ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Faisceaux de Darboux et questions connexes dans l'espace affine courbe.

V. Hlavatý, Praha.

(Conférences tenues à l'Université de Bucarest.)

(Reçu le 7 décembre 1936.)

Introduction.

Étant donnée une surface dans l'espace plan à trois dimensions, on peut construire en chaque point régulier de la surface le faisceau de quadriques de Darboux. Parmi ces quadriques, il y en a une (d'ordre 4) privilégiée, à savoir celle de Lie, généralisée par M. Čech pour le cas à plusieurs dimensions. Dans le cas général d'une hypersurface (non)holonome, plongée dans un espace à n dimensions à connexion linéaire générale (symétrique ou non), le problème analogue n'a pas été jusqu'alors étudié. (Dans le travail cité à la page 233 les auteurs ont étudié un cas particulier d'une hypersurface holonome, plongée dans l'espace projectif à la connexion symétrique.) La première partie de ce Mémoire est consacré à l'étude de ce cas général. Nous trouverons deux faisceaux de tenseurs[1]) quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) dont chacun présente une certaine analogie au faisceau de quadriques de Darboux. Dans chacun de ces faisceaux on peut privilégier un tenseur quadratique moyennant des conditions géométriques d'ordre 4 (3 dans le cas non holonome). Nous appellerons ce tenseur „tenseur de M. Čech".

Dans la seconde partie de ce Mémoire nous étudions en détail le problème de la normale affine de l'hypersurface (non) holonome en jeu.[2]) En particulier nous construirons un faisceau linéaire de normales affines d'ordre 3 (2) dont l'une est intimement liée au second des faisceaux de tenseurs, mentionnés plut haut. Chaque

[1]) Nous appellerons „tenseur" chaque grandeur symétrique ou non symétrique.

[2]) Cfr. le travail de l'auteur cité à la page 243 et de plus la Note dans Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, *38*, 738—743 (1935).

normale d'ordre 3 (2) induit dans l'hypersurface une connexion d'ordre 3 (2), dont quelques unes constituent un système, dont des éléments sont définis moyennant un nombre réel z. La valeur $z = 0$ nous mène aux équations bien connues de Mainardi-Codazzi.

On sait bien que si l'espace ambiant est un espace métrique (conforme), on peut construire une direction orthogonale à l'hypersurface en jeu, quelle qu'elle soit la connexion métrique de l'espace ambiant, pourvu qu'elle soit déduite d'une métrique quadratique qui conserve l'orthogonalité à l'hyperplan tangent de l'hypersurface. Dans le cas général affine que nous étudions dans ce Mémoire, une telle construction, indépendante de la connexion de l'espace ambiant, est impossible. En effet, nous démontrons à la fin de ce travail que l'on peut transformer — moyennant une transformation affine d'ordre 3 (2) de la connexion correspondante — n'importe quelle normale d'ordre 3 (2) en n'importe quelle autre normale d'ordre 3 (2) donnée d'avance. Autrement dit, toutes les normales d'ordre 3 (2) sont équivalentes du point de vue affine.

Le Mémoire présent nous servira comme base à l'étude — déjà rédigée, mais pas encore publiée — du cas plus général d'une hypersurface (non)holonome, plongée dans l'espace projectif à n dimensions, à connexion projective générale (symétrique ou non symétrique).[3])

(1) Notions fondamentales.

Désignons par x^{ν} [4]) des coordonnées curvilignes d'un espace L_n à n dimensions, doué d'une connexion aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$. Imaginons donnée, dans L_n, une hypersurface X_{n-1} moyennant les équations paramétriques

$$x^{\nu} = x^{\nu}(y^{n+1}, \ldots, y^{2n-1}). \tag{1, 1}$$

Ici et dans la suite nous n'envisagerons que des points de X_{n-1}, où la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^{n+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^{n+1}} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^{2n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^{2n-1}} \end{matrix} \right\| \tag{1, 2}$$

[3]) Cfr. Bortolotti-Hlavatý: „Contributi alla teoria delle connessioni I.“ (Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 4, Tomo *15*, 1—71, 1936—37.)

[4]) Des indices grecs parcourent les symboles 1, 2, . . ., n. Des indices latins (à l'exception de x, y, z) parcourent les symboles $n + 1, \ldots, 2n - 1$.

est du rang $n - 1$. Il s'ensuit que les $n - 1$ vecteurs contrevariants de L_n

$$\underset{a}{U^\nu}(y) = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a} \tag{1, 3a}$$

sont linéairement indépendants. D'autre part, il est bien connu que si l'on envisage non seulement des transformations des coordonnées x^ν, mais en même temps aussi des transformations des coordonnées y^a, les $\frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}$ constituent, par rapport à ces deux familles de transformations, un tenseur mixte, dit tenseur-unité de X_{n-1}. C'est par cette raison que nous écrirons aussi, à côté de (1, 3a),

$$U_a{}^\nu(y) = \frac{\partial y^\nu}{\partial y^a}. \tag{1, 3b}$$

Il est bien connu qu'une hypersurface non holonome X^n_{n-1} peut être définie moyennant $n - 1$ champs vectoriels contrevariants, linéairement indépendants que nous voulons désigner par $\underset{a}{U^\nu}(x)$. Pour ne pas restreindre la généralité du problème, nous sommes forcés d'admettre, à côté des vecteurs $\underset{a}{U^\nu}(x)$, des vecteurs

$$\underset{a'}{U^\nu}(x) = A_{a'}{}^b(x)\, \underset{b}{U^\nu}(x) \tag{1, 4}$$

comme équivalents. Ici $A_{a'}{}^b(x)$ est n'importe quel système de fonctions scalaires des x^ν, au déterminant $\neq 0$. Ces équations mêmes nous font voir que l'ensemble des fonctions $U(x)$ constitue un tenseur mixte, dit tenseur-unité de l'hypersurface non holonome en jeu. Nous le désignerons par $U_a{}^\nu(x)$.

Afin que nous puissions traiter le problème concernant l'hypersurface holonome en même temps que celui de l'hypersurface non holonome, nous ferons des conventions suivantes:

a) $X^{(n)}_{n-1}$ désignera ou bien X_{n-1}, ou bien X^n_{n-1}.

b) $\underset{a}{U^\nu} = \left\{\begin{matrix} \underset{a}{U^\nu}(x) \\ \underset{a}{U^\nu}(y) \end{matrix}\right\}$ pour une $\begin{matrix} X^n_{n-1} \\ X_{n-1} \end{matrix}$,

$U_a{}^\nu = \left\{\begin{matrix} U_a{}^\nu(x) \\ U_a{}^\nu(y) \end{matrix}\right\}$ pour une $\begin{matrix} X^n_{n-1} \\ X_{n-1} \end{matrix}$,

c) $A_b{}^{a'} = \frac{\partial y^{a'}}{\partial y^b}$, $A_{b'}{}^a = \frac{\partial y^a}{\partial y^{b'}}$ pour une X_{n-1},

tandis que les mêmes symboles désignerons n'importe quel système des fonctions scalaires des x^ν pour une X^n_{n-1}. Mais en tout cas nous supposerons

$$\Delta_i = \text{Dét} \mid A_b{}^{a'} \mid \neq 0. \text{ [6]}$$

$$\Delta_e = \text{Dét} \left| \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \right| \neq 0,$$

Par les mots „changement du repère" de $X_{n-1}^{(n)}$ nous entendrons une transformation des coordonnées y^a pour une X_{n-1}, ou bien une transformation (1, 4) pour une X_{n-1}^n.

d) $$\partial_a = \begin{cases} U_a{}^\lambda \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} \\ \dfrac{\partial}{\partial y^a} \end{cases} \text{pour une} \begin{matrix} X_{n-1}^n \\ \\ X_{n-1} \end{matrix}.$$

Si ∇_μ est le symbole de la dérivée covariante par rapport à la connexion de l'espace ambiant L_n, nous écrirons ∇_a pour $U_a{}^\lambda \nabla_\lambda$

$$\nabla_a \equiv U_a{}^\lambda \nabla_\lambda.$$

Remarque. Partout, où nous voudrons accentuer que les U sont à envisager comme vecteurs de L_n (ce qui sera parfois nécessaire dans l'analyse) nous écrirons $\underset{a}{U^\lambda}$ en réservant les symboles $U_a{}^\lambda$ au cas où les U sont à regarder comme constituant le tenseur unité.

(2) Grandeurs fondamentales.

Si le vecteur e_λ désigne n'importe quelle solution du système

$$U_a{}^\lambda e_\lambda = 0, \tag{2, 1}$$

la solution la plus générale de ce système est manifestement

$$'e_\lambda = f e_\lambda, \tag{2, 2}$$

f étant n'importe quelle fonction de position. Cette équation sera dite dans la suite „le changement du facteur". Si une expression Φ change à cause de (2, 2) en

$$'\Phi = f^z \Phi, \tag{2, 3}$$

nous dirons quelle est du dégré $d = z$. Ainsi par exemple le tenseur

$$P_{ab} = U_b{}^\lambda \partial_a e_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda e_\nu \equiv U_b{}^\lambda \nabla_a e_\lambda \tag{2, 4a}$$

est du dégré $d = 1$

$$'P_{ab} = f P_{ab}. \tag{2, 4b}$$

Si en particulier $d = 0$, nous dirons que l'expression en jeu est **intrinsèque**. En voici un exemple, dont nous aurons besoin plus tard: Soit T_λ le déterminant, multiplié par $(-1)^{\lambda+1}$, que l'on obtient de la matrice (1, 2)[5]) en y supprimant la colonne

$$\begin{matrix} U^{\lambda}_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U^{\lambda}_{2n-1} \end{matrix}$$

Cela étant, désignons par $'T_\lambda$ ce que devient T_λ dans un système nouveau de coordonnées $x^{\nu'}$, si l'on change en même temps et le repère et le facteur:

$$'T_{\lambda'} = \Delta_e \Delta_i^{-1} T_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}}, \qquad \left(\Delta_e = \text{Dét.} \left\| \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \right\| \right). \tag{2, 5}$$

T_λ est donc intrinsèque. Son poids extérieur (c'est-à-dire l'exposant de Δ_e) est $p_e = 1$.[6]) Son poids intérieur (c'est-à-dire l'exposant de Δ_i) est $p_i = -1$. Les nombres d, p_e, p_i constituent ce que nous appellerons ,,la caractéristique" de la grandeur en jeu, et désignerons par (d, p_e, p_i). Donc, T_λ est à la caractéristique $(0, 1, -1)$. Un autre exemple d'une grandeur intrinsèque est livré par le tenseur

$$H_{ab} = U_b{}^\lambda \partial_a T_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda T_\nu \tag{2, 6}$$

à la caractéristique $(0, 1, -1)$. Ici et partout dans la suite nous supposerons que le rang de H_{ab} soit $n - 1$. Il s'ensuit que P_{ab} est de même rang et de plus que l'on peut construire les grandeurs inverses P^{ab}, H^{ab} suivant la loi

$$\begin{aligned} P^{ab} P_{ac} &= P^{ba} P_{ca} = \delta_c^b, \\ H^{ab} H_{ac} &= H^{ba} H_{ca} = \delta_c^b, \end{aligned} \tag{2, 7}$$

où $\delta_c{}^b$ est le symbole bien connu de Kronecker. La caractéristique de P^{ab} est $(-1, 0, 0)$, tandis que H^{ab} est à la caractéristique $(0, -1, 1)$. Le déterminant H de H_{ab} est à la caractéristique $[0, n-1, -(n+1)]$ et par conséquent

$$t_\lambda = T_\lambda H^{-\frac{1}{n+1}} \text{ est à la caractéristique } \left(0, \frac{2}{n+1}, 0\right),$$

---

[5]) Si l'on a affaire à une X^n_{n-1}, on a à remplacer les $\dfrac{\partial x^\nu}{\partial y^a}$ dans (1, 2) par $U_a{}^\nu$. La grandeur T_λ est analogue à celle, (désignée aussi par T_λ) employée par MM. Schouten et Haantjes dans leur Mémoire ,,Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie". [Compositio Mathematica, **3**. 1—51 (1936).]

[6]) Pour éviter tout malentendu, nous remarquons expressément que les indices e et i dans p_e, Δ_e et p_i, Δ_i ne sont pas des indices de covariance et ne signifient que l'abréviation pour ,,extérieur" resp. ,,intérieur".

$$h_{ab} = H_{ab}H^{-\frac{1}{n+1}} \text{ est à la caractéristique } \left(0, \frac{2}{n+1}, 0\right),$$

$$h^{ab} = H^{ab}H^{\frac{1}{n+1}} \qquad \text{,,} \qquad \left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right), \tag{2, 8}$$

$$h = \text{Dét}\, h_{ab} = H^{\frac{2}{n+1}} \qquad \text{,,} \qquad \left(0, \frac{2(n-1)}{n+1}, -2\right).$$

Remarquons en passant que grâce à l'équation

$$U_a{}^\lambda T_\lambda = 0 \tag{2, 9}$$

qui est la conséquence de la définition de T_λ on a non seulement

$$U_a{}^\lambda t_\lambda = 0, \tag{2, 10}$$

mais en même temps aussi

$$h_{ab} = U_b{}^\lambda \nabla_a T_\lambda H^{-\frac{1}{n+1}} =$$
$$= H^{-\frac{1}{n+1}} (U_b{}^\lambda \partial_a T_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda T_\nu) = U_b{}^\lambda \nabla_a t_\lambda, \tag{2, 11}$$

	ordre (cas hol.)	ordre (cas non hol.)	d	p_e	p_i
$U_a{}^\nu$	1	0	0	0	0
e_λ	1	0	1	0	0
P_{ab}	2	1	1	0	0
P^{ab}	2	1	-1	0	0
T_λ	1	0	0	1	-1
H_{ab}	2	1	0	1	-1
H^{ab}	2	1	0	-1	1
t_λ	2	1	0	$\frac{2}{n+1}$	0
h_{ab}	2	1	0	$\frac{2}{n+1}$	0
h^{ab}	2	1	0	$-\frac{2}{n+1}$	0
h	2	1	0	$\frac{2(n-1)}{n+1}$	-2
t	2	1	-1	$\frac{2}{n+1}$	0

et que si l'on tient compte de (2, 7) et (2, 8) on en déduit

$$h^{ab}h_{ac} = h^{ba}h_{ca} = \delta_c^{\ b}. \tag{2, 12}$$

La dernière notion, dont nous aurons besoin plus tard et que par conséquent nous introduirons en ce lieu et celle de l'ordre: Si la construction d'une expression exige effectivement l'emploi du symbole $\partial_{a_1} \ldots \partial_{a_p}$ $\left(\text{ou bien } \dfrac{\partial^p}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_p}}\right)$, mais si les symboles $\partial_{a_1} \ldots \partial_{a_q}$ $\left(\text{ou bien } \dfrac{\partial^q}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_q}}\right)$ pour $q > p$ n'y interviennent pas, nous dirons que cette expression est d'ordre p.

Dans la figure (p. 234), le lecteur trouvera non seulement l'ordre des grandeurs jusqu'alors déduites, mais en même temps aussi les nombres qui constituent leurs caractéristiques. (La fonction t, qui figure dans la dernière ligne, est définie par l'équation (9, 1a).)

(3) Cas non holonome.

Dans ce §, nous ne traiterons que le cas d'une hypersurface non holonome, en cherchant un faisceau de tenseurs quadratiques du rang n que l'on peut adjoindre au point examiné de l'hypersurface, de manière que sa projection dans t_λ nous conduise aux directions asymptotiques. Le rang de h étant $n - 1$, on déduit facilement de (2, 11) que le rang du tenseur $\nabla_\mu t_\lambda$ est ou bien n, ou bien $n - 1$. Dans le premier cas, le tenseur du rang n et d'ordre 2

$$a_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda \tag{3, 1}$$

est à la caractéristique $\left(0, \dfrac{2}{n+1}, 0\right)$ et sa projection dans t_λ, à savoir

$$a_{\mu\lambda} U_a^{\ \mu} U_b^{\ \lambda} = h_{ab}$$

nous mène aux directions asymptotiques. Or si w est n'importe quelle fonction à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, le faisceau de tenseurs

$$^*a_{\mu\lambda} = a_{\mu\lambda} + w\, t_\mu t_\lambda \tag{3, 2}$$

jouit des mêmes propriétés que le tenseur $a_{\mu\lambda}$ lui-même, pourvu que w ne soit une des racines de l'équation

$$\text{Dét.}\ |\, a_{\mu\lambda} + w\, t_\mu t_\lambda \,| = 0.$$

Examinons maintenant le second cas, où le rang du tenseur (3, 1) est $n - 1$. Le cas échéant il n'y a qu'une seule solution n^ν du système

$$n^\lambda \nabla_\mu t_\lambda = 0, \; n^\lambda t_\lambda = 1 \tag{3, 3a}$$

et cette solution est d'ordre 2, ayant la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1} 0\right)$.
Nous nous en servirons pour démontrer que le rang du tenseur (3, 2) est n pour $w \neq 0$. Introduisons à cet effet les grandeurs

$$\underset{x}{e}^\nu = \begin{cases} \underset{x}{U}^\nu & \text{pour } x = a \\ n^\nu & \text{pour } x = 2n \end{cases}$$
$$(x = n+1, \ldots, 2n)$$

et les expressions

$$A_{xy} = \underset{x}{e}^\mu \underset{y}{e}^\lambda {}^*a_{\mu\lambda}, \quad (x, y = n+1, \ldots, 2n).$$

On a en particulier

$$A_{ab} = h_{ab}, \; A_{x\,2n} = \delta_x^{2n} w$$

et par conséquent le déterminant de A_{xy} peut être écrit

$$\text{Dét} \mid A_{xy} \mid = \left| \begin{array}{c|c} h_{ab} & 0 \\ \hline A_{2n\,c} & w \end{array} \right| = wh.$$

Parce que le rang des déterminants de ${}^*a_{\mu\lambda}$ et de A_{xy} est manifestement le même, la dernière équation prouve notre assertion.

Pour privilégier un des tenseurs (3, 2), introduisons avant tout le tenseur de courbure $R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu$ et celui de torsion $S_{\omega\mu}{}^\nu$ de l'espace ambiant L_n

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\omega}{}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}{}^\nu \Gamma_{\lambda\omega}{}^\alpha - \Gamma_{\alpha\omega}{}^\nu \Gamma_{\lambda\mu}{}^\alpha$$
$$S_{\omega\mu}{}^\nu = \Gamma_{[\omega\mu]}{}^\nu = \frac{1}{2} (\Gamma_{\omega\mu}{}^\nu - \Gamma_{\mu\omega}{}^\nu)$$

et de plus, le tenseur dans L_n

$$h^{\lambda\nu} = h^{ab} U_a{}^\lambda \, U_b{}^\nu. \tag{3, 3b}$$

Cela étant, remarquons que l'identité bien connue de Padova-Bianchi nous donne

$$2h^{\omega\lambda} \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} t_\lambda = h^{\omega\lambda} (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda), \tag{3, 4a}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} h^{\omega\lambda} \nabla_\omega \nabla_\mu t_\lambda &= h^{\omega\lambda} \nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + 2h^{\omega\lambda} \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} t_\lambda = \\ &= h^{\omega\lambda} (\nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda). \end{aligned} \tag{3, 4b}$$

D'autre part, en tenant compte de (2, 11) et (3, 3b), on trouve

$$h^{\omega\lambda} \nabla_\omega t_\lambda = h^{ab} h_{ab} = n - 1. \tag{3, 4c}$$

Or, les équations (3, 4) et l'équation du faisceau en jeu

$${}^*a_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda + w t_\mu t_\lambda \tag{3, 5}$$

nous autorisent à écrire

$$h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = h^{\omega\lambda}(\nabla_\omega\nabla_\mu t_\lambda + w t_\mu \nabla_\omega t_\lambda) = \\ = h^{\omega\lambda}\nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + (n-1)\, w t_\mu + \\ + h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda). \tag{3, 6}$$

Cette équation peut être simplifiée à cause de (3, 4c), d'où l'on déduit

$$h^{\omega\lambda}\nabla_\mu\nabla_\omega t_\lambda = -(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda.$$

Nous pouvons donc écrire, grâce à (3, 6)

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = -n^\mu(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda + (n-1)\,w + \\ + n^\mu h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha t_\lambda). \tag{3, 7}$$

Parmi des tenseurs du faisceau (3, 5) il y en a un privilégié, pour lequel le vecteur $h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda}$ dans l'espace affine plan ($R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = 0$) et sans torsion ($S_{\omega\mu}{}^\nu = 0$) soit incident avec n^ν. C'est le tenseur défini moyennant (3, 5), où

$$w = \frac{1}{n-1}\, n^\mu(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda. \tag{3, 8}$$

En effet, si l'on substitue cette valeur dans (3, 7), on obtient

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = n^\mu h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha t_\lambda), \tag{3, 9a}$$

d'où il suit pour l'espace plan et sans torsion

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = 0. \tag{3, 9b}$$

Le tenseur $h^{\omega\lambda}$ étant d'ordre 1 pour une X^n_{n-1}, la fonction w, définie par (3, 8), et par conséquent aussi le tenseur privilégié sont d'ordre deux:

A chaque point d'une X^n_{n-1}, où le rang du tenseur $\nabla_\mu t_\lambda$ est $n-1$, on peut adjoindre un faisceau de tenseurs quadratiques (3, 5) d'ordre deux, du rang n (pour $w \neq 0$). Parmi ces tenseurs, il n'y en a qu'un d'ordre deux, pour lequel résulte valable l'équation (3, 9a). C'est le tenseur qui correspond à la valeur (3, 8).

En suivant l'analogie du cas classique (d'une surface holonome dans l'espace plan à trois dimensions) on pourrait appeler „faisceau de Darboux" le faisceau (3, 5) et le tenseur privilégié „tenseur de M. Čech". Mais remarquons expressément que dans le cas classique le faisceau de quadriques de Darboux est constitué par des quadriques d'ordre trois et la quadrique de Lie (généralisée pour $n > 3$ par M. Čech) est d'ordre quatre. C'est par cette raison que nous n'adopterons pas ces dénominations dans ce cas, en les réservant pour d'autres faisceaux, étudiés dans des §§ suivants. (L'abaissement de l'ordre dans notre cas est dû au fait qu'une hypersurface non holonome nous permet de construire l'hyperplan tangent, dans n'importe quel point de l'espace ambiant, tandis que des hyperplans tangents d'une hypersurface holonome n'existent que le long de l'hypersurface en jen.)

(4) Cas général. Premier faisceau de Darboux.

Dans ce § nous reprenons le cas général d'une $X_{n-1}^{(n)}$ dans L_n, en cherchant un faisceau de tenseurs symétriques, quadratiques, du rang n, adjoint au point de l'hypersurface en jeu de manière que sa projection dans t_λ nous conduise aux directions asymptotiques. Cherchons à cet effet la solution $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$ du système

$$a_{\mu\lambda} U_a{}^\mu U_b{}^\lambda = h_{(ab)} = \frac{1}{2}(h_{ab} + h_{ba}). \tag{4, 1}$$

En désignant par ${}^0a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\lambda\mu}$ n'importe quelle solution de (4, 1), la solution la plus générale peut être écrite

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + p_\mu t_\lambda + p_\lambda t_\mu + w t_\mu t_\lambda, \tag{4,2}$$

p_μ étant n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0) et w n'importe quelle fonction de position à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Pour fixer le vecteur p_μ d'une manière convenable, nous introduirons les tenseurs

$$a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega a_{\mu\lambda}, \quad {}^0a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda}, \tag{4, 3}$$

liés par l'équation, déduite de (4, 2) et (2, 11)

$$a_{abc} = {}^0a_{abc} + h_{ac} p_b + h_{ab} p_c \tag{4, 4}$$
$$(p_b = U_b{}^\lambda p_\lambda),$$

d'où il suit

$$h^{ab} a_{abc} = {}^0a_{abc} h^{ab} + n p_c. \tag{4, 5}$$

La condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$h^{ab} a_{abc} = 0 \tag{4, 6}$$

est donc

$$p_c = -\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc} h^{ab}. \tag{4, 7a}$$

Désignons maintenant par ${}^0p_\mu$ n'importe quelle solution du système

$$-\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc} h^{ab} = U_c{}^\mu p_\mu \tag{4, 7b}$$

et par (*) n'importe quelle fonction de position à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Or, la solution la plus générale de (4, 7b) est manifestement

$$p_\mu = {}^0p_\mu + (*)\, t_\mu. \tag{4, 7c}$$

Si nous convenons d'écrire (*) pour chaque fonction de position à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$ nous obtenons de (4, 7c) et (4, 2)

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + (*)\, t_\mu t_\lambda. \tag{4, 8}$$

En partant de la solution ${}^0a_{\mu\lambda}$ de (4, 1), nous sommes parvenus au tenseur (4, 8). Examinons maintenant l'influence exercée au résultat (4, 8) par le choix particulier de la solution ${}^0a_{\mu\lambda}$. Partons à cet effet d'une autre solution particulière ${}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\lambda\mu}{}^*$ de (4, 1). Les tenseurs ${}^0a_{\mu\lambda}$ et ${}^0a_{\mu\lambda}{}^*$ sont liés par l'équation

$${}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + X_\lambda t_\mu + (*)\, t_\mu t_\lambda, \tag{4, 9}$$

X_μ étant un vecteur à la caractéristique (0, 0, 0). Il s'ensuit en premier lieu

$${}^0a_{abc}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{abc} + h_{ac}X_b + h_{ab}X_c$$
$$(X_c = U_c{}^\mu X_\mu),$$

et par conséquent

$$p_c{}^* = -\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc}{}^* h^{ab} = p_c - X_c. \tag{4, 10}$$

Si l'on désigne par ${}^0p_\mu{}^*$ n'importe quelle solution du système

$$-\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc}{}^*\, h^{ab} = U_c{}^\mu p_\mu{}^* \tag{4, 11}$$

la solution la plus générale peut être écrite, grâce à (4, 10),

$$p_\mu{}^* = {}^0p_\mu{}^* + (*)t_\mu = {}^0p_\mu - X_\mu + (*)t_\mu. \tag{4, 12}$$

En substituant cette valeur dans

$$a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\mu\lambda}{}^* + p_\mu{}^* t_\lambda + p_\lambda{}^* t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda \tag{4, 13}$$

on obtient

$$h^{ab}a_{abc}{}^* = 0, \quad (a_{abc}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega\, a_{\mu\lambda}{}^*).$$

D'autre part, si l'on tient compte de (4, 8), (4, 9), (4, 12) et (4, 13) on peut écrire

$$\begin{aligned} a_{\mu\lambda}{}^* &= \\ &= {}^0a_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + X_\lambda t_\mu + ({}^0p_\mu - X_\mu)t_\lambda + ({}^0p_\lambda - X_\lambda)t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda = \\ &= a_{\mu\lambda} + (*)t_\mu t_\lambda. \end{aligned} \tag{4, 14}$$

Or, quelle qu'elle soit la solution particulière de (4, 1), dont on se sert pour construire le tenseur correspondant, on parvient toujours à un des tenseurs du faisceau (4, 14). Cette solution particulière, dont on est parti, est manifestement d'ordre 2 dans le cas holonome (d'ordre 1 dans le cas non holonome) et par conséquent, le vecteur p_μ, défini par (4, 7) est d'ordre 3 (d'ordre 2). Or le faisceau en jeu de tenseurs (4, 14) est d'ordre 3 (d'ordre 2). Nous voulons examiner le rang de ses éléments au point de l'hypersurface, où le cône de directions asymptotiques

$$h_{ab}\,\mathrm{d}y^a\,\mathrm{d}y^b = 0$$

n'est pas dégénéré. Cela revient manifestement à la supposition que le rang du déterminant aux éléments $h_{(ab)}$ soit $n - 1$. Cela posé, introduisons les grandeurs

$$\underset{x}{e^\nu} = \begin{cases} \underset{a}{U^\nu} \text{ pour } x = a \\ M^\nu \text{ pour } x = 2n \end{cases}$$

$$(x = n + 1, n + 2, \ldots, 2n)$$

M^ν étant n'importe quelle grandeur à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, qui satisfait à $M^\nu t_\nu = 1$. Les grandeurs $\underset{x}{e^\nu}$, linéairement indépendantes, donnent naissance aux expressions

$$A_{xy} = \underset{x}{e^\mu}\underset{y}{e^\lambda} a_{\mu\lambda}, \qquad A_{xy}{}^* = \underset{x}{e^\mu}\underset{y}{e^\lambda} a_{\mu\lambda}{}^*$$

$$(x, y = n + 1, \ldots, 2n)$$

telles que

$$A_{ab}{}^* = A_{ab} = h_{(ab)}, \quad A_{x\,2n}{}^* = A_{x\,2n} + \delta_{2n}{}^x(*) = A_{2n\,x}{}^*.$$

On en déduit que

$$\text{Dét} \mid A_{xy}{}^* \mid = \text{Dét} \mid A_{xy} \mid + (*)\, \text{Dét} \mid h_{(ab)} \mid.$$

Grâce à la supposition faite sur le déterminant aux éléments $h_{(ab)}$, nous voyons que le rang du déterminant aux éléments $A_{xy}{}^*$ (ou bien, ce qui revient au même, le rang du déterminant aux éléments $a_{\mu\lambda}{}^*$) est égal à n, si (*) n'est pas la racine de l'équation.

$$\text{Dét} \mid A_{xy} \mid + (*)\, \text{Dét} \mid h_{(ab)} \mid = 0.$$

A chaque point d'une $X_{n-1}^{(n)}$, où le cône de directions asymptotiques n'est pas dégénéré, est adjoint un faisceau de tenseurs quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) du rang n en général, constitué par des tenseurs symétriques, satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} a_{\mu\lambda} U_a{}^\mu U_b{}^\lambda &= h_{(ab)} \\ a_{abc} h^{ab} &= 0, \qquad (a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega a_{\mu\lambda}), \end{aligned} \tag{4, 15}$$

Nous appellerons ce faisceau en question „premier faisceau de Darboux“.

Remarque: Les tenseurs du premier faisceau de Darboux étant symétriques même dans le cas non holonome, les faisceaux (4, 14) et (3, 2) ne sont pas en général identiques.

(5) Suite.

Nous voulons maintenant privilégier, moyennant des conditions convenables, un des tenseurs du faisceau (4, 14). Introduisons à cet effet les grandeurs mixtes

$$h_{a\lambda} = \nabla_a t_\lambda; \qquad {}^0a_{ab\lambda} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda} \tag{5, 1}$$

et examinons le vecteur w_λ qui figure dans

$$w_\lambda h_{ab} = {}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda} + {}^0p_\lambda h_{ab}, \tag{5, 2}$$

le vecteur ${}^0p_\lambda$ étant défini par (4, 7b). En posant $w_c = U_c{}^\lambda w_\lambda$, on déduit de (5, 2) à cause de (4, 7a)

$$w_c = 0$$

et cette équation nous fait voir que w_λ est de la forme $w_\lambda = (*)t_\lambda$, la fonction (*) étant fixée par le choix particulier du vecteur ${}^0p_\mu$. Ce choix étant arbitraire (pourvu que soit satisfaite l'équation (4, 7b) par ${}^0p_\mu$) on peut fixer ${}^0p_\mu$ de manière que soit $w_\lambda = 0$. Pour cela il est nécessaire et suffisant que ${}^0p_\mu$ soit la solution de

$${}^0p_\lambda h_{ab} = -{}^0a_{ab\lambda} - p_b h_{a\lambda}, \tag{5, 3a}$$

p_b étant défini par (4, 7a). Or, cette équation nous donne

$${}^0p_\lambda = -\frac{1}{n-1}({}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda})\, h^{ab}. \tag{5, 3b}$$

Le vecteur ${}^0p_\lambda$ ainsi fixé, nous choisirons pour (*) dans (4, 8) une fonction arbitraire, mais fixe que nous désignerons par w

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + w t_\mu t_\lambda. \tag{5, 4}$$

En introduisant la grandeur

$$a_{ab\lambda} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega a_{\mu\lambda},$$

nous déduirons de (5, 4)

$$a_{ab\lambda} = {}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda} + {}^0p_\lambda h_{ab} + t_\lambda U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + w t_\lambda h_{ab} \tag{5, 5a}$$

et cette équation se simplifie, grâce à (5, 3a):

$$a_{ab\lambda} = (U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + w h_{ab})\, t_\lambda. \tag{5, 5b}$$

D'autre part, si l'on pose

$$a_{ab\lambda}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega a_{\mu\lambda}{}^*$$

les équations (4, 14) et (5, 5b) nous donnent

$$a_{ab\lambda}{}^* = [U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + (w + (*))h_{ab}]\, t_\lambda. \tag{5, 6}$$

Si, en particulier, on pose

$$(*) = -\frac{1}{n-1} h^{ab} U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu - w \tag{5, 7a}$$

on obtient

$$h^{ab} a_{ab\lambda}{}^* = 0. \tag{5, 7b}$$

En partant du tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini (moyennant la fonction w) par (5, 4), nous sommes parvenus au tenseur $a_{\mu\lambda}{}^*$, défini moyennant (5, 7a) et (4, 14), pour lequel (5, 7b) est valable. Examinons maintenant l'influence du choix de la fonction arbitraire w à ce résultat. Partons à cet effet d'une autre fonction arbitraire $\underset{1}{w}$ et désignons par l'indice 1, affecté en bas des symboles respectifs, les grandeurs, construites à l'aide de $\underset{1}{w}$. On a en premier lieu, en tenant compte de ce que le vecteur ${}^0p_\mu$, défini par (5, 3b), est indépendant de la fonction w

$$\underset{1}{{}^0p_\mu} = {}^0p_\mu \tag{5, 8a}$$

et en conséquence

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}} = a_{\mu\lambda} + (\underset{1}{w} - w)\, t_\mu t_\lambda. \tag{5, 8b}$$

D'autre part, la fonction $\underset{1}{(*)}$ résulte de l'équation, analogue à (5, 7a),

$$\underset{1}{(*)} = -\frac{1}{n-1} h^{ab} U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu - \underset{1}{w}, \tag{5, 8c}$$

c'est-à-dire, grâce à (5, 7a) elle-même,

$$\underset{1}{(*)} = (*) + w - \underset{1}{w}. \tag{5, 8d}$$

En substituant cette valeur dans

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}}{}^* = \underset{1}{a_{\mu\lambda}} + \underset{1}{(*)}\, t_\mu t_\lambda, \tag{5, 9}$$

on obtient de nouveau

$$h^{ab}\, \underset{1}{a_{ab\lambda}}{}^* = 0 \quad (\underset{1}{a_{ab\lambda}}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega \underset{1}{a_{\mu\lambda}}{}^*).$$

Les tenseurs $\underset{1}{a_{\mu\lambda}}{}^*$ et $a_{\mu\lambda}{}^*$ sont liés par l'équation, déduite de (5, 8b, d) et (5, 9)

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}}{}^* = a_{\mu\lambda} + (\underset{1}{w} - w + (*) + w - \underset{1}{w})\, t_\mu t_\lambda = a_{\mu\lambda}{}^*.$$

Or, quel qu'il soit le tenseur de départ, on parvient toujours au même tenseur $a_{\mu\lambda}{}^*$, satisfaisant à (5, 7b). Le vecteur ${}^0p_\mu$ étant d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome) la fonction (5, 7a), qui nous conduit à ce tenseur privilégié est manifestement d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome). Nous pouvons donc dire:

P a r m i d e s t e n s e u r s d u p r e m i e r f a i s c e a u d e D a r b o u x

(4, 14), il y en a un seul privilégié, satisfaisant à l'équation (5, 7b). Il est d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome).

Nous appellerons ce tenseur „premier tenseur de M. Čech".

Le premier faisceau de Darboux n'est constitué que par des tenseurs symétriques. (Il s'ensuit que même le premier tenseur de M. Čech est symétrique.) Dans les lignes qui suivent, nous trouverons un autre faisceau de tenseurs quadratiques, dont les éléments ne sont symétriques que dans des cas particuliers d'une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)-symétrique.

(6) Deuxième faisceau de Darboux.

Le point de départ sera maintenant l'équation

$$g_{\mu\lambda} U_a^{\mu} U_b^{\lambda} = h_{ab}. \tag{6, 1}$$

Si $h_{[ab]} \neq 0$, le tenseur $g_{\mu\lambda}$ n'est pas symétrique. Pour déduire quelques conséquences de (6, 1), nous nous servirons des notions, dont l'étude sera détaillée plus tard: Supposons connue une normale affine N^{ν} à la caractéristique $(0, \frac{-2}{n+1}, 0)$, normalisée par l'équation

$$N^{\lambda} t_{\lambda} = 1 \tag{6, 2}$$

et désignons par Γ_{ba}^{c} les coefficients de la connexion induite dans $X_{n-1}^{(n)}$ par cette normale. Remarquons expressément que les résultats, obtenus dans ce § et dans le § suivant ne dépendent ni de la normale N^{ν}, ni de la connexion induite par cette normale. La notion auxiliaire de la connexion induite nous permet d'introduire le symbole D_a de la dérivée covariante mixte des grandeurs (mixtes).[7] L'application du symbole D_a est bien connue et d'ailleurs peut être déduite de la formule pour $D_a U_b^{\nu}$ que nous citons ici à titre d'exemple:

$$D_a U_b^{\nu} = \partial_a U_b^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} U_b^{\lambda} U_a^{\mu} - \Gamma_{ba}^{c} U_c^{\nu} = \underset{b}{\nabla_a U^{\nu}} - \Gamma_{ba}^{c} U_c^{\nu}. \tag{6, 3}$$

D'autre part, on sait bien que[8])

$$-h_{ab} N^{\nu} = D_a U_b^{\nu}. \tag{6, 4}$$

Les formules (6, 3) et (6, 4) nous autorisent à poser

$$-h_{[ab]} N^{\nu} = S_{\lambda\mu}^{\nu} U_b^{\lambda} U_a^{\mu} - T_{ba}^{\nu} \tag{6,5}$$

où

$$-T_{ba}^{\nu} = \partial_{[a} U_{b]}^{\nu} - \Gamma_{[ba]}^{c} U_c^{\nu}. \tag{6, 6}$$

---

[7]) Cette notion est due au fond à M. v. d. Waerden et M. Bortolotti. Voir (aussi pour le renvoi littéraire): J. A. Schouten-D. J. Struik „Einführung in die neuren Methoden der Differentialgeometrie I, (1935, Groningen), p. 93.

[8]) Cfr. Hlavatý: „Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen". (Math. Ztschr. 38, 283—300, (1934)).

(Remarquons expressément que dans le cas holonome on a $\partial_{[a}U_{b]}^{\nu} = 0$ et par conséquent T_{ba}^{ν} est dans X_{n-1} aussi par son indice ν.) Un autre exemple d'application du symbole D_a, dont nous aurons besoin plus tard est livré par la formule

$$D_a t_\lambda = \nabla_a t_\lambda = h_{a\lambda}. \tag{6, 7}$$

Il s'ensuit en particulier

$$2U_c^{\lambda}D_{[a}D_{b]}t_\lambda = (R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}t_\nu + 2T_{ab}{}^{\alpha}\nabla_\alpha t_\lambda)\, U_c^{\lambda}. \tag{6, 8}$$

Cela posé, désignons par ${}^0g_{\mu\lambda}$ n'importe quelle solution du système (6, 1). Le cas échéant, la solution la plus générale peut être écrite de la manière suivante

$$g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + Y_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda, \tag{6, 9}$$

X_μ et Y_μ étant deux vecteurs (à la même caractéristique (0, 0, 0)) pour le moment arbitraires, et (*) n'importe quelle fonction de position, à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. En introduisant les grandeurs

$$\begin{aligned} {}^0g_{abc} &= U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda}\nabla_\omega {}^0g_{\mu\lambda} = U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda}D_a {}^0g_{\mu\lambda}, \\ g_{abc} &= U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda}\nabla_\omega\, g_{\mu\lambda} = U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda}D_a\, g_{\mu\lambda}, \end{aligned}$$

on peut déduire de (6, 9) en premier lieu

$$\begin{gathered} g_{abc} = {}^0g_{abc} + X_b h_{ac} + Y_c h_{ab}, \\ (X_b = U_b{}^{\mu}X_\mu,\ \ Y_c = U_c{}^{\mu}Y_\mu). \end{gathered} \tag{6, 10}$$

Calculons maintenant ${}^0g_{[ab]c}$, dont nous aurons besoin plus tard. En partant de (6, 1) (pour ${}^0g_{\mu\lambda}$) on en déduit à cause de (6, 4)

$$\begin{aligned} D_{[a}h_{b]c} &= D_{[a}U_{b]}{}^{\mu}U_c{}^{\lambda}\,{}^0g_{\mu\lambda} = \\ &= -\, h_{[ab]}N^{\mu}U_c{}^{\lambda}\,{}^0g_{\mu\lambda} - U_{[b}{}^{\mu}\, h_{a]c}N^{\lambda}\,{}^0g_{\mu\lambda} + {}^0g_{[ab]c}. \end{aligned} \tag{6, 11a}$$

D'autre part, si l'on tient compte de (2, 11), on en peut tirer

$$D_{[a}h_{b]c} = D_{[a}(D_{b]}t_\lambda)U_c{}^{\lambda} = -\, h_{[a|c|}N^{\lambda}h_{b]\lambda} + U_c{}^{\lambda}D_{[a}D_{b]}t_\lambda,$$

et cette équation devient, grâce à (6, 8)

$$\begin{aligned} D_{[a}h_{b]c} &= -\, h_{[a|c|}N^{\lambda}h_{b]\lambda} + \\ &+ (\tfrac{1}{2}\, R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}t_\nu + T_{ab}{}^{\alpha}\nabla_\alpha t_\lambda)U_c{}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{6, 11b}$$

Or, le rapprochement de (6, 11a, b) nous donne

$$\begin{aligned} {}^0g_{[ab]c} &= N^{\lambda}[h_{[ab]}U_c{}^{\mu}\,{}^0g_{\lambda\mu} + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^{\mu}\,{}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda})] + \\ &+ (\tfrac{1}{2}\, R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}t_\nu + T_{ab}{}^{\alpha}\nabla_\alpha t_\lambda)\, U_c{}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{6, 12}$$

Pour donner une forme plus symétrique à cette équation, nous introduirons la grandeur $h_{\lambda a}$ définie, dans le cas holonome, comme suit: $h_{\lambda a} = h_{a\lambda}$ si $h_{[ab]} = 0$, tandis que si $h_{[ab]} \neq 0$, $h_{\lambda a}$ est n'importe quelle solution du système

$$h_{ba} = U_b{}^\lambda h_{\lambda a}.\text{[9]} \tag{6, 13a}$$

Parce que, d'autre part

$$h_{ba} = U_b{}^\lambda (U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu) \tag{6, 13b}$$

nous nous servirons de $h_{\lambda a}$ pour **définir** le tenseur mixte $U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu$ qui n'existe pas dans le cas holonome, en posant

$$h_{\lambda a} \equiv U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu. \tag{6, 13c}$$

Cette équation nous servira aussi comme définition pour $h_{\lambda a}$ dans le cas non holonome, où $U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu$ existe et est bien défini. Cela posé nous pouvons écrire, grâce à (6, 5) et (6, 13)

$$-T_{ba}{}^\alpha U_c{}^\lambda \nabla_\alpha t_\lambda = -h_{[ab]} N^\lambda h_{\lambda c} - S_{\lambda\mu}{}^\nu U_b{}^\lambda U_a{}^\mu h_{\nu c}. \tag{6, 14}$$

En substituant cette valeur dans (6, 12) on obtient

$$\begin{aligned} {}^0 g_{[ab]c} = N^\lambda [h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0 g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c}) + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda})] + \\ + (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c})\, U_a{}^\omega U_b{}^\mu. \end{aligned} \tag{6, 15}$$

Cette formule, jointe à (6, 10), nous permet de calculer $g_{[ab]c}$

$$\begin{aligned} g_{[ab]c} = N^\lambda [h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0 g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) + \\ + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda)] + (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c})\, U_a{}^\omega U_b{}^\mu. \end{aligned} \tag{6, 16}$$

Parce que le tenseur

$$g_{[ab]c} - (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c})\, U_a{}^\omega U_b{}^\mu$$

ne dépend ni de la normale N^ν, ni de la connexion induite par cette normale, il en est de même avec

$$\begin{aligned} N^\lambda [h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0 g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) + \\ + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda)]. \end{aligned} \tag{6, 17}$$

Autrement dit, le tenseur (6, 17) reste toujours le même, quelle qu'elle soit la normale N^ν, pourvu qu'elle soit normalisée par $N^\nu t_\nu = 1$. Pour que ce fait ait lieu il est nécessaire et suffisant que soit

$$\begin{aligned} h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0 g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) &= p_{abc} t_\lambda + r_{abc\lambda}, \\ h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda) &= q_{abc} t_\lambda - r_{abc\lambda}, \end{aligned} \tag{6, 18}$$

avec les tenseurs p_{abc}, q_{abc} et $r_{abc\lambda}$ convenablement choisis. Compte tenu de (6, 1) (pour ${}^0 g_{\mu\lambda}$) et de (6, 13a), on déduit de (6, 18)

$$\begin{aligned} h_{[ab]}\,(U_c{}^{\mu 0} g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda)\, U_d{}^\lambda &= 0 = r_{abc\lambda} U_d{}^\lambda, \\ h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda)\, U_d{}^\lambda &= 0 = - r_{abc\lambda} U_d{}^\lambda, \end{aligned}$$

et par conséquent $r_{abc\lambda}$ est de la forme $r_{abc} t_\lambda$. Il s'ensuit que l'on peut poser

$$\begin{aligned} U_c{}^\mu {}^0 g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda &= P_c t_\lambda \\ U_c{}^\mu {}^0 g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} + X_c t_\lambda &= Q_c t_\lambda, \end{aligned} \tag{6, 19a}$$

[9]) Nous nous servirons plus tard de l'indétermination de $h_{\lambda a}$ qui résulte de cette définition (Cfr § 10). Pour le moment nous prendrons pour $h_{\lambda a}$ n'importe quelle solution arbitrairement fixée.

où les vecteurs P_c, Q_c dépendent du choix particulier de X_c et Y_c. Nous choisirons ces derniers vecteurs de manière que résulte

$$P_c = Q_c = 0, \tag{6, 19b}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_c^{\mu}\, {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} &= -Y_c\, t_\lambda, \\ U_c^{\mu}\, {}^0g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} &= -X_c\, t_\lambda. \end{aligned} \tag{6, 19c}$$

Ces équations qui définissent complètement X_c et Y_c nous autorisent à poser, grâce à (6, 16)

$$g_{[ab]c} = (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} U_c{}^{\lambda} t_\nu + S_{\omega\mu}{}^{\nu} h_{\nu c})\, U_a{}^{\omega} U_b{}^{\mu} \tag{6, 20}$$

et de plus, si l'on désigne par ${}^0X_\mu$, ${}^0Y_\mu$ n'importe quelle solution du système

$$X_c = U_c^{\mu} X_\mu, \qquad Y_c = U_c^{\mu} Y_\mu,$$

les valeurs de X_c et Y_c étant tirées de (6, 19c), le tenseur $g_{\mu\lambda}$ qui satisfait à (6, 20) est défini par

$$g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} + {}^0X_\mu t_\lambda + {}^0Y_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda. \tag{6, 21}$$

Avant que nous abordions la question concernant l'influence du choix particulier de ${}^0g_{\mu\lambda}$ à ce résultat, remarquons ceci: Si l'on a affaire à une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)symétrique ($h_{[ab]} = 0$), on choisit naturellement pour ${}^0g_{\mu\lambda}$ un tenseur symétrique, ${}^0g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\lambda\mu}$, et par conséquent les équations (6, 19) nous autorisent à poser $X_c = Y_c$. Il s'ensuit que dans ce cas particulier le tenseur $g_{\mu\lambda}$, défini par (6, 21), est symétrique.

Le tenseur $g_{\mu\lambda}$ en jeu, étant construit en partant de la solution particulière ${}^0g_{\mu\lambda}$ de (6, 1), nous voulons construire maintenant le tenseur analogue $g_{\mu\lambda}{}^*$, en partant d'une autre solution particulière

$${}^0g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\mu\lambda} + p_\mu t_\lambda + q_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda \tag{6, 22a}$$

où les vecteurs p_μ, q_μ (à la même caractéristique (0, 0, 0)) sont complètement arbitraires.[11] Le tenseur cherché sera

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda}{}^* &= {}^0g_{\mu\lambda}{}^* + {}^0X_\mu{}^* t_\lambda + {}^0Y_\lambda{}^* t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda = \\ &= {}^0g_{\mu\lambda} + ({}^0X_\mu{}^* + p_\mu) t_\lambda + ({}^0Y_\lambda{}^* + q_\lambda) t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda, \end{aligned} \tag{6, 22b}$$

où les vecteurs $X_c{}^*$, $Y_c{}^*$ sont définis par les équations, analogues à (6, 19c), à savoir

$$\begin{aligned} -Y_c{}^* t_\lambda &= U_c^{\mu}\, {}^0g_{\lambda\mu}{}^* - h_{\lambda c} = (-Y_c + q_c) t_\lambda, \\ -X_c{}^* t_\lambda &= U_c^{\mu}\, {}^0g_{\mu\lambda}{}^* - h_{c\lambda} = (-X_c + p_c) t_\lambda. \end{aligned} \tag{6, 23}$$

Or, si l'on désigne par ${}^0X_\mu{}^*$ et ${}^0Y_\mu{}^*$ des solutions particulières du système

$$X_c{}^* = U_c^{\mu} X_\mu{}^*, \qquad Y_c{}^* = U_c^{\mu} Y_\mu{}^*,$$

---

[11]) Dans le cas symétrique nous supposerons $p_\mu = q_\mu$, d'où résulte ${}^0g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\lambda\mu}{}^*$.

on a

$$\begin{aligned} {}^0X_\mu{}^* &= {}^0X_\mu - p_\mu + (^*)t_\mu, \\ {}^0Y_\mu{}^* &= {}^0Y_\mu - q_\mu + (^*)t_\mu \end{aligned} \tag{6, 24}$$

et par conséquent, l'équation (6, 22b) nous donne à cause de (6, 21)

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\mu\lambda} + ({}^0X_\mu + p_\mu - p_\mu)t_\lambda + ({}^0Y_\lambda + q_\lambda - q_\lambda)t_\mu + (^*)t_\mu t_\lambda = \\ = g_{\mu\lambda} + (^*)t_\mu t_\lambda. \end{aligned} \tag{6, 25}$$

Quel qu'il soit le choix de la solution particulière ${}^0g_{\mu\lambda}$, on retombe donc toujours à un tenseur de ce faisceau dont chaque élément satisfait à l'équation analogue à (6, 20). La méthode analogue à celle, appliquée aux cas précédents nous fait voir que les tenseurs du faisceau construit (6, 25) sont en général du rang n et d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome). Nous pouvons donc dire:

Á chaque point d'une $X_{n-1}^{(n)}$ est adjoint un faisceau de tenseurs quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) du rang n en général, constitué par des tenseurs satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad g_{\mu\lambda}U_a{}^\mu U_b{}^\lambda = h_{ab} \\ &\text{b)} \quad g_{[ab]c} = (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c})U_a{}^\omega U_b{}^\mu \\ &\quad (g_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega g_{\mu\lambda}). \end{aligned} \tag{6, 26}$$

Nous appellerons ce faisceau en jeu ,,deuxième faisceau de Darboux''[12]).

Il est intéressant à remarquer que grâce à (6, 19c) l'équation (6, 21) nous donne

$$\begin{aligned} U_c{}^\mu g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} &= - Y_c t_\lambda + Y_c t_\lambda = 0, \\ U_c{}^\mu g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} &= - X_c t_\lambda + X_c t_\lambda = 0. \end{aligned} \tag{6, 27}$$

Ces équations nous serons très utiles plus tard.

(7) Les trois faisceaux.

Nous voulons maintenant étudier les relations qui lient les trois faisceaux (3, 2), (4, 14) et (6, 25). Commençons tout d'abord par le cas non holonome. Nous l'avons déjà remarqué que les deux premiers faisceaux ne peuvent pas être en général identiques car les éléments du faisceau (3, 2) ne sont pas en général symétriques. Il en est de même avec (4, 14) et (6, 25) car même les éléments de ce dernier ne sont pas symétriques. Il nous reste donc à examiner le rapport des faisceaux (3, 2) et (6, 25). Parce que le faisceau

[12]) Nous aurons encore l'occasion de faire voir qu'à chaque choix particulier de $h_{\nu c}$ (dans le cas holonome non symétrique) correspond un faisceau de ce type et nous en privilégierons un par des conditions convenablement choisies.

(6, 25) ne dépend pas du choix particulier de ${}^0g_{\mu\lambda}$, nous prendrons pour ce tenseur le tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini par (3, 1), c'est-à-dire

$$ {}^0g_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda. \tag{7, 1}$$

Cela étant, on trouve à cause de (6, 19c), (6, 13c) et (5, 1)

$$U_c{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu - h_{\lambda c} = - Y_c t_\lambda = 0,$$
$$U_c{}^\mu \nabla_\mu t_\lambda - h_{c\lambda} = - X_c t_\lambda = 0.$$

Or, le faisceau (6, 25) peut donc être écrit

$$g_{\mu\lambda}{}^* = \nabla_\mu t_\lambda + (*) t_\mu t_\lambda$$

et par conséquent les deux faisceaux (3, 2) et (6, 25) sont identiques dans le cas non holonome.

Abordons maintenant le cas d'une hypersurface holonome dans l'espace ambiant L_n à connexion non (semi)symétrique ($h_{[ab]} \neq \neq 0$). Le cas échéant (4, 14) et (6, 25) ne peuvent pas se confondre en général, car les éléments du second faisceau de Darboux ne sont pas symétriques en général.

Il ne nous reste donc qu'à envisager le cas d'une hypersurface holonome dans l'espace à connexion (semi)symétrique ($h_{[ab]} = = 0$, $S_{\lambda\mu}{}^\nu = S_{[\lambda}\, \delta_{\mu]}^\nu$), où les éléments des faisceaux (4, 14) et (6, 25) sont symétriques. Prenons à cet effet pour ${}^0g_{\mu\lambda}$ le tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini par (4, 8)

$$a_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda.$$

Le cas échéant le faisceau (6, 25) peut être écrit

$$g_{\mu\lambda}{}^* = a_{\mu\lambda} + {}^0X_\mu t_\lambda + {}^0X_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda. \tag{7, 2}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux en question se confondent est donc $X_b = 0$, où bien, ce qui revient au même, grâce à (6, 19c)

$$h_{b\lambda} = U_b{}^\mu a_{\mu\lambda}.$$

Cette équation peut être écrite aussi

$$U_b{}^\mu a_{\mu\lambda} = D_b t_\lambda$$

et les conditions d'intégrabilité illimitée de ce système se déduisent de l'équation

$$D_{[a} U_{b]}{}^\mu a_{\mu\lambda} = D_{[a} D_{b]} t_\lambda$$

qui est équivalente à

$$U_{[a}{}^\omega U_{b]}{}^\mu \nabla_\omega a_{\mu\lambda} = a_{[ab]\lambda} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu - \frac{2}{n+1} R_{\omega\mu\alpha}{}^\alpha \delta_\lambda^\nu\right) U_a{}^\omega U_b{}^\mu t_\nu. + S_\omega\, U_{[a}^{\omega}\, h_{b]\lambda} \tag{7, 3}$$

Compte tenu de (5, 5b), cette équation peut être réduite à

$$t_\lambda D_{[a} p_{b]} = \frac{1}{2}\left(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu - \frac{2}{n+1} R_{\omega\mu\alpha}{}^\alpha \delta_\lambda^\nu\right) U_a{}^\omega U_b{}^\mu t_\nu, + S_\omega U_{[a}^{\omega}\, h_{b]\lambda} \tag{7, 4}$$

où dans ce cas particulier

$$D_{[a}p_{b]} = U_{[b}{}^{\mu}\nabla_{a]}{}^{0}p_{\mu}$$

ne dépend pas de la connexion induite et p_b est défini moyennant (4, 7a):

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux (4, 14) et (6, 25) se confondent dans ce cas particulier est que le vecteur p_c défini par (4, 7a) satisfait à (7, 4).

Remarque. Une des conditions nécessaires pour que ce fait ait lieu est manifestement aussi

$$g_{[ab]c}{}^{*} = a_{[ab]c}{}^{*}. \qquad (7, 5)$$

Mais parce que

$$a_{[ab]c}{}^{*} = a_{[ab]c} = 0$$

et d'autre part, parce que

$$g_{[ab]c}{}^{*} = g_{[ab]c} = \tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}t_{\nu}U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda} + S_{\omega}\, U_{[a}^{\omega}\, h_{b]c}$$

la condition (7, 5) se réduit à l'équation

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}t_{\nu}U_a{}^{\omega}U_b{}^{\mu}U_c{}^{\lambda} + S_{\omega}\, U_{[a}^{\omega}\, h_{b]c} = 0,$$

que l'on peut déduire aussi de (7, 4).

(8) Deuxième tenseur de M. Čech.

Retournons maintenant au cas général (6, 25) de tenseurs quadratiques pour une $X_{n-1}^{(n)}$ et tâchons d'en privilégier un moyennant des conditions convenablement choisies. Introduisons à cet effet un tenseur nouveau symétrique $k^{ab} = k^{ba}$, à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$, solution du système

$$\begin{aligned} g_{cab}k^{ab} &= g_{cab}h^{ab}, \\ h_{ab}k^{ab} &= 0. \end{aligned} \qquad (8, 1)$$

Ce tenseur existe toujours (et peut se réduire aussi à $k^{ab} = 0$).[13]

Or, le tenseur

$$G^{ab} = h^{ab} - k^{ab} \qquad (8, 2)$$

à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$ satisfait aux équations

[13]) Il n'y a qu'une seule solution pour $n = 3$, $g_{cab}h^{ab} \neq 0$, si la matrice

$$\begin{vmatrix} g_{444}, & g_{445} + g_{454}, & g_{455} \\ g_{544}, & g_{545} + g_{554}, & g_{555} \\ h_{44}, & h_{45} + h_{54}, & h_{55} \end{vmatrix}$$

est du rang 3. En général, le nombre des solutions particulières linéairement indépendantes du système (8, 1) qui composent la solution générale et > 1. Son calcul n'exige que des considérations algébriques élémentaires.

$$g_{cab}G^{ab} = 0, \quad h_{ab}G^{ab} = n - 1. \tag{8, 3}$$

Cela étant, remarquons que grâce à la première des équations (8, 3) on peut écrire

$$g_{acb}G^{ac} = (g_{abc} + 2g_{a[cb]})\, G^{ac} = (2g_{a[cb]} + 2g_{[ab]c})\, G^{ac}.[14] \tag{8, 4a}$$

Si l'on introduit le vecteur

$$2G^{ac}U_c{}^\mu \nabla_a g_{[\mu\lambda]} = g_\lambda, \quad g_b = U_b{}^\mu g_\mu = 2g_{a[cb]}G^{ac}$$

et si l'on tient compte de (6, 20), on peut écrire pour (8, 4a)

$$g_{acb}G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega U_b{}^\mu (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c}) + g_b. \tag{8, 4b}$$

Cette équation nous fait voir que l'on peut poser

$$G^{ac}U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda} - G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) - g_\lambda = Wt_\lambda, \tag{8, 5}$$

où, bien entendu, la fonction W, à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$ est bien déterminée. En écrivant

$$U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda} = g_{ac\lambda},$$

on a donc

$$G^{ac}g_{ac\lambda} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda + Wt_\lambda. \tag{8, 6}$$

Parce que d'autre part, à cause de (6, 25)

$$g_{ac\lambda}{}^* = U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda}{}^* = g_{ac\lambda} + (*) h_{ac} t_\lambda,[15] \tag{8, 7}$$

le rapprochement des équations (8, 6) et (8, 7) nous donne

$$g_{ac\lambda}{}^*\, G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda + [(n-1)(*) + W]t_\lambda. \tag{8, 8}$$

Or, pour

$$(*) = -\frac{W}{n-1} \tag{8, 9}$$

cette équation se simplifie à

$$g_{ac\lambda}{}^*\, G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda.[16] \tag{8, 10}$$

Examinons maintenant l'influence du choix particulier du tenseur $g_{\mu\lambda}$ à ce résultat! Partons à cet effet d'un autre tenseur $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}$ du faisceau (6, 25)

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda} + wt_\mu t_\lambda \tag{8, 11a}$$

et désignons par l'indice 1, affecté en bas, les notions déduites

[14]) Au fond, je dois cette tournure qui mène à (8, 10) au Mémoire cité à la page 233. L'équation (8, 10) correspond à (2, 66) de ce Mémoire.

[15]) Cette équation nous fait voir aussi que $g_{cab}{}^*\, k^{ab} = g_{cab}k^{ab}$. Or, le tenseur k^{ab} et par conséquent aussi G^{ab} ne dépend pas de la transformation (6, 25).

[16]) Si L_n est un espace plan et sans torsion, cette équation se simplifie à

$$g_{ac\lambda}{}^* G^{ac} = 0. \tag{8, 10a}$$

moyennant $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}$. On a avant tout une équation analogue à (8, 7)

$$\underset{1}{g}_{ac\lambda} = g_{ac\lambda} + wh_{ac}t_\lambda, \tag{8, 11b}$$

d'où il suit à cause de (8, 6) et (8, 3)

$$G^{ac}\underset{1}{g}_{ac\lambda} = G^{ac}U_a{}^\omega(R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda + (W + (n-1)\,w)t_\lambda, \tag{8, 11c}$$

c'est à-dire

$$\underset{1}{W} = W + (n-1)w, \tag{8, 11d}$$

et par conséquent le tenseur $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^*$ définit par

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^* = \underset{1}{g}_{\mu\lambda} + \underset{1}{(*)}t_\mu t_\lambda \tag{8, 12}$$

où

$$\underset{1}{(*)} = -\frac{\underset{1}{W}}{n-1} = (*) - w \tag{8, 11e}$$

jouit de la propriété

$$G^{ac}\underset{1}{g}_{ac\lambda}{}^* = G^{ac}U_a{}^\omega(R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda. \tag{8, 13}$$

D'autre part, les équations (8, 11a, e) et (8, 12) nous autorisent à poser

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^* = \underset{1}{g}_{\mu\lambda} + \underset{1}{(*)}t_\mu t_\lambda = g_{\mu\lambda} + (w + (*) - w)\,t_\mu t_\lambda = g_{\mu\lambda}{}^*.$$

Quel qu'il soit donc le choix du tenseur de départ, on parvient toujours au même tenseur, qui satisfait à (8, 10). Sa construction nous fait voir qu'il est en général d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome). Donc:

Parmi des tenseurs du deuxième faisceau de Darboux (6, 25), il y en a un seul privilégié, adjoint au tenseur G^{ab}, satisfaisant à l'équation (8, 10). Il est d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome).

(9) Normale affine, connexion induite.

Jusqu'alors, aucune supposition restrictive, concernante la connexion de l'espace ambiant n'a pas été adoptée. Dès à présent, nous restreindrons la généralité du problème étudié, en supposant—sauf l'avis contraire—que la fonction t, définie par

$$t^2 = \frac{(\text{Dét}\mid R_{\alpha\mu\lambda}{}^\alpha \mid)^{\frac{1}{n+1}}}{R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta e_\nu e_\delta U_a{}^\omega U_b{}^\alpha U_c{}^\mu U_d{}^\beta U_e{}^\lambda U_f{}^\gamma h^{ab} h^{cd} h^{ef}} \tag{9,1a}$$

soit finie, différente de zéro et non indéterminée. De plus, nous conviendrons d'écrire, même dans le cas, où t est indéterminée, (ce qui advient par ex. pour $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = 0$)

$$t^{\circ} = 1. \tag{9,1b}$$

Cela posé, remarquons avant tout que l'expression

$$Q = t^{n-1} P h^{-1} \quad (P = \text{Dét} \mid P_{ab} \mid) \tag{9, 1c}$$

est à la caractéristique (0, 0, 0). Parce qu'elle est différente de zéro, elle nous autorise à construire les tenseurs

$$_z h_{ab} = Q^z h_{ab}, \ _z h^{ab} = Q^{-z} h^{ab} \tag{9, 2a}$$

qui satisfont à

$$_z h^{ab} {}_z h_{ac} = {}_z h^{ba} {}_z h_{ca} = \delta_c^b, \tag{9, 2b}$$

et de plus la grandeur

$$_z t_\lambda = Q^z t_\lambda \tag{9, 2c}$$

où z est n'importe quel nombre réel. Remarquons que la caractéristique, de même que l'ordre des grandeurs $_z h_{ab}$, $_z h^{ab}$, $_z t_\lambda$ sont les mêmes que pour h_{ab}, h^{ab}, t_λ. De plus, on a aussi

$$_z h_{ab} = U_a{}^{\mu} U_b{}^{\lambda} \nabla_\mu {}_z t_\lambda = U_b{}^{\lambda} \nabla_a {}_z t_\lambda. \tag{9, 2d}$$

Cela étant, désignons par N^ν n'importe quelle grandeur à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$, normalisée par

$$N^\nu t_\nu = 1 \tag{9, 3}$$

et par $\Psi_{ab}{}^c$ les coefficients de la connexion induite par N^ν. Ces deux notions sont liées par l'équation

$$- {}_z h_{ab} N^\nu = \partial_a U_b{}^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda - \Psi_{ba}{}^c U_c{}^\nu \tag{9, 4}$$

(voir (6, 3) et (6, 4)). Cette équation peut être résolue par rapport à $\Psi_{ba}{}^c$. Multiplions la à cet effet par $_z h_{d\nu} = \nabla_d {}_z t_\nu$

$$- {}_z h_{ab} N^\nu {}_z h_{d\nu} = {}_z h_{d\nu} \nabla_a \underset{b}{U^\nu} - \Psi_{ba}{}^c {}_z h_{dc}. \tag{9, 5a}$$

On en déduit

$$\Psi_{ba}{}^e = {}_z h^{de} {}_z h_{d\nu} \nabla_a \underset{b}{U^\nu} + {}_z h_{ab} N^\nu {}_z h_{d\nu} {}_z h^{de}. \tag{9, 6}$$

Cette équation nous fait voir que même les coefficients

$$_z\Gamma_{ba}{}^c = {}_z h^{dc} {}_z h_{d\lambda} \nabla_a \underset{b}{U^\lambda} \tag{9, 7}$$

constituent une connexion. La normale $_z N^\nu$ qui induit cette connexion peut être calculée de la formule analogue à (9, 4)

$$- {}_z h_{ab} {}_z N^\nu = {}_z D_a \underset{b}{U^\nu} = \partial_a U_b{}^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda - {}_z\Gamma_{ba}{}^c U_c{}^\nu, \tag{9, 8a}$$

c'est-à-dire, grâce à (9, 7)

$$ {}_zN^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, {}_zD_a\, U_b^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\nu} - {}_z\Gamma^c_{ba}\, U_c^\nu) = $$

$$ = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\nu} - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, \underset{b}{U_c^\nu}\, \nabla_a \underset{b}{U^\lambda}), $$

ou bien, ce qui revient au même

$$ {}_zN^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})(\delta_\lambda^\nu - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, U_c^\nu)^{17}). \tag{9, 8b} $$

Cette normale est d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome). Elle satisfait à deux équations importantes. La première est

$$ {}_zN^\nu\, {}_zt_\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, {}_zt_\nu\, \nabla_a \underset{b}{U^\nu} = \frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, U_b^\nu\, \nabla_a\, {}_zt_\nu = 1, \tag{9, 9a} $$

la deuxième a la forme

$$ \begin{aligned} {}_zN^\nu\, {}_zh_{e\nu} &= -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})({}_zh_{e\lambda} - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, {}_zh_{ec}) = \\ &= -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})({}_zh_{e\lambda} - {}_zh_{e\lambda}) = 0. \end{aligned} \tag{9, 9b} $$

Une considération facile nous montre qu'il n'y a qu'une seule solution ${}_zN^\nu$ qui satisfait aux équations (9, 9).[18])

Parce que, pour $Q_d = \partial_d \log Q$,[19])

$$ {}_zh_{d\lambda} = \nabla_d\, {}_zt_\lambda = Q^z(\nabla_d\, t_\lambda + zQ_d\, t_\lambda) = Q^z({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda), \tag{9, 10} $$

l'équation (9, 8b) nous donne

$$ {}_zN^\nu = -\frac{Q^{-z}\, {}_0h^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})[\delta_\lambda^\nu - {}_0h^{dc}\, U_c^\nu({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda)], $$

c'est-à-dire

$$ {}_zN^\nu = Q^{-z}({}_0N^\nu - zU_c^\nu\, Q_d\, {}_0h^{dc}). \tag{9, 11} $$

Or, les normales ${}_zN^\nu$ constituent un faisceau, déterminé par ${}_0N^\nu$ et $U_c^\nu\, Q_d\, {}_0h^{dc}$, la dernière grandeur étant dans $X^{(n)}_{n-1}$. Chaque élément de ce faisceau est défini uniquement par la valeur du nombre réel z. D'autre part, l'équation (9, 7) nous autorise à poser, grâce à (9, 10)

[17]) Grâce à la supposition concernante l'équation (9,1b), toutes les notions à l'indice z existent même dans le cas, où t est indéterminée, pour $z=0$.

[18]) La démonstration se trouve déjà (pour un cas plus simple) dans le Mémoire de l'auteur, cité à la page 243. On pourrait l'appliquer ici à peu près sans changement.

[19]) Ici et dans la suite nous supposerons $Q_d \neq 0$ (on peut toujours trouver des exemples, où cette condition est satisfaite). Dans (9, 10) on a, bien entendu, ${}_0h_{d\lambda} = h_{d\lambda}$, et plus tard aussi ${}_0h_{ab} = h_{ab}$, ${}_0h^{ab} = h^{ab}$.

$$ {}_z\Gamma_{ba}{}^c = Q^{-z}\, {}_0h^{dc}({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda)(\underset{b}{\nabla_a U^\lambda})Q^z, $$

c'est-à-dire

$$ {}_z\Gamma_{ba}{}^c = {}_0\Gamma_{ba}{}^c - z\, h_{ab}\, h^{dc}\, Q_d. \qquad (9,\ 12a) $$

Les connexions aux coefficients ${}_z\Gamma_{ba}{}^c$ constituent donc un système définit par le vecteur Q_d et la connexion

$$ {}_0\Gamma_{ba}{}^c = h^{dc}\, h_{d\lambda}\, \underset{b}{\nabla_a U^\lambda}. \qquad (9,\ 12b) $$

En ne partant que des données du problème, on peut construire un système de connexions intrinsèques (9, 12a), d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome), induit par le faisceau (9, 11) de normales affines, à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$, d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome).

(10) Normale privilégiée, questions connexes.

On pourrait se demander, si à côté du faisceau (9, 11) il n'y a pas d'autres normales d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome). Nous répondrons affirmativement à cette question dans le dernier §. Or, il n'y a pas des normales privilégiées au sens propre du mot, c'est-à-dire privilégiées par la nature même du problème (que dans le cas métrique p. ex.). Mais d'autre part, on peut se servir des dates données de la question pour en choisir quelques prescriptions géométriques, qui caractérisent telle ou telle normale. C'est ce que nous ferons dans ce §: Introduisons à cet effet la notion des „directions conjuguées". Nous dirons que le vecteur w^ν est conjugué au vecteur v^ν par rapport au tenseur $T_{\mu\lambda}$, si $T_{\mu\lambda}v^\mu w^\lambda = 0$. Nous dirons même que les vecteurs w^ν et v^ν sont mutuellement conjugués, si à côté de l'équation que nous venons d'introduire est valable encore $T_{\mu\lambda}w^\mu v^\lambda = 0$. Cela posé, nous voulons chercher dans le faisceau (9, 11) une telle normale qui serait conjuguée — par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux — à n'importe quel vecteur tangent de l'hypersurface en jeu. Pour que ce fait ait lieu il est nécessaire et suffisant que soit satisfaite la relation

$$ U_c{}^\mu g_{\mu\lambda}{}^*{}_zN^\lambda = U_c{}^\mu g_{\mu\lambda}\, {}_zN^\lambda = 0 \text{ [20]} \qquad (10,\ 1a) $$

(et bien entendu, aussi (9, 9)) pour la normale cherchée ${}_zN^\nu$. Compte tenu de la deuxième des équations (6, 27), on peut écrire, au lieu de (10, 1a),

$$ h_{c\lambda}\, {}_zN^\lambda = 0. \qquad (10,\ 1b) $$

---

[20]) La première des équations (10, 1a) est toujours satisfaite, grâce à l'équation (6, 25). Or, il nous suffit de ne considérer que la deuxième des équations (10, 1a).

Le rapprochement des formules (10, 1b) et (9, 9b) nous fait voir, qu'il n'y a qu'une seule normale qui jouisse de la propriété prescrite, à savoir la normale ${}_0N^\nu$. On a donc

$$U_c{}^\mu\, g_{\mu\lambda}{}^*\, {}_0N^\lambda = U_c{}^\mu\, g_{\mu\lambda}\, {}_0N^\lambda = 0. \qquad (10,\ 2a)$$

La normale ${}_0N^\nu$ est donc conjuguée à n'importe quel vecteur tangent par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux. De plus, si l'on a affaire à une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)symétrique, on a (par définition) $h_{c\lambda} = h_{\lambda c}$, d'où il suit à cause de (10, 1b)

$${}_0N^\lambda\, h_{\lambda c} = 0. \qquad (10,\ 1c)$$

Compte tenu de la première des équations (6, 27), nous pouvons écrire dans ce cas particulier, au lieu de (10, 1c)

$${}_0N^\lambda\, g_{\lambda\mu}{}^*\, U_c{}^\mu = {}_0N^\lambda\, g_{\lambda\mu}\, U_c{}^\mu = 0. \qquad (10,\ 2b)$$

Le cas échéant n'importe quel vecteur tangent et ${}_0N^\nu$ sont mutuellement conjugués par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux.[21]) Examinons maintenant le cas d'une hypersurface holonome, plongée dans l'espace à connexion générale non (semi)symétrique. Dans ce cas $h_{\lambda a}$ est défini moyennant (6, 13a). Or, si l'on désigne par $h_{\lambda a}{}^0$ n'importe quelle solution de (6, 13a) et par Z_μ ($Z_c = U_c{}^\mu Z_\mu$) n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0), la solution la plus générale peut être écrite

$$h_{\lambda a} = h_{\lambda a}{}^0 + Z_a\, t_\lambda. \qquad (10,\ 3)$$

Or, si l'on désigne par l'indice ${}_0$, affecté en haut à droite les notions, déduites à l'aide de $h_{\lambda a}{}^0$, on tire de la première des équation (6, 19c)

$$Y_c = Y_c{}^0 + Z_c \qquad (10,\ 4a)$$

et par conséquent, grâce à (6, 21).

$$g_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda}{}^0 + Z_\lambda\, t_\mu. \qquad (10,\ 4b)$$

Nous chosirons le vecteur Z_c, jusqu'alors arbitraire, de manière que soit satisfaite l'équation (10, 2b) même dans ce cas non (semi)symétrique. Pour cela il est nécessaire et suffisant que soit

$$Z_c = -\, g_{\mu\lambda}{}^0\, U_c{}^\lambda\, {}_0N^\mu, \qquad (10,\ 5a)$$

ou bien, ce qui revient au même, grâce à l'équation analogue à (6, 27)

$$Z_c = -\, h_{\lambda c}{}^0\, {}_0N^\lambda. \qquad (10,\ 5b)$$

Ce choix du vecteur Z_c a donc pour conséquence que même dans le cas non (semi)symétrique n'importe quel vecteur tangent et ${}_0N^\nu$ sont mutuellement conjugués. Examinons maintenant l'influence

[21]) Ce résultat peut être déduit aussitôt de (10, 1a), si l'on tient compte de ce que dans ce cas spécial $g_{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu}$.

du choix du tenseur $h_{\lambda c}{}^0$ à la solution générale (10, 3)! Partons à ce but d'un autre tenseur $\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0$

$$\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0 = h_{\lambda c}{}^0 + P_c\, t_\lambda \qquad (10, 6)$$

qui est à son tour une solution particulière de (6, 13a), P_μ étant n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0) et $P_c = U_c{}^\mu\, P_\mu$. Désignons par l'indice 1, affecté en bas, les notions, déduites moyennant $\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0$! On a en premier lieu

$$\underset{1}{Z}_c = -\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0\, {}_0N^\lambda = Z_c - P_c, \qquad (10, 7a)$$

et par conséquent

$$\underset{1}{h}_{\lambda c} = \underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0 + \underset{1}{Z}_c\, t_\lambda = h_{\lambda c}{}^0 + (P_c + \underset{1}{Z}_c) t_\lambda = h_{\lambda c}{}^0 + Z_c\, t_\lambda = h_{\lambda c}. \quad (10, 7b)$$

Or le choix particulier du $h_{\lambda c}{}^0$ n'exerce aucune influence sur le tenseur $h_{\lambda c}$, lequel maintenant, grâce à la prescription (10, 2b) est complètement défini:

Parmi des normales du faisceau (9, 11), d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) il n' y a qu'une, ${}_0N^\nu$, qui est conjuguée — par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux — à n'importe quel vecteur tangent à $X_{n-1}^{(n)}$. Dans le cas holonome, les directions mentionnées sont mutuellement conjuguées, à condition que l'on ait fait un choix convenable (10, 3) et (10, 5b), unique possible, de $h_{\lambda c}$ dans le cas non (semi) symétrique.

Remarque. En fixant le tenseur $h_{\lambda c}$ de cette façon (ce que nous voulons supposer dans la suite), et le faisceau (6, 25) et le tenseur, caractérisé par (8, 10), sont bien déterminés même dans ce cas non (semi) symétrique holonome.

Nous finirons ce § en déduisant quelques conséquences du théorème mentionné pour le cas holonome. En tenant compte de (10, 1) et (10, 2), on déduit de (6, 1) et (9, 8a) (pour $z = 0$)

$${}_0D_a\, h_{ab} = U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, {}_0D_a\, g_{\mu\lambda} = U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, \nabla_a\, g_{\mu\lambda} = g_{abc}, \qquad (10, 8a)$$

d'où il suit à cause de (6, 26b)

$${}_0D_{[a}\, h_{b]c} = \tfrac{1}{2}\, U_a{}^\omega\, U_b{}^\mu (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\, U_c{}^\lambda\, t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\nu\, h_{\nu c}). \qquad (10, 8b)$$

Cette équation peut être simplifiée, si l'on tient compte de (6, 5)

$${}_0D_{[a}\, h_{b]c} = \tfrac{1}{2}\, (U_a{}^\omega\, U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\, t_\nu + 2\, {}_0T_{ab}{}^d\, h_{dc}) \qquad (10, 8c)$$

$$({}_0T_{ab}{}^d = {}_0\Gamma_{[ab]}{}^d).$$

On est retombé ainsi à l'équation de Mainardi-Codazzi.

(11) Normales équivalentes.

Dans ce §, nous aurons à considérer des grandeurs à l'indice z, en supposant partout $z = 0$ et en supprimant partout l'indice 0.

Si l'espace ambiant était à connexion métrique, on pourrait construire la direction orthogonale à l'hypersurface en jeu sans ayant égard à la connexion de l'espace ambiant. (Cette direction est d'ordre 1 dans le cas holonome, d'ordre 0 dans le cas contraire). Cette direction reste invariante par rapport à toutes les connexions équivalentes du point de vue métrique (c'est-à-dire par rapport à toutes les connexions qui se déduisent des métriques quadratiques qui conservent — le long de l'hypersurface en jeu — l'orthogonalité au plan tangent de $X_{n-1}^{(n)}$). Dans notre cas général, où l'espace ambiant est à connexion affine générale, le problème analogue peut être formulé de la manière suivante: 1. En premier lieu, on doit trouver des connexions équivalentes du point de vue affine et de plus 2. on a à examiner des éléments d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome) par rapport aux connexions équivalentes, mentionnées sub 1).

Le premier problème peut être résolu immédiatement: Les connexions équivalentes du point de vue affine doivent conserver le parallélisme (et des autoparallèles). La transformation la plus générale de la connexion donnée, aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu}$, est manifestement

$$ {}^{*}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} + V_{\lambda\mu}{}^{\nu}, \tag{11, 1} $$

où $V_{\lambda\lambda}{}^{\nu}$ est n'importe quel tenseur (avec $p_e = p_i = 0$). La condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation conserve le parallélisme d'un champ vectoriel v^{ν} le long d'une direction définie par dx^{ν} est manifestement

$$ v^{\lambda}\, v^{[\alpha}\, V_{\lambda\mu}{}^{\nu]}\, dx^{\mu} = 0. $$ [22])

Cette équation doit être satisfaite pour n'importe quel v^{ν} et n'importe quelle direction dx^{ν} et par conséquent on a nécessairement

$$ \delta_{(\beta}^{[\alpha}\, V_{\lambda)\mu}{}^{\nu]} = 0. $$

Il s'ensuit

$$ n V_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \delta_{\lambda}^{\nu}\, V_{\alpha\mu}{}^{\alpha}. $$

On obtient ainsi la transformation la plus générale qui conserve le parallélisme (et des autoparallèles) sous la forme

$$ {}^{1}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \delta_{\lambda}^{\nu}\, q_{\mu} \tag{11, 2} $$

q_{μ} étant un vecteur arbitraire (avec $p_e = p_i = 0$). (Cette transfor-

[22]) Nous suivons ici la démonstration de M. L. P. Eisenhart (Non-riemannian geometry, Amer. Math. Society Colloquium Publ. VIII, p. 29).

mation ne conserve pas en général la symétrie de la connexion.) Chaque transformation de cette forme sera dite „transformation affine (d'ordre r, si le vecteur q_μ est d'ordre r)". Des connexions, liées par une transformation affine seront dites „équivalentes du point de vue affine.

La première partie du problème résolue, nous voulons examiner le reste du problème énoncé. En désignant par l'indice 1, affecté en haut à gauche, des expressions, calculées moyennant ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, nous obtenons en premier lieu

$$ {}^1t_\lambda = t_\lambda, \quad {}^1h_{ab} = h_{ab}, \quad {}^1h^{ab} = h^{ab}. \tag{11, 3a}$$

D'autre part, si l'on tient compte de la définition de $h_{a\lambda}$

$$h_{a\lambda} = \nabla_a t_\lambda = \partial_a t_\lambda + U_a{}^\mu \left(\frac{2}{n+1} \Gamma_{\alpha\mu}{}^\alpha t_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu t_\nu \right)$$

on en déduit, grâce à (11, 2)

$$ {}^1h_{a\lambda} = h_{a\lambda} + \frac{n-1}{n+1} q_a t_\lambda, \quad (q_a = q_\mu U_a{}^\mu). \tag{11, 3b}$$

Cela étant, cherchons à exprimer explicitement la solution ${}^1N^\nu$ du système

$$ {}^1h_{a\lambda} {}^1N^\lambda = 0, \quad {}^1N^\lambda t_\lambda = 1. \tag{11, 4a}$$

Une méthode analogue à celle, employée au § 9 nous donne

$$ {}^1N^\nu = -\frac{h^{ab}}{n-1} ({}^1\nabla_a U^\lambda_b) (\delta_\lambda^\nu - h^{dc}\, {}^1h_{d\lambda}\, U_c{}^\nu).^{23)} \tag{11, 4b}$$

On peut trouver même que (11, 4b) est l'unique solution possible de (11, 4a). ${}^1N^\nu$ est à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Dorénavant, nous appellerons „normale affine" chaque grandeur M^ν, ayant cette caractéristique et normalisée par $M^\nu t_\nu = 1$. Les normales ${}^1N^\nu$ et N^ν (celle-ci étant définie par (9, 8b) pour $z = 0$) sont liées par l'équation que l'on peut déduire facilement de (11, 4) (a, ou b)

$$ {}^1N^\nu = N^\nu - \frac{n-1}{n+1} U_c{}^\nu h^{dc} q_d. \tag{11, 5}$$

En partant de la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, équivalente à la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ du point de vue affine, nous avons construit une seule normale ${}^1N^\nu$, satisfaisant à (11, 4). Elle est liée à N^ν par (11, 5). Partons maintenant d'une normale ${}^1N^\nu$, donnée à priori, et cherchons une telle connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, équivalente à $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ du point de vue affine, que

[23]) ${}^1\nabla_a = U_a{}^\mu\, {}^1\nabla_\mu$ et ${}^1\nabla_\mu$ est le symbole de la dérivée covariante par rapport à la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$.

cette normale ${}^1N^\nu$, donnée d'avance, résulte aussi comme solution unique du système (11, 4a), où, bien entendu, ${}^1h_{a\lambda}$ n'est pas encore connue! Les normales ${}^1N^\nu$, N^ν étant connues, telle est aussi leur différence

$$P^\nu = {}^1N^\nu - N^\nu \tag{11, 6a}$$

qui, grâce à la condition normalisante, est situé dans $X_{n-1}^{(n)}$:

$$P^\nu = P^c U_c^{\nu}. \tag{11, 6b}$$

Le rapprochement des formules (11, 5) et (11, 6) nous donne

$$P^\nu = -\frac{n-1}{n+1}\, U_c^{\nu}\, h^{dc} q_d, \tag{11, 7a}$$

ou bien

$$P^a = -\frac{n-1}{n+1}\, h^{da}\, q_d. \tag{11, 7b}$$

Or, si l'on porte dans (11, 2) n'importe quelle solution q_μ du système

$$q_\mu U_a^{\mu} = -\frac{n+1}{n-1}\, P^b\, h_{ab}, \tag{11, 8}$$

la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ jouit des propriétés énoncées plus haut. De plus, si la normale ${}^1N^\nu$, donnée d'avance est d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome), P^ν et par conséquent aussi q_μ, défini par (11, 8), ont le même ordre 3 (2) au plus:

Étant donnée une normale affine ${}^1N^\nu$ d'ordre 3 (2), une transformation affine d'ordre 3 (2) au plus nous mène aux connexions[24]) correspondantes, equivalentes du point de vue affine à $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$, qui satisfont à (11, 4).

Cela étant, imaginons données deux normales ${}^1N^\nu$ et ${}^2N^\nu$ d'ordre 3 (2) et désignons par

$$R^c U_c^{\nu} = R^\nu = {}^2N^\nu - {}^1N^\nu$$

leur différence dans $X_{n-1}^{(n)}$, qui est connue et d'ordre 3 (2) au plus. Un calcul analogue à celui que nous venons d'employer nous fait voir que la transformation

$${}^2\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = {}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \delta_\lambda^{\nu} r_\mu \tag{11, 9a}$$

nous mène de ${}^1N^\nu$ à ${}^2N^\nu$ à condition que r_μ soit n'importe quelle solution du système

$$r_\mu U_a^{\mu} = -\frac{n+1}{n-1}\, R^b h_{ab}. \tag{11, 9b}$$

${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ et ${}^2\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ sont donc deux connexions équivalentes du point de vue affine et la transformation (11, 9a) est d'ordre 3 (2) au plus.

[24]) A côté de ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ toutes les connexions ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + (*)\ \delta_\lambda^{\nu}\, t_\mu$ jouissent des propriétés énoncées en haut.