoriel dans un espace projectif courbe.

F. Vyšehlo, Praha.

(Reçu le 19 août 1937.)

1. Soit X_n un espace à n dimensions, décrit moyennant n coordonnées ξ^{ν} ¹⁾ et soient $\xi^{\nu} = \xi^{\nu}(t)$ les équations paramétriques d'une courbe $C(t)$, régulière dans X_n et soit $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$ une densité tensorielle (du poids q) r -fois contrevariante, connue à un facteur $f(t)$ près le long de la courbe C . (Dans ce que suit nous appellerons ces grandeurs par les mots „les tenseurs“.)

Enfin soit donnée dans l'espace X_n une connexion symétrique $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ jusqu'à la transformation isohodoïque près

$${}^{\times}\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + p_{\lambda}\delta_{\mu}^{\nu} + p_{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}, \quad (1, 1)$$

où p_{λ} est n'importe quel vecteur covariant dans X_n . Les connexions ${}^{\times}\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ conservent les lignes géodésiques de la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ ²⁾ et conduisent à une connexion projective (courbe), invariante par rapport (1, 1).³⁾

Le champ $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$, ou bien les composantes des tenseurs subissent des changements suivants:

Pendant le changement du système des coordonnées $\xi^{\nu} \rightarrow \bar{\xi}^{\nu}$ au jacobien

$$\Delta = \text{Dét.} \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \xi} \right| \neq 0$$

¹⁾ Les indices grecs parcourent les symboles $\dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{n}$.

²⁾ J. A. Schouten: Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1926, pg 76.

³⁾ Voir V. Hlavatý: Système complet des invariants d'une courbe dans un espace projectif courbe. Abh. Seminar für Vektor- und Tensor-Analyse, Moscou, **2-3** (1935), 13—50. Dans la suite nous désignons ce Mémoire: Hlavatý (1).

Voir aussi: Schouten-Gol'ab: Über projektive Übertragungen u. Ableitungen, Math. Zeitschrift, **32** (1930), 192—214 et Annali di Matematica, **8**, (1930), 141—157.

on a

$$\bar{A}^{\nu_1 \dots \nu_r} = \Delta^a A^{\lambda_1 \dots \lambda_r} \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_r}}{\partial \xi^{\lambda_r}} \quad (1, 2a)$$

A côté de cette transformation, on peut changer le facteur de proportionnalité $f(t)$

$$'A^{\nu_1 \dots \nu_r} = f(t) A^{\nu_1 \dots \nu_r} \quad (1, 2b)$$

Un invariant (une grandeur) indépendant de ce facteur et aussi du vecteur p_λ sera dit l'invariant (grandeur) projectif. (Les invariants indépendants du facteur $f(t)$ seront dits les invariants intrinsèques.) Les invariants projectifs sont aussi les invariants intrinsèques.

Cela posé, le problème à résoudre dans ce Mémoire peut être formulé de la manière suivante:

Un champ $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$ étant donnée dans X_n le long de la courbe $C(t)$ on doit trouver: 1° le système complet de ses invariants projectifs différentiels; 2° ses grandeurs projectives qui satisfont aux équations analogues aux équations de Frenet pour une courbe.

2. Posons pour abrégier

$$P_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{\nu_1 \dots \nu_r} = \Delta^{-\frac{r}{n}} \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_r}}{\partial \xi^{\lambda_r}} \quad (2, 1)$$

et rangeons dans l'ordre naturel les n^r combinaisons qui donnent les indices $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r$ et désignons les par les symboles $\ddot{0}, \ddot{1}, \dots, \ddot{N} = n^r - 1$ en écrivant

$$\begin{array}{l} \ddot{0} \text{ pour la combinaison } \ddot{1}\ddot{1} \dots \ddot{1}\ddot{1} \\ \ddot{1} \text{ pour la combinaison } \ddot{1}\ddot{1} \dots \ddot{1}\ddot{2} \\ \dots \\ \ddot{n} - \ddot{1} \text{ pour la combinaison } \ddot{1}\ddot{1} \dots \ddot{1}\ddot{n} \\ \ddot{n} \text{ pour la combinaison } \ddot{1}\ddot{1} \dots \ddot{2}\ddot{1} \\ \dots \\ \ddot{N} \text{ pour la combinaison } \ddot{n}\ddot{n} \quad \ddot{n}\ddot{n} \end{array}$$

Ceci nous permet d'écrire $P_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$ ⁴⁾ pour $P_{\lambda_1 \dots \lambda_r}^{\nu_1 \dots \nu_r}$.

Cela posé, nous trouvons

$$P = \text{Dét. } | P_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} | = 1. \quad (2, 2)$$

En raison de cette équation nous pouvons déterminer les coefficients

⁴⁾ Les indices allemands (courants) parcourent les symboles $\ddot{0}, \ddot{1}, \ddot{2}, \dots, \ddot{N} = n^r - 1$.

Q_b^a par les relations

$$P_b^a Q_a^r = P_a^r Q_b^a = \delta_b^r = \begin{cases} 0, & r \neq b \\ 1, & r = b. \end{cases}$$

Le groupe linéaire aux coefficients P_b^a sera dit dans la suite le groupe projectif fondamental et désigné par $G(\xi)$. Au point ξ^v de l'espace X_n appartiennent les valeurs des coefficients du groupe $G(\xi)$ qui donnent naissance à un groupe projectif local $G(\xi)_0$.

Soit $K_N(\xi)$ un espace projectif (abstrait) à N dimensions dont les grandeurs se transforment à l'aide de ce groupe $G(\xi)_0$. [On peut adjoindre l'espace $K_N(\xi)$ au point ξ à l'aide du groupe $G(\xi)_0$.] La totalité des espaces $K_N(\xi)_0$ sera dite la variété K_N (de M. R. König). C'est une variété projective à N dimensions, mais non la plus générale variété projective à N dimensions⁵⁾ à cause de la définition des coefficients $P_b^a(\xi)_0$ du groupe $G(\xi)_0$.

Soient maintenant u^a (resp. u_b)⁶⁾ les ensembles bien connus qui constituent la notion du „repère de mesure“ (repère fondamental) attaché au point ξ de la variété K_N . Supposons que ces ensembles ne soient connus qu'à un facteur arbitraire, (mais analytique) $F(\xi)$ près.

Alors les u^a se transforment d'après

$$\bar{u}_b^a = P_b^a u^r, \quad 'u_b^a = F u^a. \quad (2, 3)$$

La grandeur de la variété K_N qui se transforme par rapport aux transformations (2, 3) suivant les lois:

$$\bar{U}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{\xi}^{\nu_p}}{\partial \xi^{\alpha_p}} \cdot \frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial \xi^{\beta_p}}{\partial \bar{\xi}^{\lambda_p}} \Delta^p U_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

$$'U_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = F^i U_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\nu_1 \dots \nu_p}$$

sera dit l'agrégat scalaire à la caractéristique $\left[\begin{smallmatrix} u \\ \nu \\ i \ p \end{smallmatrix} \right]$. (i, p sont les nombres réels.) Les composantes de cet agrégat sont connues à un facteur près.

⁵⁾ Voir V. Hlavatý: Espaces abstraits courbes de König. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 59 (1935), 1—39; voir pg 5, 20. Dans la suite nous désignons ce travail par: Hlavatý (2).

⁶⁾ Voir Hlavatý (2), pg 7.

Les agrégats scalaires $U_{\lambda_1 \dots \lambda_v}^{i_1 \dots i_s}$ à la caractéristique $\left[\begin{smallmatrix} u \\ v, i \end{smallmatrix} \right] - s + t, p$ étant donnés, on peut en former les grandeurs

$$V_{\lambda_1 \dots \lambda_v \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_s} = U_{\lambda_1 \dots \lambda_v}^{i_1 \dots i_s} u_{i_1}^{\alpha_1} \dots u_{i_s}^{\alpha_s} u_{\beta_1}^{\epsilon_1} \dots u_{\beta_t}^{\epsilon_t},$$

qui se transforment par rapport à (2, 3) d'après:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\lambda_1 \dots \lambda_v \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_s} &= \frac{\partial \bar{\xi}^{v_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{\xi}^{v_u}}{\partial \xi^{\alpha_u}} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}^{\beta_1}}{\partial \xi^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial \bar{\xi}^{\beta_v}}{\partial \xi^{\lambda_v}} \\ &\cdot \Delta^p \cdot P_{r_1}^{\alpha_1} \dots P_{r_s}^{\alpha_s} \cdot Q_{b_1}^{u_1} \dots Q_{b_t}^{u_t} \cdot V_{\beta_1 \dots \beta_v u_1 \dots u_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_u r_1 \dots r_s}, \\ 'V_{\lambda_1 \dots \lambda_v \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_s} &= F^i V_{\lambda_1 \dots \lambda_v \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_s}. \end{aligned}$$

Cette grandeur sera dite l'agrégat projectiel (de K_N) à la caractéristique $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \ i \ p \ t \end{smallmatrix} \right)$; elle a des composantes connues à un facteur près.

A l'aide de la notion du raccordement affine des repères fondamentaux nous pouvons définir la connexion (projective) de K_N ⁷⁾ par les coefficients:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}, Q_{\mu} = \frac{r}{n} \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \frac{\partial \log m}{\partial \xi^{\mu}}, \quad \Omega_{b\mu}^{\alpha} = \Gamma_{b\mu}^{\alpha} - \frac{r}{n} \delta_b^{\alpha} \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}, \quad (2, 5)$$

où $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ est la connexion symétrique et intrinsèque donnée dans l'espace X_n et $m(\xi)$ est une grandeur (de K_N) à la caractéristique $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \ 1, -\frac{r}{n} \ 0 \end{smallmatrix} \right)$ (c'est-à-dire une densité connue à un facteur près) et enfin

$$\Gamma_{b\mu}^{\alpha} = \Gamma_{\lambda_1\mu}^{\nu_1} \delta_{\lambda_1}^{\alpha} \dots \delta_{\nu_r}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda_2\mu}^{\nu_2} \delta_{\lambda_2}^{\alpha} \dots \delta_{\nu_r}^{\alpha} + \dots + \Gamma_{\lambda_r\mu}^{\nu_r} \delta_{\lambda_1}^{\alpha} \dots \delta_{\lambda_{r-1}}^{\alpha}. \quad (2, 5a)$$

Cela étant, on peut définir la dérivée (projective) covariante de la grandeur à la caractéristique arbitraire:

Soit par exemple V^{α} un vecteur contrevariant dans K_N , c'est-à-dire la grandeur à la caractéristique $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \ i \ p \ 0 \end{smallmatrix} \right)$. Sa dérivée covariante est:

$$D_{\mu} V^{\alpha} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\mu}} + i Q_{\mu} V^{\alpha} + p \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} V^{\alpha} + \Omega_{b\mu}^{\alpha} V^b. \quad (2, 6)$$

⁷⁾ Voir Hlavatý (2), pg 14—17.

⁸⁾ Voir Hlavatý (2), pg 16.

Les coefficients (2, 5) se transforment pendant $\xi^\nu \rightarrow \bar{\xi}^\nu$ resp. pendant le changement du facteur F dans (2, 3) suivant les lois:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu &= \frac{\partial \bar{\xi}^\nu}{\partial \xi^\mu} \cdot \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \bar{\xi}^\lambda} \cdot \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \bar{\xi}^\mu} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial \bar{\xi}^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \bar{\xi}^\lambda \partial \bar{\xi}^\mu}; & \Gamma_{\lambda\mu}^\nu &= \Gamma_{\lambda\mu}^\nu; \\ \text{b) } Q_\mu &= Q_\lambda \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^\mu}; & Q_\mu &= Q_\mu - \frac{\partial \log F}{\partial \xi^\mu}; \\ \text{c) } \bar{\Omega}_{b\mu}^a &= \left(P_r^a Q_b^u \Omega_{u\lambda}^r + P_r^a \frac{\partial Q_b^r}{\partial \xi^\lambda} \right) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^\mu}; & \Omega_{b\mu}^a &= \Omega_{b\mu}^a. \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Démonstration résulte de la définition (2, 5). Les équations (2, 6) et (2, 7) nous permettent de constater que $D_\mu V^a$ est une grandeur à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & i & p & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$:

$$\text{d) } 'D_\mu V^a = F^i D_\mu V^a. \quad (2, 7)$$

3. Grâce à la définition de K_N (voir § 2) nous pouvons maintenant interpréter le champ de tenseurs $A^{\nu_1 \dots \nu_r}(t)$ comme un champ de vecteurs $A^\alpha(t)$ à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & i & p & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ⁹⁾ alors connus à un facteur près le long de la courbe $C(t)$ dans K_N .

Les invariants de ce champ $A^\alpha(t)$ sont les invariants cherchés du champ de tenseurs.

Cela dit, nous pouvons formuler le problème que nous allons résoudre comme il suit:

Un champ de vecteurs $A^\alpha(t)$ à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & i & p & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ ⁹⁾ étant donné dans K_N le long de la courbe $C(t)$, on doit trouver 1° les invariants projectifs qui forment le système complet des invariants du champ $A^\alpha(t)$ et 2° les formules de Frenet pour les grandeurs projectives invariantes.

4. Tout d'abord nous démontrerons le lemme suivant:

Soient $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$, Q_μ , $\Omega_{b\mu}^a$ les coefficients (2, 5) de la connexion de la variété K_N . Les grandeurs:

$$A_{b\mu}^a = \Omega_{b\mu}^a - \frac{1}{N+1} \Omega_{r\mu}^r \delta_b^a \quad (4, 1)$$

sont les coefficients de la connexion projective dans K_N , c'est-à-dire ils satisfont aux lois:

$$\bar{A}_{b\mu}^a = \left(P_r^a Q_b^u A_{u\lambda}^r + P_r^a \frac{\partial Q_b^r}{\partial \xi^\lambda} \right) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial \xi^\mu}, \quad (4, 2)$$

⁹⁾ Nous posons: $p = q - \frac{r}{n}$, voir (1, 2a); $f(t) \equiv F^i(\xi(t))$.

$${}'A_{b\mu}^a = A_{b\mu}^a, \quad (4, 3)$$

$$\times A_{b\mu}^a = A_{b\mu}^a. {}^{10)} \quad (4, 4)$$

Démonstration. α) L'équation (4, 2) résulte immédiatement des équations (2, 7c) et (4, 1).

β) L'équation (4, 3) suit de la seconde équation (2, 7).

γ) Pendant la transformation (1, 1) on obtient

$$\times \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + (n+1) p_{\mu}. \quad (4, 5)$$

Ensuite on trouve à l'aide de (2, 5a)

$$\times \Gamma_{b\mu}^a = \Gamma_{b\mu}^a + 2r p_{\mu} \delta_b^a. \quad (4, 6)$$

D'autre part on trouve en raison de (2, 5) et (4, 6)

$$\times \Omega_{b\mu}^a = \Omega_{b\mu}^a + \frac{r}{n} (n-1) p_{\mu} \delta_b^a. \quad (4, 7)$$

En effectuant la transformation (1, 1) à (4, 1) nous obtiendrons d'après (4, 7)

$$\begin{aligned} \times A_{b\mu}^a &= \times \Omega_{b\mu}^a - \frac{1}{N+1} \times \Omega_{r\mu}^r \delta_b^a = \Omega_{b\mu}^a + \frac{r}{n} (n-1) p_{\mu} \delta_b^a - \\ &- \frac{1}{N+1} \left[\Omega_{r\mu}^r + \frac{r}{n} (n-1) (N+1) p_{\mu} \right] \cdot \delta_b^a = A_{b\mu}^a. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons nous servir des coefficients $A_{b\mu}^a$ — comme des coefficients de la connexion projective — pour trouver les invariants projectifs du champ $A^a(t)$. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant. Pour une connexion (1, 1), caractérisée par certain vecteur p_{μ} , résulte de (4, 1), en raison de l'équation intrinsèque

$$\Omega_{(p)}^a = 0, {}^{11)} \quad (4, 8)$$

l'équation intrinsèque suivante:

$$A_{(p)}^a = \Omega_{(p)}^a. \quad (4, 9)$$

Alors on peut employer les coefficients $\Omega_{(p)}^a$ pour chercher les invariants intrinsèques du champ $A^a(t)$ (pour une connexion $\Gamma_{\lambda\mu}^r$ donnée et fixée) de la même manière que les coefficients $A_{b\mu}^a$ pour chercher les invariants projectifs du champ $A^a(t)$.

Si nous changeons p_{μ} (c'est-à-dire, si $\Gamma_{\lambda\mu}^r$ change d'après (1, 1))

¹⁰⁾ Voir (1, 1).

¹¹⁾ Voir (2, 5).

les coefficients $\Omega_{b\mu}^a$ se transforment aussi, mais les expressions $A_{b\mu}^a$ restent invariantes; alors il ne nous reste qu'à considérer le changement du facteur $F(t)$.

5. La dérivée absolue d'un vecteur du champ en question, le long de la courbe $C(t)$, soit exprimée de la manière suivante

$$\dot{D}A^n = \frac{dA^n}{dt} + (A_{b\mu}^n A^b + p\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda A^n) q^\mu, \quad \left(q^\mu = \frac{d\xi^\mu}{dt} \right). \quad (5, 1)$$

La transformation (1, 1) de la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ a pour conséquence, en raison de (4, 5):

$$\times \dot{D}A^n = \dot{D}A^n + p(n+1) p_\mu q^\mu A^n.$$

Si l'on y substitue la valeur p_μ tirée de (4, 7), on trouve

$$\begin{aligned} \times \dot{D}A^n &= \frac{pn(n+1)}{r(n-1)(N+1)} \times \Omega_{r\mu}^r q^\mu A^n = \\ &= \dot{D}A^n - \frac{pn(n+1)}{r(n-1)(N+1)} \Omega_{r\mu}^r q^\mu A^n. \end{aligned} \quad (5, 2)$$

Nous avons à peine besoin d'accentuer que cet invariant (par rapport à (1, 1)) peut être considéré comme une nouvelle dérivée absolue le long de la courbe $C(t)$. Posons dans ce qui suit

$$DA^n = \frac{dA^n}{dt} + (A_{b\mu}^n A^b + p\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda A^n - \frac{pn(n+1)}{r(n-1)(N+1)} \Omega_{r\mu}^r A^n) q^\mu. \quad (5, 3a)$$

$$\text{Donc:} \quad \times DA^n = DA^n. \quad (5, 3b)$$

Dans la suite nous servirons de cette dérivée absolue. Désignons, de plus:

$$A_0 = A^a(t), \quad A_1 = DA_0, \quad A_2 = DA_1, \quad \dots, \quad A_i = DA_{i-1} \quad (5, 4)$$

et appelons A_i le i -ième vecteur dérivé du champ $A^a(t)$, qui appartient au point au paramètre t .

Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant:

Si les m premiers vecteurs dérivés A_0, A_1, \dots, A_{m-1} ($2 < m \leq N+1$) pour $t = t_0$ sont linéairement indépendants*), tandis que A_m et les vecteurs suivants résultent

¹²⁾ En effectuant le changement du facteur $F(t)$ on obtient pour $\times DA^a$ l'équation (5, 8).

*) C'est-à-dire il n'existe aucune combinaison linéaire $\sum_{i=0}^k M_i M_{k-i} A_i = 0$ (avec quelques coefficients $M_i \neq 0$) pour $k \leq m-1$.

comme une combinaison linéaire des ces vecteurs précédents, c'est-à-dire

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} A^a = 0,^{13)} \quad (a_0 \neq 0) \quad (5, 5)$$

on peut trouver un système des invariants projectifs I_2, I_3, \dots, I_m , qui sont les fonctions des coefficients

$$L_k = \frac{a_k}{a_0}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (5, 6)$$

La structure de l'invariant I_q , ($q = 2, 3, \dots, m$) est telle que:

- L'invariant I_q est isobare du poids arithmétique q (**) par rapport à t .
- I_q ne contient que $L_1, L_2, \dots, L_q, L'_1, L'_2, \dots, L'_{q-1}$, $\left(L'_k = \frac{dL_k}{dt}\right)$.
- Les dérivées $L'_1, L'_2, \dots, L'_{q-1}$ n'y interviennent que linéairement.
- I_q peut être exprimé par la formule

$$I_q = L_q - L'_{q-1} + \dots,$$

où les membres omis ne contiennent ni L_q , ni L'_{q-1} .

- L'invariant I_q ne dépend pas de m , c'est-à-dire: quel que soit le nombre m des vecteurs dérivés linéairement indépendants, les premiers invariants I_2, I_3, \dots, I_m sont exprimés de la même manière en fonction des coefficients L_i .

Démonstration. α) Le changement du facteur F dans (2, 3) substituée, d'après le paragraphe 3 au vecteur $\underset{0}{A}$ le vecteur $\underset{0}{A}'$

$$\underset{0}{A}' = F^i \underset{0}{A}. \quad (5, 7)$$

Il s'ensuit à l'aide de (2, 7a—c), (4, 3) et (5, 3)

$$\underset{0}{D}' \underset{0}{A}' = \underset{0}{D}' \underset{0}{A} = F^i (\underset{0}{D} \underset{0}{A} + \varphi' \underset{0}{A}), \quad \left(\varphi' = \frac{d \log F^i}{dt}\right). \quad (5, 8)$$

En raison de ce changement, le vecteur $\underset{r}{A}$ ($r \leq m$) se transforme

¹³⁾ Les indices latins j, k, \dots parcourent les symboles $0, 1, 2, \dots, m \leq N + 1$; la sommation portant aussi sur les indices autres que j, k, \dots sera toujours désigné par Σ .

(**) La fonction $I_q(t)$ est du poids arithmétique q par rapport à t , si l'on a $I_q^* = c^q I_q$ pendant le changement $t^* = c^{-1} \cdot t$, ($c = \text{const} \neq 0$).

en $'A$, qui est une combinaison linéaire des vecteurs A_0, A_1, \dots, A_r .

Compte tenu de (5, 3), (5, 4) et (2, 7a—c) on a avant tout

$$'A_{k+1} = D_k 'A_k, \quad (5, 9)$$

D'autre part, la dérivation absolue de (5, 7) nous donne:

$$\begin{aligned} 'A_1 &= F_1^i(A_0 + \varphi_0' A_0), \\ 'A_2 &= F_2^i[A_1 + 2\varphi_1' A_1 + (\varphi_1'' + \varphi_1'^2) A_1], \\ 'A_3 &= F_3^i[A_2 + 3\varphi_2' A_2 + 3(\varphi_2'' + \varphi_2'^2) A_2 + (\varphi_2''' + 3\varphi_2' \varphi_2'' + \varphi_2'^3) A_2].^{14)} \end{aligned} \quad (5, 10)$$

Il en résulte par l'induction

$$'A_k = \sum_{j=0}^k F_j^i \binom{k}{j} r_{k,j}^j A_j, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (5, 11)$$

Les coefficients $r_{k,j}^j$ sont des polynômes de $\varphi(t)$ et de ses dérivées d'après t . Dans la suite nous allons étudier de près les relations qui sont valables pour ces scalaires et nous nous en servirons bientôt.

β) La formule (5, 11) nous donne:

$$'A_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} F_j^i \binom{k+1}{j} r_{k+1,j}^j A_j, \quad (k = -1, 0, 1, \dots, m-1). \quad (5, 12)$$

La dérivée absolue de l'équation (5, 11) est:

$$'A_{k+1} = \sum_{j=0}^k F_j^i \binom{k}{j} [\varphi_k^j r_{k,j}^j A_j + r_{k,j}^j A_j + r_{k,j+1}^j A_j], \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (5, 13)$$

Le rapprochement des formules (5, 12) et (5, 13) nous permet d'écrire:

$$r_{k+1}^j = \frac{k+1-j}{k+1} (\varphi_k^j r_{k,j}^j + r_k^j) + \frac{j}{k+1} r_{k,j}^{j-1}, \quad (5, 14)$$

$(j \leq k = 0, 1, \dots, m-1)$

où $r_k^{-1} = 0$, $r_k^j = 0$ pour $j > k = 0, 1, \dots, m-1$.

L'équation (5, 14) donne:

$$r_{k+1}^k = r_k^k = \dots = r_0^k, \quad (5, 15)$$

$$r_{k+1}^0 = r_k^0 \varphi_k' + r_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5, 16)$$

¹⁴⁾ L'accent désigne la dérivée d'après t .

Cela étant nous démontrerons la relation

$$r = r \quad (5.17)$$

$$s = 0, 1, \dots, l, (l < m), \quad k = s, s - 1, \dots, 0.$$

Supposons que la relation soit valable pour les valeurs $s = 0, 1, \dots, l', l' < l, k = l', l' - 1, \dots, 0$; nous démontrerons qu'elle reste valable pour $s + 1 (\leq l' + 1)$.

On a d'abord:

$$r_{s+1} = \frac{s+1-k}{s+1} \left(r_{s-k} \varphi' + r'_s \right) + \frac{k}{s+1} r_s^{k-1}$$

ou, en raison de (5, 17):

$$r_{s+1} = \frac{s+1-k}{s+1} \left(r_{s-k} \varphi' + r'_{s-k} \right) + \frac{k}{s+1} r_{s-k+1}^0$$

Il en résulte à l'aide de (5, 16):

$$r_{s+1} = r_{s-k+1}^0 \text{ pour } k = s+1, s, \dots, 0.$$

D'autre part le calcul direct des coefficients r_j^i (des équations (5, 10)) donne:

$$\begin{aligned} r_0^0 &= 1, \\ r_1^0 &= 1, r_1^1 = \varphi', \\ r_2^0 &= 1, r_2^1 = \varphi', r_2^2 = \varphi'' + \varphi'^2, \\ r_3^0 &= 1, r_3^1 = \varphi', r_3^2 = \varphi'' + \varphi'^2, r_3^3 = \varphi''' + 3\varphi'\varphi'' + \varphi'^3, \\ &\dots \text{ etc.} \end{aligned} \quad (5.18)$$

On voit donc, que la formule (5, 17) est vraie pour $s = 0, 1, 2, 3, r = 3, 2, 1, 0$. Il s'ensuit que (5, 17) est valable pour n'importe quel $r, s < m$.

Écrivons, pour abréger:

$$r = r. \quad (5.19)$$

Or, la formule (5, 17) peut être écrite:

$$r = r = r, \text{ pour } s = 0, 1, \dots, m - 1, k \leq s. \quad (5.20)$$

L'équation (5, 16) s'écrit à l'aide de (5, 19) de la manière suivante:

$$r = r' + r r, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5, 21)$$

C'est l'équation qui lie les coefficients en question et dont nous nous servirons pour calculer les invariants projectifs cherchés du champ $A^a(t)$.

γ) D'après la supposition concernant les vecteurs dérivés du champ $A^a(t)$, le vecteur A est la combinaison des vecteurs A_0, \dots, A_{m-1} .

La relation respective est exprimée par (5, 5). En effectuant le changement F dans (2, 3) on obtient de l'équation (5, 5)

$$\sum_0^m j \binom{m}{j} 'a_{m-j} 'A_j = 0, \quad 'a_0 \neq 0. \quad (5, 22)$$

Si l'on y remplace $'A_j$ à l'aide de l'équation (5, 11) et (5, 20) on obtient la relation suivante:

$$\sum_0^m j \binom{m}{j} 'a_{m-j} \sum_0^j \binom{j}{k} r_k A_k = 0. \quad (5, 23)$$

Le rapprochement de (5, 23) et (5, 5) nous donne

$$\rho a_{m-q} = \sum_0^m \binom{m-q}{m-j} 'a_{m-j} r^{j-q}, \quad \rho \neq 0. \quad (5, 24)$$

Si l'on y pose $m-q = u$, $m-j = v$, l'équation (5, 24) prend la forme:

$$\rho a_u = \sum_0^u \binom{u}{v} 'a_v r^{u-v}, \quad u = 0, 1, \dots, m. \quad (5, 25)$$

Supposons que soit $'a_0 = a_0$. Parce que on a $\rho a_0 = 'a_0 r^0 = 'a_0$, on tire de cette supposition $\rho = 1$.

Le système (5, 25) des $m+1$ équations linéaires aux inconnues r_k ($k = 0, 1, \dots, m$) peut être écrit:

$$\begin{aligned} a_0 &= 'a_0 r^0 (= 'a_0), \\ a_u - 'a_u &= \sum_1^u \binom{u}{v} 'a_{u-v} r^v, \quad u = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5, 26)$$

En posant à côté de (5, 6)

$$'L_k = \frac{'a_k}{a_0},$$

il résulte de là:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & L_0 = 'L_0 = 1, \\ \text{b)} \quad & L_u - 'L_u = \sum_1^n r \binom{u}{v} 'L_{u-v} r^v, \quad u = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5, 27)$$

Le déterminant du système (5, 27b) aux inconnues r est $('L_0)^m = 1$.
Or, on a

$$r = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} 'L_0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & L_1 - 'L_1 \\ \binom{2}{1} 'L_1 & 'L_0 & 0 & 0 \dots 0 & L_2 - 'L_2 \\ \binom{3}{1} 'L_2 & \binom{3}{2} 'L_1 & 'L_0 & 0 \dots 0 & L_3 - 'L_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{v}{1} 'L_{v-1} & \binom{v}{2} 'L_{v-2} & \dots & \binom{v}{v-1} 'L_1 & L_v - 'L_v \end{vmatrix} \quad (5, 28)$$

pour $v = 1, 2, \dots, m$.

Si l'on substitue ces valeurs aux équations projectives (5, 21), on obtient les équations projectives invariantes en L et $'L$, qui sont de la forme:

$$I_{k+1}(L) - I_{k+1}('L) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5, 29)$$

Ces équations nous donnent les invariants I_q en question.

Calculons à titre d'exemple les premiers deux invariants. On a de (5, 27b) pour $u = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \overset{1}{r} &= L_1 - 'L_1, \\ \overset{2}{r} &= L_2 - 'L_2 - 2L_1 'L_1 + 2 'L_1^2, \\ \overset{3}{r} &= L_3 - 'L_3 - 3L_1 'L_2 - 3 'L_1 L_2 + 6 'L_1 'L_2 + 6L_1 'L_1^2 - 6 'L_1^3. \end{aligned} \quad (5, 30)$$

Les équations (5, 21) se réduisent en raison de (5, 30) à

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & L_1 - 'L_1 = L_1 - 'L_1 \quad (\text{pour } k=0), \\ \text{b)} \quad & L_2 - L_1^2 - L_1^2 - ('L_2 - 'L_1^2 - 'L_1^2) = 0 \quad (\text{pour } k=1) \\ \text{c)} \quad & L_3 - L_2^2 - 3L_1 L_2 + 2L_1^3 + 2L_1 'L_1 - ('L_3 - 'L_2^2 - 3'L_1 'L_2 + 2'L_1^3 + 2'L_1 'L_1) = 0 \quad (\text{pour } k=2) \end{aligned} \quad (5, 31)$$

Parce que (5, 31a) se réduit à l'identité, nous sommes parvenus aux invariants:

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & I_2 = L_2 - L_1^2 - L_1^2, \\ & I_3 = L_3 - L_2^2 - 3L_1 L_2 + 2L_1^3 + 2L_1 'L_1. \end{aligned} \quad (5, 31)$$

On voit d'abord que la construction des invariants est algorithmique. Ensuite il est évident que les relations (5, 29) nous ne donnent les invariants que pour $k = 1, 2, \dots, m - 1$. (Voir (5, 31a).)

Nous obtiendrons ainsi les invariants I_2, I_3, \dots, I_m qui forment un système des $(m - 1)$ invariants projectifs du champ pris en considération.

δ) L'algorithme de la construction des invariants I_q nous donne leur structure. Si l'on effectue la transformation

$$t^* = c^{-1} t, \quad (c = \text{const.} \neq 0) \quad (5, 32)$$

du paramètre t de la courbe $C(t)$, on obtient

$$r^* = c^k r, \quad (5, 33)$$

parce que r contient les dérivées (d'après t) du poids k comme il s'ensuit de (5, 18) et (5, 21). En effectuant le changement (5, 32) à (5, 25) on a:

$$a_k^* = c^k a_k, \quad 'a_k^* = c^k 'a_k, \quad (5, 34)$$

parce que $a_k, 'a_k$ se transforment de la même manière. Il en résulte:

$$L_k^* = c^k L_k, \quad 'L_k^* = c^k 'L_k. \quad (5, 35)$$

Enfin à cause de la construction de I_q (et à l'aide de (5, 21), (5, 28), (5, 33) et (5, 35)) on a:

$$I_q^* = c^q I_q, \quad q = 2, 3, \dots, m. \quad (5, 36)$$

Les invariants I_q sont isobares du poids arithmétique q par rapport à t .

En écrivant (5, 21) de la manière suivante

$$r = r' + r \quad (5, 37)$$

et en y substituant r, r' les valeurs tirées de (5, 28) et $L_0 = 1$, on obtient l'invariant I_q exprimé par la formule:

$$I_q = L_q - L'_{q-1} + \dots, \quad (5, 38)$$

où les membres omis ne contiennent ni L_q , ni L'_{q-1} . Cette construction et l'équation (5, 28) montre que I_q ne dépend que de $L_1, L_2, \dots, L_q, L'_1, L'_2, \dots, L'_{q-1}$. Parce que (5, 37) contient r' linéairement et r est exprimé par (5, 28) en polynôme de L_i et $'L_i$, ($i = 0, 1, \dots, v$), il en résulte que l'invariant I_q ne contient L'_1, \dots, L'_{q-1} que linéairement.

La structure des premiers invariants I_q et leur construction restent les mêmes quel que soit le nombre (par exemple z) des vecteurs A_0, A_1, \dots, A_{z-1} linéairement indépendants.

Alors, le théorème énoncé plus haut est démontré.

6. Supposons maintenant dans le théorème que nous venons de démontrer $m = N + 1$, c'est-à-dire que soit:

$$\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{j} a_{N+1-j} A_j^\alpha = 0, \quad (a \neq 0)^{15} \quad (6, 1)$$

et que les vecteurs $A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots, A_N^\alpha$ soient linéairement indépendants. D'après le paragraphe précédent, le champ $A^\alpha(t)$ a les N invariants projectifs I_2, I_3, \dots, I_{N+1} .

Cela posé on peut démontrer:

Le système des invariants I_2, I_3, \dots, I_{N+1} du champ $A^\alpha(t)$ est le système complet des invariants projectifs de ce champ.¹⁶⁾

Démonstration. α) Nous exprimerons avant tout que les invariants projectifs I_2, I_3, \dots, I_{N+1} appartiennent à l'ensemble $A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots, A_N^\alpha$ des vecteurs linéairement indépendants et au vecteur A_{N+1}^α qui est une combinaison linéaire des vecteurs précédents. Construisons à cet effet les équations:

$$\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{j} L_{N+1-j} A_j^\alpha = 0, \quad (L_0 = 1), \quad (6, 2)$$

En tenant compte de l'indépendance linéaire des vecteurs $A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots, A_N^\alpha$ on voit que (6, 2) est un système irréductible, c'est-à-dire le système des équations (6, 2) ne peut pas être déduit d'un autre système tel que

$$\sum_0^k \binom{k}{j} M_{k-j} A_j^\alpha = 0$$

pour $k < N + 1$.

Remplaçons maintenant les valeurs L_2, L_3, \dots, L_{N+1} dans (6, 2) par les fonctions de $L_1, L'_1, \dots, L_1^{(N)}$ ¹⁷⁾ tirées et calculées pas à pas des formules pour I_2, I_3, \dots, I_{N+1} . Ainsi, par exemple, on obtient de (5, 31b—c) les premières formules suivantes:

$$\begin{aligned} L_2 &= I_2 + L'_1 + L_1^2, \\ L_3 &= I_3 + I'_2 + 3I_2 L_1 + L''_1 + 3L_1 L'_1 + L_1^3 \end{aligned} \quad (*)$$

¹⁵⁾ Dans l'équation (6, 1) sont écrites les composantes A_j^α (au point général t de la courbe $C(t)$).

¹⁶⁾ Pour éviter tout malentendu nous voulons exprimer cette propriété encore d'une autre manière: Une courbe régulière $\xi^\nu(t)$ et les invariants I_2, \dots, I_{N+1} étant donnés, on peut trouver, à moins des conditions initiales un seul champ $A^\alpha(t)$.

¹⁷⁾ Voir la remarque (14).

et ainsi de suite. De là et de la structure des invariants I_q on peut voir que ces substitutions peuvent être faites linéairement. Nous obtiendrons ainsi pour (6, 2):

$$F^{\alpha} (L_1, L'_1, \dots, L_1^{(N)}; \underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \dots, \underset{N+1}{A}; I_2, I_3, \dots, I_{N+1}) = 0, \quad (6, 3)$$

où l'on a

$$A^{\alpha} = \underbrace{DD \dots D}_{i\text{-fois}} A^{\alpha} = D^{(i)} A^{\alpha} \quad (6, 4)$$

avec $i = 1, 2, \dots, N + 1$.

Les équations (*) et la structure des invariants I_q montrent que la dérivée $L_1^{(N)}$ se trouve dans (6, 3) linéairement et que le coefficient de cette dérivée est égal à $A^{\alpha}(t)$; c'est une fonction finie, régulière et différente de zéro.

Nous allons résoudre les équations (6, 3), (6, 4) aux inconnues $L_1, A^{\alpha}, A^{\alpha}, \dots, A^{\alpha}$. Posons à ce but:

$$L_1 = z_0, L'_1 = z_1, \dots, L_1^{(N-1)} = z_{N-1}. \quad (6, 5)$$

Nous parvenons ainsi aux équations différentielles telles que

- a) $z_1 = z'_0, z_2 = z'_1, \dots, z_{N-1} = z'_{N-2}$.
- b) $F^{\alpha}(z_0, z_1, \dots, z_{N-1}, z'_{N-1}; \underset{0}{A}, \underset{1}{A}, \dots, \underset{N}{A}, DA; I_2, I_3, \dots, I_{N+1}) = 0,$
- c) $A^{\alpha} = D^{(i)} A^{\alpha}, * \quad i = 1, 2, \dots, N.$

β) Cela fait nous démontrerons le lemme suivant:

Le système des invariants I_2, I_3, \dots, I_{N+1} (et aussi le système (6, 6)) détermine l'intégrale A^{α} à moins d'un facteur près:

En substituant aux A^{α} , ($i = 1, 2, \dots, N$), dans (6, 6b), les valeurs tirées de (6, 6c), on obtient l'équation différentielle d'ordre $N + 1$ pour l'inconnue A^{α} qui s'écrit, en raison de (6, 2) de la manière suivante:

$$D^{(N+1)} A^{\alpha} + \binom{N+1}{1} L_1 D^{(N)} A^{\alpha} + \dots + \binom{N+1}{N} L_N D A^{\alpha} + L_{N+1} A^{\alpha} = 0, \quad (6, 7)$$

où les coefficients L_i peuvent être exprimés en fonctions des invariants I_q et de la fonction arbitraire L_1 . (Voir l'équation (*) à la page 39.)

*) On peut aussi écrire pour c):

$$A^{\alpha} = A^{\alpha'} + q^{\mu} (A^{\alpha}_{b\mu} A^{\alpha} + p \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} A^{\alpha} - \frac{pn(n+1)}{r(n-1)(N+1)} \Omega^{\alpha}_{r\mu} A^{\alpha}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Partons maintenant d'une autre fonction $'L_1$, définie par

$$'L_1 = L_1 - \frac{d \log \Phi}{dt} \quad (6, 8)$$

(où Φ est n'importe quelle fonction de t , qui n'est pas nulle pour aucune valeur de t de l'intervalle examiné et possède toutes les dérivées, dont nous aurons besoin).

Le rapprochement des formules (6, 8), (5, 7) et (5, 27) nous donne immédiatement

$$'A_0^\alpha = \Phi A_0^\alpha. \quad (6, 9)$$

Parce que les invariants projectifs I_q ne changent pas par rapport aux transformations (6, 8), (6, 9) nous obtenons, d'après la construction du système analogue à (6, 6), l'équation suivante:

$$D^{(N+1)} 'A_0^\alpha + \binom{N+1}{1} 'L_1 D^{(N)} 'A_0^\alpha + \dots + 'L_{N+1} 'A_0^\alpha = 0 \quad (6, 10)$$

pour l'inconnue $'A_0^\alpha = \Phi A_0^\alpha$, où l'on peut remplacer les valeurs $'L_i$ par les fonctions de $'L_1$ et I_q .

Or, en résolvant le problème mentionné à la page 39 on obtient ainsi l'équation (6, 7) ou bien (6, 10). Ces équations sont équivalentes par rapport aux transformations prises en considération. Le lemme est ainsi démontré.

γ) Les équations (6, 6) constituent un système des équations différentielles d'ordre un, composé de $N-1 + N+1 + N(N+1) = N^2 + 3N$ équations aux inconnues:

$$z_0, z_1, \dots, z_{N-1}, A_{1-}^\alpha, \dots, A_N^\alpha, \Phi A_0^\alpha, {}^{18)}$$

où $\Phi(t)$ est un scalaire arbitraire qui possède la propriété mentionnée plus haut. Le nombre des inconnues est à leur tour: $N + N(N+1) + N = N^2 + 3N$.

D'après le théorème d'existence de Cauchy, le système (6, 6) admet la solution générale unique. Pour fixer les constantes qui y figurent, choisissons avant tout les valeurs $A_0^{\ddot{0}} : A_0^{\dot{1}} : \dots : A_0^{\ddot{N}}$ au point général $t = t_0$ de la courbe donnée.

En choisissant aussi un facteur $\Phi(t)$, nous avons aussi $\Phi(t_0)$ et les rapports choisis nous donnent $A^\alpha(t_0)$. Ensuite nous prescrivons les valeurs de $z_0(t_0), \dots, z_{N-1}(t_0)$. Le choix du point t_0 nous donne en même temps les coefficients

$$A_{b\mu}^n(\xi(t_0)), \Omega_{b\mu}^n(\xi(t_0)), \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda(\xi(t_0)),$$

et par conséquent nous pouvons nous servir de ce fait pour prescrire

¹⁸⁾ C'est-à-dire $A^{\ddot{0}} : A^{\dot{1}} : \dots : A^{\ddot{N}}$.

la position des vecteurs A^0, \dots, A^N linéairement indépendants au point t_0 . Ces conditions fixent $N + N + N(N + 1) = N^2 + 3N$ constantes jusqu'alors arbitraires dans l'intégrale. Les conditions prescrites au champ seront dites les conditions initiales. Elles fixent toutes les constantes et par conséquent elles fixent l'intégrale $A^\alpha(t)$ à moins du facteur $\Phi(t)$.¹⁹⁾

L'intégrale cherchée définit un champ à moins des conditions initiales.

7. Les vecteurs A^0, A^1, \dots, A^N étant donnés et étant linéairement indépendants, on peut trouver, par une méthode plus simple, les invariants projectifs du champ $A^\alpha(t)$. On se sert pour ce but d'une dérivée absolue désignée \mathfrak{D} , qui est invariante par rapport au changement (1, 1) de la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ et qui est multipliée par un facteur, si l'on change le facteur de proportionnalité dans le champ $A^\alpha(t)$ d'après $'A^\alpha = F^i A^\alpha$.

α) Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

Soient A^0, A^1, \dots, A^N les vecteurs dérivés, linéairement indépendants et définis par l'équation (5, 4).

Désignons par

$$A = \text{Dét.} \begin{vmatrix} A & A & \dots & A \\ 0 & 1 & & N \end{vmatrix} \quad (\neq 0), \quad (7, 1)$$

$$\mathfrak{D}A^N = DA^N - \frac{1}{N+1} \frac{DA}{A} A^N. \quad (7, 2)$$

Il s'ensuit

$$\times \mathfrak{D}A^N = \mathfrak{D}A^N, \quad (7, 3a)$$

$$'\mathfrak{D}'A^N = F^i \mathfrak{D}A^N. \quad (7, 3b)$$

Démonstration. La première équation est la conséquence de (5, 3b). En effectuant le changement (5, 7), on trouve en raison

¹⁹⁾ Le choix $\Phi(t)$ donne l'intégrale $A^N(t)$ du système (6, 6) à moins des conditions initiales. Si ${}^1A^N, {}^2A^N$ sont deux intégrales qui correspondent aux valeurs ${}^1\Phi \neq {}^2\Phi$ et aux mêmes conditions initiales, on obtient nécessairement au point t_0 : ${}^2A^N = {}^1A^N \Phi(t_0)$, c'est-à-dire on a le champ unique.

*) Le rapprochement de l'équation (7, 2) à (2, 6) nous donne

$$\mathfrak{D}A^\alpha = d\xi^\mu D_\mu A^\alpha.$$

Nous avons donc construit le vecteur $Q_\mu = -\frac{1}{i(N+1)} A^{-1} D_\mu A$ qui joue un rôle essentiel dans (2, 6) pendant le changement du facteur $F(t)$ dans $'A^\alpha = F^i A^\alpha$. (Voir (2, 7d) et (7, 3b).)

de (5, 11):

$$'A = F^{i(N+1)}A. \quad (7, 4)$$

Parce que A est la grandeur de K_N à la caractéristique $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0, i(N+1), p(N+1), 0 \end{smallmatrix}\right)$, on a d'après (5, 3):

$$'D'A = D'A = F^{i(N+1)} [DA + (N+1)\varphi' A], \left(\varphi' = \frac{d \log F^i}{dt}\right). \quad (7, 5)$$

Compte tenu de l'équation (7, 2) transformée à l'aide de (5, 8), (7, 4) et (7, 5) on a donc:

$$\begin{aligned} 'D'A^n &= D'A^n = F^i (DA^n + \varphi' A^n) - F^i \left(\frac{1}{N+1} \frac{DA}{A} + \varphi' \right) A^n = \\ &= F^i D'A^n. \end{aligned}$$

L'équation (7, 3b) est démontrée.

β) En employant la dérivée absolue \mathfrak{D} on peut démontrer le théorème suivant:

Les vecteurs

$$A_0^* = A^\alpha(t), A_1^* = \mathfrak{D}A_0^*, A_2^* = \mathfrak{D}A_1^*, \dots, A_N^* = \mathfrak{D}A_{N-1}^* \quad (7, 6)$$

étant linéairement indépendants*) pour $t = t_0$ et

$$A_{N+1}^* = \mathfrak{D}A_N^*$$

étant une combinaison linéaire des vecteurs précédents,

$$\sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} I_{N+1-j}^* A_j^* = 0, \quad I_0^* \neq 0, \quad (7, 7)$$

on peut trouver les N invariants projectifs, à savoir:

$$J_k = \frac{I_k^*}{I_0^*}, \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, N. \quad (7, 8)$$

L'invariant J_k est isobare du poids arithmétique k par rapport à t .

Démonstration. La transformation (5, 8) appliquée aux équations (7, 6) nous donne en raison de (7, 3b):

$$'A_0^* = F^i A_0^*, 'A_1^* = F^i A_1^*, \dots \quad (7, 9)$$

Pendant cette transformation l'équation (7, 7) devient:

*) C'est-à-dire il n'existe aucune combinaison linéaire

$$\sum_{j=0}^k M_{k-j} A_j^* = 0$$

(avec quelques coefficients $M_k \neq 0$) pour $k \leq N$.

$$\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{j} {}'I_{N+1-j}^* F_j^i A^* = 0. \quad (7, 10)$$

Parce que A^* , ($i = 0, 1, \dots, N$) sont linéairement indépendants, le rapprochement des formules (7, 10) et (7, 7) nous donne:

$$\varrho {}'I_k^* = F^i I_k^*, \quad \varrho \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N+1,$$

or $J_k = \frac{I_k^*}{I_0^*}, \quad (J_0 = 1), \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (7, 11)$

sont les invariants projectifs du champ. Mais ces invariants ne sont pas linéairement indépendants, car on a:

$$\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{j} A^* J_{N+1-j} = 0, \quad J_0 = 1 \quad (7, 12)$$

d'où on peut calculer J_{N+1} en fonction linéaire des invariants J_1, J_2, \dots, J_N . Nous sommes ainsi parvenus aux invariants J_k , $k = 1, 2, \dots, N$ mentionnés plus haut.

Déterminons maintenant le poids arithmétique des invariants J_k !

Pendant le changement

$$t = \frac{t'}{c}, \quad (c = \text{const.} \neq 0), \quad (7, 13)$$

on a d'abord

$$\underset{1}{A} = \underset{1}{D} \underset{0}{A} = c \underset{1}{A}, \dots, \underset{1}{A} = c^k \underset{k}{A}, \dots \quad (7, 14)$$

et ensuite en raison de (7, 2) et (7, 6)

$$\underset{1}{A}^* = \underset{1}{D} \underset{0}{A}^* = c \underset{1}{A}^*, \dots, \underset{1}{A}^* = c^k \underset{k}{A}^*, \dots \quad (7, 15)$$

Pendant la transformation (7, 13) l'équation (7, 12) s'écrit

$$\sum_0^{N+1} \binom{N+1}{j} \underset{1}{A}^* J_{N+1-j} = 0, \quad \underset{1}{J} = 1,$$

et de là, d'après (7, 5), on obtient

$$\underset{1}{J}_k = c^k J_k, \quad k = 0, 1, \dots, N+1,$$

or, J_k est isobare du poids arithmétique k par rapport à t .

8. Dans le paragraphe précédent nous avons établi les invariants projectifs J_k , ($k = 1, 2, \dots, N+1$) du champ $A^a(t)$ dont un, p. e. J_{N+1} , peut être exprimé par la formule connue à l'aide des invariants J_1, J_2, \dots, J_N . Dans les paragraphes 5 et 6 nous avons déterminé les invariants projectifs I_2, \dots, I_{N+1} et nous

avons déduit que ce système est le système complet des invariants du champ $A^a(t)$. On peut donc se demander quelle est la relation entre ces deux familles d'invariants.

Nous démontrerons l'équation suivante:

$$I_k(L) = I_k(J), \quad k = 2, 3, \dots, N + 1, \quad (8, 1)$$

c'est-à-dire: Les invariants I_k s'expriment par la même fonction en L_s et I_s , ($s = 1, 2, \dots, N + 1$).

Démonstration. Si l'on effectue la transformation (5, 7), les vecteurs dérivés $A_0^*, A_1^*, \dots, A_{N+1}^*$ deviennent $'A_0^*, 'A_1^*, \dots, 'A_{N+1}^*$. Ces derniers sont liés aux vecteurs A_0, A_1, \dots, A_{N+1} par les équations:

$$\begin{aligned} 'A_0^* &= F^i A_0, \\ 'A_1^* &= F^i \mathcal{D}_0 A_0^* = F^i (D_0 A_0 + S_0 A_0) = F^i (A_0 + S_0 A_0), \quad \left(S_0 = -\frac{1}{N+1} \frac{DA_0}{A_0} \right), \\ 'A_2^* &= F^i \mathcal{D}_1 A_1^* = F^i (A_1 + 2A_1 S_1 + A_1 S_1^2 + A_1 DS_1), \end{aligned} \quad (8, 2)$$

Il s'ensuit de là par l'induction:

$$'A_k^* = \sum_j^k F^i \binom{k}{j} r_{kj}^* A_j, \quad k = 0, 1, \dots, N + 1, \quad (8, 3)$$

où r_{kj}^* satisfont aux équations analogues aux relations (5, 14) — (5, 20)²⁰⁾ et de même à l'équation

$$r_{k+1}^* = r_{k+1}^{*'} + r_{k+1}^* r_k^*, \quad \left(r_{k+1}^{*'} = \frac{d r_k^*}{dt} \right) \quad (8, 4)$$

qui est analogue à (5, 21).²⁰⁾

La formule (8, 4) est projective invariante. En partant de l'équation analogue à (7, 7), c'est-à-dire

$$\sum_j^{N+1} \binom{N+1}{j} J_{N+1-j} 'A_j^* = 0, \quad (J_0 = 1) \quad (8, 5)$$

équivalente à l'équation

$$\sum_j^{N+1} \binom{N+1}{j} a_{N+1-j} A_j = 0, \quad (8, 6)$$

on obtient de là les invariants projectifs I_k du champ $A^n(t)$, en se servant de la méthode indiquée plus haut au paragraphe 5.

²⁰⁾ Où, bien entendu, on a à écrire r_{kj}^* au lieu de r_{kj} etc. et S au lieu de φ' , DS au lieu de φ'' etc.

En partant de l'équation (8, 5), au lieu de (5, 22) pour $m = N + 1$, on obtient*):

$$L_u = \sum_0^u \binom{u}{v} J_v r^{*u-v} \text{ avec } u = 0, 1, 2, \dots, N + 1, \text{ où } L_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0},$$

$$L_0 = 1. \quad (8, 7)$$

Nous pouvons transcrire ce système de la manière suivante:

$$\text{a) } L_0 = J_0 r^{*0} = 1,$$

$$\text{b) } L_u - J_u = \sum_1^u \binom{u}{v} J_{u-v} r^{*v}, \quad u = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (8, 8)$$

Le déterminant du système des équations linéaires (8, 8b) aux inconnues r^{*v} , ($v = 1, 2, \dots, N + 1$), est $(J_0)^{N+1} = 1$.

On a donc:

$$r^{*v} = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} J_0 & 0 & 0 \dots & 0 & L_1 - J_1 \\ \binom{2}{1} J_1 & J_0 & 0 \dots & 0 & L_2 - J_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{v}{1} J_{v-1}, \binom{v}{2} J_{v-2}, \dots & \binom{v}{v-1} J_1, L_v - J_v \end{vmatrix} \quad (8, 9)$$

$$v = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Les formules (8, 9) deviennent identiques aux (5, 28), si l'on y pose J_i au lieu de L_i .

En portant les valeurs (8, 9) dans l'équation (8, 4), on obtient par rapport à (5, 29)

$$I_{k+1}(L) - I_{k+1}(J) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (8, 10)$$

Parce que la valeur $k = 0$ ne nous donne pas l'invariant, (voir (5, 31)) la formule (8, 10) n'est valable que pour $k = 1, 2, \dots, N$.

Le calcul direct, en partant de (8, 8) pour $u = 1, 2, 3$, nous donne par exemple

$$\begin{aligned} r^{*1} &= L_1 - J_1 \\ r^{*2} &= L_2 - J_2 - 2L_1J_1 + 2J_1^2 \\ r^{*3} &= L_3 - J_3 - 3L_1J_2 - 3J_1L_2 + 6J_1J_2 + 6L_1J_1^2 - 6J_1^3. \end{aligned} \quad (8, 11)$$

) En substituant à A^ (dans (8, 5)) la valeur (8, 3), on trouve une relation (en A) qu'on peut rapprocher de l'équation (8, 6).

Ensuite pour $k = 0$ l'équation (8, 4) se réduit à

$${}^1 r^* = {}^1 r^*,$$

ou $L_1 - J_1 = L_1 - J_1,$

c'est-à-dire à l'identité. (Voir (5, 31a).)

On tire de (8, 4) pour $k = 1$

$${}^2 r^* = {}^1 r^{*'} + ({}^1 r^*)^2,$$

d'où il suit en raison de (8, 11)

$$L_2 - L_1' - L_1^2 - (J_2 - J_1' - J_1^2) = 0.$$

Il en résulte par rapport à (5, 31b):

$$I_2(L) - I_2(J) = 0$$

et par conséquent

$$I_2 = J_2 - J_1' - J_1^2.$$

La même méthode nous donne pour $k = 2$, en raison de (8, 4) et (8, 11), la formule suivante:

$$I_3 = J_3 - J_2' - 3J_1J_2 + 2J_1^3 + 2J_1J_1'.$$

9. Supposons de nouveau que les vecteurs dérivés A_0, A_1, \dots, A_N soient linéairement indépendants au point $t = t_0$ du champ $A^n(t)$ et qu'il soit:

$$\sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} L_{N+1-j} A_j^n = 0, \quad L_0 = 1. \quad (9, 1)$$

Désignons par:

$$\mathfrak{Q}^{(N+1)} = \text{Dét.} \begin{vmatrix} A & A & \dots & A \\ 0 & 1 & & N \end{vmatrix} (\neq 0). \quad (9, 2a)$$

$$\alpha_j = \frac{A_j}{\mathfrak{Q}} \quad (9, 2b)$$

Cela posé on peut démontrer:

Les vecteurs

$$\mathfrak{Q}_k^n = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} L_{k-j} \alpha_j^n, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (9, 3)$$

adjoints au champ $A^n(t)$ sont projectifs invariants, linéairement indépendants et leurs dérivées absolues

²¹⁾ Pour éviter tout malentendu remarquons que nous nous servons de la convention: $\sqrt{\mathfrak{Q}^{[N+1]}} = |\mathfrak{Q}| \text{ sign } \mathfrak{Q}, \sqrt{F^{[i(N+1)]}} = |F^{(i)}| \text{ sign } F^{(i)}$. Dans les paragraphes 9 et 10 les exposants sont mis en parenthèses.

le long de la courbe $C(t)$ sont aussi projectives invariantes.

Démonstration. $\mathfrak{Q}^{(N+1)}$ change pendant la transformation

$${}'_A^n = F^{(i)} A^n$$

de la manière suivante

$${}'\mathfrak{Q}^{(N+1)} = \text{Dét.} \left| \sum_0^b F^{(i)} \binom{b}{j} r_j^{b-j} A^n \right| = F^{[i(N+1)]} \mathfrak{Q}^{(N+1)}.$$

Il résulte de là en raison de la remarque (21)

$${}'\mathfrak{Q} = F^{(i)} \mathfrak{Q}. \quad (9, 4)$$

Si nous écrivons (5, 11) avec la notation (5, 20), à savoir

$${}'_A = \sum_0^k F^{(i)} \binom{k}{j} r_j^{k-j} A, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (9, 5)$$

et si nous divisons cette équation par la valeur ${}'\mathfrak{Q}$ définie par (9, 4), nous obtenons:

$${}'_a = \sum_0^k \binom{k}{j} r_j^{k-j} a, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (9, 6)$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} {}'\mathfrak{Q}^n &= \sum_0^k \binom{k}{j} L_{k-j} {}'_a^n = \sum_0^k L_{k-j} \sum_0^j \binom{k}{u} \binom{j}{u} r_u^{j-u} a^n = \\ &= \sum_0^k \binom{k}{u} a^n \sum_u^k \binom{k-u}{k-j} L_{k-j} r_u^{j-u}. \end{aligned} \quad (9, 7)$$

Ayant égard à (5, 25) et à (5, 6) on constate facilement que la dernière somme de (9, 7) est égale à L_{k-u} et par conséquent:

$$\mathfrak{Q}_k^n = \sum_0^k \binom{k}{u} L_{k-u} a^n = \mathfrak{Q}_k^n, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (9, 8)$$

En étendant la définition (9, 3) pour $k = N + 1$, on a, par rapport à (9, 1):

$$\mathfrak{Q}_{N+1}^n = 0, \quad {}'\mathfrak{Q}_{N+1}^n = 0. \quad (9, 9)$$

Les vecteurs \mathfrak{Q}_k^n , $k = 0, 1, \dots, N$ sont linéairement indépendants.

En effet on a d'après (9, 2b) et (9, 3):

$$\text{Dét.} \left| \mathfrak{Q}_0^n \mathfrak{Q}_1^n \dots \mathfrak{Q}_N^n \right| = \frac{1}{\mathfrak{Q}^{(N+1)}} \text{Dét.} \left| A_0^n A_1^n \dots A_N^n \right| \neq 0. \quad (9, 10)$$

La dérivée absolue du vecteur \mathfrak{Q}^n est:

$$D \mathfrak{Q}_k^n = \frac{d \mathfrak{Q}_k^n}{dt} + q^\mu A_{b\mu}^a \mathfrak{Q}_k^b \quad (9, 11)$$

Le rapprochement de (9, 8), (2, 7a, c) et (4, 3) nous donne

$${}^{\prime}D \mathfrak{Q}_k^n = D \mathfrak{Q}_k^n. \quad (9, 12)$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

10. Les grandeurs \mathfrak{Q}_k , $k = 0, 1, \dots, N$ étant données et linéairement indépendantes et \mathfrak{Q}_k , $D \mathfrak{Q}_k$ étant projectives, on peut écrire $D \mathfrak{Q}_k$ en combinaison linéaire des \mathfrak{Q}_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), c'est-à-dire

$$D \mathfrak{Q}_k = \sum_{j=0}^N K_{kj}^j \mathfrak{Q}_j, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (10, 1)$$

Nous voulons maintenant déterminer les coefficients K_{kj}^j et démontrer à cet effet le théorème suivant:

Désignons par

1. A_0, A_1, \dots, A_N les vecteurs dérivés du champ $A^a(t)$, linéairement indépendants au point $t = t_0$ de la courbe $\xi^r = \xi^r(t)$, et posons:

$$\sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} L_{N+1-j} A_j^a = 0, \quad (L_0 = 1); \quad (10, 2)$$

2. I_2, I_3, \dots, I_{N+1} les invariants qui forment le système complet des invariants projectifs de ce champ;

3. \mathfrak{Q}_k , $k = 0, 1, \dots, N+1$, les grandeurs projectives définies par (9, 3) resp. (9, 9).

Or, les dérivées absolues des grandeurs \mathfrak{Q}_k satisfont

²²⁾ Si l'on suppose que \mathfrak{B}^a soit une grandeur (de K_N) à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ 0 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve en raison de (5, 3a)

$$D \mathfrak{B}^a = \frac{d \mathfrak{B}^a}{dt} + q^\mu \left(A_{b\mu}^a \mathfrak{B}^b - p_1 \Gamma_{\lambda\mu}^a \mathfrak{B}^a - \frac{p_1 (n+1) n}{r(n-1)(N+1)} \Omega_{r\mu}^r \mathfrak{B}^a \right). \quad (*)$$

Parce que A^a est le vecteur à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}$, \mathfrak{Q}_k^a — d'après définition — est le vecteur à la caractéristique $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'équation (*) donne précisément (9, 11) pour $p_1 = 0$.

aux formules:

$$\begin{aligned} D\mathfrak{A} &= \mathfrak{A}, \\ D\mathfrak{A} &= \mathfrak{A} - \sum_1^k \binom{k}{s} I_{s+1} \mathfrak{A}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ (\mathfrak{A} &= 0). \end{aligned} \quad (10, 3)$$

Ces équations seront dites les formules de Frenet du champ $A^\alpha(t)$.

Démonstration. α) Après le changement $'A^\alpha = F^{(i)}A^\alpha$ l'équation (10, 1) devient

$$'D \mathfrak{A} = \sum_0^N \binom{j}{k} 'K \mathfrak{A}, \quad (10, 4)$$

d'où il vient en raison de (9, 8) et (9, 12)

$$D\mathfrak{A} = \sum_0^N \binom{j}{k} 'K \mathfrak{A}. \quad (10, 5)$$

Le rapprochement des formules (10, 5), (10, 1) nous donne:

$$'K = K, \quad j, k = 0, 1, \dots, N. \quad (10, 6)$$

Or, les coefficients scalaires K sont les invariants projectifs. Parce que $I_q, q = 2, 3, \dots, N+1$, forment le système complet des invariants, les scalaires K sont les fonctions de I_q .

β) Pour la détermination K on aura besoin d'abord de la solution α de l'équation (9, 3).

Posons pour abrégé

$$a = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \binom{j}{i} L_{j-i}, & i \leq j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N+1, \end{cases} \quad (10, 7)$$

où L_k sont les coefficients de l'équation (9, 3).

Soient maintenant b les valeurs définies par

$$\sum_0^N \binom{i}{k} b a = \sum_0^N \binom{k}{j} b a = \delta_j^i. \quad (10, 8)$$

Le déterminant du système (10, 8) aux inconnues $\overset{i}{b}_k$ est $\text{Dét.} \left| \overset{i}{a}_j \right| = = L_0^{(N+1)} = 1$.

Compte tenu de (10, 7) on peut écrire pour (9, 3)

$$\mathfrak{A}_k = \sum_j^k \overset{j}{a}_k \overset{j}{a}_j, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (10, 9)$$

dont la solution d'après $\overset{j}{a}$ est

$$\overset{j}{a} = \sum_k^N \overset{k}{b}_j \mathfrak{A}_k, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (10, 10)$$

Parce que \mathfrak{A}_k ne dépend que de $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \dots, \overset{k}{a}$ (voir (9, 3)) on a

$$\overset{i}{b}_j = 0, \quad i > j. \quad (10, 11)$$

Or, les équations (10, 8) s'écrivent

$$\sum_{r=s}^N \overset{r-s}{b}_k \overset{k}{a}_r = \delta_r^{r-s}, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (10, 12)$$

$$s = 0, 1, \dots, r.$$

On en tire pour $s = 0$

$$\overset{r}{b}_r \overset{r}{a}_r = 1, \quad (10, 13)$$

d'où, à cause de $\overset{r}{a} = L_0 = 1$ on a $\overset{r}{b} = 1$.

Pour $r = 1, 2, \dots, N, s = 1, 2, \dots, r$ on obtient de (10, 12):

$$\overset{r}{b}_{r+s} = (-1)^s \begin{vmatrix} \overset{r}{a} & \overset{r}{a} & 0 & 0 \dots 0 \\ \overset{r+1}{a} & \overset{r}{a} & & \\ \overset{r}{a} & \overset{r+1}{a} & \overset{r}{a} & 0 \dots 0 \\ \overset{r+2}{a} & \overset{r+2}{a} & \overset{r}{a} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{r}{a} & \overset{r+1}{a} & \overset{r+2}{a} & \dots & \overset{r+s-1}{a} \\ \overset{r+2}{a} & \overset{r+2}{a} & \overset{r+2}{a} & \dots & \overset{r+s}{a} \\ \overset{r+s}{a} & \overset{r+s}{a} & \overset{r+s}{a} & \dots & \overset{r+s}{a} \end{vmatrix} \quad (10, 14)$$

γ) Déterminons maintenant les scalaires $\overset{j}{K}_k$!

1) Écrivons d'abord la dérivée absolue du déterminant \mathfrak{A} ; on trouve à cause de (9, 2a) et (10, 2)

$$D\mathfrak{A}^{(N+1)} = \text{Dét.} \left| \overset{0}{A}, \overset{1}{A}, \dots, \overset{N-1}{A}, \overset{N+1}{A} \right| = -L_1(N+1)\mathfrak{A}^{(N+1)}. \quad (10, 15)$$

D'autre part, on a aussi:

$$D\mathfrak{A}^{(N+1)} = (N+1)\mathfrak{A}^{(N)} D\mathfrak{A} (= -L_1(N+1)\mathfrak{A}^{(N+1)}),$$

d'où il vient

$$D\mathfrak{Q} = -L_1\mathfrak{Q}. \quad (10, 16a)$$

Il en résulte

$$D\mathfrak{Q}^{(-1)} = L_1\mathfrak{Q}^{(-1)}. \quad (10, 16b)$$

Dérivons l'équation (9, 2b); on a en raison de (10, 16b)

$$D\mathfrak{a}_j = D(A\mathfrak{Q}^{(-1)})_j = \mathfrak{a}_{j+1} + L_1\mathfrak{a}_j^{23} \quad (10, 17)$$

La formule (10, 17) n'est valable que pour $j = 0, 1, \dots, N-1$,

parce que la grandeur $\mathfrak{a}_{N+1} = \frac{A}{\mathfrak{Q}}$ est définie par (10, 2). Enfin on déduit de (10, 9):

$$D\mathfrak{Q}_k = \sum_0^k \left(\mathfrak{a}'_k \mathfrak{a}_j + \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_j L_1 \right) + \sum_1^{k+1} \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_j, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10, 18)$$

De là et de (10, 10) on obtient:

$$D\mathfrak{Q}_k = \sum_0^N \mathfrak{Q}_r \sum_0^N \mathfrak{b}_j \left(\mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}_k + \mathfrak{a}_k L_1 \right),^{24} \quad (10, 19) \\ k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Le rapprochement de cette équation à la formule (10, 1) nous donne, à l'aide de (10, 11), la valeur en question:

$$\mathfrak{K}_k^r = \sum_0^N \mathfrak{b}_j \left(\mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}_k \right) + \delta_k^r L_1, \quad r, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10, 20)$$

2) Il ne nous reste qu'à évaluer \mathfrak{K}_N^r pour $r = 0, 1, \dots, N$. En partant de (10, 17) pour $j = N$, on obtient en raison de (10, 2):

$$D\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_N L_1 - \sum_0^N \mathfrak{a}_{N+1} \mathfrak{a}_j. \quad (10, 21)$$

Ensuite on déduit de l'équation (10, 9), écrite pour $k = N$, à l'aide de (10, 10) et (10, 21):

$$D\mathfrak{Q}_N = \sum_0^{N-1} \left[\mathfrak{a}'_N \sum_0^N \mathfrak{b}_j \mathfrak{Q}_k + \mathfrak{a}_N \sum_0^N \left(\mathfrak{b}_{j+1} + \mathfrak{b}_j L_1 \right) \mathfrak{Q}_k \right] + \\ + \sum_0^N \mathfrak{b}_N L_1 \mathfrak{Q}_k - \sum_0^N \mathfrak{a}_{N+1} \sum_0^N \mathfrak{b}_j \mathfrak{Q}_k, \quad (10, 22)$$

ce qui est la formule analogue à (10, 18).

²³⁾ La relation $D(A\mathfrak{Q}^{(-1)})_j = (DA)\mathfrak{Q}_j^{(-1)} + A D\mathfrak{Q}_j^{(-1)}$ suit de (5, 3a).

²⁴⁾ On a posé dans cette formule $\mathfrak{a}_{k-1} = 0$.

La comparaison de la formule (10, 22) à (10, 1) pour $k = N$, nous donne:

$$\frac{r}{N} K = \sum_0^{N-1} \binom{j}{N} \binom{r}{j} \binom{j}{N} \binom{r}{j+1} - \sum_0^N \binom{j}{N+1} \binom{r}{j} + \delta_N^r L_1, \quad (10, 23)$$

avec $r = 0, 1, \dots, N$.

δ) Examinons maintenant des invariants $\overset{r}{K}_k$ aux cas suivants:

1) Si $r > k$, posons $r = k + s$, où $s > 0$ est un nombre entier. Soit alors $r = k + s$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $s = 1, 2, \dots, k + s \leq N - 1$ dans (10, 20); on a donc

$$\overset{k+s}{K}_k = \sum_0^N \binom{k+s}{j} \binom{j}{k} \binom{j-1}{k}. \quad (10, 24)$$

Mais d'autre part:

$$\sum_0^N \binom{k+s}{j} \binom{j}{k} \binom{j-1}{k} = 0, \quad (10, 25)$$

parce que on trouve $\binom{k+s}{j} = 0$ pour $k + s > j$, et d'après (10, 7) et (10, 11), on obtient $\binom{k+s}{j} \neq 0$, $\binom{j}{k} = 0$ pour $k + s \leq j$.

Or, l'équation (10, 24) se réduit à

$$\overset{k+s}{K}_k = \sum_0^N \binom{k+s}{j} \binom{j-1}{k},$$

d'où il s'ensuit:

$$\overset{k+s}{K}_k = \delta_1^s \quad (10, 26)$$

avec $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $s = 1, 2, \dots$, $k + s \leq N - 1$

2) Si l'on suppose que soit $r = k = 0, 1, \dots, N - 1$, on déduit de (10, 20):

$$\overset{r}{K}_r = \sum_0^N \binom{r}{j} \binom{j}{r} \binom{j-1}{r} + L_1. \quad (10, 27)$$

Mais on trouve, comme au cas précédent (10, 25):

$$\sum_0^r \binom{r}{j} \binom{j}{r} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (10, 28)$$

Il résulte ensuite de (10, 27) en raison de (10, 7), (10, 14) et (10, 28):

$$\overset{r}{K}_r = \binom{r}{r} \binom{r-1}{r} + \binom{r}{r+1} \binom{r}{r} + L_1 = 0, \quad r = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (10, 29)$$

Si l'on pose $r = N$ dans (10, 23), on obtient en raison de (10, 7) et (10, 14):

$$\frac{N}{N} K = 0. \quad (10, 30)$$

3) Soit enfin $r < k$. On déduit pour $r = k - s$, $k \geq s = 1, 2, \dots, N - 1$ de l'équation (10, 20)

$$\frac{k-s}{k} K = \sum_j \frac{k-s}{j} b \frac{j}{k} (a' + a). \quad (10, 31a)$$

En substituant $r = N - s$ dans (10, 23), on obtient pour $k = N$:

$$\frac{N-s}{N} K = \sum_j \frac{N-1}{j} (b \frac{a'}{N} + a \frac{b}{N+1}) - \sum_j \frac{j}{N+1} a \frac{N-s}{j}, \quad (10, 31b)$$

$s = 1, 2, \dots, N$.

Les formules (10, 31) montrent que $\frac{k-s}{k} K$, $k \geq s = 1, 2, \dots, N$ ne sont pas en général des constantes numériques. D'après (10, 6) et les lignes suivantes à la page 50 $\frac{k-s}{s} K$ sont des fonctions des invariants I_q . Nous allons déterminer ces fonctions. Si l'on remplace b dans (10, 31) par les valeurs (10, 14) et si l'on y substitue à a les valeurs (10, 7), on voit, que $\frac{s}{k} K$ s'expriment par les polynômes en L_i . Ces fonctions sont isobares du poids arithmétique $s + 1$ par rapport à t , car les coefficients $\frac{j}{k} a$ sont, d'après (10, 7) et (5, 35), du poids arithmétique $k - j$ comme $\frac{j}{k} b$. (Voir (10, 14) et (5, 35).) Parce que l'invariant I_q est la fonction entière des coefficients L_i du poids q et $\frac{k-s}{k} K$ est une telle fonction des invariants I_2, I_3, \dots, I_{N+1} , qu'elle devient une fonction entière des coefficients L_i du poids arithmétique $s + 1$ quand on y porte les valeurs I_q de (5, 38), il vient de là (et aussi de la structure des invariants I_q) que $\frac{k-s}{k} K$ est nécessairement une fonction entière de $I_{s+1}, I_s', I_{s-1}'', \dots, I_2^{(s-1)}$.²⁵⁾

Les relations (10, 31) montrent que le scalaire $\frac{k-s}{s} K$ ne contient que la première dérivée des coefficients L_i et cela linéairement

²⁵⁾ Les accents désignent les dérivées d'après t .

et de plus que le coefficient dont l'indice est le plus élevé est:

$$\begin{matrix} k-s & k-s \\ b & a' \\ k-s & k \end{matrix} = \binom{k}{s} L_s'. \quad (10, 32)$$

Parce qu'on a d'après (5, 38):

$$I_{s+1} = L_{s+1} - L_s' + \dots,$$

il en résulte nécessairement:

$$\begin{matrix} k-s \\ K \\ k \end{matrix} = - \binom{k}{s} I_{s+1}, \quad k \geq s = 1, 2, \dots, N. \quad (10, 33)$$

ε) Les résultats (10, 26), (10, 29) et (10, 33) peuvent être résumés par les relations suivantes:

$$\begin{matrix} k+s \\ K \\ k \end{matrix} = \delta_1^s = \begin{cases} 0, & s \neq 1 \\ 1, & s = 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (10, 34a)$$

$$s = 0, 1, \dots, N - k.$$

$$\begin{matrix} k-s \\ K \\ k \end{matrix} = - \binom{k}{s} I_{s+1}, \quad k \geq s = 1, 2, \dots, N. \quad (10, 34b)$$

Or, les coefficients $\overset{i}{K}$ de l'équation (10, 1) sont déterminés.

L'équation (10, 1) s'écrit en raison de (10, 34)

$$\underset{0}{D}\underset{1}{\mathfrak{A}} = \underset{1}{\mathfrak{A}},$$

$$\underset{k}{D}\underset{k}{\mathfrak{A}} = \sum_{j=0}^{k+1} \overset{j}{K} \underset{k}{\mathfrak{A}} \underset{j}{\mathfrak{A}} = \underset{k+1}{\mathfrak{A}} - \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} I_{s+1} \underset{k-s}{\mathfrak{A}},$$

avec $k = 1, 2, \dots, N$, $\underset{N+1}{\mathfrak{A}} = 0$. (Voir (9, 9).)

Ces relations sont les formules cherchées de Frenet. (Voir (10, 3).)

Remarque. Compte tenu de l'équation (10, 34b) pour $k = N$ et de l'équation (10, 31b), on en peut déduire une formule intéressante qui nous donne les invariants du champ:

$$- \binom{N}{s} I_{s+1} = \sum_{j=0}^{N-1} \begin{matrix} N-s & j \\ b & a' \\ j & N \end{matrix} + \sum_{j=0}^{N-1} \begin{matrix} j & N-s \\ a & b \\ j+1 & N \end{matrix} - \sum_{j=0}^N \begin{matrix} j & N-s \\ a & b \\ N+1 & j \end{matrix}, \quad (10, 35)$$

pour $s = 1, 2, \dots, N$.²⁶⁾

Les scalaires $\overset{N-s}{b}$ peuvent être remplacés par les valeurs (10, 14).

11. Appendice. En partant des formules de Frenet (10, 3), on peut déduire les formules analogues pour les vecteurs cova-

²⁶⁾ Voir Hlavatý (1), la formule (9, 13').

riants $\overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha$ liés avec \mathcal{Q}_α^k par les relations suivantes:

$$\mathcal{Q}_\alpha^r \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha^r \overset{\alpha}{\mathcal{Q}}_t = \delta_{tr}^* \quad (\alpha, r, t = \ddot{0}, \ddot{1}, \dots, \ddot{N}). \quad (11, 1)$$

On trouve d'abord pour ces grandeurs

$$\overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha = \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha \quad (11, 2a)$$

$$'D \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha = D \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha, \quad (11, 2b)$$

et de plus

$$D \overset{N}{\mathcal{Q}}_\alpha = - \overset{N-1}{\mathcal{Q}}_\alpha,$$

$$D \overset{s}{\mathcal{Q}}_\alpha = - \overset{N-1}{\mathcal{Q}}_\alpha + \sum_1^{N-s} \binom{k+s}{k} I_{k+1} \overset{k+s}{\mathcal{Q}}_\alpha, \quad s = 0, 1, \dots, N-1, \quad (11, 3)$$

$$\overset{(-1)}{\mathcal{Q}}_\alpha = 0, \quad \overset{N+1}{\mathcal{Q}}_\alpha = 0.$$

Démonstration. α) La première équation (11, 2) résulte de l'équation (11, 1) écrite pour les vecteurs transformés à l'aide de (9, 8). La seconde des relations (11, 2) résulte de la dérivation de l'équation (11, 1) transformée, en raison de (9, 8), (9, 12) et (11, 2a).

β) Des équations (10, 3) écrites dans la forme:

$$D \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha = \overset{r}{\mathcal{Q}}_{r+1} - \sum_1^r \binom{r}{k} I_{k+1} \overset{r-k}{\mathcal{Q}}_\alpha, \quad r = 0, 1, \dots, N$$

$$\overset{N+1}{\mathcal{Q}}_\alpha = 0$$

on obtient en raison de (11, 1) et de sa dérivée

$$- (D \overset{k}{\mathcal{Q}}_\alpha) \overset{r}{\mathcal{Q}}_\alpha = \delta_{r+1}^k - \sum_1^r \binom{r}{m} I_{m+1} \delta_{r-m}^k,$$

avec

$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Il s'ensuit:

$$D \overset{k}{\mathcal{Q}}_\alpha = - \overset{k-1}{\mathcal{Q}}_\alpha + \sum_1^{N-k} \binom{m+k}{m} I_{m+1} \overset{m+k}{\mathcal{Q}}_\alpha,$$

$$\overset{(-1)}{\mathcal{Q}}_\alpha = 0, \quad \overset{N+1}{\mathcal{Q}}_\alpha = 0. \quad (11, 4)$$

L'équation (11, 4) s'écrit aussi:

$$D \overset{N}{\mathcal{Q}}_\alpha = - \overset{N-1}{\mathcal{Q}}_\alpha,$$

²⁷⁾ On suppose que pour $r = 0$ la somme à droite soit égale à zéro.

$$D\mathcal{Q}_\alpha = -\mathcal{Q}_\alpha + \sum_1^{N-s} \binom{s+k}{k} I_{k+1} \mathcal{Q}_\alpha, \quad s = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\binom{-1}{\mathcal{Q}_\alpha} = 0, \quad \mathcal{Q}_\alpha^{N+1} = 0;$$

ces relations sont les formules (11, 3).

12. Supposons maintenant de nouveau que le champ $A^\alpha(t)$ pris en considération ait au point $t = t_0$ les m ($2 < m \leq N+1$) vecteurs $A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots, A_{m-1}^\alpha$ linéairement indépendants, et que le vecteur A_m^α soit une combinaison linéaire des vecteurs précédents à savoir:

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} A_j^\alpha = 0, \quad a_0 \neq 0. \quad (12, 1)$$

Dans ce paragraphe nous allons montrer qu'on peut déterminer, dans le cas du nombre m général, les invariants projectifs et les vecteurs projectifs qui satisfont aux formules de Frenet. Nous emploierons à ce but, la même méthode dont nous nous sommes servis au cas $m = N+1$. (Voir les paragraphes 6, 9, 10.)

Les vecteurs $A_0^\alpha, A_1^\alpha, \dots, A_{m-1}^\alpha$ déterminent au point $t = t_0$ de la courbe $C(t)$ le repère L_m à m dimensions qui ne change pas pendant la transformation

$${}'_A^\alpha(t) = F^\alpha A^\alpha(t), \quad (12, 2)$$

car on a d'après (5, 11):

$${}'_A_k^\alpha(t) = \sum_0^k F^\alpha \binom{k}{j} r_{kj} A_j^\alpha, \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (12, 3)$$

où A_m^α est défini par (12, 1). Alors ${}'_A_k^\alpha$ est le vecteur de L_m . Cela posé on peut démontrer le théorème suivant:

Soient Y_i^α , ($i = 0, 1, \dots, m-1$) n'importe quels vecteurs linéairement indépendants de L_m et soient $A_i^{\alpha 20}$ les composantes des vecteurs A_i^α en L_m , pour lesquelles

$$A_i^\alpha = \sum_0^{m-1} A_i^k Y_k^\alpha \text{ resp. } A_m^\alpha = \sum_0^{m-1} A_m^k Y_k^\alpha. \quad (12, 4)$$

Les composantes A_i^k , ($i = 0, 1, \dots, m-1$) sont linéaire-

²⁸⁾ Voir (5, 4) et aussi la remarque (*) à la page 32.

²⁹⁾ Les coefficients r sont définis au paragraphe 5.

³⁰⁾ Les indices latins parcourent les symboles $0, 1, \dots, m-1$.

ment indépendants et on a pour A^k :

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} A^a = 0; \quad (12, 5)$$

cette formule est indépendante du choix des vecteurs Y^a . Les composantes A^a changent pendant la transformation (12, 2) comme suit:

$${}'_k A^a = \sum_0^k F^i \binom{k}{j} {}^j_r A^a. {}^{31)}$$

Si la dérivée des vecteurs Y^a est définie par la formule

$$D Y^a = \sum_0^{m-1} \Psi^k Y^k, \quad (12, 7)$$

et si l'on pose

$$D A^a = \frac{dA^a}{dt} + \sum_0^{m-1} A^r \Psi_r^a, \quad (12, 8)$$

on trouve:

$$D A^a = A^a, \quad i = 0, 1, \dots, m-2. \quad (12, 9a)$$

$$D A^a = - \sum_0^{m-1} \binom{m}{j} a_{m-j} A^a.$$

resp.

$${}'_i D A^a = D A^a = {}'_i A^a, \quad (12, 9b)$$

$${}'_{m-1} D A^a = D A^a = - \sum_0^{m-1} \binom{m}{j} {}'_i a_{m-j} A^a.$$

Démonstration. α) On tire de l'équation (12, 1) et de la seconde des relations (12, 4):

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} \sum_0^{m-1} A^k Y^k = 0,$$

c'est l'équation qui est valable pour n'importe quels vecteurs Y^a, Y^a, \dots, Y^a linéairement indépendants de L_m .

Il en résulte:

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} A^k = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (12, 5). L'indépendance de l'équation (12, 5) du choix Y^a (de L_m) sera démontrée plus tard. (Voir δ .)

³¹⁾ A^a satisfait à (12, 5).

β) Le vecteur $'A^{\alpha}_k$ de L_m peut être exprimé comme suit:

$$'A^{\alpha}_k = \sum_0^{m-1} 'A^s_k Y^{\alpha}_s, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad (12, 10)$$

mais on a aussi d'après (12, 3):

$$'A^{\alpha}_k = \sum_0^k F^i \binom{k}{j} r \sum_0^{m-1} A^s_j Y^{\alpha}_s, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (12, 11)$$

Le rapprochement de (12, 10) et (12, 11) nous donne:

$$'A^s_k = \sum_0^k F^i \binom{k}{j} r A^s_j, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

où, bien entendu, A^s satisfait à (12, 5). L'équation (12, 6) est démontrée.

γ) La dérivée de l'équation (12, 4), en raison de (12, 7), est:

$$DA^{\alpha}_i = \sum_0^{m-1} \left[\frac{dA^k}{dt} + \sum_0^{m-1} A^r_i \Psi_r^k \right] Y^{\alpha}_k, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (12, 12a)$$

Compte tenu de (12, 8), l'équation (12, 12a) peut être écrite

$$DA^{\alpha}_i = \sum_0^{m-1} (DA^k)_i Y^{\alpha}_k. \quad (12, 12b)$$

En raison de la définition (5, 4) des vecteurs A et de l'équation (12, 4) on trouve:

$$DA^{\alpha}_i = A^{\alpha}_{i+1} = \sum_0^{m-1} A^k_{i+1} Y^{\alpha}_k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-2, \quad (12, 13a)$$

$$DA^{\alpha}_{m-1} = A^{\alpha}_m = - \sum_0^{m-1} \binom{m}{j} a_{m-j} A^k_j Y^{\alpha}_k. \quad (12, 13b)$$

Si nous comparons ces relations à (12, 12b), nous obtiendrons (12, 9a).

En partant de l'équation (12, 10) et posant:

$$D'A^{\alpha}_i = \frac{d'A^{\alpha}}{dt} + \sum_0^{m-1} 'A^r_i \Psi_r^{\alpha} \quad (12, 14)$$

on déduit de la même manière les formules (12, 9b).

δ) Les m équations (12, 9a) étant linéairement indépendants on en peut calculer les coefficients a_1, a_2, \dots, a_m :

$$a_{m-j} = - \frac{1}{\text{Dét. } |A^{\alpha}_i|} \text{Dét. } \begin{vmatrix} A^0 A^0 & \dots & A^0 D A^0 & A^0 & \dots & A^0 \\ 0 & 1 & & j-1 & m-1 & j+1 & m-1 \end{vmatrix} \quad (12, 15)$$

avec $j = 0, 1, \dots, m-1$, où $\text{Dét. } |A^{\alpha}_i|$ est le déterminant des

composantes A^k_i . Les expressions (12, 15) sont invariantes par rapport à chaque transformation affine non dégénérée des vecteurs Y^a , c'est-à-dire les coefficients a_i ne dépendent pas du choix des vecteurs Y^a (de L_m). Pour le faire voir, posons:

$$\bar{Y}^a_k = \sum_0^{m-1} \rho^i_k Y^a_i, \text{ où Dét. } |\rho^i_k| \neq 0,$$

et désignons par σ_k^u les valeurs définies par les relations:

$$\sum_0^{m-1} \rho^k_b \sigma_k^u = \sum_0^{m-1} \rho^u_k \sigma_b^k = \delta_b^u.$$

Si l'on désigne par \bar{A}^k_i les composantes de A^a par rapport au repère \bar{Y}_k , on peut écrire:

$$A^a_i = \sum_0^{m-1} \bar{A}^k_i Y^a_k = \sum_0^{m-1} \bar{A}^k_i \sum_0^{m-1} \rho^i_k Y^a_i = \sum_0^{m-1} A^k_i Y^a_k,$$

d'où

$$A^k_i = \sum_0^{m-1} \rho^k_r \bar{A}^r_i.$$

En résolvant ces équations on trouve:

$$\bar{A}^u_i = \sum_0^{m-1} \sigma_k^u A^k_i, \quad \text{Dét. } |\sigma_k^u| \neq 0. \quad (12, 16)$$

L'équation (12, 15) écrite pour la valeur transformée \bar{a}_{m-j} nous donne à l'aide de (12, 16), (12, 9a) et (12, 15):

$$\begin{aligned} \bar{a}_{m-j} &= - \frac{1}{\text{Dét. } |\bar{A}^a_i|} \text{Dét. } \left| \begin{array}{cccc} \bar{A}^0 & \bar{A}^0 & \dots & \bar{A}^0 \\ 0 & 1 & & j-1 \\ & & & m-1 \\ & & & j+1 \\ & & & m-1 \end{array} \right| \bar{A}^0 \bar{A}^0 \dots \bar{A}^0 = \\ &= - \frac{1}{\text{Dét. } |\sigma_k^u| \cdot \text{Dét. } |A^a_i|} \cdot \text{Dét. } |\sigma_k^u|. \end{aligned}$$

$$\cdot \text{Dét. } \left| \begin{array}{cccc} A^0 & A^0 & \dots & A^0 \\ 0 & 1 & & j-1 \\ & & & m-1 \\ & & & j+1 \\ & & & m-1 \end{array} \right| = a_{m-j}. \text{ C. Q. F. D.}$$

Les équations (12, 5), (12, 6) et (12, 9) correspondent aux relations (5, 5), (5, 11) et (5, 4) resp. (5, 9) écrites pour $m = N + 1$, celles-ci ont été le point de départ des recherches aux paragraphes 6—11. On peut donc appliquer les méthodes utilisées dans ces paragraphes à l'étude A^a_k en L_m et déduire les théorèmes analogues pour m général, aux théorèmes dessus cités pour $m = N + 1$. En voici les plus importants:

En posant

$$\sum_0^m \binom{m}{j} a_{m-j} A^j = 0, \quad a_0 \neq 0$$

on peut trouver les théorèmes:

1. Le système des invariants I_2, I_3, \dots, I_m (voir paragraphe 5) est le système complet des invariants projectifs du champ $A^a(t)$ en L_m .

2. Les grandeurs

$$\mathfrak{Q}^k = \sum_0^k \binom{k}{u} \frac{a_{k-u}}{a_0} \frac{A^u}{\mathfrak{Q}}, \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

$$\text{où } \mathfrak{Q} = \left| \sqrt[m]{\text{Dét. } \left| \frac{A^i}{k} \right|} \mid \text{sign Dét. } \left| \frac{A^i}{k} \right| \right|$$

sont projectives invariantes et satisfont aux formules:

$$D \mathfrak{Q}^0 = \mathfrak{Q}^1,$$

$$D \mathfrak{Q}^k = \mathfrak{Q}^k - \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} I_{s+1} \mathfrak{Q}^{k+s}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$(\mathfrak{Q}^m = 0).$$

Invarianty tensorového pole v projektivním prostoru.

(Obsah předešlého článku.)

V prostoru X_n o n rozměrech je dána symetrická konexe $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ až na transformace ${}^* \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + p_{\lambda} \delta_{\mu}^{\nu} + p_{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu}$, kde p_{μ} je libovolný vektor v X_n a $\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n$.

Podél libovolné regulární křivky $\xi^{\nu} = \xi^{\nu}(t)$ v X_n je dáno pole tensorů $A^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}(t)$ známých až na multiplikatívni faktor $f(t)$.

V práci jsou stanoveny dvěma metodami skalární dif. invarianty pole, nezávislé na hořejší změně konexe i na změně faktoru $f(t)$. Dokázáno, že za určitých předpokladů tyto invarianty tvoří kompletní systém invariantů pole. — Konečně v poli sestrojeny veličiny, které, i jejich absolutní derivace, jsou invariantní vzhledem k uvedeným dvěma změnám a které splňují rovnice analogické k Frenetovým vzorcům pro křivku. Obě konstrukce byly podány v obecném bodě pole, t. j. v němž existuje $m \leq n^r$ lineárně nezávislých derivovaných tensorů $D^{(i)} A^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}$, ($i = 0, 1, \dots, m-1$). Při tom bylo použito pojmu Königových prostorů.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

L'influence de la saison et du climat sur les réfracti- ons astronomiques.

František Link, Praha.

(Reçu le 16 septembre 1937.)

Dédié à Monsieur le professeur František Nušl à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire le 3 décembre 1937.

L'influence des facteurs météorologiques et géographiques sur la structure de l'atmosphère se traduit par des variations des réfractions astronomiques. Quelques résultats basés sur les sondages récents sont donnés à la suite, ainsi que les considérations sur les causes internes des variations rapides des réfractions découvertes en 1906 par F. Nušl et J. J. Frič.

Je me suis posé comme problème de calculer l'influence des facteurs météorologiques et géographiques sur les réfractions astronomiques. Ce problème devient important du moment que les observations astronomiques se font dans les différentes conditions, en ce qui concerne le climat et la saison de l'année. Les tables actuellement en usage ne tiennent compte de ces facteurs que très superficiellement. Il en résulte une incertitude autant plus grande que l'on s'approche de l'horizon. Très près de l'horizon la structure momentanée de l'atmosphère devient tellement importante, que tout calcul fait d'avance ne donne qu'une indication peu précise.

Pour bien faire il faudrait que chaque série d'observations astronomiques soit précédée et suivie de sondages aérologiques. Le calcul fait sur cette base donnerait alors pour chaque cas séparément les valeurs des réfractions, qui auraient beaucoup de chance d'être exactes. Avant d'atteindre ce degré de perfection il est toutefois utile de savoir, quelles sont les variations à attendre dans les différentes conditions qui peuvent se présenter.

Pour les calculs des réfractions on a besoin de connaître la structure de l'atmosphère c'est-à-dire la fonction qui donne la densité de l'air en fonction de l'altitude. Les sondages aérologiques

donnent alors la température et l'humidité relative en fonction de l'altitude h . A partir de ces données il est facile de calculer la densité de l'air ρ . En admettant l'équilibre statique des couches atmosphériques supposées sphériques et la loi des gaz parfaits on obtient la formule connue

$$\log \rho = \log \frac{273}{T_0} \frac{b_0}{760} + \log \frac{T}{T_0} - \frac{0,434 M}{R^*} \int_0^h \frac{g}{T} dh, \quad (1)$$

où $M = 28,98$, $R^* = 8,314 \cdot 10^7$ erg grad $^{-1}$, T_0 et T sont les températures absolues au sol et au niveau donné, g l'accélération de la pesanteur et b_0 la pression barométrique au sol. L'influence de la vapeur d'eau est faible et les sondages aérologiques ne sont pas assez complètes sous ce rapport, pourqu'on puisse en tenir compte.

Le point de départ proprement parlé sera alors la fonction, qui donne la température T en fonction de l'altitude $T = \varphi(h)$. Je me suis d'abord servi des résultats de Ramanthan¹⁾ qui donne la repartition de la température sur l'hémisphère boréale en hiver et en été. Ces données atteignent l'altitude de 25 km. Pour pouvoir suivre aussi l'influence de différentes situations météorologiques, j'ai adopté les répartitions des températures dans le cyclone et dans l'anticyclone d'après Runge,²⁾ données également pour l'hiver et pour l'été. Ces indications ne dépassent pas l'altitude de 16 km. On pourrait se demander, si ces données sont suffisantes pour un calcul exacte. On peut répondre par l'affirmatif, puisque l'intégrale des réfractions est peu influencée par les couches élevées de l'atmosphère. De cette façon à partir de 25 ou 16 km respectivement j'ai pu adopter les valeurs moyennes des densités d'après Humphreys,³⁾ sans que la précision des calculs en souffre sensiblement. Pour l'intégrale des réfractions on peut écrire

$$R = c \sin z \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\cos^2 z + 2 \frac{h-h_0}{a} - 2c(\rho_0 - \rho)}} \quad (2)$$

où $a = 6370$ km, c est la constante de la loi, qui donne l'indice de réfraction de l'air μ en fonction de la densité de l'air: $\mu = 1 + c\rho$, et z est la distance zénithale des rayons.

Près de l'horizon l'intégration numérique est nécessaire pour évaluer l'intégrale précédente. Sous les faibles distances zénithales l'intégrale est susceptible des grandes simplifications. En développant en série l'expression sous le signe de l'intégrale on obtient approximativement

$$R = c \operatorname{tg} z \int_{e_0}^0 \left(1 - \frac{h - h_0}{a \cos^2 z} + \frac{c (e_0 - e)}{\cos^2 z} \right) d\rho =$$

$$= c e_0 \operatorname{tg} z + \frac{c \operatorname{tg} z}{a \cos^2 z} \int_0^{e_0} (h - h_0) d\rho + \dots,$$

mais pour le second terme on peut écrire

$$\int_0^{e_0} (h - h_0) d\rho = - \int_{\infty}^0 \rho dh = m,$$

ce qui est l'altitude de l'atmosphère homogène égale à 8,0 km sous les conditions normales. On obtient alors finalement en négligeant ce terme trop faible

$$R = c e_0 \operatorname{tg} z. \quad (3)$$

Cette formule montre, que sous les faibles distances zénithales les réfractions ne dépendent que des conditions météorologiques locales. La structure de l'atmosphère a peu d'influence dans ce cas. La limite d'utilisation de cette formule est de l'ordre de 70°.

J'ai fait donc à titre d'information quelques calculs au voisinage de l'horizon en appliquant la formule exacte (2) et pour la distance zénithale de 45° d'après la formule approchée (3). Les résultats sont contenus dans le tableau suivant.

Table des réfractions astronomiques.

z \ φ	Hiver					Eté					Hum- phreys viz *) *)
	+80°	+60°	+40°	+20°	+00°	+20°	+40°	+60°	+80°		
90°	54,2'	42,9'	34,4'	31,3'	30,8'	30,3'	31,8'	33,1'	37,8'	35,8'	
89,5°	40,4'	32,4'	28,5'	26,4'	25,9'	25,4'	26,7'	28,4'	31,3'	29,3'	
89°	32,1'	27,8'	24,3'	22,7'	22,3'	21,8'	22,8'	23,6'	25,3'	25,0'	
45°	67,8"	62,0"	57,4"	55,2"	54,5"	53,7"	55,5"	57,1"	60,0"	58,3"	
			Cyclone	Anticyclone		Cyclone	Anticyclone				
90°			34,7'	45,6'		32,4'	34,7'				
45°		φ = 45°	56,1"	61,4"		54,1"	57,9"				

L'examen de ce tableau montre les grandes différences surtout au voisinage de l'horizon, où elles ne sont pas dues aux différentes conditions au sol, mais à la structure différente de l'atmosphère. Les tables actuellement en usage ne peuvent donner pour cette raison qu'une approximation assez grossière dans certains cas, comme le montre l'exemple suivant. Les tables de la Connaissance des Temps donnent la réfraction moyenne à l'horizon égale à 36,6' en assez bon accord avec notre valeur moyenne 35,8'. Reduisant encore la valeur de la C. des T. à la température moyenne de l'année on obtient 34,8', ce qui constitue toujours un accord acceptable. Mais, si l'on compare ces tables avec nos données pour les situations météorologiques différentes, l'accord devient mauvais. Pour l'anticyclone en hiver per ex. (0° C, 775 mm) les tables de la C. des T. donnent 37,4' au lieu de 45,6' d'après nos calculs.

Ces variations saisonnières et géographiques font penser aux variations de courte période trouvées par MM. F. Nušl et J. J. Frič,⁵⁾ vérifiées après par d'autres observateurs. Au cours de leurs observations avec l'appareil circumzénithal ils ont soupçonné des variations des réfractions de période beaucoup plus longue que l'agitation habituelle des images. Les enregistrements photographiques à l'aide d'un appareil spécial ont démontré l'existence des variations de la hauteur de l'étoile polaire atteignant 1" dans l'espace d'une seconde de temps environ.

On peut se demander alors, quelles sont les causes internes de ces fluctuations. D'après (3) nous pouvons penser d'abord aux variations de ρ_0 . En différenciant cette formule on a

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho_0}{\rho_0}$$

Dans notre cas nous avons $dR : R = 2\%$ pour $R = 50''$. Il faudrait donc que les variations relatives de la densité locale atteignent 2% environ. Pour cela il faudrait admettre des fluctuations de la pression barométrique ou de la température, que l'on n'a pas observé jusqu'à présent.

Une autre explication s'impose dans ce cas. Supposons, que les niveaux d'égales densités au lieu d'être horizontaux subissent une inclinaison dans toute l'étendue de l'atmosphère, qui intéresse la trajectoire lumineuse. Tout se passe alors comme si la distance zénithale z était modifiée du même angle. En différenciant la formule (3) par rapport à z on obtient

$$\frac{dR}{R} = \frac{dz}{\operatorname{tg} z \cos^2 z} \text{ et dans le cas envisagé } dz = \pm 0,4^\circ.$$

Une inclinaison d'un demi degré serait alors suffisante pour provoquer les variations des réfractions constatées. En réalité il

suffirait une inclinaison temporaire un peu plus forte des couches basses seulement pour produire le même effet, puisque les couches basses ont une importance considérable sur l'intégrale des réfractions. Et ce phénomène a beaucoup de chance de se produire couramment.

Bibliographie.

1. R. R. Ramanathan, *Nature*, **123** (1929), 884. — 2. H. Runge, Thèse, Université de Leipzig, 1931. — 3. C. W. Humphreys, *Physics of the Air*, New-York, 1929. — 4. F. Link, *Jour. des Obs.* **17** (1934), 41. — 5. F. Nušl et J. J. Frič, *Rozpravy České akademie*, **XVII**, 1908.

*

Vliv ročních období a podnebí na astronomickou refrakci.

(Obsah předešlého článku.)

Podle nejnovějších dat o vysoké atmosféře počítá autor vliv ročních období, zeměpisné šířky a meteorologických podmínek na astronomickou refrakci. Vliv je zejména patrný u obzoru, kde nutno počítati refrakci od případu k případu na základě aerologických sondáží vykonaných pro každý případ zvláště. V menších zenitních vzdálenostech stačí vzíti v úvahu pouze změny hustoty vzduchu v pozorovacím místě.

Anomalie refrakční pozorované Nušlem a Fričem v malých zenitních vzdálenostech lze těžko vysvětliti změnami hustoty podél dráhy paprsku. Spíše mají svůj původ v deformacích hladin stejné hustoty blíže povrchu zemského.

The Orbits about an Oblate Spheroid.

Zdeněk Kopal, Praha.

(Received September 16, 1937.)

Dedicated to Professor František Nušl
on the occasion of his seventieth
anniversary December 3, 1937.

The subject of the present paper is an analysis of the generalised two-bodies problem, where the central body is an inhomogeneous oblate spheroid and the companion can be regarded as a mass point. The general result will be that also in this case the orbits are elliptic (or hyperbolic), but showing a steady advance of periastron. The rate of motion will be found to be a function of the oblateness of the spheroid, of its density condensation, of the ratio of its major semi-axis to the semi-axis of the orbit, of the orbital eccentricity, and, for orbits inclined to the equatorial plane, also of the direction of nodes.

The problem which we shall face in the present paper may be stated as follows: In the gravitational field of an inhomogeneous oblate spheroid be moving a body which can be represented as a mass-point. It is to investigate the orbits in which the mass-point will move.

It may be a matter of some surprise that despite of its theoretical as well as practical importance the present problem has not yet been investigated in its general form — except the case of a homogeneous spheroid with very small oblateness, which was dealt with by W. D. Macmillan.¹⁾ The present paper may be considered as an extension of Macmillan's researches to the case of an inhomogeneous spheroid with considerable oblateness — but, as will be seen, the present method of attacking the problem is essentially different from that of Macmillan. Also the points of view in both investigations differ widely. While the aim of Macmillan's research was to establish the existence of periodic orbits in the considered case, the main bulk of the present paper will be devoted to derivation of the departures of orbits from the classical two-bodies problem²⁾

¹⁾ Cf. F. R. Moulton, *Periodic Orbits*, Washington 1920. Pp. 99—150.

²⁾ Under this term we mean the case where both bodies can be treated as mass-points.

explicitly as functions of the oblateness resp. the density condensation of the spheroid. Anticipating the results we may state that the general property of such orbits is the advance of periastron — a quantity the amount of which can be ascertained by observations. Thus the results of our analysis will yield us a possibility of determining the density condensation of the spheroidal body from observable facts, and the application on celestial bodies may in some cases provide us with certain indications concerning their internal constitution, which until quite recently has been a subject of purely theoretical research. Finally the fact, that both solutions, Macmillan's and mine, as far as they are consistent, point to exactly the same result, presents a valuable check and leaves no room for doubt that both are generally correct.

The equations of motion for the present problem are:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\quad (1)$$

where x, y, z , are Cartesian coordinates (the centre of the spheroid taken as origin), V is the corresponding potential and k the Gaussian constant.

The potential of an inhomogeneous oblate spheroid with respect to a point not too near is³⁾

$$V = \frac{\mathfrak{M}}{r} + 4\pi\sqrt{1-e^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i P_{2i}}{2i+1} \cdot \frac{e^{2i}}{r^{2i+1}} \cdot \int_0^{a_1} \rho a^{2(i+1)} da \quad (2)$$

where \mathfrak{M} is the mass of the spheroid, ρ its density, e the oblateness

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

a_1 its major semi-axis, P_{2i} the Legendre polynomials and

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In order to be able to evaluate the integral on the right side of (2) a knowledge of ρ as function of a is necessary. In the present state of research it might seem most advisable to obtain it from the Emden polytropic equation. But apart from the fact that in the theory of rotating stars the polytropic configurations have

³⁾ Cf. Tisserand, *Traité de la Mécanique Céleste*, II, p. 322. Paris, 1891.

recently rather lost their importance,⁴⁾ the solution of Emden's equation cannot be given in finite number of terms and the convergence of the corresponding series is so slow as to make their application highly impracticable. This is mainly the reason why we prefer for the purposes of the present paper the following relation:

$$\varrho = \varrho_c \left(1 - \frac{a}{a_1}\right)^{\nu-1} \quad (3)$$

where ϱ_c is the central value of the density and ν an arbitrary constant. To get an idea about its physical significance, integrate the above expression for ϱ over the realm $0 < a < a_1$. Denoting ϱ_m the mean density of the configuration, we readily see that

$$\frac{\varrho_c}{\varrho_m} = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6} = \mu \quad (4)$$

i. e. that ν specifies the density condensation alone. The values $\nu = 1$ and ∞ correspond to the limiting Maclaurin's and Roche's model respectively.

With the aid of (3) the definite integral from (2) can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \int_0^{a_1} \varrho a^{2(i+1)} da &= \varrho_c a_1^{3+2i} \cdot B(\nu, 3+2i) = \\ &= \varrho_c a_1^{3+2i} (2i+2)! \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3+2i+\nu)} \end{aligned} \quad (5)$$

and by cancellation of Gamma functions⁵⁾

$$\int_0^{a_1} \varrho a^{2(i+1)} da = \varrho_c a_1^{3+2i} \frac{(2+2i)!}{\nu(\nu+1) \dots (2+2i+\nu)}$$

Eq. (2) takes now the form:

$$\begin{aligned} V = \frac{\mathfrak{M}}{r} + 4\pi a_1^3 \varrho_c \sqrt{1-e^2} \times \\ \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (2+2i)! P_{2i}}{\nu(\nu+1) \dots (2+2i+\nu) (2i+1)} \cdot \frac{e^{2i}}{r^{2i+1}} \end{aligned} \quad (6)$$

⁴⁾ It was found that the polytropic density distribution is not invariant with respect to the rotation. For the discussion of this case the reader is referred to my second paper „On the Internal Constitution of Eclipsing Binaries“, M. N. R. A. S. **97** (1937), 646—655.

⁵⁾ Cf. Whittaker and Watson: Modern Analysis, Cambridge 1935; p. 254, where a similar case is left as an exercise to the reader.

which after some minor arrangements can be reduced to

$$V = \frac{\mathfrak{M}}{r} \left\{ 1 + 3\mu \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (2+2i)! P_{2i}}{\nu(\nu+1) \dots (2+2i+\nu)(2i+1)} \cdot \left(\frac{e}{r}\right)^{2i} \right\}. \quad (7)$$

We shall work consistently only up to the fourth order in e , i. e. we consider only such small oblatenesses that the effects arising from e^6 and higher terms can be neglected. Inserting the corresponding expressions for the Legendre polynomials and on going through the algebra, we finally obtain:

$$V = \frac{\mathfrak{M}}{r} \left\{ 1 + e^2 \cdot \frac{\Phi_2 x^2 + y^2 - 2z^2}{r^4} + e^4 \frac{\Phi_4 3x^4 + 3y^4 + 8z^4 + 6x^2y^2 - 24x^2z^2 - 24y^2z^2}{r^8} \right\}. \quad (8)$$

The corresponding derivatives are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\mathfrak{M}}{r^3} \left\{ 1 + e^2 \Phi_2 \frac{x^2 + y^2 + 4z^2}{r^4} + e^4 \Phi_4 \frac{(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 12z^2(x^2 + y^2)}{r^8} \right\} x \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{y}{x} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\mathfrak{M}}{r^3} \left\{ 1 + e^2 \Phi_2 \frac{3x^2 + 3y^2 - 2z^2}{r^4} + e^4 \Phi_4 \frac{15(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 40z^2(x^2 + y^2)}{r^8} \right\} z \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{6a_1^2}{(3+\nu)(4+\nu)} \\ \Phi_4 &= \frac{27a_1^4}{(3+\nu)(4+\nu)(5+\nu)(6+\nu)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Combining (1) and (9) we arrived at the fundamental equations of our problem.

As one easily verifies, this set of equations has some integrals with the classical two-bodies problem in common: so the integrals of the centre of the mass, one integral of areas and the vis viva integral. The four remaining integrals cannot, however, be expressed in finite terms.

Seeking for them, we find it advantageous to transform the fundamental equations in the cylindrical coordinates and, for the

sake of simplicity, to make use of the canonical form. Owing to that

$$y \frac{d^2x}{dt^2} = x \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (11)$$

and therefore

$$rv'' + 2r'v' = 0 \quad (12)$$

the fundamental equations take the following forms⁶⁾:

$$r'' = \frac{c_1^2}{r^3} - \frac{r}{(r^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - e^2 \Phi_2 \frac{r^3 - 4rq^2}{(r^2 + q^2)^{\frac{5}{2}}} - e^4 \Phi_4 \frac{r^5 - 12r^3q^2 + 8rq^4}{(r^2 + q^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (13)$$

$$q'' = -\frac{q}{(r^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - e^2 \Phi_2 \frac{3r^2q - 2q^3}{(r^2 + q^2)^{\frac{5}{2}}} - e^4 \Phi_4 \frac{15r^4q - 40r^2q^3 + 8q^5}{(r^2 + q^2)^{\frac{7}{2}}} \quad (14)$$

where

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$z = q$$

which together with the area integral

$$r^2v' = c_1 \quad (15)$$

specify completely the orbits.

Let us investigate first the orbits lying in the equatorial plane of the spheroid, i. e. put $q = 0$. Eq. (13) becomes now:

$$r'' = c_1^2 \cdot r^{-3} - r^{-2} - e^2 \Phi_2 \cdot r^{-4} - e^4 \Phi_4 \cdot r^{-6}. \quad (16)$$

Integrating we obtain

$$(r')^2 = -c_1^2 \cdot r^{-2} + 2r^{-1} + \frac{2}{3}e^2\Phi_2 r^{-3} + \frac{2}{5}e^4\Phi_4 \cdot r^{-5} + c_2. \quad (17)$$

Changing the variable by use of (15), (17) gets the form

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = -r^2 + \frac{c_2}{c_1^2} r^4 + \frac{2}{c_1^2} r^3 + \frac{2e^2\Phi_2}{3c_1^2} r + \frac{2e^4\Phi_4}{5c_1^2} r^{-1} \quad (18)$$

which yields

$$v - c_3 = \int \frac{c_1 dr}{\sqrt{r^2 (c_2 r^2 + 2r - c_1^2) + \frac{2}{3}e^2\Phi_2 r + \frac{2}{5}e^4\Phi_4 r^{-1}}}. \quad (19)$$

The terms multiplied by e^2 resp. e^4 are obviously minor with respect to the first term of the denominator, and we are therefore allowed to expand the integrand in a series of the form:

$$c_1 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{i} \frac{(\frac{2}{3}\Phi_2 r + \frac{2}{5}e^2\Phi_4 r^{-1})^i}{(c_2 r^4 + 2r^3 - c_1^2 r^2)^{i+\frac{1}{2}}} \cdot e^{2i}.$$

⁶⁾ The dashes indicate differentiation with respect to the time.

Consistently with our scheme of approximation we take into account only the terms up to the order e^4 , and the term-by-term integration gives:

$$\begin{aligned}
v - c_3 = & \int \frac{c_1 dr}{r \sqrt{c_2 r^2 + 2r - c_1^2}} - \\
& - e^2 \int \frac{c_1 \Phi_2 dr}{3r^2 \sqrt{(c_2 r^2 + 2r - c_1^2)^3}} - \\
& - e^4 \int \frac{c_1 \Phi_4 dr}{5r^4 \sqrt{(c_2 r^2 + 2r - c_1^2)^5}} + e^4 \int \frac{c_1 \Phi_2^2 dr}{6r^3 \sqrt{(c_2 r^2 + 2r - c_1^2)^5}}.
\end{aligned} \tag{20}$$

For $e = 0$, (20) should become the usual expression of the classical two-bodies problem. The reader may verify that this is actually the case, and its well-known solution suggests itself.⁷⁾ But it is easy to see that also for $e \neq 0$ the solution may formally be put in the form

$$r = \frac{c_1^2}{1 + \varepsilon \cos(v - \omega')} \tag{21}$$

but ω' ceases to be constant, being a function of the radius vector and therefore (for the non-circular orbits) of the anomaly. Its evaluation consists of expressing the remaining integrals of (20) in terms of v ⁸⁾; after performing this long and rather complicated procedure we finally obtain:

$$\omega' = \omega + \{A \cdot e^2 + B \cdot e^4 + \dots\} v \tag{22}$$

where

$$A = \Phi_2 \sum_{i=0}^{\infty} (1+i) \varepsilon^{2i} \tag{22,1}$$

$$\begin{aligned}
B = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (2\Phi_4 + \Phi_2^2) + (4\Phi_4 + \Phi_2^2) i + \right. \\
\left. + \frac{1}{2} \Phi_2^2 \left[\binom{2+i}{i-1} + 5 \binom{3+i}{i} \right] \right\} \varepsilon^{2i}.
\end{aligned} \tag{22,2}$$

Thus we arrived at the conclusion that in the considered

⁷⁾ This enables us to determine the values of the three integration constants. It follows that

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\
c_2 &= -1 \\
c_3 &= \omega,
\end{aligned}$$

ε and ω being the orbital excentricity and the length of periastron respectively.

⁸⁾ As we are concerned only with secular terms, we have to take in account only the terms multiplied by v , as those multiplied by periodic functions of v clearly cannot contribute to the motion of apses.

case the orbits about an inhomogeneous oblate spheroid are again, in general, of the type (21), but showing a continuous advance of periastron, and we carried out the necessary computation up to the fourth order in e ; the corresponding coefficients have just been written down as functions of the density condensation of the spheroid and of the orbital excentricity. It results therefrom that the rate of apsidal motion is the higher,

- (I) the greater the oblateness of the spheroid,
- (II) the greater its major semi-axis,⁹⁾
- (III) the smaller the density condensation,
- (IV) the greater the orbital excentricity.

The all above said is true, of course, only for orbits lying in the equatoreal plane of the spheroid and it would be desirable now to extend it to inclined orbits. The idea of simultaneous integration of (13) and (14) suggests itself, but the procedure involved would be extremely tedious. The matter may, however, be much simplified by a very reasonable assumption, that also in this case the orbits can be considered as two-dimensional curves lying in a revolving plane.

Let us turn back to (13). Introducing the new variable

$$u = \frac{q}{r} \quad (23)$$

(13) assumes the following form:

$$r'' = \frac{c_1^2}{r^3} - \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{r^2} - e^2 \Phi_2 \frac{1-u^2}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r^4} - e^4 \Phi_4 \frac{8u^4 - 12u^2 + 1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r^6} \quad (21)$$

and, on the other hand, it is clear from the above assumption that

$$u = \operatorname{tg} i \cdot \sin (v - \omega'' + \Omega) \quad (22)$$

i being the angle of inclination of the revolving plane to the equator of the spheroid, ω'' the complete expression for the periastron motion for inclined orbits, and Ω the length of node. As $u \lesssim \operatorname{tg} i$, we may, limiting ourselves to small inclinations, develop (21) in a Maclaurin's series

$$r'' = f(0) + f'(0) u + \frac{1}{2} f''(0) u^2 + \dots \quad (23)$$

where $f(0)$ is obviously the right side of (13). As the right side of (21) contains only the odd powers of u , all derivatives of the even order must vanish when $u \rightarrow 0$, and (23) reduces to a power

⁹⁾ Expressed on account of the canonical transformation in terms of the major semi-axis of the orbit as unit.

series in $\text{tg}^2 i$. Supposing that for small values values of i , ω'' comes very near to ω' , we may express $(v - \omega'')$ by means of (21) as function of r . Neglecting further the terms of the order $\text{tg}^4 i$ and higher, (23) can be integrated in an analogous way as eq. (16) in the preceding case. The whole procedure is now of course much longer and too complicated to be reproduced here, and except the cases $\Omega = 2n\pi$ and $\Omega = 2(n+1)\pi$, n being an integer, the mathematical difficulties could not yet be mastered completely.

For $\Omega = 2n\pi$, however, it follows⁹⁾:

$$\omega''_n = \omega' + \{[\Phi_2 \Psi_\varepsilon (A_1 + B_1 \varepsilon^2 + C_1 \varepsilon^4) \text{tg}^2 i + \dots] \varepsilon^2 + \dots\} v \quad (24)$$

where

$$\Psi_\varepsilon = \frac{3}{20} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-4}{i} \varepsilon^{2(i-1)} \quad (24, 1)$$

and

$$A_1 = 5(2 + 9\Phi_2); B = -(20 - 69\Phi_2); C = 2(5 + 3\Phi_2). \quad (24, 2)$$

For $\Omega = 2(n+1)\pi$, finally, it results:

$$\omega''_{n+1} = \omega' + \{[\Phi_2 \Psi_\varepsilon (A_2 + B_2 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon^4 + D_2 \varepsilon^6 + E_2 \varepsilon^8) \text{tg}^2 i + \dots] \varepsilon^2 + \dots\} v \quad (25)$$

where

$$\begin{aligned} A_2 &= 140\Phi_2 & D_2 &= 10(1 - 6\Phi_2) \\ B_2 &= -2(5 + 447\Phi_2) & E_2 &= -10 \\ C_2 &= 2(5 + 12\Phi_2) \end{aligned} \quad (25, 1)$$

It comes out that also for $i \neq 0$, the motion of apsidal line remains always positive, and the greater the inclination, the greater the additional terms. There is also an evident dependance of the rate of motion on the direction of nodes, for in both preceding cases the amount of motion results different, but owing to purely mathematical difficulties this relation could not explicitly be ascertained for all values of Ω .

Numerical Example. As an illustration of the above methods one numerical example may be added. Jupiter and its fifth satellite form a system which comes very closely to the model stated at the outset and discussed in the present paper. The orbit of Jupiter's fifth satellite shows indeed an advance of periastron by the amount 883° a year. As its excentricity as well as its major semi-axis and the oblateness of Jupiter are known, we are enabled with the aid of our results to calculate the density condensation of Jupiter itself.

The following values of elements are adopted:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,401 \\ e &= 0,362 \\ \varepsilon &= 0,006 \end{aligned}$$

⁹⁾ Here we have evidently neglected also terms multiplied by $\varepsilon^4 \text{tg}^2 i$, i. e. those of the order Φ_4 .

and because of the minuteness of inclination of the orbit to Jupiter's equator eq. (22) is directly applicable. The results of computations are:

ν	Φ_2	Φ_4	A	B	$(\omega' - \omega)$ per orbit
1,0	0,0482	0,0008	0,0483	0,0098	2,334°
2,0	0,0322	0,0004	0,0322	0,0045	1,546
3,0	0,0230	0,0002	0,0230	0,0023	1,099
4,0	0,0172	0,0002	0,0172	0,0013	0,819
5,0	0,0134	0,0001	0,0134	0,0008	0,637

As to 883° per year corresponds a value 1,21° per orbit, we obtain by interpolation and by use of (4) for the density condensation of Jupiter the value $\frac{\rho_c}{\rho_m} = 7,5$ — a value which comes closely to the density condensation inferred for Saturn.¹⁰⁾

Concluding I would like to stress that the present paper can contain scarcely more than a mere outline of the whole problem, of the methods employed as well as of the results arrived at. Its full-dressed analysis would exceed widely the scope of the present paper and the detailed treatment will be published elsewhere.

It is also my pleasure to express my sincere thanks to Docent Dr. V. Nechvíle, who has discussed with me the above problems in all stages and to whose stimulating suggestions the present paper owes a great deal.

*

O drahách kolem rotačního sferoidu.

(Obsah předešlého článku.)

Tématem práce je zobecnění problému dvou těles pro případ, kdy kolem nehomogenního rotačního sferoidu obíhá hmotný bod, a to jednak pro dráhy v ekvatoreální rovině sferoidu, jednak — v nejstručnějším nárysu — i pro dráhy k rovníkové rovině skloněné. Výsledkem rozboru je, že v obou případech obíhá bod obecně po kuželosečce, ale po dráze s neustále postupující délkou periastra. Velikost posuvu byla pak explicitě vyjádřena jako funkce sploštění elipsoidu, jeho vnitřní stavby, velikosti jeho poloosy i výstřednosti dráhy; aplikace výsledku na Jupitera a jeho pátý měsíc, u něhož pohyb periastra je znám z pozorování, vedl k zjištění vnitřního složení Jupitera.

¹⁰⁾ See S. Chandrasekhar, M. N. **93** (1933), 559.

Fotometrický průřez hlavy komety Finslerovy v blízkosti perihelu.

Bohumil Šternberk, Stará Āala.

(Došlo 20. září 1937.)

Věnováno panu profesorovi dr. Františku
Nušlovi k jeho sedmdesátinám v den 3. pro-
since 1937.

Fotometrické proměřování komet má značný význam pro teorii těchto těles; přesná měření jsou však dosti obtížná podobně jako u mlhovin a proto je k dispozici dosud málo výsledků, jež by snesly přísnější kritiku.

Pokusil jsem se při nedávném přiblížení komety 1937f (Finsler) Zemi a Slunci získati řadu snímků 60 cm zrcadlem starodálské observatoře pro určení fotometrického profilu hlavy této komety. Na rozdíl od objektivů o větším poli, jakým sledovali tuto kometu na př. Štěpánek a Nušl¹⁾ nehodí se parabolické zrcadlo pro studium ohonu komet; delší ohnisková vzdálenost zrcadla dává naproti tomu i v Newtonově systému obrázek samotné hlavy dosti veliký, aby mohl býti zpracován registračním mikrofotometrem při dostatečně úzké projekci štěrbin.

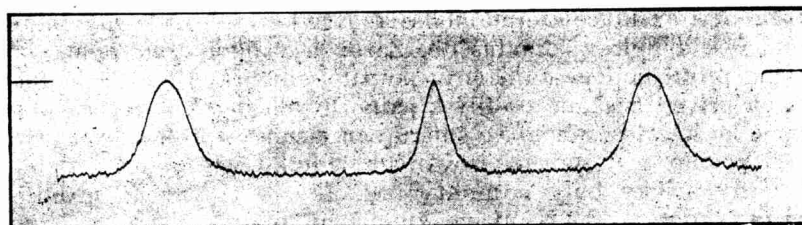
Absolutní škálu je možno určití dvěma cestami: buď vkopírováním na př. rourkovým fotometrem, nebo použitím komety samé, snímky s clonou a bez clony. Proti vkopírování škály nutno namítnouti rozdíl spektrálního složení světla umělých zdrojů a světla komety, jež dává jinou gradaci na fotografické desce. Metoda druhá, jež vede, jak známo, k rovnici řešené podrobně Schwarzschildem,²⁾ je v daném případě výhodná, protože hlava komety představuje jakýsi fotometrický klín, z něhož lze použitím registračního mikrofotometru velmi podrobně získati diferenční křivku. Ideální by ovšem byly současné snímky dvěma stejnými objektivy na téže desce (stereokamera). To je prakticky možné

¹⁾ Circ. U. A. J., No. 683 (1937).

²⁾ Astr. Nachr., 172 (1906), 65.

jen pro malé ohniskové vzdálenosti a tedy na př. pro fotometrické studium ohonu.³⁾

V našem případě bylo nutné prováděti snímky postupně bez clony a se clonou. Symetrické uspořádání 3 exposic vyloučilo pokud možno vliv pravidelných změn extinkce a jasnosti komety. Pokud se týče změn extinkce, máme také kontrolu ve stopách stálic. Dostatečná světelnost zrcadla umožnila kromě toho snímky s poměrně krátkou expozicí (2 min. až 20 min.). Stlumení světla clonou o otvoru 42 cm obnášelo podle výpočtu s ohledem na pomocné zrcadlo 0,935^m. Exposice byly prováděny podle schématu: bez clony, s clonou, bez clony. Mezi jednotlivými snímky



Obr. 1.

posunul jsem kasetu asi o 1 cm. Směr tohoto posunu byl zvolen přibližně kolmo k ohonu komety. Při exposicích byl veden dalekohled dvaceticentimetrovým vodičem za kometou.

Výsledky spočívají celkem na 24 snímcích komety. Dr. B. Novákové jsem zavázán za pomoc při exposicích a za provedení mikrofotogramů na registračním mikrofotometru Mollově ve Spektroskopickém ústavu Karlovy university v Praze. Stroj byl k tomu účelu propůjčen laskavostí pana prof. dr. Dolejška, jemuž rovněž děkuji.

Projekce štěrbinu měla rozměr asi 0,1 mm × 0,1 mm; byl kontrolován jednak velikostí reálné štěrbinu, jednak tím, že byly proměřeny snímky štěrbinu na fotografickém papíru. Z výsledků vidíme, že spád jasnosti v této šířce kolísal asi mezi 0,1^m až 0,35^m. Vzhledem k formě křivky neměly patrně tyto rozměry světelné skvrny vlivu na výsledný profil až na partie jádru nejbližší. Menšího obrázku štěrbinu nebylo možno použítí jednak pro nedostatek světla, jednak pro značné vystoupení zrna desky ve slabších částech snímku. Ostatně nedokonalosti vedení dosahují u tak nesnadných objektů, jakými jsou komety, mezi odpovídající šířce obrázku štěrbinu mikrofotometru. Zvětšení bylo zvoleno 7×.

³⁾ Schwarzschild-Kron, *Astrophys. Journ.*, **34** (1911), 342.

Obraz 1. je reprodukcí jednoho z mikrofotogramů a sice 313 N/22. Na tomto snímku stejně jako na ostatních nelze s jistotou naléztí žádného vrstvení světla v jádru komety.

Mikrofotogramy byly proměřeny a zpracovány metodou dříve zmíněnou.⁴⁾ Byla zvolena symetrická forma rovnice

$$\psi[T + \frac{1}{2}\eta(T)] - \psi[T - \frac{1}{2}\eta(T)] = 0,935^m,$$

k níž bylo hledáno řešení se spojitou derivací prvou a druhou. Shoda křivky rozdílů zčernání $\eta(T)$, odvozené ze snímku prvního a druhého, s křivkou ze snímku druhého a třetího byla mírou změn extinkce. Rozdíly jsou uspokojivé až snad na křivku odvozenou z poslední desky 320 N, kdy kometa stála už hodně nízko nad obzorem a extinkce zřejmě kolísala. Křivka $\eta(T)$ měla maximum, čímž řešení bylo zjednodušeno. Zároveň v okolí tohoto maxima máme profil nejlépe zajištěný; použil jsem právě těchto hodnot, abych přivedl získané profily z jednotlivých desek a večerů přibližně ke krytí posunem ve směru osy jasností: profily jsou přirozeně známé z dosud popisovaných snímků až na nulový bod. Všechny křivky byly posunuty tak, aby se co možno přiblížily křivce z desky 312 N 21 ve zmíněném oboru. Takto získanou tabulku neuvádím; možno ji snadno obdržeti z tabulky v dalším textu. Bylo z ní patrné, zejména když jsme si křivky nakreslili, že výsledky z různých desek a večerů velmi dobře spolu souhlasí co do tvaru fotometrického profilu, a to i v části centrální (až na dva snímky), kde bychom se musili smířiti i s většími rozdíly vzhledem k tomu, že jsme už v oboru přeexposice. Podobně je tomu na okraji komety, v oboru podexposice, kde rozdíly jsou větší také následkem účinku zrna desky na záznam mikrofotometru.

Z grafického znázornění však vidíme, že profily dne 12. srpna jsou proti předešlým dnům poněkud zúžené; máme tu fotometricky vyjádřený již známý fakt, že hlava komety se v perihelium úží; s tím jsou v souhlase i další výsledky.

Nulový bod profilu určil jsem na zvláštních deskách jednou pro každý večer, s výjimkou 6. VIII., srovnáním se severní pol. sekvencí. Hlava komety a hvězda č. 14 byly pak proregistrovány mikrofotometrem. Zvolíme-li za jednotku plošnou jasnost hvězdy 9,00^m rozšířené na kotouček o průměru 1 mm na fotografické desce (0,00^m) obdržíme definitivní profily obsažené v tabulce č. 1.

Získali jsme je posunutím profilů shora zmíněných o tyto hodnoty: pro 8. VIII. + 0,23^m, 9. VIII. + 0,25^m, 12. VIII. + 0,36^m. Nulový bod pro desku 308 N byl vzat stejný, jako pro desku 309 N.

⁴⁾ L. c. Schwarzschild, Astr. Nachr., 172 (1906), 67.

Tabulka 1.

mm	308/19	309/15	312/21	313/22	317/24	318/16	320/17
29			1,80				
28			1,75				
27			1,70				
26	1,71	1,90	1,65				
25	1,66	1,80	1,58				
24	1,58	1,73	1,51				
23	1,51	1,62	1,46				
22	1,44	1,55	1,40				
21	1,36	1,47	1,33				
20	1,25	1,38	1,26				
19	1,15	1,27	1,17				
18	1,06	1,19	1,09				1,47
17	0,97	1,05	1,01				1,34
16	0,87	0,96	0,90				1,22
15	0,77	0,89	0,77	0,98			1,12
14	0,67	0,69	0,66	0,86			0,96
13	0,54	0,58	0,55	0,69		1,06	0,85
12	0,40	0,42	0,42	0,56		0,84	0,65
11	0,27	0,28	0,29	0,42		0,59	0,46
10	0,15	0,14	0,16	0,27	0,28	0,38	0,28
9	0,00	-0,04	0,00	0,09	0,19	0,16	0,08
8	-0,16	-0,22	-0,16	-0,09	0,02	-0,05	-0,06
7	-0,32	-0,39	-0,31	-0,29	-0,18	-0,23	-0,25
6	-0,50	-0,60	-0,53	-0,51	-0,42	-0,45	-0,51
5	-0,69	-0,82	-0,78	-0,73	-0,63	-0,68	-0,72
4	-0,97	-1,01	-1,07	-1,01	-0,94	-0,93	-0,95
3	-1,27	-1,29	-1,45	-1,30	-1,25	-1,20	-1,26
2	-1,61	-1,69	-1,82	-1,64	-1,59	-1,57	-1,64
1	-2,18	-2,09	-2,42	-2,04	-2,06	-2,00	-2,13
0	-2,79	-2,31	-2,77	-2,52	-2,62	-2,70	-2,65
1	-2,13	-2,06	-2,14	-2,06	-1,95	-2,08	-2,04
2	-1,60	-1,63	-1,70	-1,65	-1,47	-1,45	-1,48
3	-1,24	-1,22	-1,39	-1,39	-1,15	-1,16	-1,13
4	-0,98	-0,97	-0,98	-1,09	-0,85	-0,89	-0,83
5	-0,67	-0,72	-0,65	-0,78	-0,60	-0,62	-0,56
6	-0,43	-0,52	-0,45	-0,50	-0,37	-0,42	-0,32
7	-0,24	-0,31	-0,21	-0,26	-0,10	-0,18	-0,09
8	-0,08	-0,11	-0,03	-0,03	0,17	0,00	0,15
9	0,13	0,09	0,13	0,17		0,24	0,39
10	0,26	0,28	0,30	0,35		0,41	0,57
11	0,39	0,45	0,43	0,53		0,68	0,76
12	0,53	0,60	0,56	0,66		0,93	1,00

mm	308/19	309/15	312 21	313/22	317/24	318/16	320/17
13	0,68	0,78	0,70	0,83		1,12	1,22
14	0,85	0,92	0,79	0,95		1,32	1,44
15	1,03	1,09	1,01	1,11			1,57
16	1,13	1,19	1,13				1,72
17	1,28	1,29	1,27				1,93
18	1,38	1,43	1,38				2,16
19	1,52	1,54	1,46				
20	1,60	1,66	1,56				
21	1,66	1,75	1,63				
22	1,72	1,86	1,72				
23	1,79						
24	1,90						
25	1,97						
26	2,04						

Směr fotometrického průřezu je přibližně kolmý ke směru ohonu. Postup čísel v jednotlivých sloupcích tabulky shora dolů odpovídá co do smyslu postupu hlavou komety ve stejném směru, jakým postupovala kometa mezi stálicemi (ve dnech měření měla vlastní pohyb rovněž přibližně kolmý ke směru ohonu). Hodnoty argumentu v milimetrech od jádra komety (0) vztahují se na mikrofotogramy, na desce jsou vzdálenosti $7\times$ menší. Jeden milimetr na desce odpovídá $1,04'$. Vzdálenost komety od Země byla ve dnech pozorování podle předběžných elementů $\Delta = 0,55$ až $0,58$.

K tabulce nutno připojit tato pozorovací data (čas UT, srpen):

Deska 308N, 3 expozice po 20 min. mezi 6,9875 až 7,0340. Střed střední expozice 7,01095.

Deska 309N, 3×20 min. mezi 8,8542 až 8,9021. Střed 8,87880.

Deska 312N, 3×20 min. od 9,8528 do 9,9000. Střed 9,87614.

Deska 313N, 3×5 min. od 9,9250 do 9,9382. Střed 9,93188.

Deska 317N, 3×2 min. od 12,8424 do 12,8507. Střed 12,84648.

Deska 318N, 3×5 min. od 12,8556 do 12,8701. Střed 12,86276.

Deska 320N, 3×15 min. od 12,9243 do 12,9604. Střed 12,94655.

Tabulka představuje první krok k fotometrickému studiu hlavy komety. Pro úplné poznání struktury bylo by třeba provést řezu též v jiných směrech. To zatím nebylo možné, protože Mollův mikrofotometr neměl zařízení, jež by připouštělo otáčeti měrné deskou v pozičním úhlu.

Vypočteme-li z tabulky vzdálenosti od jádra komety, ve kte-

rých dosahuje hlava jednotkové plošné jasnosti námi zvolené, obdržíme tato čísla:

Dne 8. VIII. 9,2 mm a 8,5 mm, 9. VIII. 8,8 mm a 8,2 mm, 12. VIII. 8,2 mm a 7,6 mm (na mikrofotogramu), jež znovu potvrzují zúžování hlavy v těchto dnech.

Bylo by uvážiti ještě vliv fotometrické korekce na optickou osu, která však je v tak malé vzdálenosti nepatrná, a efekt Eberhardův; i tento vliv při relativně malém spádu jasnosti nelze považovati za důležitý a kromě toho není zcela objasněn. Podotýkám, že desky byly vyvolány Rodinalem.

V literatuře nalezl jsem jediný fotometrický profil komety, a to měření fotobuňkou.⁵⁾ Autorovi vychází za velmi zjednodušujícího předpokladu z měření integrálních jasností třemi clonami, že spád jasnosti mezi vzdálenostmi 1,2' a 4,0' od jádra byl dne 8. srpna 1,8^m. Z naší tabulky obdržíme pro tytéž vzdálenosti a den 2,2^m.

Doufám, že měření tohoto druhu mohou přispěti, zejména v kombinaci s výsledky jiných pozorování, k objasnění některých otázek o pohybu částic a vůbec fysice hlavy komety.

*

Le profil photométrique de la tête de la comète Finsler au voisinage du périhélie.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur a mesuré photographiquement le profil photométrique de la tête de la comète Finsler (1937 f) au voisinage du périhélie dans une direction perpendiculaire à la queue. Les résultats sont contenus dans la table 1, dont l'argument correspond à la distance du noyau de la comète en 0,149'. Les datés des plaques sont reproduites sur la page 80. L'unité de la brillance: 9,00^m sur le cercle de 1,04' diamètre.

⁵⁾ E. J. Meyer: Astr. Nachr., 263 (1937), 377.

Změna výšky chromosféry.

Bohumila Nováková, Stará Ďala.

(Došlo 20. září 1937.)

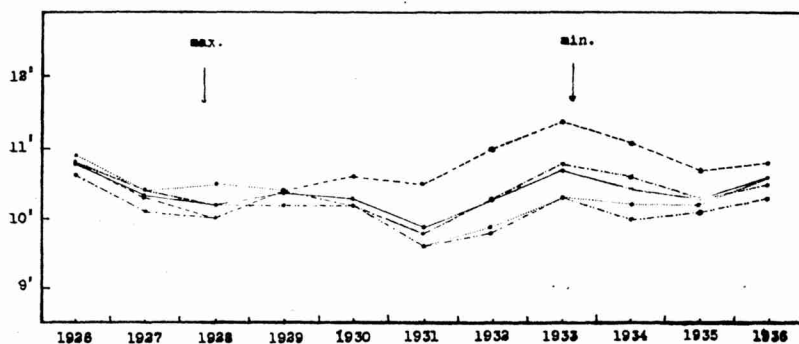
Věnováno panu profesorovi dr. Františkovi Nušlovi k jeho sedmdesátinám dne 3. prosince 1937.

Srovnání poměrů chromosférických výšek čar, pokud možno vzájemně nejbližších, ve flash spektrech z různých časových období, ukazuje, že nastaly relativní změny mezi vrstvami kolem 2000 km a nad 3500 km, což znamená existenci rozvrstvení chromosféry a změnu jednotlivých vrstev jako celků. Výsledky tyto odpovídají výsledkům Mitchellovým a ve srovnání s měřením radiálních rychlostí par nad skvrnami vedou k domněnce, že vrstvy kolem 2000 km nad fotosférou mají určitý význam ve sluneční atmosféře. Na základě pozorování chromosféry konaných mimo zatmění, ve světle čáry $H\alpha$, se dá předpokládati, že změny výšky chromosféry, pozorované v různých vrstvách, ve flash spektrech z různých období, jsou způsobeny změnami sluneční činnosti.

Chromosféra jest jednou z nejzajímavějších vrstev slunečních a to zejména po stránce rozřídění prvků. Znalost výšky, do které sahají vrstvy jednotlivých prvků, a rovněž znalost změny této výšky jsou důležité pro teoretické vyšetřování poměrů ve sluneční atmosféře. Jest zajímavé, že prvky nejsou uloženy v chromosféře v pořadí atomových vah, jak by se dalo očekávat, nýbrž jsou případy, kdy prvek těžší se rozkládá ve vrstvě vyšší, než některý jiný lehčí.

Spektroskopická pozorování okraje slunečního konaná každodenně ve světle čáry $H\alpha$ ukazují, že výška chromosféry se mění v různých obdobích. Změna výšky vodíkové vrstvy sluneční byla studována zejména italskými astrofysiky Secchim, Ricco a Abettim. V poslední době jest několik hvězdáren, kde se soustavně měří výška chromosféry a jsou to v první řadě: Arcetri, Catanie, Madrid a Praha (Štefánikova hvězdárna). Tato pozorování jsou prováděna systematicky ovšem pouze krátkou dobu a tak není možno z nich dělati definitivní závěry, ale můžeme na nich sledovati alespoň změnu chromosféry v tom období, ke kterému se vztahují.

Vodíková chromosféra, která má povrch charakteru zoubkovitého, a podobá se podle Perepelkina¹⁾ „flammende Prärie“, závisí co do výšky na heliografické šířce pozorovaného místa. Nejvyšší chromosféra bývá na pólech a nejnižší na rovníku. Rozdíl mezi póly a rovníkem závisí na období sluneční činnosti.²⁾ V tabulce I a v diagramu obr. 1 je viděti na hodnotách vzatých



Obr. 1. Výška chromosféry.

— střed. hodnoty, ----- $\varphi = 90^\circ$, - . - . - $\varphi = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, - - - - - $\varphi = 0^\circ$.

Tabulka I. Výška chromosféry pozorovaná ve světle čáry H_α .

Místo pozorování	rok	90°	60°	30°	0°	Střední hodnota
Arcetri	1926	10,8"	10,6"	10,9"	10,8"	10,78"
Arcetri	1927	10,3	10,1	10,4	10,4	10,33
Arcetri	1928	10,0	10,0	10,5	10,2	10,19
Arcetri	1929	10,4	10,4	10,4	10,2	10,38
Arcetri	1930	10,6	10,2	10,2	10,2	10,32
Arcetri	1931	10,5	9,8	9,6	9,6	9,90
Arcetri	1932	11,0	10,3	9,9	9,8	10,28
Arcetri	1933	11,4	10,8	10,3	10,3	10,71
Arcetri	1934*)	11,1	10,6	10,2	10,0	10,48
Arcetri	1935	10,7	10,3	10,2	10,1	10,31
Praha		10,9	10,4	10,3	9,5	10,25
Arcetri	1936	10,8	10,5	10,6	10,3	10,57
Praha		11,0	10,7	10,6	9,9	10,56

¹⁾ E. J. Perepelkin, ZS. f. Astrophys., 6 (1933), 245.

²⁾ G. Abetti, Pubbl. Arcetri, 44—54 (1927—1936); Rend. dei Lincei, (6) 19 (1934), 376; Handbuch der Astrophysik, Bd 4 (1929), 138.

*) V Praze byla konána tato pozorování již také v roce 1934, avšak počet měření byl tak malý, že nelze získané hodnoty srovnávat s hodnotami z Arcetri.

z pozorování v Arcetri,³⁾ jak se mění v určitých obdobích výška chromosféry na pólech, na rovníku a v heliografických šířkách 60° a 30°. Pro léta 1935 a 1936 jsou v tabulce I připojeny hodnoty získané z pozorování v Praze,⁴⁾ neboť velmi dobře odpovídají hodnotám z Arcetri, přesto, že podobná pozorování obvykle dávají, vlivem systematických chyb závisících na pozorovateli, na přístroji, na podmínkách atmosférických a pod., celkem výsledky velmi rozličné. Vidíme, že rozdíl mezi výškou na pólech a na rovníku jest největší pro období minima sluneční činnosti a nejmenší, ba skoro žádný, v období maxima sluneční činnosti.

Spektroskopická pozorování chromosféry, jež jsou konána pravidelně, bez zatmění, jsou doplňována pozorováními konanými v okamžicích úplného slunečního zatmění, kdy je možno viděti chromosféru ve velkém počtu čar, patřících různým prvkům, a do větších výšek. Zatím co při každodenním pozorování je možno sledovati vodíkovou čáru H_α v místech bez protuberancí do výše asi kolem 8.000 km, při zatmění ji vidíme až do 12.000 km. Viditelnost chromosféry v obou případech závisí kromě jiných vlivů na intenzitě pozorované čáry a následkem toho též určené hodnoty výšek závisí na intenzitě a na rozdělení intenzity čar v různých výškách nad fotosférou. Absolutní měření výšky v chromosféře jest věcí nemožnou, neboť je tu vliv citlivosti přístroje, fotografického materiálu a atmosférických podmínek, a tak jak hodnoty získané bez zatmění, tak i hodnoty změřené v bleskovém (flash) spektru jsou jen relativní, to znamená, že musíme předpokládati, že jest možno s jistotou určití pouze výšku jedné čáry vůči čarám druhým v témže spektrogramu.

Je jistě velmi zajímavé studovati, jak se mění, co do výšky vrstev, různé čáry vůči okolním čarám ve spektru. V tabulce II ve sloupci čtvrtém jsou psány hodnoty poměrů výšek různých čar (pokud možno vzájemně nejbližších) měřených v bleskovém spektru, fotografovaném metodou pohyblivé desky dne 19. června 1936 v Sara, při úplném slunečním zatmění⁵⁾, a jsou srovnány s hodnotami Mitchellovými⁶⁾ (sloupec pátý) z let 1905 a 1925 (metoda pevné desky) a Menzelovými⁷⁾ (sloupec šestý, sedmý a osmý) z let 1905 a 1908 (metoda pohyblivé desky) a z roku 1905 a od $\lambda = 4102 \text{ \AA}$ z let 1900 a 1908 (metoda pevné desky). Tabulka jest dvojitá a v části první IIa jsou udány poměry výšek čar patří-

³⁾ G. Abetti, *Pubbl. Arcetri*, 44—54 (1927—1936); *Mem. della Soc. Astr. It.*, 10 (1937), No 3, 255.

⁴⁾ B. Nováková, *Memoirs and Observations of the Czech Astronomical Society*, 1 (1935), No 1; 2, No 1 (v tisku).

⁵⁾ B. Nováková-J. Vlček, *Publ. Stará Ďala*, (připraveno k tisku).

⁶⁾ S. A. Mitchell, *Astrophys. Journ.*, 71 (1930), 11.

⁷⁾ D. H. Menzel, *Publications of the Lick Observatory*, 17 (1931), 18.

cích téměř multipletům, v části IIb jsou tyto poměry pro čáry různých prvků a různých multipletů. Jest možno říci, že téměř všechny poměry výšek čar patřících stejným i různým multipletům jsou v mezích možných systematických vlivů téměř stejné pro různá období i různé metody. Nápadné rozdíly jsou pouze

Tabulka IIa.

Prvky	λ Å	Výšky 1936 km	Nováková a Vlček 1936	Mitchell 1905 a 1925	Menzel		
					1905	1905 1900 a 1908	1908
Sr+	4077,83	5750	1,0	1,0	1,0	1,2	1,1
Sr+	4215,70	5750					
Fe	4045,84	1800	1,1	1,2	1,1	1,0	1,1
Fe	4063,62	1700					
Fe+	4508,32	850	0,6	0,6	0,8	0,5	0,9
Fe+	4583,86	1500					
Mg	5167,35	3000	0,8	0,8	0,8	—	—
Mg	5172,65	3850					
Mg	5172,65	3850	0,9	0,8	0,9	—	—
Mg	5183,58	4200					
Na	5895,99	2000	1,0	1,0	—	—	—
Na	5889,98	2000					

v několika případech a to zejména u Ca a Cr, $\lambda = 4226,74$ a $4254,36$ Å z vrstev 3550 a 1900 km; Ca a Fe, $\lambda = 4226,74$ a $4260,51$ Å z vrstev 3550 a 1400 km; Sc⁺ a Cr, $\lambda = 4246,90$ a $4254,36$ Å z vrstev 3800 a 1900 km; Sr⁺ a Cr, $\lambda = 4215,70$ a $4254,36$ Å z vrstev 5750 a 1900 km. Jedná se tu ve všech případech o poměry čar různých prvků a různých výšek. Tento efekt by mohl být způsoben částečně i vlivem různé citlivosti fotografického materiálu, aparátu i metody, pro různé intensity čar; avšak změna poměrů v různých obdobích jest příliš veliká a zdá se tudíž, že příčinou musí být reálné změny ve vrstvě některého ze srovnávaných prvků.

Největší rozdíly hodnot připadajících na různá období jsou právě mezi vrstvami kolem 1500—2000 km a vrstvami nad 3500 km. Nastaly tedy pravděpodobně změny buď v obou anebo v jedné z těchto vrstev. Udati příčinu těchto změn prozatím není možno, neboť srovnávaných hodnot pro různá období jest málo, a chybí jejich souvislost, ale jest možno souditi podle pravi-

Tabulka IIb.

Prvky	λ Å	Výšky 1936 km	Nováková a Vlček 1936	Mitchell 1905 a 1925	Menzel		
					1905	1905 1900 a 1908	1908
Ti+	4300,05	1650	0,8	0,8	0,9	0,8	0,8
Ti+	4443,85	2050					
Ti+	4563,76	1850	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9
Ti+	4572,00	1900					
La+	4123,30	850	1,7	1,2	0,9	1,0	0,8
La+	4333,72	500					
La+	4086,66	1050	1,2	0,7	1,1	1,0	1,0
La+	4123,30	850					
Fe+	4508,32	850	1,1	1,1	1,1	0,9	1,4
Fe+	4515,32	750					
Mg	5167,35	3000	0,8	0,8	0,8	—	—
Fe+	5018,44	3600					
Mg	5172,65	3850	1,1	1,0	0,9	—	—
Fe+	5018,44	3600					
Mg	5183,58	4200	1,2	1,3	1,0	—	—
Fe+	5018,44	3600					
Ca	4226,74	3550	0,6	0,8	0,9	0,6	0,8
Sr+	4215,70	5750					
Ca	4226,74	3550	1,9	3,3	0,9	1,2	1,2
Cr	4254,36	1900					
Ca	4226,74	3550	2,5	5,0	1,2	1,3	1,5
Fe	4260,51	1400					
Cr	4254,36	1900	2,9	2,5	2,0	3,7	2,2
Cr	4646,16	650					
Sc+	4246,90	3800	2,0	3,3	1,0	1,3	1,2
Cr	4254,36	1900					
Sr+	4215,70	5750	3,0	4,0	1,0	2,1	1,4
Cr	4254,36	1900					
Sr+	4215,70	5750	3,0	2,7	1,2	2,2	1,7
Fe+	4233,22	1900					
Ba+	4934,08	1800	4,0	2,4	—	—	—
Y+	5087,45	450					

delných pozorování vodíkové chromosféry na vliv sluneční činnosti. Okolnost rozdílu vrstev středních a vrstev vyšších odpovídá dobře výsledkům Mitchellovým,⁸⁾ který shledal z měření výšek v bleskových spektrech, že střední vrstvy chromosféry mezi 1000 a 2500 km byly značně nižší v roce 1905 než v roce 1925, a připisoval tento fakt vlivu sluneční činnosti, která soudě podle výskytu skvrn, byla v roce 1905 blízko maxima a v roce 1925 byla 1,5 roku po minimu. Čáry patřící vyšším vrstvám dávaly však v obou letech hodnoty navzájem shodné.

Jest zajímavé, že výsledek práce St. Johna, měření efektu Evershedova, t. j. pohybů par nad skvrnami, přivádí právě rovněž k vrstvě kolem 2000 km,⁹⁾ která jest charakterisována nulovými pohyby par a která jest tudíž rozhraním mezi vrstvami vyššími, z nichž se děje pohyb par směrem do skvrn, a vrstvami spodními, kde páry proudí směrem ze skvrn. Zdá se vůbec, že tato vrstva má svůj jistý význam ve sluneční chromosféře a že její výška jest výsledkem stavů tam panujících.

Jak z našeho srovnání poměrů výšek v chromosféře, tak i z výsledků Mitchellových vyplývá, že mění-li se výška nižší chromosféry, mění se jako celek, anebo alespoň po vrstvách. Podobná změna chromosféry neodporuje rovněž současným teoretickým představám o chromosféře.

Nebylo možno určit v této práci závislost změny poměrů výšek čar na sluneční činnosti, neboť bylo k dispozici málo hodnot a dále srovnávané výšky Mitchellovy jsou udány najednou pro léta 1905 a 1925, rovněž tak Menzelovy hodnoty získané z měření spektrogramů zhotovených metodou pevné desky se vztahují na tři léta 1900, 1905 a 1908, ale jednalo se nám o ukázání, že existuje změna poměru výšek jednotlivých vrstev a tudíž v důsledku toho i změna výšek těchto vrstev. Abychom našli příčinu těchto změn, jejich vztah ke sluneční činnosti a k heliografické šířce, bude třeba, abychom měli k dispozici určitou řadu měření konaných v různých obdobích. Z toho důvodu by bylo nutno, aby studium jednotlivých vrstev sluneční atmosféry, i pokud se týče úplného slunečního zatmění, bylo konáno soustavně za používání téže metody, téhož fotografického materiálu a téhož přístroje. Tím by se odstranil vliv hlavních systematických chyb a měření konaná v různých obdobích by se mohla vzájemně lépe srovnávat.

Práce tato byla udělána na podkladě výsledků získaných československou výpravou za slunečním zatměním do SSSR, kterýžto podnik se dál pod záštitou pana profesora Nušla, předsedy České astronomické společnosti.

*

⁸⁾ S. A. Mitchell, *Astrophys. Journ.*, 71 (1931), 54.

⁹⁾ G. Abetti, *Handbuch der Astrophysik*, Band IV., str. 174.

Changement des hauteurs des différentes couches dans la chromosphère solaire.

(Extrait de l'article précédent.)

En confrontant les rapports des hauteurs chromosphériques des raies voisines dans le spectre-éclair des différentes époques: 1936 (Nováková-Vlček, plaque mobile), 1905 et 1925 (Mitchell, plaque fixe), 1905 et 1908 (Menzel, plaque mobile), 1905, 1900 et 1908 (Menzel, plaque fixe), on a reconnu, que ces rapports aussi bien pour les raies appartenant aux mêmes multiplets que pour les raies des différents éléments et des différents multiplets ne diffèrent pas de beaucoup à part quelques cas peu nombreux. Il est très intéressant de constater que les rapports des hauteurs des deux raies changeaient d'une époque à l'autre dans le cas, où ces deux raies appartenaient à des niveaux différents et spécialement quand une raie était d'un niveau autour ou moins de 2000 km et l'autre de plus de 3500 km au-dessus de la photosphère. D'après ces résultats on doit croire, que les changements qui s'exercent dans les niveaux de 3500 km, ou dans les niveaux plus hauts, ne correspondent pas complètement aux changements des niveaux plus bas, c'est à dire au-dessous de 2000 km. Cette opinion est aussi en accord avec les résultats de Mitchell qui a reconnu que les raies appartenant aux couches médiales autour de 1000—3000 km donnaient de plus petites hauteurs en 1905 qu'en 1925, tandis que les couches plus hautes restaient égales à ces deux époques. Les mesures de St. John des mouvements radiaux au-dessus des taches solaires montrent aussi une différence entre les couches basses et les couches plus élevées et elles portent au niveau de l'inversion, qui s'étend à une hauteur autour de 2000 km au-dessus de la photosphère. Nous voyons que les résultats de ces trois travaux nous donnent une idée concordante, sur les conditions dans la chromosphère solaire et elles montrent la séparation des couches plus basses et des couches plus hautes et par conséquent on doit supposer aussi que le niveau autour de 2000 km au-dessus de la photosphère peut avoir une signification spéciale dans la chromosphère solaire. Les astronomes italiens Secchi, Ricco et Abetti ont reconnu que les changements de la chromosphère observés dans la raie H_{α} , dépendent de la latitude héliographique et de l'activité solaire et en confrontant ces résultats avec les résultats des nos mesures, nous devons supposer que l'activité solaire peut causer les changements des hauteurs des différents éléments observés dans le spectre-éclair des différentes époques et d'autre part nous devons supposer l'influence de la position héliographique du lieu observé.

ŘÁDNÁ VALNÁ SCHŮZE

Jednoty československých matematiků a fysiků v Praze

bude se konati v pátek dne 3. prosince 1937 o 17. hodině ve fysikálním ústavu Karlovy university v Praze II, U Karlova č. 5, s obvyklým pořadem.

Výroční zpráva je otištěna ve Spolkovém věstníku.

Hvězdářská ročenka na rok 1938.

Péčí státní hvězdárny RČS sestavil dr. Bohuslav Mašek.

Za Kč 18'50

8°, 84 str., 15 obr.

Exped. výlohy Kč 1'—

Hvězdářská ročenka je nutnou pomůckou pro milovníky astronomie při jejich pozorováních, ale vykoná cenné služby i při výkladech astronomických na školách. Mimo obvyklé efemeridy podává soustavný přehled o všech nejdůležitějších událostech, které lze na obloze očekávat. Souborné články informují čtenáře o zajímavých aktualitách astronomických a pokrocích astronomie v r. 1936.

Obsah Ročenky byl přizpůsoben přáním amatérů i profesorů středškolských, takže lze doufat, že bude všem vyhovovati.

TECHNICKÁ FYSIKA

Napsal

Ph. Dr. FRANTIŠEK NACHTIKAL,
profesor českého vysokého učení technického v Praze.

Druhé, rozšířené vydání.

8° 776 str., 603 obr.

1937

V plátně váz. Kč 144,—

SLAVNOSTNÍ SCHŮZE

dne 7. prosince 1937 se koná

ve velké posluchárně Fysikálního ústavu

PRAHA II, U Karlova č. 5.

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Číslo XX

PhDr. VÁCLAV HLAVATÝ,
profesor Karlovy university

**Diferenciální geometrie křivek
a ploch a tensorový počet.**

8° 445 str. 31 obr.

1937

V plátně váz. Kč 154,—

Pro tuto knihu jako učebnici jest originelní a charakteristické, že autor nepočíná tensorovým počtem, ani jej neklade na konec, nýbrž slučuje jej s diferenciálněgeometrickou látkou tak, že čtenář domnívající se, že studuje „názornou“ geometrii v dvoj- nebo trojrozměrném euklidovském prostoru, najednou zpozoruje, že si mimochodem osvojil i tensorový počet a naopak.

Odborníka upoutá zase podmaňující systematika knihy. Zejména jest upozorniti na pronikavé užití kovariantní derivace, zvláště k odvození míry křivosti, na pojednání o obecném problému rozvinutí ploch, na deduktivní krásy oddílu o druhé základní formě ploch a na teorii přímkových ploch v oddílu o speciálních plochách.

Lze dostati u každého knihkupce nebo přímo u nakladatele

Jednota československých matematiků a fysiků,

Praha II, Žitná 25.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8¹/₂—12¹/₂, a od 14—18 hod. kromě soboty odpol., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihkárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohlédací úřad Praha 25.